

CHAPITRE IV :

SYNTHESE DES CONTROLEURS

IV.1. INTRODUCTION	129
IV.1.1. Théorie classique : approche fréquentielle	129
IV.1.1.1. Diagrammes de Bode	129
IV.1.1.2. Diagramme de Nyquist	129
IV.1.1.3. Diagramme de Black	129
IV.1.2. Théorie moderne : approche d'état	129
IV.1.2.1. Concept d'état	130
IV.1.2.2. Commandabilité (ou Gouvernabilité)	130
IV.1.2.2.1. Définition	130
IV.1.2.2.2. Caractérisation	131
IV.1.2.2.3. Remarque	131
IV.1.2.3. Observabilité	132
IV.1.2.3.1. Définition	132
IV.1.2.3.2. Caractérisation	132
IV.1.2.3.3. Remarque	133
IV.2. CONTROLEURS PID	134
IV.2.1. Introduction	134
IV.2.2. Formulations	134
IV.2.2.1. En variables continues	134
IV.2.2.2. En variables échantillonnées	135
IV.2.3. Réglage d'un PID	136
IV.2.3.1. Réponse indicielle	137
IV.2.3.2. Pompage limite	141
IV.2.3.3. Méthode de Takahashi	144
IV.2.3.4. Méthode ATV ou test du relais	144
IV.2.3.5. Réglage paramétrique	145
IV.2.3.5.1. Exemple 1 : Débit amont - Débit aval	145
IV.2.3.5.2. Exemple 2 : Ouverture - Niveau amont	147
IV.2.3.5.3. Détermination des coefficients du PID	149
IV.3. PREDICTEUR DE SMITH	156
IV.3.1. Introduction	156

IV.3.2. Principe.....	156
IV.4. PLACEMENT DE POLE (CACG)	158
IV.4.1. Introduction.....	158
IV.4.2. Module de commande en boucle ouverte	158
IV.4.3. Module de commande en boucle fermée	159
IV.5. COMMANDE OPTIMALE.....	160
IV.5.1. Introduction.....	160
IV.5.2. Synthèse du contrôleur.....	162
IV.5.2.1. Modèle	162
IV.5.2.2. Critère.....	164
IV.5.2.3. Calcul des gains	165
IV.5.2.3.1. Principe de Bellman	165
IV.5.2.3.2. Calcul de S par récurrence.....	165
IV.5.2.3.3. Conclusion.....	168
IV.5.2.4. Solution asymptotique	168
IV.5.2.5. Conclusion	169
IV.5.3. Construction d'un observateur d'état.....	170
IV.5.3.1. Principes	170
IV.5.3.2. Propriétés.....	171
IV.5.3.3. Influence de perturbations inconnues	172
IV.5.3.4. Observation de prélèvements imprévus.....	172
IV.5.3.5. Convergence de l'observateur global.....	174
IV.5.3.6. Influence des non-linéarités	175
IV.5.4. Construction d'un observateur réduit	176
IV.5.4.1. Principes	176
IV.5.4.2. Synthèse de l'observateur réduit	177
IV.5.4.3. Convergence de l'observateur réduit.....	179
IV.5.5. Conclusion.....	180

IV.1. INTRODUCTION

IV.1.1. Théorie classique : approche fréquentielle

Cette théorie est basée sur des modèles (et contrôleurs) écrits sous forme de fonctions de transfert continues $H(s)$ ou $H(p)$ (appelées également transmittances, s ou p étant la variable de Laplace) et d'analyse des réponses fréquentielles de ces fonctions de transfert. L'analyse fréquentielle d'une fonction de transfert $H(s)$ ou $H(p)$ est basée sur l'étude de la fonction complexe $H(jw)$, où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, et w une fréquence d'excitation donnée ($w \in [0 \infty[$). Le module de cette fonction complexe est appelé gain en fréquence, noté $a(w)$, l'argument est appelé déphasage, noté $\varphi(w)$. Ces différentes fonctions sont étudiées graphiquement par différents diagrammes : diagramme de Bode, diagramme de Nyquist, diagramme de Black, etc.

IV.1.1.1. Diagrammes de Bode

Représentent $a(w)$ et $\varphi(w)$ sur 2 diagrammes séparés. La fréquence w est en abscisse en échelle logarithmique, le gain en fréquence a (en décibels, $a_{dB} = 20 \log_{10} a$) et la phase φ (en degré ou en radian) sont en ordonnées.

IV.1.1.2. Diagramme de Nyquist

Représente $\text{Im}(H(jw)) = f(\text{Re}(H(jw)))$. Re est en abscisse, Im est en ordonnée.

IV.1.1.3. Diagramme de Black

Représente $a(w) = f(\varphi(w))$. φ est en abscisse (en degré ou en radian), a est en ordonnée (en décibels).

Cette analyse fréquentielle permet d'aborder les compromis fondamentaux de l'automatique :

- compromis stabilité - précision,
- compromis performances - sollicitation des actionneurs,
- compromis rapidité de réponse - amplitude des transitoires
- compromis performance - robustesse,
- compromis performance - sensibilité aux bruits.

Différents exemples de cette approche classique fréquentielle seront présentés dans les chapitres qui suivent, avec en particulier la méthode incontournable du PID.

IV.1.2. Théorie moderne : approche d'état

Cette théorie est basée sur des modèles représentés dans l'espace d'état, à partir des variables d'état du système. Cette théorie s'accompagne de nombreux développements théoriques de base : commandabilité, observabilité, stabilité, retour d'état, reconSTRUCTEURS d'état, filtrage, commande optimale, etc.

IV.1.2.1. Concept d'état

Un vecteur x peut être proposé pour représenter l'état d'un système, s'il lui correspond un système d'équations de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (\text{en continue, ou } x^+ = f(x, u, t) \text{ en discret})$$

$$y = h(x, u, t)$$

où u et y sont les entrées et sorties du système. On appelle ordre du système, la dimension du vecteur d'état x (souvent noté n).

- Pour un système mécanique, l'état est l'ensemble des positions et vitesses relatives à chaque degré de liberté (ou toute combinaison équivalente).
- Pour un réseau électrique, l'état est défini par l'intensité dans chaque résistance et la tension aux bornes de chaque capacité (ou toute combinaison équivalente).
- Un système hydraulique à surface libre, est décrit par les équations de Saint-Venant, équations aux dérivées partielles. Un tel système, appelé système distribué, ne peut pas être écrit sous la forme ci-dessus. Par contre, la discrétisation numérique des équations de Saint-Venant conduit à un système dit localisé, de la forme ci-dessus. L'état peut alors être défini par les cotes et les débits en chaque section de discrétisation.

Le cas particulier où les fonctions f et h sont linéaires et indépendantes de la variable t , est particulièrement intéressant et se prête à de nombreux développements théoriques. La représentation dans l'espace d'état devient alors :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (\text{en continue, ou } x^+ = Ax + Bu \text{ en discret})$$

$$y = Cx + Du$$

Dans la plupart des cas (procédés physiques réels) on a $D = 0$ (il n'y a pas d'influence instantanée de la commande u sur la sortie y).

IV.1.2.2. Commandabilité (ou Gouvernabilité)

IV.1.2.2.1. Définition

Un système discret (ou échantillonné) est commandable lorsqu'il est possible d'intervenir sur son entrée u de manière à lui imposer un état final $x(k)$ quelconque à partir d'un état initial $x(0)$ en un nombre fini k de périodes d'échantillonnage.

Remarque :

La même notion est définie pour les systèmes continus. Dans ce cas le transfert doit se faire pendant un temps fini $t_1 - t_0$.

La notion de commandabilité revêt une grande importance dans la théorie de l'espace d'état. En effet, les méthodes moderne du réglage d'état (ex. : la commande optimale) ne sont applicables que lorsque le système est commandable.

IV.1.2.2.2. Caractérisation

Soit un système linéaire d'ordre n , dont la commande unique (système monovariable, i.e. u scalaire) n'est soumise à aucune contrainte :

$$x^+ = Ax + Bu, \text{ encore noté } x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Si l'état initial est $x(0)$, l'état $x(k)$ à l'instant kT est donné par :

$$x(k) - A^k x(0) = A^{k-1} B u(0) + A^{k-2} B u(1) + \dots + A B u(k-2) + B u(k-1)$$

Ce système de n équations (autant que de composantes pour le vecteur d'état x) à k inconnues $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(k-1)$ n'a pas de solution dans le cas général, i.e. quel que soit l'état final $x(k)$, si $k < n$. Par contre, lorsque $k = n$, il est possible de résoudre les équations :

$$\begin{bmatrix} A^{n-1} B & A^{n-2} B & \dots & A B & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-2) \\ u(n-1) \end{pmatrix} = x(n) - A^n x(0)$$

à condition que les n colonnes $A^{n-1} B$, $A^{n-2} B$, ..., $A B$, B de la matrice de commandabilité (ou gouvernabilité) Ω soient linéairement indépendantes, c'est à dire si la matrice Ω est de rang n . Il existe alors une séquence de commande (unique) $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(n-1)$, qui amène le système d'un état initial $x(0)$ quelconque, à l'état final $x(n)$ désiré.

IV.1.2.2.3. Remarque

Dans le cas multivariable (u vecteur), les résultats ci-dessus sont conservés. Cependant la séquence $u(i)$ n'est plus unique. La matrice Ω n'est plus carré, mais rectangle. L'indice de commandabilité j est le plus petit indice k tel que la matrice Ω correspondante soit de rang n . On a $n/m \leq j \leq n$, où m est la dimension du vecteur de commande u .

On a donc trouvé une séquence de commande $u(i)$ permettant de placer l'état du système dans une position quelconque donnée, en temps minimum. Le problème est que les commandes $u(i)$ correspondantes peuvent être très fortes, voire impossibles à réaliser physiquement. Cette commande n'est donc en général pas satisfaisante. Si par contre on s'autorise à avoir une commande moins rapide (en temps non minimum), il existe alors une infinité de solutions. Différents contrôleurs peuvent alors être obtenus suivant la manière de choisir une solution parmi cette infinité de solutions.

Une méthode bien connue des automaticiens est la commande optimale. Dans cette méthode, on se propose de choisir la solution qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_0^N x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u$$

ou de manière plus générale :

$$J = \sum_0^N (x-x_c)^T \cdot Q \cdot (x-x_c) + (u-u_c)^T \cdot R \cdot (u-u_c)$$

où N est l'horizon d'optimisation.

La commande u^* ainsi obtenue est appelée commande optimale LQR (Linear Quadratic Regulator).

IV.1.2.3. Observabilité

IV.1.2.3.1. Définition

Un système échantillonné (ou discret) est observable lorsqu'il est possible de déterminer l'état initial $x(0)$ en mesurant sa sortie y pendant un nombre fini k de périodes d'échantillonnage.

Remarque : Cette notion est très importante dans la théorie de l'espace d'état. Pour pouvoir construire des observateurs, il est indispensable que le système soit observable.

IV.1.2.3.2. Caractérisation

Si la sortie unique y (système monovariable, i.e. y scalaire) du système linéaire d'ordre n ci-dessus est donnée par :

$y = Cx$, alors :

$$y(0) = C x(0)$$

$$y(1) = C x(1) = CA x(0) + CB u(0)$$

$$y(2) = C x(2) = CA^2 x(0) + CAB u(0) + CB u(1)$$

...

$$y(k-1) = C x(k-1) = CA^{k-1} x(0) + CA^{k-2} B u(0) + \dots + CAB u(k-3) + CB u(k-2)$$

Soit sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{pmatrix} = \Psi x(0) + \Xi \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Psi = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{k-2} \\ CA^{k-1} \end{pmatrix}$$

Si Ψ est inversible (c'est à dire $k = n$ et $\text{rang}(\Psi) = n$), alors il est possible de reconstituer le vecteur d'état initial $x(0)$:

$$x(0) = \Psi^{-1} \left[\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{pmatrix} - \Xi \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix} \right]$$

IV.1.2.3.3. Remarque

Ce résultat est conservé pour un système multivariable (i.e. y vecteur). La matrice Ψ est formée de la même manière que dans le cas monovariable détaillé ci-dessus. C'est une matrice rectangulaire (et non plus carrée). Cependant il existe dans ce cas plusieurs choix de composantes de sorties permettant de reconstituer l'état initial $x(0)$. La condition nécessaire et suffisante d'observabilité est que la matrice Ψ soit de rang n .

On appelle indice d'observabilité l le nombre minimum d'observations tel que Ψ soit de rang n (i.e. permette de reconstruire $x(0)$). On démontre que l'on a :

$n/p \leq l \leq n$, où p est la dimension du vecteur de sortie y .

Afin d'appliquer la commande optimale (qui est une commande par retour d'état), on a besoin de connaître le vecteur d'état x . On peut définir un observateur d'état de la manière suivante :

$$\hat{x}^+ = A.\hat{x} + B.u + L.(y - \hat{y})$$

On démontre que si le système est observable, il est possible de choisir une matrice L assurant la stabilité et la convergence de cet observateur. C'est à dire que \hat{x} converge vers x en régime stabilisé, sans perturbation.

IV.2. CONTROLEURS PID

IV.2.1. Introduction

Un ouvrage entier (Aström et al. 1993) vient d'être consacré aux contrôleurs de type PID, technique bien éprouvée pendant plus d'un demi siècle de pratique. Ceci prouve sa constante modernité, malgré l'avènement de nouvelles techniques sophistiquées. Les contrôleurs de type PID sont bien adaptés pour contrôler plus de 90 % des procédés industriels, en particulier dans les cas suivants :

- **Contrôleur PI** : pour la plupart des procédés dont la dynamique est essentiellement du 1^{er} ordre. Cette dynamique peut être étudiée soit à partir de la réponse indicielle du système, soit à partir de sa réponse fréquentielle dans le diagramme de Nyquist (courbe située dans les 1^{er} et 4^{ème} quadrants). Même s'il existe d'autres dynamiques d'ordre plus élevé, le terme intégral élimine les écarts statiques et le terme proportionnel peut permettre de contrôler les phases transitoires de manière satisfaisante.
- **Contrôleur PID** : pour la plupart des procédés dont la dynamique est essentiellement du 2^{ème} ordre.

Le problème devient plus complexe et requiert des méthodes de commande plus complexes dans les cas suivants :

- dynamiques dominantes d'ordre supérieur à 2,
- systèmes à retard,
- systèmes avec des modes oscillants,
- etc.

La commande d'un système fortement retardé peut, par exemple, être très sensiblement améliorée par l'utilisation d'un prédicteur de Smith ou d'une méthode prédictive. Les systèmes instables d'ordre supérieur à 2 ne peuvent pas être commandés par un PID. Une méthode par placement de pôle pourra par contre être utilisée.

IV.2.2. Formulations

De nombreuses structures et formulations différentes existent pour les contrôleurs PID, que ce soit en variables continues (PID analogique) ou en variables discrètes ou échantillonnées (PID numérique).

IV.2.2.1. En variables continues

En variables continues la formulation classique de la fonction de transfert d'un PID (dite parfois structure parallèle par opposition à la structure série) s'écrit :

$$FT(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

où p est la variable de Laplace,

K est le gain proportionnel,

T_i est le temps d'action intégral,

T_d est le temps d'action dérivé.

Dans la pratique, un filtre doit toujours être adjoint au terme dérivé. Ce filtre permet d'atténuer l'impact de perturbations de fréquence élevée sur la commande. La fonction de transfert du PID + filtre devient alors :

$$FT(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right)$$

avec le paramètre N du filtre de l'ordre de 5 à 10.

Si l'on traite le cas d'une poursuite de consigne variable, on peut envisager différentes structures de PID, suivant la manière d'injecter la consigne dans le contrôleur. En général, le terme dérivé ne s'applique pas sur la consigne y^* , mais seulement sur la sortie mesurée y . Par contre, les termes proportionnel et intégral s'appliquent sur les deux termes y^* et y , ou plus précisément sur l'écart $e = y^* - y$. On a alors :

$$u = K \left(\left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (y^* - y) - \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} y \right)$$

On peut également envisager de ne pas faire intervenir le terme proportionnel sur la consigne y^* :

$$u = K \left(\frac{1}{T_i p} (y^* - y) - \left(1 + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right) y \right)$$

Dans le cas d'une consigne y^* constante, ces 2 formes sont équivalentes.

Remarque : il est obligatoire d'appliquer le terme intégral sur l'écart $e = y^* - y$. En effet, c'est ce terme intégral qui permet d'annuler l'écart de réglage en régime permanent (écart statique).

IV.2.2.2. En variables échantillonnées

Un PID numérique (variables échantillonnées) est obtenu par discrétisation du PID analogique correspondant (variables continues). Il peut s'écrire sous la forme usuelle suivante :

$$u(k) = P(k) + I(k) + D(k)$$

où l'entier k représente l'instant $t_k = k \cdot \Delta t$ (Δt est la période d'échantillonnage).

- Le terme $P(k)$ correspondant à l'action proportionnelle est donné par :

$$P(k) = K \cdot (\beta y^*(k) - y(k))$$

où $\beta = 1$ ou 0 , suivant que le terme proportionnel intervient ou non sur la consigne.

- Le terme $I(k)$ correspondant à l'action intégrale est donné par l'équation récurrente :

$$I(k+1) = I(k) + \frac{K \cdot \Delta t}{T_i} (y^*(k) - y(k)) = I(k) + \frac{K \cdot \Delta t}{T_i} e(k)$$

La formulation retenue pour le terme I provient d'une discrétisation du terme continu correspondant, avec un schéma de différence avant (Forward difference). Il est possible de proposer d'autres formulations provenant de schémas de discrétisation différents :

$$I(k+1) = I(k) + \frac{K \cdot \Delta t}{T_i} e(k+1) \quad \text{différence arrière (Backward difference)}$$

$$I(k+1) = I(k) + \frac{K \cdot \Delta t}{T_i} \frac{e(k+1) + e(k)}{2} \quad \text{approximation de Tustin}$$

- Le terme $D(k)$ correspondant à l'action dérivée est donné par :

$$D(k) = - \frac{K \cdot T_d}{\Delta t} (y(k) - y(k-1))$$

où $e(k) = y^*(k) - y(k)$, y^* étant la consigne associée à la sortie y .

De même qu'en continu, un filtre doit être adjoint au terme dérivé. La discrétisation du terme continu correspondant (en différence arrière ou backward difference), conduit à :

$$D(k) = \frac{T_d}{T_d + N \cdot \Delta t} D(k-1) - \frac{K \cdot T_d \cdot N}{T_d + N \cdot \Delta t} (y(k) - y(k-1))$$

Il existe d'autres variantes de discrétisation, analogues à celles présentées pour le terme intégral (différence avant ou Forward difference et approximation de Tustin). La plus utilisée semble être celle présentée ci-dessus (en différence arrière ou backward difference).

La fonction de transfert échantillonnée du PID + filtre peut donc s'écrire :

$$FT(z^1) = K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} \frac{1}{1 - z^1} + \frac{\frac{N \cdot T_d}{T_d + N \cdot \Delta t} (1 - z^1)}{1 - \frac{T_d}{T_d + N \cdot \Delta t} z^1} \right)$$

Remarque : si l'on supprime le filtre sur le terme dérivé ($N \rightarrow \infty$), le terme correspondant dans la fonction de transfert devient: $K \frac{T_d}{\Delta t} (1 - z^1)$.

IV.2.3. Réglage d'un PID

Le réglage d'un PID consiste à déterminer les paramètres K , T_i et T_d définis ci-dessus. Différentes méthodes de réglage sont disponibles, soit paramétriques, à partir de la connaissance des paramètres de la fonction de transfert du procédé, soit non-paramétriques, à partir de la réponse temporelle ou fréquentielle du procédé.

Une méthode usuelle de réglage non-paramétrique est celle dite de Ziegler-Nichols (1942), sous deux variantes possibles :

- réponse indicielle,
- pompage limite.

Une méthode plus récente et spécifique aux systèmes échantillonnés a été développée par Takahashi (Larminat et al. 1977).

IV.2.3.1. Réponse indicielle

On caractérise la réponse indicielle (réponse à un échelon) par deux paramètres a et L :

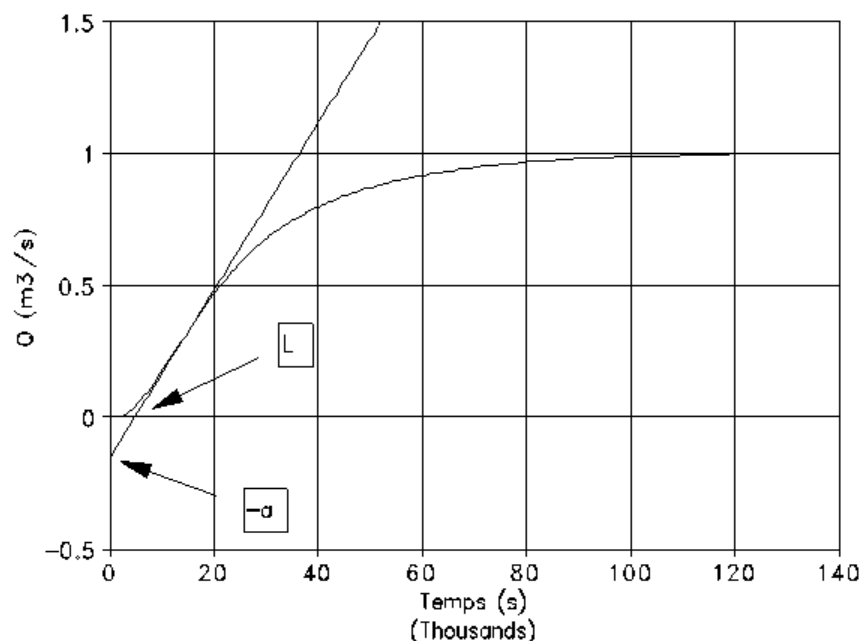


Figure 48. Signature d'un procédé

Il est alors possible d'approcher la fonction de transfert du procédé par une fonction de transfert à deux paramètres (K est le gain, éventuellement différent de 1) :

$$FT_1(p) = \frac{K}{1 + \frac{K \cdot L}{a} \cdot p} e^{-L \cdot p}$$

Remarque : un simple contrôleur PI ou PID permet d'obtenir d'excellentes performances, surtout lorsque le rapport $\frac{a}{K}$ est petit (inférieur à 0.1 ou à 0.2).

La règle de Ziegler-Nichols suggère de choisir les paramètres des contrôleurs P, PI ou PID de la manière suivante :

	K	T_i	T_d
--	-----	-------	-------

P	1/a		
PI	0.9/a	3.3 L	
PID	1.2/a	2 L	0.5 L

Ces paramètres constituent un premier ordre de grandeur à partir duquel on peut effectuer les ajustements nécessaires, sur site ou en simulation.

Considérons un canal d'irrigation ayant les caractéristiques suivantes :

- section trapézoïdale ($l = 5$ m, $f = 1$, $h = 2$ m),
- pente = 0.0002,
- Strickler $K = 25$,
- pas de pertes par infiltrations,
- 5 biefs de longueur 1000 m,
- 4 régulateurs en travers constitués chacun de 1 vanne de largeur 3 m, ouverte de 50 cm, et de coefficient de débit $C_d = 0.6$,
- 4 prises de type pompage, situées à 50 m à l'amont de chaque régulateur,
- une condition limite à l'aval de type loie normale y_n .

La ligne d'eau en régime permanent, pour un débit de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ est :

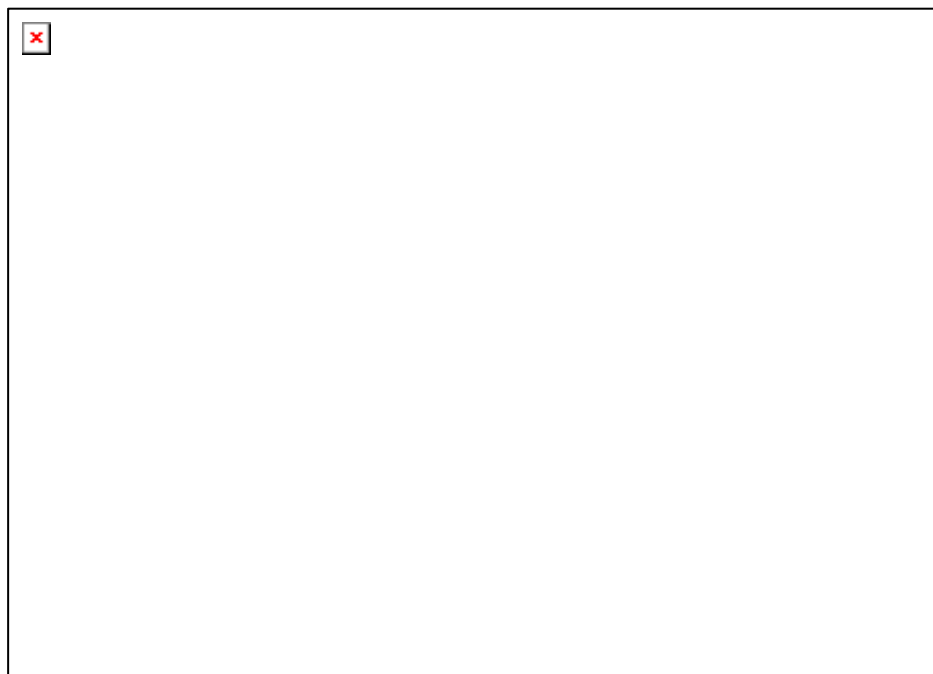


Figure 49. Ligne d'eau sur le canal

L'étude de la réponse indicielle entre le débit amont et le débit aval donne (Cf. figure 48) :

$$a = 0.15 \text{ m}^3/\text{s}$$

$L = 4740 \text{ s}$

On a alors (Ziegler-Nichols) :

	K	T_i	T_d
P	6.67		
PI	6	15642	
PID	8	9480	2370

On peut tester le comportement de chacun de ces 3 contrôleurs, ainsi que celui avec filtre sur le terme dérivé (avec $N = 5$), sur le modèle de simulation SIC, développé par le CEMAGREF. On teste la réponse des 4 contrôleurs à un prélèvement imprévu de $-0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ à la prise (3950 m) située à l'amont du dernier régulateur en travers (4000 m).

1^{er} cas : contrôleur P

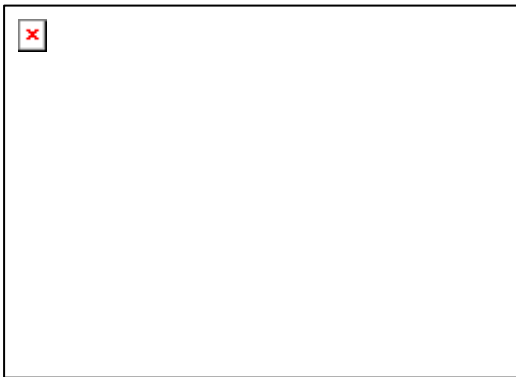


Figure 50. Commande en débit amont

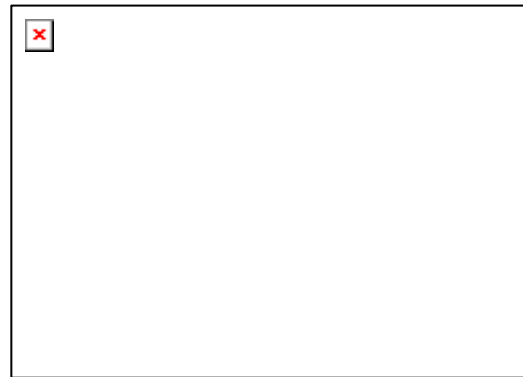


Figure 51. Sortie en débit aval

2^{ème} cas : contrôleur PI



Figure 52. Commande en débit amont



Figure 53. Sortie en débit aval

3ème cas : contrôleur PID



Figure 54. Commande en débit amont



Figure 55. Sortie en débit aval

4ème cas : contrôleur PID + Filtre sur le terme dérivé



Figure 56. Commande en débit amont



Figure 57. Sortie en débit aval

On observe dans cet exemple, que le contrôleur le plus rapide, et semble-t-il le mieux adapté, est le contrôleur PID. Cependant, dans les quatre cas, la performance du contrôleur n'est pas excellente. Ceci est dû en partie au retard important qui existe entre l'entrée et la sortie. La réponse du contrôleur peut éventuellement être améliorée par un tâtonnement autour des paramètres obtenus par la méthode de Ziegler-Nichols. Nous verrons ci-dessous que la variante du "pompage limite" de Ziegler-Nichols donne de meilleurs résultats, dans cet exemple en tout cas.

On vérifie la propriété bien connue selon laquelle un écart statique en régime permanent subsiste en l'absence d'un terme intégral (Cf. figure 51).

Le filtre sur le terme dérivé ralentit le contrôleur, mais le rend moins sensible aux perturbations de fréquence élevée.

Si le contrôleur doit garantir de bonnes performances dans un large domaine de fonctionnement, on peut envisager de caler différents contrôleurs PID, pour les différentes gammes de fonctionnement. Cette approche est particulièrement justifiée dans le cas des canaux d'irrigation, vu les fortes non-linéarités qui existent sur ces systèmes. Cette étude est détaillée par Chevereau (1991).

IV.2.3.2. Pompage limite

On boucle le procédé avec un contrôleur purement proportionnel, de gain K . En augmentant progressivement ce gain K , on obtient un gain limite K_u pour lequel le procédé est en limite de stabilité, et oscille périodiquement. La période de ces oscillations est notée T_u . Alors, la règle de Ziegler-Nichols donne les coefficients suivants (Larminat 1993) :

	K	T_i	T_d
P	$0.5 K_u$		
PI	$0.45 K_u$	$0.83 T_u$	
PID	$0.6 K_u$	$0.5 T_u$	$0.125 T_u$

Par ailleurs, il est couramment admis que pour un PID, la période d'échantillonnage de commande du procédé doit vérifier :

$$0.01 T_u < \Delta t < 0.05 T_u$$

D'autres auteurs trouvent la réponse obtenue trop oscillante et préfèrent (Flaus 1994) :

PID (léger dépassement)	$0.33 K_u$	$0.5 T_u$	$0.33 T_u$
PID (sans dépassement)	$0.2 K_u$	$0.5 T_u$	$0.33 T_u$

Pour le canal décrit ci-dessus, on trouve $K_u = 9.1$. En effet :

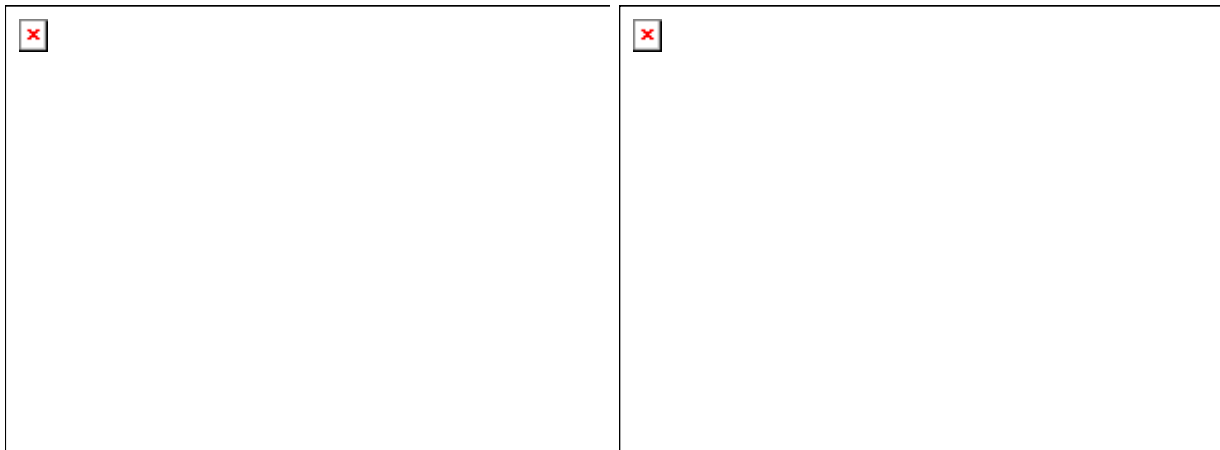


Figure 58. $K = 8.7$, Bouclage stable

Figure 59. $K = 9.1$, Pompage limite

Pour $K = 8.7$, le système en boucle fermée est stable, pour $K = 9.1$, le système en boucle fermée est en limite de stabilité, pour $K = 9.5$, le système en boucle fermée est instable

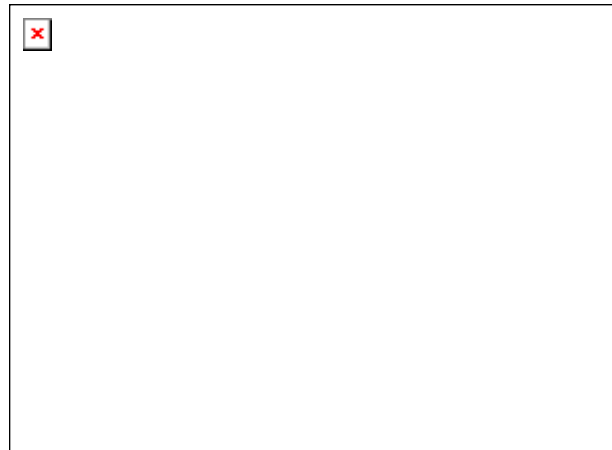


Figure 60. $K = 9.5$, Bouclage instable

On retient donc $K_u = 9.1$. On trouve alors $T_u = 6 \text{ h} = 21600 \text{ s}$.

La règle du pompage limite de Ziegler-Nichols suggère donc les coefficients :

	K	T_i	T_d
P	4.55		
PI	4.095	17928	
PID	5.46	10800	2700

Par ailleurs, la période d'échantillonnage de commande du procédé doit vérifier :

$$3 \text{ mn } 36 \text{ s} < \Delta t < 18 \text{ mn}$$

Ce calcul valide les simulations précédentes effectuées avec un pas de temps $\Delta t = 10 \text{ mn}$.

On remarque que les coefficients obtenus avec cette méthode du pompage limite de Ziegler-Nichols sont légèrement différents de (mais du même ordre de grandeur que) ceux obtenus avec la méthode de la réponse indicielle de Ziegler-Nichols.

Remarque : lorsque l'on boucle le procédé, avec un contrôleur proportionnel de gain K supérieur au gain limite K_u , le système en boucle fermée est instable et doit donc "exploser". Cependant, lorsque cette étude est effectuée sur modèle de simulation, en l'absence de perturbation (ou uniquement en présence de faibles perturbations numériques), cette explosion peut être très lente, voire impossible à obtenir. On doit alors déclencher le processus par une perturbation externe explicite. C'est ce que nous avons fait en prélevant un débit de $-0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ pendant une durée de 10 minutes à la dernière prise aval (située 50 m à l'amont du dernier régulateur aval).

1^{er} cas : contrôleur P

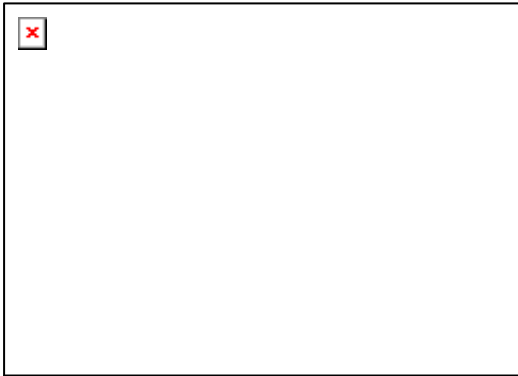


Figure 61. Commande en débit amont

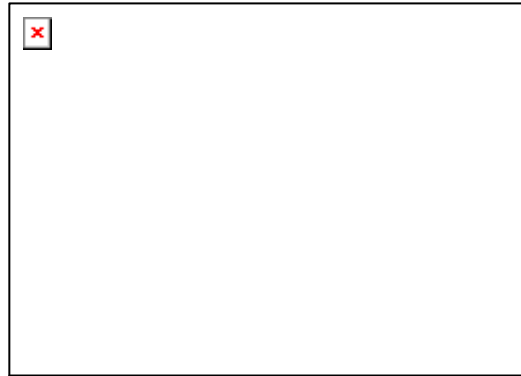


Figure 62. Sortie en débit aval

2^{ème} cas : contrôleur PI

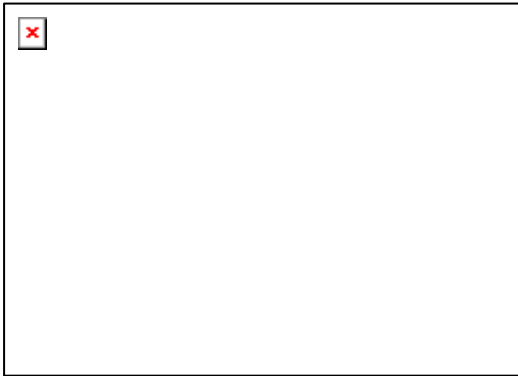


Figure 63. Commande en débit amont

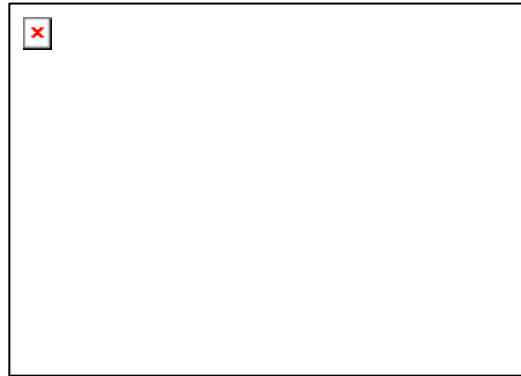


Figure 64. Sortie en débit aval

3^{ème} cas : contrôleur PID



Figure 65. Commande en débit amont



Figure 66. Sortie en débit aval

4ème cas : contrôleur PID + Filtre sur le terme dérivé



Figure 67. Commande en débit amont



Figure 68. Sortie en débit aval

On constate que le comportement des contrôleurs est très satisfaisant, en particulier celui du PID.

IV.2.3.3. Méthode de Takahashi

Si l'on note T_e la période d'échantillonnage, $T_u = L$ et $T_g = \frac{K.L}{a}$, la règle de Takahashi propose (Flaus 1994) :

	K	T_i	T_d
P	$\frac{T_g}{T_u + T_e}$		
PI	$\frac{0.9 T_g}{T_u + \frac{T_e}{2}} - \frac{0.135 T_g T_e}{(T_u + \frac{T_e}{2})^2}$	$\frac{K (T_u + \frac{T_e}{2})^2}{0.27 T_g T_e}$	
PID	$\frac{1.2 T_g}{T_u + T_e} - \frac{0.3 T_g T_e}{(T_u + \frac{T_e}{2})^2}$	$\frac{K (T_u + \frac{T_e}{2})^2}{0.6 T_g T_e}$	$\frac{T_g}{2 K T_e}$

Cette règle est spécifique aux systèmes échantillonnés.

IV.2.3.4. Méthode ATV ou test du relais

La méthode ATV (Autotune Variation de Aström et Hägglund) date de 1983 (Flaus 1994). Un relais d'amplitude h est utilisé à la place du régulateur. La sortie du relais est égale à :

- $+h$ lorsque la mesure y est négative,
- $-h$ lorsque la mesure y est positive.

Le système répond à cette commande de type bang-bang en produisant une oscillation d'amplitude a .

La période d'oscillation T_u est obtenue en mesurant la période des oscillations du système. Le gain limite de pompage est obtenu à partir de l'amplitude des oscillations, car on montre que :

$$K_u = \frac{4h}{\pi a}$$

A partir de ces valeurs, on peut appliquer les réglages de Ziegler-Nichols.

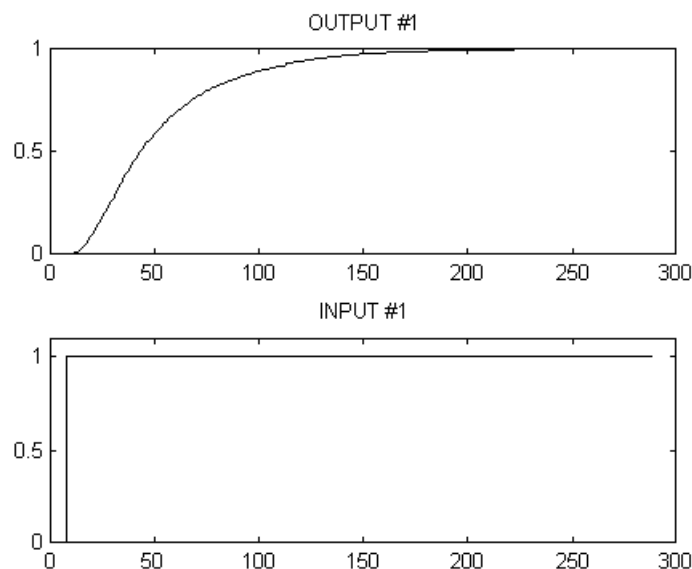
IV.2.3.5. Réglage paramétrique

Le réglage paramétrique d'un régulateur de type PID suppose la connaissance du modèle paramétrique échantillonné du procédé à réguler (fonction de transfert). Ce réglage paramétrique (pour un PID) ne s'applique rigoureusement qu'aux procédés d'ordre au plus 2, avec retard pur inférieur ou égal à une période d'échantillonnage.

IV.2.3.5.1. Exemple 1 : Débit amont - Débit aval

Considérons le réglage d'un contrôleur PID numérique entre le débit à l'amont d'un bief et le débit à l'aval du même bief. On considère le même exemple que celui décrit à la page 138. La réponse indicielle du système considéré est :

» idplot([y u])



On identifie un modèle ARX du modèle, d'ordre 2, en testant différents retards purs (0, 1 et 2):

» th=arx([y u],[2 2 0]);th=sett(th,600);present(th)

This matrix was created by the command ARX on 7/20 1995 at 10:17

Loss fcn: 3.82e-007 Akaike's FPE: 3.927e-007 Sampling interval 600

The polynomial coefficients and their standard deviations are

```
B =
0.0000    0.0020
0.0006    0.0007
```

```
A =
1.0000   -1.9074    0.9094
         0    0.0117    0.0115
```

$$FT_p(z^{-1}) = \frac{0.002 z^{-1}}{1 - 1.9074 z^{-1} + 0.9094 z^{-2}}$$

» th=arx([y u],[2 2 1]);th=sett(th,600);present(th)

This matrix was created by the command ARX on 7/20 1995 at 10:58

Loss fcn: 3.653e-007 Akaike`s FPE: 3.756e-007 Sampling interval 600

The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =
0 0.0000 0.0024
0 0.0006 0.0007

A =
1.0000 -1.8931 0.8955
0 0.0121 0.0119

$$FT_p(z^{-1}) = \frac{0.0024 z^{-2}}{1 - 1.8931 z^{-1} + 0.8955 z^{-2}}$$

» th=arx([y u],[2 2 2]);th=sett(th,600);present(th)

This matrix was created by the command ARX on 7/20 1995 at 11:2

Loss fcn: 3.589e-007 Akaike`s FPE: 3.69e-007 Sampling interval 600

The polynomial coefficients and their standard deviations are

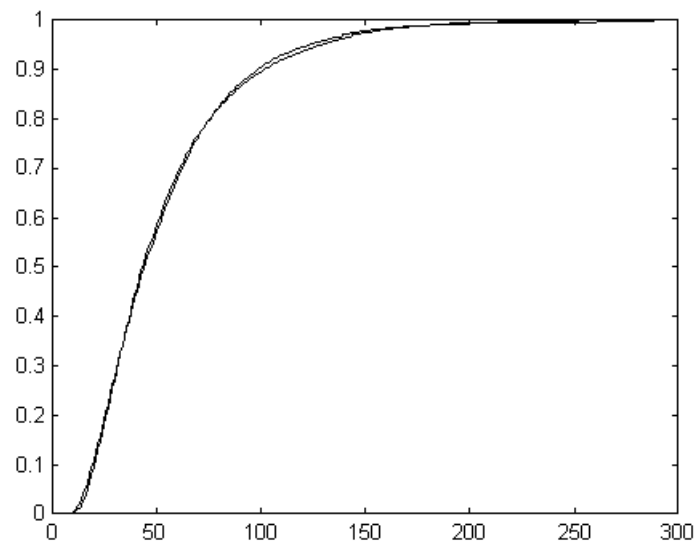
B =
0 0 0.0010 0.0016
0 0 0.0006 0.0007

A =
1.0000 -1.8817 0.8843
0 0.0129 0.0126

$$FT_p(z^{-1}) = \frac{0.001 z^{-2} + 0.0016 z^{-3}}{1 - 1.8817 z^{-1} + 0.8843 z^{-2}}$$

On obtient une meilleure identification avec un temps de retard de 2 (ie 2 périodes d'échantillonnage). Cependant, afin de pouvoir caler un PID numérique sur ce système on considérera le modèle identifié avec temps de retard d'une période d'échantillonnage. Pour ce modèle, on obtient :

» plot([idsim(u,th) y])



IV.2.3.5.2. Exemple 2 : Ouverture - Niveau amont

Considérons le réglage d'un contrôleur PID entre l'ouverture d'une vanne et son niveau amont. La réponse indicielle du système considéré est :

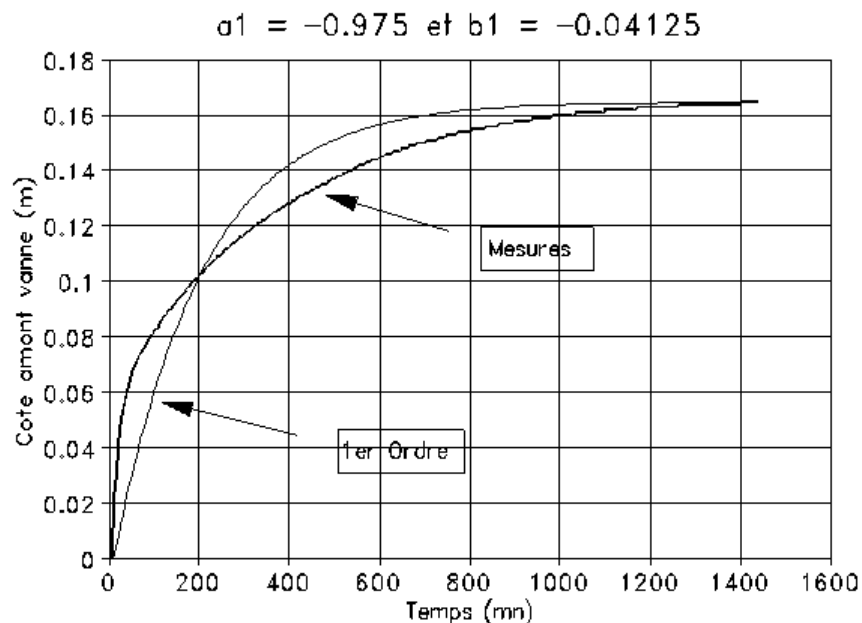


Figure 69. Ajustement d'un 1^{er} ordre, cas 1

On peut essayer d'ajuster un premier ordre sans retard sur la réponse indicielle de la vanne. Différentes méthodes sont possibles (Cf. Landau 1988, MatLab 1991). Une des plus simples est celle des moindres carrés. Cependant, le choix de l'horizon d'identification est très important.

Si l'on ajuste un premier ordre sur l'ensemble de l'horizon, on trouve sur l'exemple ci-dessus la fonction de transfert suivante :

$$FT_p(z^1) = \frac{-0.04125.z^1}{1 - 0.975.z^1} = \frac{b_1.z^1}{1 + a_1.z^1}$$

avec $b_1 = -0.04125$ et $a_1 = -0.975$, pour $\Delta t = 5$ mn.

Le paramètre b_1 est négatif, ce qui correspond à un gain k (de la fonction de transfert) négatif. Ceci est normal, car lorsque l'on ouvre la vanne ($\Delta u > 0$), le niveau à son amont diminue ($\Delta y < 0$).

On remarque que l'ajustement du premier ordre est en moyenne satisfaisant (Cf. figure 69), mais avec une sous-estimation importante de la dynamique rapide du procédé à l'origine. On préférera représenter correctement cette dynamique à l'origine, quitte à dégrader l'ajustement sur l'horizon complet. On choisit donc un horizon d'identification proche de l'origine. On obtient alors :

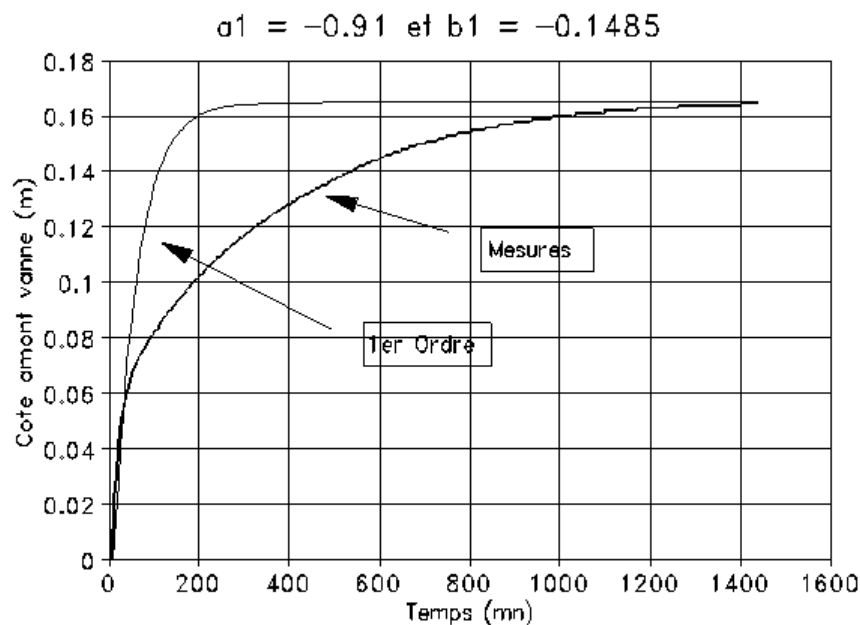


Figure 70. Ajustement d'un 1^{er} ordre, cas 2

La fonction de transfert du premier ordre est donc égale à :

$$FT_p(z^1) = \frac{-0.1485.z^1}{1 - 0.91.z^1} = \frac{b_1.z^1}{1 + a_1.z^1}$$

avec $b_1 = -0.1485$ et $a_1 = -0.91$, pour $\Delta t = 5$ mn = 300 s.

Nous retiendrons ces paramètres dans les applications numériques suivantes.

Remarque : l'identification avec MatLab conduit aux paramètres :

$b_1 = -0.0557$ et $a_1 = -0.9639$

IV.2.3.5.3. Détermination des coefficients du PID

De manière plus générale, si le procédé à réguler est au plus du second ordre, il peut être représenté par une fonction de transfert de la forme suivante :

$$FT_p(z^1) = \frac{b_1 z^1 + b_2 z^2}{1 + a_1 z^1 + a_2 z^2} = \frac{B(z^1)}{A(z^1)}$$

Nous avons vu par ailleurs, qu'un PID numérique (+ filtre sur le terme dérivé) est représenté par la fonction de transfert échantillonnée suivante :

$$FT_c(z^1) = K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} \frac{1}{1 - z^1} + \frac{\frac{N \cdot T_d}{T_d + N \cdot \Delta t} (1 - z^1)}{1 - \frac{T_d}{T_d + N \cdot \Delta t} z^1} \right)$$

et un PID seul (sans filtre) par :

$$FT_c(z^1) = K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} \frac{1}{1 - z^1} + \frac{T_d}{\Delta t} (1 - z^1) \right)$$

Ces fonctions de transfert peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$FT_c(z^1) = \frac{r_0 + r_1 z^1 + r_2 z^2}{(1 - z^1)(1 + s_1 z^1)} = \frac{R(z^1)}{S(z^1)}$$

avec :

	PID + Filtre	PID	PI	P
s₁	$-\frac{T_d}{T_d + N \cdot \Delta t}$	0	0	0
r₀	$K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} - N \cdot s_1 \right)$	$K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} + \frac{T_d}{\Delta t} \right)$	$K \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} \right)$	K
r₁	$K \left(s_1 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} + 2 \cdot N \right) - 1 \right)$	$- K \left(1 + 2 \frac{T_d}{\Delta t} \right)$	- K	- K
r₂	$- K s_1 (1 + N)$	$K \frac{T_d}{\Delta t}$	0	0

La fonction de transfert en boucle fermée FT_{BF} reliant la consigne y^* et la sortie y est donc égale à :

$$FT_{BF}(z^1) = \frac{B(z^1) R(z^1)}{A(z^1) S(z^1) + B(z^1) R(z^1)} = \frac{Q(z^1)}{P(z^1)}$$

Les performances du contrôleur sont directement reliées aux pôles du polynôme $P(z^1)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert FT_{BF} . Ce polynôme est de degré au plus 4. On choisit $P(z^1)$ avec 2 pôles nuls et 2 pôles choisis par le concepteur, soit donc un polynôme de la forme : $P(z^1) = 1 + p_1 z^1 + p_2 z^2$

On se fixe les paramètres p_1 et p_2 du polynôme $P(z^{-1})$, ce qui revient à se fixer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée FT_{BF} . Puis par identification des polynômes :

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1})$$

on détermine les paramètres r_0, r_1, r_2 et s_1 du PID.

On obtient le système linéaire suivant :

$$b_1 r_0 + s_1 = p_1 - a_1 + 1$$

$$b_2 r_0 + b_1 r_1 + s_1 (a_1 - 1) = p_2 - a_2 + a_1$$

$$b_2 r_1 + b_1 r_2 + s_1 (a_2 - a_1) = a_2$$

$$b_2 r_2 - a_2 s_1 = 0$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 1 \\ b_2 & b_1 & 0 & a_1 - 1 \\ 0 & b_2 & b_1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & b_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 + 1 \\ p_2 - a_2 + a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui a pour solution :

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 1 \\ b_2 & b_1 & 0 & a_1 - 1 \\ 0 & b_2 & b_1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & b_2 & -a_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 - a_1 + 1 \\ p_2 - a_2 + a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessus est inversible pour un système exactement d'ordre 2 (i.e. a_2 ou b_2 est différent de 0) et si les polynômes A et B sont premiers entre eux (i.e. ils n'ont pas de racine commune).

Les coefficients du PID sont alors obtenus par (Landau 1988, p. 86) :

$$K = \frac{r_0 s_1 - r_1 - (2 + s_1) r_2}{(1 + s_1)^2}$$

$$T_i = \Delta t \frac{K(1 + s_1)}{r_0 + r_1 + r_2}$$

$$T_d = \Delta t \frac{s_1^2 r_0 - s_1 r_1 + r_2}{K(1 + s_1)^3}$$

$$N = - \frac{T_d(1 + s_1)}{s_1 \Delta t}$$

On applique cette méthode à l'exemple du bief étudié précédemment ($B = 0.0024 z^2$ et $A = 1 - 1.8931 z^{-1} + 0.8955 z^{-2}$), pour deux pôles en z fixés à 0.7 (le contrôleur sera stable en boucle fermée si et seulement si les modules de ses pôles en z sont inférieurs à 1) :

$$P(z^{-1}) = (1 - 0.7 z^{-1})(1 - 0.7 z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

avec donc $p_1 = -1.4$ et $p_2 = 0.49$

On trouve :

$$K = 108.3$$

$$T_i = 4319$$

$$T_d = 1597$$

$$N = -4.45$$

On est dans le cas particulier $s_1 = 1.4931$, qui correspond à un filtre instable !

Dans le cas d'un procédé du premier ordre ($a_2 = b_2 = 0$), le contrôleur doit être un PI uniquement et non plus un PID complet. Le système ci-dessus se simplifie ($r_2 = s_1 = 0$) et s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 + 1 \\ p_2 + a_1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1} \begin{pmatrix} p_1 - a_1 + 1 \\ p_2 + a_1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients du PI deviennent alors :

$$K = -r_1$$

$$T_i = \frac{K \Delta t}{r_0 + r_1}$$

Lorsque l'on applique cette méthode à l'exemple de la vanne ci-dessus (ouverture - cote amont), on trouve, pour deux pôles en z fixés à 0.7 :

$$P(z^{-1}) = (1 - 0.7 z^{-1})(1 - 0.7 z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

avec donc $p_1 = -1.4$ et $p_2 = 0.49$

Or $b_1 = -0.1485$ et $a_1 = -0.91$, pour $\Delta t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$.

On peut donc calculer r_0 et r_1 , puis K et T_i . On trouve :

$$K = -2.83$$

$$T_i = 1400 \text{ s}$$

On peut maintenant simuler le contrôleur PI ainsi obtenu à l'aide du logiciel de simulation des canaux SIC développé par le CEMAGREF. On teste la réaction du contrôleur PI placé sur la deuxième vanne du canal (abscisse 2000 m) à un prélèvement imprévu de 0.5 m³/s à la prise située juste à l'amont de la vanne (abscisse 1950 m).

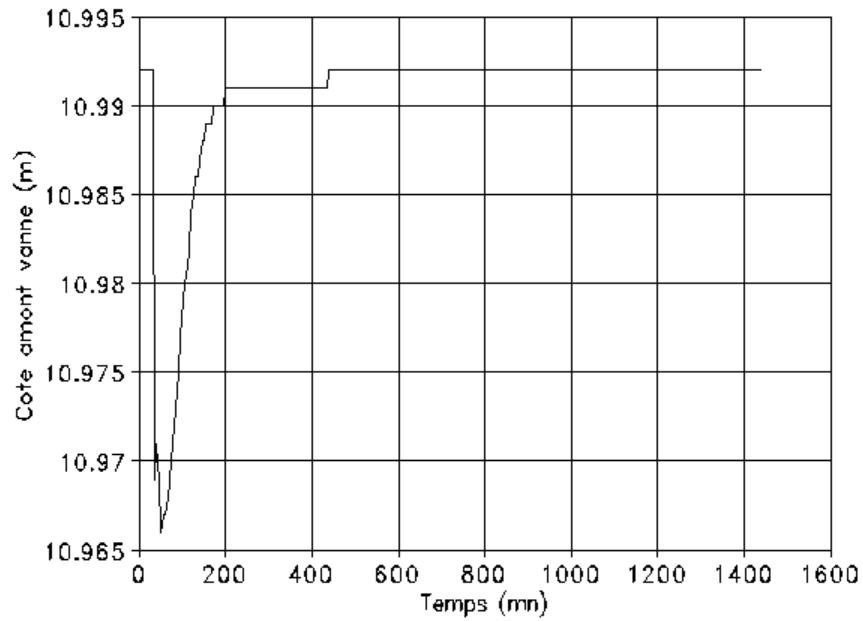


Figure 71. Sortie y (niveau amont à la vanne)

On observe que le niveau de l'eau à l'amont de la vanne chute d'environ 2.5 cm avant de se stabiliser à nouveau à sa consigne y^* .

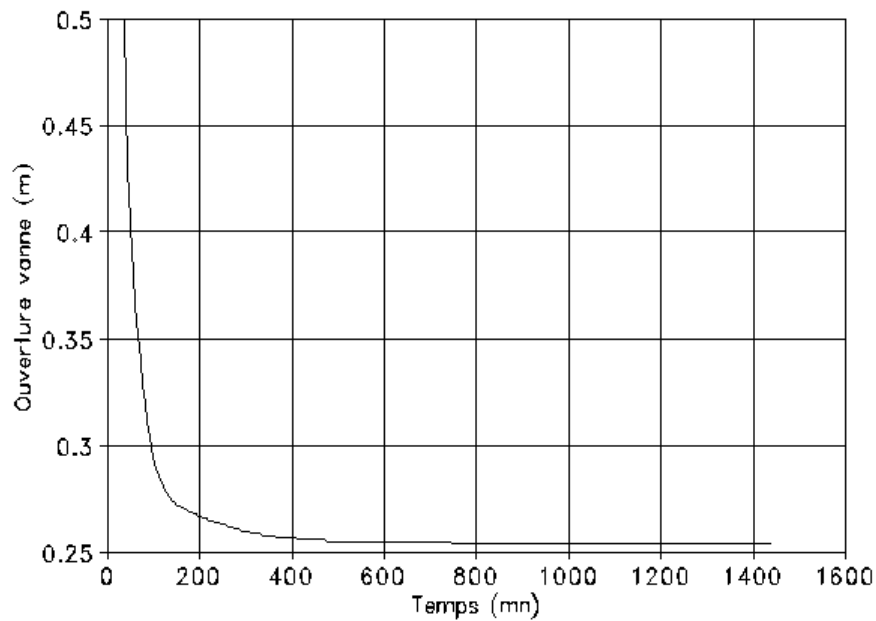


Figure 72. Commande u (ouverture de la vanne)

La commande correspondante du contrôleur est une fermeture de vanne.

Lorsque l'on place le même contrôleur PI sur chacune des 4 vannes (identiques) on obtient les réponses suivantes en terme de commandes et de sorties :

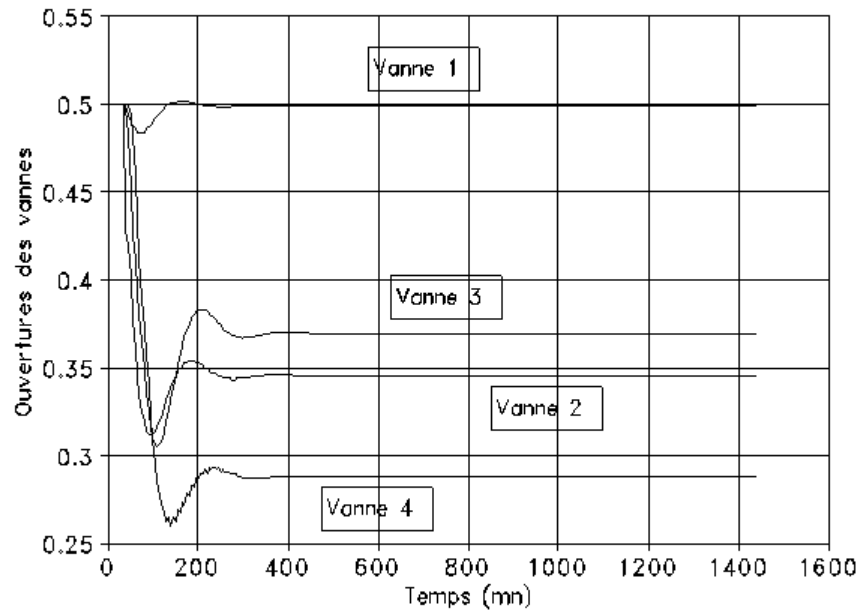


Figure 73. Commandes u (ouvertures des vannes)

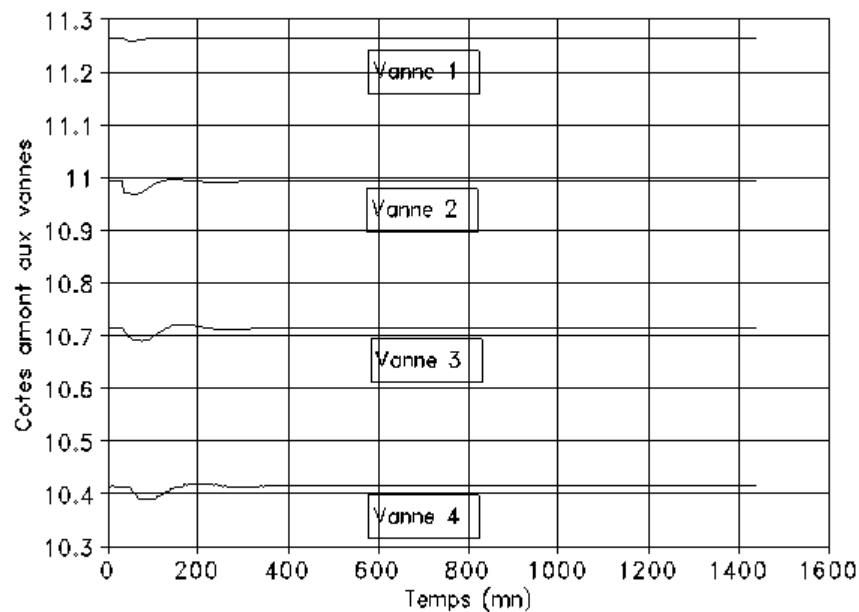


Figure 74. Sorties y (cotes amont aux vannes)

On observe que les vannes se ferment progressivement vers l'aval avec plus d'oscillations que lors de l'utilisation d'un seul contrôleur (Cf. figure 72), mais avec un comportement général très satisfaisant. Les sorties y (cotes amont aux vannes) sont stabilisées autour de leurs consignes, avec de faibles écarts (quelques centimètres au maximum).

On peut tenter maintenant de coupler ces contrôleurs PI aux vannes (obtenus par réglage paramétrique), avec le contrôleur PID + filtre calé précédemment entre le débit amont et le débit

aval du canal (obtenu par la méthode du pompage limite de Ziegler-Nichols). On observe que l'ensemble est fortement oscillant (bien que cependant stable) :

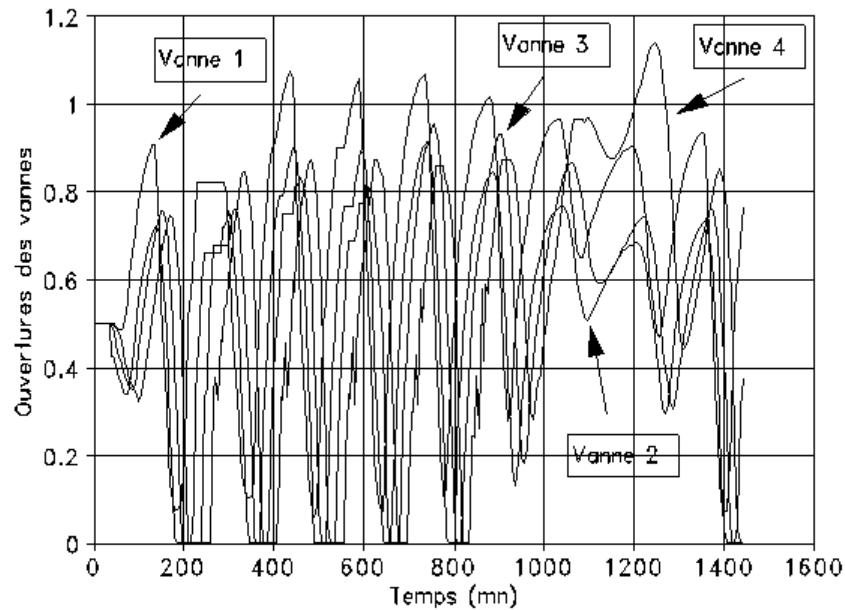


Figure 75. Commandes u (ouvertures des vannes)

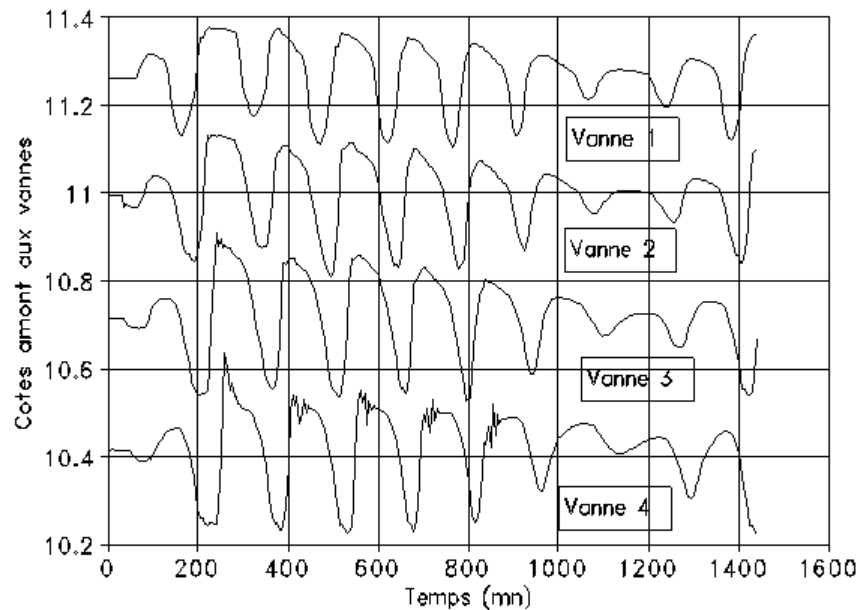


Figure 76. Sorties y (cotes amont aux vannes)

Ceci prouve les limites des méthodes de synthèse monovariables présentées ci-dessus, lorsque le procédé à contrôler est notoirement multivariable. On peut essayer de résoudre le problème par tâtonnement, en diminuant par exemple le gain du contrôleur PID en débit amont. Une approche plus rigoureuse du problème consisterait à utiliser des techniques de découplage (Schuurmans 1992), une

architecture de régulation plus complexe (Piquereau et al. 1982, Deltour 1992) ou des méthodes de synthèse multivariables (Garcia 1988, Malaterre 1994).

IV.3. PREDICTEUR DE SMITH

IV.3.1. Introduction

Le prédicteur de Smith a été présenté pour la première fois par Smith en 1959. Il a pour objectif de compenser l'effet du retard dans la boucle de commande.

IV.3.2. Principe

Considérons une boucle de commande classique :

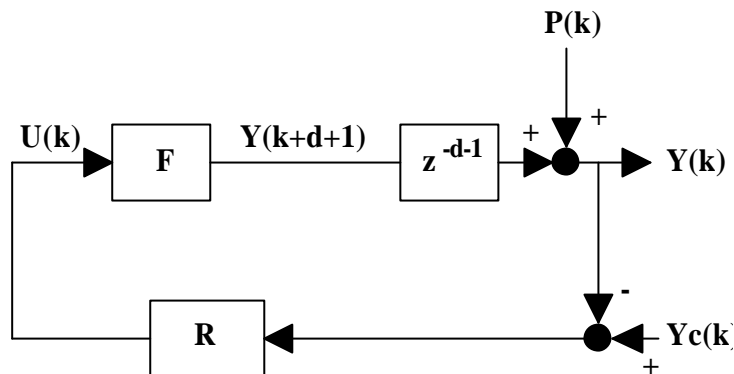


Figure 77. Boucle de commande classique

Cette boucle peut devenir instable, si le retard d est important. On souhaite donc extraire ce retard de la boucle :

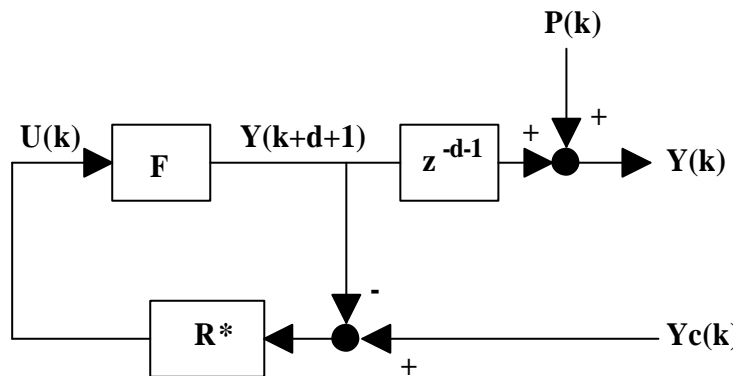


Figure 78. Boucle de commande souhaitée

Or, on ne connaît pas la sortie future $y(k+d+1)$. On est donc obligé d'en faire une prédiction à partir d'un modèle \hat{F} du procédé F :

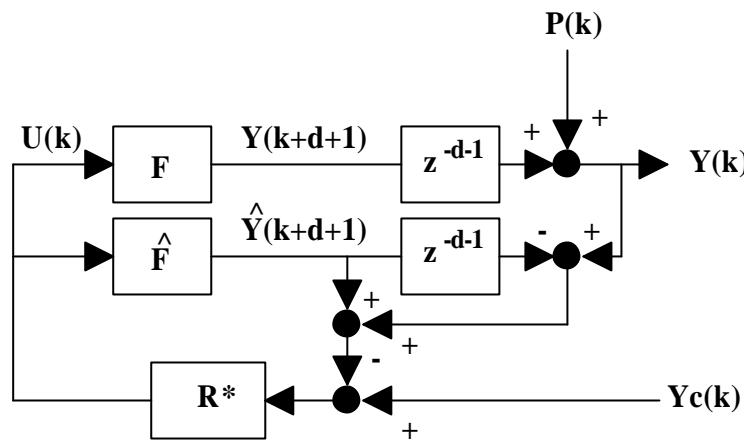


Figure 79. Prédicteur de Smith

Le principal inconvénient du prédicteur de Smith est sa sensibilité aux erreurs de modèle (Sawadogo 1992, p. 17 à 19). C'est cependant une méthode bien adaptée aux canaux d'irrigation (Shand 1971, Deltour 1992), systèmes présentant des temps de retard importants.

IV.4. PLACEMENT DE POLE (CACG)

IV.4.1. Introduction

La régulation mise au point en France sur la rivière de l'Arrats présente un intérêt certain, en particulier par l'approche rigoureuse du problème, réalisée par une équipe intégrant hydrauliciens et automaticiens.

L'Arrats, d'une longueur de 120 km, est située dans le sud-ouest de la France, au flanc des Pyrénées. Le barrage de l'Astarac, situé à son amont, permet une gestion inter annuelle des débits dans la rivière. L'objectif de la gestion est d'assurer à la fois la satisfaction de la demande pour l'irrigation et maintien à l'aval d'un débit minimal garanti de 500 l/s en période d'étiage (Piquereau et al. 1982, Chevereau 1991).

La régulation comporte trois modules :

un module de prévision de la demande aux prises,

un module de commande en boucle ouverte,

un module de commande en boucle fermée.

IV.4.2. Module de commande en boucle ouverte

Le transfert d'un débit, entre l'amont et l'aval d'un bief, peut être approché de manière satisfaisante par une fonction de transfert du second ordre avec retard (Piquereau et al. 1982, Cf. chapitre III) :

$$FT(z) = z^{-n} \frac{c + d.z^1}{1 - a.z^1 + b.z^2}$$

La fonction de transfert inverse peut alors s'écrire (théorie de Wiener) :

$$FT^{-1}(z) = z^n \frac{1 - a.z^1 + b.z^2}{c + d.z^1}$$

Piquereau et Villocel (1982) présentent cette modélisation dans le cadre de la régulation de la rivière Arrats, dans le sud-ouest de la France. Ils font remarquer que cette modélisation est très sensible aux erreurs de modèle (voire même instable), et proposent le modèle dégradé, mais plus robuste, suivant :

$$FT^{-1}(z) = z^n \frac{1 - a.z^1 + b.z^2}{c + d}$$

Si le gain de la fonction de transfert est égal à 1 (continuité des débits entre l'amont et l'aval du bief), alors : $1 - a + b = c + d$. Donc :

$$FT^{-1}(z) = z^n \frac{1 - a.z^1 + b.z^2}{1 - a + b}$$

Ces fonctions de transfert inverses sont utilisées pour calculer (en boucle ouverte) le débit amont nécessaire, connaissant les besoins à l'aval du système à réguler et en chaque point intermédiaire de

pompage. Ce calcul est d'une précision satisfaisante, et robuste (De Leon Mojarro 1986, Chevereau 1991).

IV.4.3. Module de commande en boucle fermée

Afin d'améliorer le temps de réponse de la régulation, la rivière Arrats a été divisée en trois tronçons. Pour le premier d'entre eux, les auteurs proposent un contrôleur numérique calé par placement de pôle. Un intégrateur $\frac{1}{1 - z^{-1}}$ (i.e. avec un pôle égal à 1) est adjoint au correcteur afin d'annuler les écarts statiques en régime permanent. Les paramètres du correcteur sont calculés afin d'obtenir en boucle fermée des pôles en z tous nuls sauf deux égaux à 0.5.

La fonction de transfert du bief étant :

$$FT_p(z) = \frac{0.48 z^5 + 0.2 z^6}{1 - 0.4 z^1 + 0.08 z^2}$$

on obtient un correcteur ayant la forme suivante :

$$FT_c(z) = \frac{a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2}{1 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_1 z^3 + b_2 z^4 + b_1 z^5 + b_2 z^6}$$

avec :

$a_0 = 0.54$	$a_1 = - 0.22$	$a_2 = 0.04$
$b_1 = - 0.6$	$b_2 = - 0.07$	$b_3 = 0.02$
$b_4 = 0.01$	$b_5 = - 0.25$	$b_6 = - 0.11$

On reconnaît la forme générale de la fonction de transfert d'un contrôleur PID, mais avec un dénominateur d'ordre plus élevé (6 au lieu de 2 dans cet exemple). Cet ordre élevé s'explique par les temps de retard importants observés sur l'Arrats.

Les correcteurs des autres biefs ont une structure plus complexe permettant d'isoler chaque perturbation au sein du bief correspondant (Cf. Piquereau et al. 1982, p. 36 à 42).

Une extension de cette méthode aux canaux d'irrigation a été étudiée par De Leon Mojarro (1986).

IV.5. COMMANDE OPTIMALE

IV.5.1. Introduction

Les premiers développements et applications de la commande optimale (ou contrôle optimal) datent du début des années 60. Une bibliographie complète a été réalisée sur ce sujet dès 1971 regroupant plus de 900 références (Mendel et al. 1971). Le principe du contrôle optimal est de déterminer les commandes u du système, sur un horizon donné, qui permettent de minimiser un critère quadratique J . Le problème peut être posé en variables continues ou échantillonnées. En échantillonné, l'horizon est noté $[0 \dots N-1]$ et le critère J :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ (x(k) - x_c(k))^T \cdot Q_x \cdot (x(k) - x_c(k)) + (u(k) - u_c(k))^T \cdot R \cdot (u(k) - u_c(k)) \} \\ + (x(N) - x_c(N))^T \cdot Q_{xf} \cdot (x(N) - x_c(N))$$

où :

x_c : la trajectoire de consigne sur x ,

u_c : la trajectoire de consigne sur u , et

Q_x , Q_{xf} (symétrique semi-définie positive) et R (symétrique définie positive) matrices de pondération sur les écarts.

La minimisation du critère J se fait sous les contraintes liées à la dynamique du système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + e(k) && \text{équation dynamique} \\ \dot{y}(k) &= C \cdot x(k) && \text{équation de sortie contrôlée} \\ \dot{z}(k) &= D \cdot x(k) && \text{équation de sortie observée} \end{aligned}$$

où x est le vecteur d'état du système, y le vecteur de sortie contrôlée (variables contrôlées), z le vecteur de sortie observée (variables observées), e un terme de perturbation, A la matrice dynamique, B la matrice de commande, C et D les matrices de sortie.

Le système est dit commandable s'il est possible d'intervenir sur son entrée u de manière à lui imposer un état final $x(n)$ quelconque à partir d'un état initial $x(0)$ en un nombre fini n de périodes d'échantillonnage (Bühler 1983). Alors, une commande optimale u^* existe. Elle est obtenue par résolution d'une équation de Riccati et se présente sous la forme :

$$u^* = -K \cdot x + H.$$

Le système est dit observable s'il est possible de déterminer l'état initial $x(0)$ en mesurant ses sorties observées z pendant un nombre fini n de périodes d'échantillonnage (Bühler 1983). Le vecteur d'état x peut alors être reconstruit grâce à un observateur d'état à partir de la mesure des sorties observées z .

Si le terme de perturbation e est de nature stochastique, le problème est appelé LQG (Linear Quadratic Gaussian). Dans le cas d'un canal d'irrigation, on peut considérer que le terme e représente principalement les prélèvements inconnus, de nature déterministe (même s'ils sont inconnus). Dans le cadre d'une application réelle, un terme supplémentaire de perturbation stochastique interviendra (influence du vent, etc.). Nous supposons que cette perturbation stochastique est faible devant la perturbation déterministe e , la seule dont nous tiendrons compte. Nous traitons donc un problème LQR (Linear Quadratic Regulator).

Un des inconvénients du contrôle optimal est qu'il conduit à des calculs matriciels relativement lourds dès que le système à contrôler est grand. Balogun (1985) utilise des matrices 96×96 pour contrôler 3 biefs en série. D'autre part, la commande globale du système complet implique une commande centralisée lourde à mettre en oeuvre et a priori plus sensible aux pannes qu'une commande décentralisée. Par conséquent, nous abordons le problème en scindant le système global en sous-systèmes, en appliquant le contrôle optimal LQR sur chacun de ces sous-systèmes et en recomposant la commande du système global par décomposition-coordination ou commande hiérarchisée (Binder 1977, Rey 1978, Hagrais 1979, Titli 1979). Ce travail reste lourd mais conduit à limiter les calculs et à rendre possible une commande décentralisée. L'application du contrôle optimal à un sous-système, et l'étude particulière des non-linéarités sont présentées dans ce mémoire. La commande du système global par décomposition-coordination ou commande hiérarchisée de sous-systèmes élémentaires fait l'objet d'un autre travail de recherche en cours de réalisation au CEMAGREF (Kosuth 1994).

Les sous-systèmes considérés sont constitués d'un bief, et d'une vanne située à l'aval du bief :

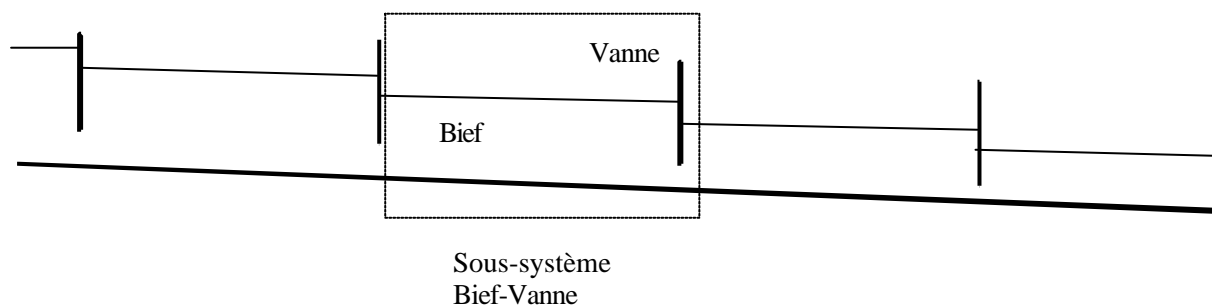


Figure 80. Découpage en sous-systèmes

Malgré sa taille réduite, un sous-système bief-vanne reste un système multivariable. En effet les entrées (ou commandes) agissant sur lui sont au nombre de trois : le débit amont provenant du sous-système amont, l'ouverture de la vanne, et la cote aval imposée par le sous-système aval. Les sorties (variables contrôlées) sont au nombre de deux (ou trois) : le débit aval et une (ou deux) cote(s) dans le bief. Ce sous-système bief-vanne est plus satisfaisant d'un point de vue de la modélisation qu'un sous-système vanne-bief, pour lequel la vanne serait située à l'amont du bief (Kosuth 1989, Baume 1990).

Afin de limiter le nombre de sous-systèmes à coordonner, il est possible de considérer des sous-systèmes plus complexes, composés de plusieurs biefs et vannes en série. Les exemples présentés dans ce mémoire seront appliqués à un sous-système bief-vanne simple (un bief et une vanne), mais tous les développements mathématiques seront présentés dans un cas plus général.

Un autre inconvénient du contrôle optimal est qu'il nécessite une modélisation linéaire du système à commander. La modélisation linéaire choisie est justifiée et présentée au chapitre II. Nous retiendrons finalement une modélisation basée sur les équations de Saint-Venant, discrétisées selon un schéma implicite de Preissmann, puis linéarisées autour d'un régime de fonctionnement de référence.

Le modèle obtenu est ensuite étudié au chapitre III. Nous présenterons également une méthode pour déterminer le pas de temps d'échantillonnage du système.

La synthèse de la commande d'un sous-système est présentée dans ce chapitre IV. Les gains matriciels sont calculés à partir du principe de Bellman, en tenant compte de la forme particulière du modèle numérique du système. Puis un observateur d'état et un observateur de la perturbation sont développés. Enfin, un observateur réduit est présenté permettant de limiter la reconstruction de l'état aux seules variables d'état inconnues.

Les tests et les problèmes posés par les non-linéarités sont présentés et étudiés au chapitre V. Dans la mesure où l'on ne dispose pas d'un canal réel pour effectuer les tests et validations, ceux-ci sont effectués sur un modèle mathématique de simulation. Un système fictif est étudié en détail. Puis le contrôle optimal est comparé à d'autres régulations classiques (PIR, ELFLO, CARDD) sur un des biefs amont du canal de Maricopa Stanfield Irrigation and Drainage District (Arizona, USA).

IV.5.2. Synthèse du contrôleur

IV.5.2.1. Modèle

La modélisation du système bief-vanne présentée au chapitre II conduit à une représentation linéaire échantillonnée de la forme (Equations (2), (3) et (4)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^+ &= \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{U} + \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}_s \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

où \mathbf{X} (respectivement \mathbf{X}^+) est le vecteur d'état du système à l'instant $t = k \cdot \Delta t$ (respectivement $t + \Delta t = (k + 1) \cdot \Delta t$), \mathbf{U} est le vecteur de commande, \mathbf{U}_p est le vecteur de perturbation lié aux prélèvements à la prise, aux instants t et $t + \Delta t$:

$$\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} \delta Q_p \\ \delta Q_p^+ \end{pmatrix}$$

\mathbf{Y} est le vecteur des sorties contrôlées et \mathbf{Z} le vecteur des sorties observées. La construction des matrices \mathbf{A}_s , \mathbf{B}_s , \mathbf{B}_p , \mathbf{C}_s et \mathbf{D}_s est détaillée au chapitre II.

Remarque :

$X \in \mathbb{R}^{n_x}$, $U \in \mathbb{R}^{n_u}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $dQ_p \in \mathbb{R}$ où :

n_x : taille du vecteur d'état,

n_u : nombre de commandes,

n_y : nombre de sorties contrôlées,

n_z : nombre de sorties observées.

Afin d'annuler les écarts de réglage en régime établi entre les sorties contrôlées Y et les consignes correspondantes Y_c , il est nécessaire d'ajouter un intégrateur (Bühler 1983, p. 254). Cet intégrateur joue le même rôle que la composante I d'un contrôleur PID. Dans l'espace d'état, cet intégrateur se construit en augmentant la dimension du vecteur d'état X , auquel des composantes X_I sont donc ajoutées. Il y a autant de composantes X_I que de sorties contrôlées dont on veut annuler les écarts de réglage. Leur comportement dynamique est défini par :

$$\dot{X}_I = X_I + B_I \cdot (Y - Y_c) = X_I + B_I \cdot C_s \cdot X - B_I \cdot Y_c \quad (45)$$

initialisé à $X_I(0) = 0$

Exemples :

X_I peut avoir une ou plusieurs composantes suivant le choix de la matrice B_I :

$B_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour un intégrateur sur la première composante de Y (cote amont du bief),

$B_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un intégrateur sur la dernière composante de Y (débit aval du bief),

$B_I = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un intégrateur sur :

- la moyenne des première et deuxième composantes de Y (cote amont du bief et cote amont de la vanne). On peut ainsi contrôler une cote médiane pour un contrôle du type Bival, Régulation Dynamique (SCP) ou Controlled Volumes,
- et sur la dernière composante de Y (débit aval du bief).

Remarque :

Il est possible, sur un système bief-vanne donné de définir plus de deux variables contrôlées. La commande optimale est en effet basée sur la recherche du minimum d'un critère J donné, ce minimum pouvant être trouvé même si les consignes affectées aux variables contrôlées ne sont pas physiquement compatibles. Cependant, il n'est pas possible de définir plus de deux intégrateurs en même temps (un en débit et un en cote, ou deux en cote). En effet, physiquement cela reviendrait à imposer par exemple un débit et deux cotes dans un bief. Or, cela n'est pas possible (lorsque le débit change, la ligne d'eau pivote et peut être forcée à passer par un point donné, mais pas par deux points quelconques). Il est intéressant de remarquer que ce phénomène se retrouve numériquement. En effet, lorsque l'on essaye d'imposer plus de deux intégrateurs, la synthèse des gains est possible mais conduit à des

matrices avec des coefficients très élevés. Ces gains conduisent eux même à des commandes non physiques.

La dynamique de l'ensemble système et intégrateur peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ B_I \cdot C_s & \text{Id} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_s \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U + \begin{pmatrix} B_p \cdot U_p \\ -B_I \cdot Y_c \end{pmatrix} \\ \ddot{\mathbf{1}} Y &= (C_s \ 0) \cdot \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

Nous mettons provisoirement de côté l'équation de sortie observée $Z = D_s \cdot X$. Elle sera utilisée à nouveau lors de la synthèse de l'observateur.

IV.5.2.2. Critère

Le système à commander peut finalement être représenté par les équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e} && \text{équation dynamique} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} && \text{équation de sortie contrôlée} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ B_I \cdot C_s & \text{Id} \end{pmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} B_s \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{C} &= (C_s \ 0) \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} & \mathbf{u} &= U & \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} B_p \cdot U_p \\ -B_I \cdot Y_c \end{pmatrix} & \mathbf{y} &= Y \end{aligned}$$

Le contrôle optimal conduit à déterminer les commandes du système $u(k)$, $k=0$ à $N-1$, permettant de minimiser le critère quadratique J :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ (x(k) - x_c(k))^T \cdot Q_x \cdot (x(k) - x_c(k)) + (u(k) - u_c(k))^T \cdot R \cdot (u(k) - u_c(k)) \}$$

avec :

x_c : trajectoire de consigne sur x ,

u_c : trajectoire de consigne sur u ,

Q_x (symétrique semi-définie positive) et R (symétrique définie positive) matrices de pondération sur les écarts.

Remarques :

- Dans la littérature, le critère J possède souvent un terme supplémentaire sur l'écart final : $x(N) - x_c(N))^T \cdot Q_{xf} \cdot (x(N) - x_c(N))$. Ce terme est utile lorsqu'un état final donné doit être atteint en fin de trajectoire (interception d'une cible par un missile par exemple). Dans notre cas, on ne considère pas de contrainte particulière sur la position finale au temps N , mais uniquement

sur l'horizon 0 à N-1. Ceci est d'autant plus justifié que par la suite nous retenons la solution asymptotique de l'équation de Riccati, c'est à dire celle obtenue pour un horizon infini, pour laquelle les effets de bord disparaissent.

- Si l'on considère une poursuite sur la sortie y, et non pas sur l'état x, on se limite à des matrices Q_x de la forme : $Q_x = \begin{pmatrix} C_s^T \cdot Q_Y \cdot C_s & 0 \\ 0 & Q_I \end{pmatrix}$

En effet dans ce cas :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ (Y(k) - Y_c(k))^T \cdot Q_Y \cdot (Y(k) - Y_c(k)) + (X_I(k) - X_{Ic}(k))^T \cdot Q_I \cdot (X_I(k) - X_{Ic}(k)) + (u(k) - u_c(k))^T \cdot R \cdot (u(k) - u_c(k)) \}$$

avec :

$$x_c = \begin{pmatrix} X_c \\ X_{Ic} \end{pmatrix}$$

$Y_c = C_s \cdot X_c$ trajectoire de consigne sur Y,

X_{Ic} : trajectoire de consigne sur X_I (dans la pratique $X_{Ic} = 0$).

IV.5.2.3. Calcul des gains

IV.5.2.3.1. Principe de Bellman

Selon le principe d'optimalité de Bellman "une stratégie optimale possède la propriété que, quels qu'aient été l'état initial, la décision initiale et l'état x qui en a résulté, la décision à prendre doit constituer une stratégie optimale vis-à-vis de cet état x considéré maintenant comme état initial" (Dieulesaint et al. 1990). Ce principe permet de calculer la commande optimale par récurrence inverse, à partir du temps final N.

Définissons S par :

$$S(x(N)) = 0$$

$$\text{et } S(x(k)) = \min_{u(k)} \left\{ \frac{1}{2} (x(k) - x_c(k))^T \cdot Q_x \cdot (x(k) - x_c(k)) + \frac{1}{2} (u(k) - u_c(k))^T \cdot R \cdot (u(k) - u_c(k)) + S(x(k+1)) \right\}$$

Remarque :

Pour simplifier les notations nous notons par la suite : $Q = Q_x$

IV.5.2.3.2. Calcul de S par récurrence

Montrons par récurrence sur k que $\forall k, 0 \leq k \leq N, \exists P(k), v(k)$ et $w(k)$ tels que :

$$S(x(k)) = \frac{1}{2} x^T(k).P(k).x(k) - x^T(k).v(k) + \frac{1}{2} w(k)$$

avec : P matrice symétrique (n,n), v vecteur (n) et w scalaire.

Pour k = N

L'hypothèse de récurrence est vérifiée avec :

$$P(N) = 0, v(N) = 0 \text{ et } w(N) = 0 \Rightarrow S(x(N)) = 0$$

Pour k < N

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour k+1 et démontrons la pour k. Nous avons :

$$S(x(k)) = \min_{/u(k)} \left\{ \frac{1}{2} x^T(k).Q.x(k) + \frac{1}{2} x_c^T(k).Q.x_c(k) - x_c^T(k).Q.x(k) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u^T(k).R.u(k) + \frac{1}{2} u_c^T(k).R.u_c(k) - u_c^T(k).R.u(k) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x^T(k+1).P(k+1).x(k+1) - x^T(k+1).v(k+1) + \frac{1}{2} w(k+1) \right\}$$

Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence et la symétrie des matrices Q et R.

Or, (avec les notations simplifiées $x = x(k)$, $x^+ = x(k+1)$, $u = u(k)$, $u^+ = u(k+1)$, ...) :

$$\text{i. } x^{+T}.P^+.x^+ = [A.x + B.u + e]^T.P^+.[A.x + B.u + e] \\ = x^T.A^T.P^+.A.x + x^T.A^T.P^+.B.u + x^T.A^T.P^+.e + u^T.B^T.P^+.A.x \\ + u^T.B^T.P^+.B.u + u^T.B^T.P^+.e + e^T.P^+.A.x + e^T.P^+.B.u + e^T.P^+.e$$

$$\text{ii. } x^{+T}.v^+ = [A.x + B.u + e]^T.v^+ = x^T.A^T.v^+ + u^T.B^T.v^+ + e^T.v^+$$

Nous obtenons donc (avec les notations simplifiées) :

$$S(x) = \min_{/u} \left\{ \frac{1}{2} x^T.Q.x + \frac{1}{2} x_c^T.Q.x_c - x_c^T.Q.x + \frac{1}{2} u^T.R.u \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_c^T.R.u_c - u_c^T.R.u + \frac{1}{2} x^{+T}.P^+.x^+ - x^{+T}.v^+ + \frac{1}{2} w^+ \right\} \\ = \min_{/u} \left\{ c + \frac{1}{2} u^T.d + \frac{1}{2} d^T.u + \frac{1}{2} u^T.L^{-1}.u \right\}$$

avec :

$$\left| \begin{aligned} c &= \frac{1}{2} x^T.Q.x + \frac{1}{2} x_c^T.Q.x_c - x_c^T.Q.x + \frac{1}{2} u_c^T.R.u_c + \frac{1}{2} x^T.A^T.P^+.A.x \\ &\quad + x^T.A^T.P^+.e + \frac{1}{2} e^T.P^+.e - (A.x + e)^T.v^+ + \frac{1}{2} w^+ \\ d &= -R.u_c + B^T.P^+.(A.x + e) - B^T.v^+ \\ L &= [R + B^T.P^+.B]^{-1} \end{aligned} \right. \quad (47)$$

Remarque :

L existe car R est définie positive.

Le minimum est atteint pour u^* tel que $\frac{\partial \{S\}}{\partial u}(u^*) = 0 \Leftrightarrow d + L^{-1}.u^* = 0 \Leftrightarrow u^* = -L.d$

Nous avons alors $S(x) = c - \frac{1}{2} d^T . L . d$, pour $u = u^*$.

Nous avons donc $S(x) = \frac{1}{2} x^T . P . x - x^T . v + \frac{1}{2} w$, avec P , v et w obtenus par identification :

$$P = Q + A^T . P^+ . (Id - B . L . B^T . P^+) . A \quad (48)$$

$$v = A^T . (Id - P^+ . B . L . B^T) . v^+ - A^T . P^+ . (Id - B . L . B^T . P^+) . e + Q . x_c - A^T . P^+ . B . L . R . u_c$$

$$w = x_c^T . Q . x_c + u_c^T . R . u_c + e^T . P^+ . e - 2 . e^T . v^+ + w^+ \\ - (R . u_c - B^T . P^+ . e + B^T . v^+)^T . L . (R . u_c - B^T . P^+ . e + B^T . v^+)$$

Soit en posant :

$$K = L . B^T . P^+ . A \quad (49)$$

et en utilisant la symétrie de P et L :

$$P = Q + (A - B . K)^T . P^+ . A$$

$$v = (A - B . K)^T . v^+ - (A - B . K)^T . P^+ . e + Q . x_c - K^T . R . u_c \quad (50)$$

$$w = x_c^T . Q . x_c + u_c^T . R . u_c + e^T . P^+ . e - 2 . e^T . v^+ + w^+ \\ - (R . u_c - B^T . P^+ . e + B^T . v^+)^T . L . (R . u_c - B^T . P^+ . e + B^T . v^+)$$

$$\text{et } u^* = -L.d = -L.B^T.P^+.A.x - L.B^T.P^+.e + L.B^T.v^+ + L.R.u_c = -K.x + H$$

$$u^* = -K.x + H$$

$$\text{avec : } \begin{cases} K = L.B^T.P^+.A \\ H = -L.B^T.P^+.e + L.B^T.v^+ + L.R.u_c \end{cases}$$

(51)

Conclusion :

P , v et w vérifiant l'hypothèse de récurrence ont été trouvés. Celle-ci est ainsi démontrée pour tout k , $0 \leq k \leq N$. Les relations récurrentes, permettant de calculer les matrices $P(k)$, les vecteurs $v(k)$ et les scalaires $w(k)$, pour $k = N$ à $k = 0$, ont en outre été obtenues.

IV.5.2.3.3. Conclusion

La commande optimale u^* obtenue est une commande par retour d'état avec une matrice de gain K et un terme additionnel H appelé pré-filtre (Dieulesaint 1990, p. 251). Ce terme H tient compte des termes de perturbation (e), et des consignes sur l'état (x_c) et sur la commande (u_c). Le terme K caractérise la commande en boucle fermée (feedback control) et le terme H la commande en boucle ouverte (feedforward control).

Il est à noter que K et H varient en fonction du temps, puisqu'ils dépendent de P , v , e , u_c et x_c . On note également que le terme w n'est pas utilisé dans le calcul de la commande u . La matrice $P(k)$ et le vecteur $v(k)$ sont calculés par récurrence en partant de $P(N) = 0$ et $v(N) = 0$, et en utilisant les relations de récurrence (50). Dans la pratique ce calcul peut être effectué hors ligne. Les matrices $P(k)$ et les vecteurs $v(k)$ sont alors stockés en mémoire, puis la commande u^* est calculée en ligne en utilisant ces matrices et vecteurs. Ceci est assez lourd en terme de temps de calcul et de place mémoire nécessaire. Cependant, une solution sous-optimale, de mise en oeuvre plus aisée, peut être trouvée moyennant deux simplifications. Cette solution est présentée dans le paragraphe suivant.

IV.5.2.4. Solution asymptotique

Lorsque l'horizon d'optimisation N tend vers l'infini, la solution $P(k)$, $\forall k$ fixé, de l'équation de Riccati tend vers une solution appelée solution asymptotique ou stationnaire (Bühler 1983, p. 265). Cette solution, indépendante de k , vérifie l'équation asymptotique de Riccati :

$$P = Q + A^T.P.(Id - B.L.B^T.P).A = Q + (A - B.K)^T.P.A \quad (52)$$

Le gain optimal K est alors constant. Le pré-filtre H comprend un terme v variable au cours du temps :

$$v = (A - B.K)^T.v^+ - (A - B.K)^T.P.e + Q.x_c - K^T.R.u_c$$

Afin de simplifier le calcul du vecteur v , nous faisons l'hypothèse que les perturbations et consignes sont en forme d'échelon. Nous tenons compte de la variation de ces quantités à l'instant $k = k_0$, en supposant cette nouvelle valeur constante par la suite (Bühler 1983, p. 266). Nous pouvons alors écrire :

$$[Id - (A - B.K)^T].v = - (A - B.K)^T.P.e + Q.x_c - K^T.R.u_c$$

$$\Rightarrow v = - N.(A - B.K)^T.P.e + N.Q.x_c - N.K^T.R.u_c$$

avec :

$$N = [Id - (A - B.K)^T]^{-1} \quad (53)$$

Donc (51) s'écrit :

$$u^* = -K.x - L.B^T.(N.(A - B.K)^T + Id).P.e + L.B^T.N.Q.x_c + L.(Id - B^T.N.K^T).R.u_c$$

On montre facilement que $N.(A - B.K)^T + Id = N$ à l'aide de (53). Donc :

$$\boxed{u^* = -K.x - M_e.e + M_x.x_c + M_u.u_c} \quad (54)$$

avec :

$$M_e = L.B^T.N.P$$

$$M_x = L.B^T.N.Q$$

$$M_u = L.(Id - B^T.N.K^T).R$$

Cette fois ci, les matrices de gain considérées sont constantes, d'où une grande simplification dans le calcul de la commande. Dans notre cas particulier, on a :

$$M_e.e = (M_{ep} \ M_{ei}) \cdot \begin{pmatrix} B_p.U_p \\ -B_I.Y_c \end{pmatrix} = M_{ep}.B_p.U_p - M_{ei}.B_I.Y_c$$

et si l'on se restreint à une poursuite sur la sortie Y (Cf. remarque p. 165) :

$$\begin{aligned} M_x.x_c &= L.B^T.N.Q.x_c = L.B^T.N. \begin{pmatrix} C_s^T.Q_Y.C_s & 0 \\ 0 & Q_I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ X_{Ic} \end{pmatrix} \\ &= L.B^T.N. \begin{pmatrix} C_s^T.Q_Y.C_s \\ 0 \end{pmatrix} .X_c + L.B^T.N. \begin{pmatrix} 0 \\ Q_I \end{pmatrix} .X_{Ic} \\ &= L.B^T.N.C^T.Q_Y.Y_c + L.B^T.N. \begin{pmatrix} 0 \\ Q_I \end{pmatrix} .X_{Ic} \\ &= M_Y.Y_c + M_{X_I}.X_{Ic} \end{aligned}$$

avec donc :

$$M_Y = L.B^T.N.C^T.Q_Y$$

$$M_{X_I} = L.B^T.N. \begin{pmatrix} 0 \\ Q_I \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (54) \Rightarrow u^* &= -K.x - M_{ep}.B_p.U_p + M_{ei}.B_I.Y_c + M_Y.Y_c + M_{X_I}.X_{Ic} + M_u.u_c \\ &= -K.x - M_{ep}.B_p.U_p + (M_Y + M_{ei}.B_I).Y_c + M_{X_I}.X_{Ic} + M_u.u_c \end{aligned}$$

IV.5.2.5. Conclusion

La commande optimale u^* obtenue peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\boxed{u^* = -K.x - M_{ep}.B_p.U_p + (M_Y + M_{ei}.B_I).Y_c + M_{X_I}.X_{Ic} + M_u.u_c} \quad (55)$$

avec les matrices de gains :

$$M_e = L.B^T.N.P = (M_{ep} \ M_{ei})$$

$$M_Y = L.B^T.N.C^T.Q_Y$$

$$M_{X_I} = L.B^T.N.\begin{pmatrix} 0 \\ Q_I \end{pmatrix}$$

$$M_u = L.(Id - B^T.N.K^T).R$$

Soit en posant $M = L.B^T.N$:

$$M_e = M.P = (M_{ep} \ M_{ei})$$

$$M_Y = M.C^T.Q_Y$$

$$M_{X_I} = M.\begin{pmatrix} 0 \\ Q_I \end{pmatrix}$$

$$M_u = (L - M.K^T).R$$

où P est la solution asymptotique de l'équation de Riccati (52) page 168, L est défini par (47) page 166, K par (49) page 167 et N par (53) page 168.

Dans la pratique, $X_{Ic} = 0$, car le but de l'intégrateur est d'annuler les écarts de réglage en régime permanent. Aucune trajectoire particulière n'est donc assignée aux composantes X_I . D'autre part, $u_c = 0$ car, par construction (Cf. chapitre II), la commande u comprend des variations de débit, d'ouverture de vanne ou de cote aval. Ces variations doivent être minimisées afin de limiter la sollicitation des moteurs des vannes et la génération de vagues importantes pouvant endommager le système. Sous ces deux remarques, la commande optimale devient :

$$u^* = -K.x - M_{ep}.B_p.U_p + (M_Y + M_{ei}.B_I).Y_c \quad (56)$$

IV.5.3. Construction d'un observateur d'état

IV.5.3.1. Principes

La commande u^* calculée précédemment par contrôle optimal fait intervenir divers gains, et en particulier le gain K appliqué au vecteur d'état global $x = \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix}$ composé de l'état du système X et des composantes de l'intégrateur X_I . C'est ce que l'on appelle une commande par retour d'état. Or, dans la pratique, il n'est pas possible de mesurer intégralement le vecteur d'état du système X . En effet, ce vecteur X est composé de débits et cotes en divers points du système bief-vanne. Par contre, on peut tenter de le reconstruire grâce à certaines mesures effectuées sur le système. Ces mesures sont les sorties observées Z . On note \hat{X} le vecteur d'état reconstruit (appelé également

parfois état estimé ou état observé¹⁶) pour le distinguer du vecteur d'état réel X (inconnu). Il est inutile de reconstruire les composantes X_i de l'intégrateur. En effet, celles-ci peuvent être calculées à partir des composantes du vecteur d'état reconstruit \hat{X} et des consignes sur les sorties contrôlées Y_c .

Soit notre système linéaire :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p \\ \hat{Y} &= C_s \cdot \hat{X} \\ \hat{Z} &= D_s \cdot \hat{X}\end{aligned}$$

$$\text{où } U_p = \begin{pmatrix} \delta Q_p \\ \delta Q_{p^+} \end{pmatrix}$$

On définit l'observateur d'état par :

$$\dot{\hat{X}}^+ = A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + L \cdot (Z - \hat{Z})$$

où L est une matrice de gain déterminée par la suite.

On remarque que l'observateur est un modèle du système avec une entrée supplémentaire représentée par un terme proportionnel à l'écart $Z - \hat{Z}$, où \hat{Z} est la valeur prédite de la sortie observée correspondant à l'état reconstruit \hat{X} :

$$\hat{Z} = D_s \cdot \hat{X}$$

On obtient donc :

$$\dot{\hat{X}}^+ = (A_s - L \cdot D_s) \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + L \cdot Z$$

(57)

IV.5.3.2. Propriétés

Soit l'erreur de reconstruction de l'état $e_o = X - \hat{X}$ (appelée également erreur d'observation).

$$\text{On a } e_o^+ = X^+ - \hat{X}^+ = (A_s - L \cdot D_s) \cdot e_o = A_e \cdot e_o \quad \text{où } A_e = A_s - L \cdot D_s$$

Par définition, on dit que l'observateur est asymptotiquement stable si l'erreur d'observation tend vers 0 à l'infini. Les valeurs propres de la matrice A_e déterminent cette stabilité. En effet e_o possède une limite si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A_e ont un module strictement inférieur à 1. Alors cette limite est 0.

Théorème : *Les pôles de l'observateur (i.e. les valeurs propres de la matrice $A_s - L \cdot D_s$) peuvent être définis arbitrairement dans le plan complexe par un choix adéquat de la matrice de gain L , si et seulement si le système est complètement observable (Kwakernaak et al. 1972, p. 526). Deux contraintes existent cependant :*

¹⁶ Le terme "observé" signifie ici que le vecteur provient d'un observateur, et non pas qu'il est "observé" directement sur le système, comme cela est le cas pour les sorties "observées" Z (au sens "mesurées").

- si un pôle complexe est choisi, alors son pôle conjugué doit également être choisi.
- chaque pôle a une multiplicité au plus égale au rang de la matrice D_s (nombre de sorties observées).

On dispose d'une grande liberté pour choisir les pôles de l'observateur. La seule contrainte pour assurer la stabilité de l'observateur est que leurs modules soient strictement inférieurs à 1. S'ils sont tous placés proches de l'origine, l'erreur d'observation est annulée très rapidement. Par contre, cet observateur risque d'être très sensible aux bruits de mesure sur la sortie observée Z ou aux perturbations inconnues. Par conséquent, il vaut mieux choisir un observateur ayant une dynamique un peu plus lente. Cependant, il faut que la dynamique de l'observateur reste plus rapide que celle du processus contrôlé. Les pôles de la matrice $A_s - L.D_s$ sont donc choisis en faisant un compromis entre la rapidité de la convergence de l'observateur et la limitation de sa sensibilité aux bruits.

Remarque : Dans le cas stochastique LQG, lorsque l'on a une connaissance sur les bruits de mesure ou sur les perturbations stochastiques agissant sur le système (moyenne nulle, covariance connue), la matrice L est calculée non pas par placement de pôle, mais pour minimiser la variance de l'erreur d'estimation. On parle dans ce cas de filtre de Kalman (Kwakernaak et al. 1972, p. 341, Larminat 1993, p. 161).

IV.5.3.3. Influence de perturbations inconnues

La convergence de l'observateur vient d'être vérifiée sur le modèle linéaire, sous certaines hypothèses sur le choix de la matrice L . Dans la réalité, il existe des écarts entre le modèle réel et le modèle linéaire, en particulier dus aux :

- non linéarités (erreurs de modèle),
- prélèvements inconnus.

Si l'on regroupe ces écarts dans un vecteur U_e on a :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}^+ &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + U_e && \text{système réel} \\ \dot{\hat{X}}^+ &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + L \cdot (Z - \hat{Z}) && \text{observateur} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e_o^+ = (A_s - L.D_s) \cdot e_o + U_e$$

Dans ce cas, l'observateur défini précédemment ne permet plus d'observer correctement le vecteur d'état X , car l'erreur d'observation ne tend pas vers 0 à l'infini. En effet, s'il existe une limite asymptotique, alors cette limite vérifie :

$$e_o^\infty = (1 - A_s + L.D_s)^{-1} \cdot U_e^\infty \neq 0$$

Par contre, il est possible de reconstituer certaines grandeurs de perturbation en régime établi à partir de l'erreur d'observation de sortie $Z - \hat{Z}$ comme cela est montré ci-dessous.

IV.5.3.4. Observation de prélèvements imprévus

Soit δQ_p le prélèvement prévu et Q_i un prélèvement supplémentaire imprévu. On a alors un prélèvement réel total δQ_r :

$$\delta Q_r = \delta Q_p + Q_i$$

Rappel : le signe **d** signifie que la variable qui suit est relative au régime permanent de référence (e) (Cf. chapitre II). Il n'est pas utilisé pour le terme de prélèvement imprévu Q_i car celui-ci représente une variation relative par rapport au prélèvement prévu dQ_p . Il est donc indépendant du régime permanent de référence (e).

Dans ce cas, on a donc :

$$\begin{aligned} X^+ &= A_s \cdot X + B_s \cdot U + B_p \cdot \begin{pmatrix} \delta Q_r \\ \delta Q_r^+ \end{pmatrix} \\ &= A_s \cdot X + B_s \cdot U + B_p \cdot \begin{pmatrix} \delta Q_p \\ \delta Q_p^+ \end{pmatrix} + B_p \cdot \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_i^+ \end{pmatrix} \\ &= A_s \cdot X + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + B_p \cdot U_i \end{aligned} \quad (58)$$

$$\text{avec dans ce cas } U_e = B_p \cdot U_i = B_p \cdot \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_i^+ \end{pmatrix}$$

Cherchons une estimation \hat{Q}_i de Q_i en posant :

$$\hat{Q}_i^+ = \hat{Q}_i + L_i \cdot (Z - \hat{Z}) \quad (59)$$

On démontre au paragraphe suivant que cette équation permet effectivement de reconstituer correctement le prélèvement imprévu Q_i .

L'expression de l'observateur global devient donc :

$$\begin{aligned} \hat{\dot{X}}^+ &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + B_p \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \\ \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix} + L \cdot (Z - \hat{Z}) \\ \hat{\dot{Q}}_i^+ &= \hat{Q}_i + L_i \cdot (Z - \hat{Z}) \end{aligned} \quad (60)$$

Si l'on note $B_p = [B_{p1} \ B_{p2}]$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\dot{X}}^+ &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + B_{p1} \cdot \hat{Q}_i + B_{p2} \cdot [\hat{Q}_i + L_i \cdot (Z - \hat{Z})] + L \cdot (Z - \hat{Z}) \\ \hat{\dot{Q}}_i^+ &= \hat{Q}_i + L_i \cdot (Z - \hat{Z}) \\ \Leftrightarrow \hat{\dot{X}}^+ &= [A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s] \cdot \hat{X} + (B_{p1} + B_{p2}) \cdot \hat{Q}_i + [B_s \ B_p \ (L + B_{p2} \cdot L_i)] \cdot \begin{pmatrix} U \\ U_p \\ Z \end{pmatrix} \\ \hat{\dot{Q}}_i^+ &= -L_i \cdot D_s \cdot \hat{X} + \hat{Q}_i + L_i \cdot Z \end{aligned}$$

Donc l'observateur global (d'état et de prélèvement imprévu) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \hat{\dot{X}}^+ \\ \hat{\dot{Q}}_i^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s & B_{p1} + B_{p2} \\ -L_i \cdot D_s & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_s & B_p & L + B_{p2} \cdot L_i \\ 0 & 0 & L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ U_p \\ Z \end{pmatrix} \quad (61)$$

IV.5.3.5. Convergence de l'observateur global

Vérifions que le nouvel observateur global (d'état et de prélèvements imprévus) est asymptotiquement stable. Pour cela on calcule l'erreur d'observation :

$$e_o = X - \hat{X}$$

$$\text{or (Equation 58) : } X^+ = A_s \cdot X + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + B_p \cdot \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_i^+ \end{pmatrix}$$

$$\text{et (Equation 60) : } \begin{aligned} \hat{X}^+ &= A_s \cdot \hat{X} + B_s \cdot U + B_p \cdot U_p + B_p \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \\ \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix} + L \cdot (Z - \hat{Z}) \\ \hat{Q}_i^+ &= \hat{Q}_i + L_i \cdot (Z - \hat{Z}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \hat{e}_o^+ &= (A_s - L \cdot D_s) \cdot e_o + B_{p1} \cdot (Q_i - \hat{Q}_i) + B_{p2} \cdot (Q_i^+ - \hat{Q}_i^+) \\ \hat{Q}_i^+ &= L_i \cdot D_s \cdot e_o + \hat{Q}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \hat{e}_o^+ &= (A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s) \cdot e_o - (B_{p1} + B_{p2}) \cdot \hat{Q}_i + B_p \cdot U_i \\ \hat{Q}_i^+ &= L_i \cdot D_s \cdot e_o + \hat{Q}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e_o^+ \\ \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s & -(B_{p1} + B_{p2}) \\ L_i \cdot D_s & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_p \cdot U_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e_o^+ \\ \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix} = A_e \cdot \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_p \cdot U_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } A_e = \begin{pmatrix} A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s & -(B_{p1} + B_{p2}) \\ L_i \cdot D_s & 1 \end{pmatrix}$$

Etudions le comportement asymptotique du vecteur $\begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}$. Si les modules des valeurs propres de A_e

sont strictement inférieurs à 1 et si $1 - A_e$ est inversible alors la suite affine $\begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}$ converge et sa limite

à l'infini vérifie :

$$\begin{pmatrix} e_o^\infty \\ \hat{Q}_i^\infty \end{pmatrix} = A_e \cdot \begin{pmatrix} e_o^\infty \\ \hat{Q}_i^\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_p \cdot U_i^\infty \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_o^\infty \\ \hat{Q}_i^\infty \end{pmatrix} = (1 - A_e)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B_p \cdot U_i^\infty \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut noter :

$$(1 - A_e)^{-1} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} e_o^\infty \\ \hat{Q}_i^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} \cdot B_p \cdot U_i^\infty \\ E_{21} \cdot B_p \cdot U_i^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} \cdot (B_{p1} + B_{p2}) \cdot Q_i^\infty \\ E_{21} \cdot (B_{p1} + B_{p2}) \cdot Q_i^\infty \end{pmatrix} \quad (63)$$

Par ailleurs, en multipliant (62) à droite par $(1 - A_e)$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \cdot (1 - A_e) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - A_s + (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s & B_{p1} + B_{p2} \\ -L_i \cdot D_s & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 &= E_{11} \cdot (B_{p1} + B_{p2}) \\ 1 &= E_{21} \cdot (B_{p1} + B_{p2}) \end{cases} \\ \text{Donc (0)} &\Rightarrow \begin{cases} e_o^\infty = 0 \\ \hat{Q}_i^\infty = Q_i^\infty \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc bien vérifié que, sous certaines hypothèses sur A_e , l'erreur d'observation e_o tend vers 0 en régime établi et que l'estimation du prélèvement imprévu \hat{Q}_i converge vers la valeur exacte Q_i .

Remarque :

Si tous les pôles de la matrice A_e ont des modules strictement inférieurs à 1, alors la matrice $I - A_e$ est inversible. En effet, si $I - A_e$ n'est pas inversible, cela signifie que 1 est valeur propre de A_e , impossible par hypothèse.

De même que pour l'observateur d'état seul, on place les pôles de la matrice A_e par un choix judicieux des matrices L et L_i . Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{pmatrix} A_s - (L + B_{p2} \cdot L_i) \cdot D_s & -(B_{p1} + B_{p2}) \\ L_i \cdot D_s & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Soit encore } A_e &= \begin{pmatrix} A_s & -(B_{p1} + B_{p2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L + B_{p2} \cdot L_i \\ -L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_s & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut ensuite utiliser différents algorithmes pour calculer les matrices L et L_i . La fonction "place" de MatLab permet de le faire.

IV.5.3.6. Influence des non-linéarités

La convergence d'un observateur d'état seul a d'abord été étudiée au chapitre IV.5.3.2.. Cette convergence est démontrée en l'absence de toute erreur de modèle. Afin d'annuler les erreurs d'observation liées à des prélèvements inconnus (donc liées à une erreur de modèle), un observateur d'état et de prélèvement imprévu a été développé (Chapitre IV.5.3.4.). Sa convergence est démontrée au chapitre IV.5.3.5., sous l'hypothèse que les seules perturbations inconnues agissant sur le système sont liées aux prélèvements inconnus. Or, dans la réalité, d'autres perturbations (ou erreurs de modèle) existent. Parmi celles-ci, on peut citer les non-linéarités liées au bief et celles liées à la vanne. Les non-linéarités liées au bief sont assez complexes et difficilement modélisables. Par contre, les non-linéarités liées à la vanne peuvent être approchées à partir de la connaissance de la loi analytique non-linéaire de cette vanne. Il devrait donc être possible de tenir compte de la modélisation de cette perturbation non-linéaire à la vanne pour améliorer la convergence de

l'observateur, de la même manière que cela a été fait au chapitre IV.5.3.4. à partir de la modélisation des prélèvements inconnus. Nous ne développerons pas plus cette idée dans le cadre de ce mémoire.

Nous pouvons donc nous attendre à voir apparaître une erreur d'observation $e_0 = X - \hat{X}$ non nulle, lorsque l'observateur est testé sur un modèle non-linéaire ou en présence de perturbations diverses. Cette erreur est gênante, en particulier dans la mesure où les composantes X_I de l'intégrateur sont calculées à partir du vecteur d'état estimé \hat{X} (Chapitre IV.5.3.1.). Elles seraient en effet erronées si le vecteur d'état estimé \hat{X} est lui-même erroné. Ceci conduirait alors à un écart de réglage en régime permanent, ce qui n'est pas acceptable. Une manière de contourner ce problème est de calculer les composantes X_I de l'intégrateur, directement à partir de la connaissance des sorties contrôlées Y et des consignes correspondantes Y_c . Cela ne peut être possible que si les intégrateurs sont placés sur des sorties contrôlées Y étant également des sorties observées Z . Par exemple, pour reprendre une interprétation physique, il est impossible de contrôler un débit à l'aval d'un système bief-vanne (sans écart de réglage en régime permanent) si ce débit n'est pas observé. En conclusion, tout intégrateur X_I doit être défini sur une sortie observée Z (devant être également une sortie contrôlée Y , par construction de l'intégrateur).

IV.5.4. Construction d'un observateur réduit

IV.5.4.1. Principes

L'observateur construit au paragraphe précédent est un observateur complet, c'est à dire qu'il reconstruit l'ensemble du vecteur d'état X . Or, certaines variables de ce vecteur d'état sont directement mesurées, contenues dans le vecteur Z des sorties observées. Il paraît inutile de reconstruire ces variables déjà connues. Pour cela, il est possible de définir un observateur d'état réduit, appelé également observateur de Luenberger, reconstruisant uniquement les variables inconnues (Bühler 1983, Leondes et al. 1972, 1974, Zeitz 1987). Cet observateur réduit a une structure plus complexe que l'observateur complet. Cependant, il permet de limiter les calculs matriciels et de restreindre les erreurs éventuelles d'observation à un nombre minimum de variables du vecteur d'état.

Nous définissons directement l'observateur réduit avec son observateur de prélèvements imprévus associé. Soit donc le système linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_s.X + B_s.U + B_p.U_p + B_i.U_i \\ Z &= D_s.X \end{aligned}$$

avec les notations des chapitres précédents.

Le vecteur d'état X comprend des variables observées, contenues dans le vecteur des sorties observées Z , et des variables inconnues devant être reconstruites par l'observateur réduit. Ces variables sont regroupées en deux sous-vecteurs X_1 et X_2 , par un changement de base :

$$X' = P.X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

où $X_1 = Z$ est l'ensemble des variables observées, X_2 l'ensemble des variables non observées et P la matrice de passage du changement de base. Donc :

$$\begin{aligned} \dot{X}'^+ &= P.A_s.P^{-1}.X' + P.B_s.U + P.B_p.U_p + P.B_p.U_i \\ Z &= X_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{X}'^+ &= A'_s.X' + B'_s.U + B'_p.U_p + B'_p.U_i \\ Z &= X_1 \end{aligned} \quad (64)$$

avec :

$$\begin{aligned} A'_s &= P.A_s.P^{-1} \\ B'_s &= P.B_s \\ B'_p &= P.B_p \end{aligned}$$

IV.5.4.2. Synthèse de l'observateur réduit

Les matrices A'_s , B'_s et B'_p sont décomposées en blocs :

$$A'_s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B'_s = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$B'_p = \begin{pmatrix} B_{p1} \\ B_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{p11} & B_{p12} \\ B_{p21} & B_{p22} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{Z}^+ &= X_1^+ = A_{12}.X_2 + A_{11}.Z + B_1.U + B_{p1}.U_p + B_{p1}.U_i \\ (0) \Leftrightarrow \dot{X}_2^+ &= A_{22}.X_2 + A_{21}.Z + B_2.U + B_{p2}.U_p + B_{p2}.U_i \\ Z &= X_1 \end{aligned}$$

Les équations d'état et de sortie du nouveau système réduit, de vecteur d'état X_2 , sont donc :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2^+ &= A_{22}.X_2 + A_{21}.Z + B_2.U + B_{p2}.U_p + B_{p2}.U_i && \text{équation d'état} \\ Z^+ &= A_{12}.X_2 + A_{11}.Z + B_1.U + B_{p1}.U_p + B_{p1}.U_i && \text{équation de sortie} \end{aligned}$$

L'observateur réduit d'état et de prélèvement imprévu est défini par :

$$\dot{\hat{X}}_2^+ = A_{22}.\hat{X}_2 + A_{21}.Z + B_2.U + B_{p2}.U_p + B_{p2}.\hat{U}_i + L.(Z^+ - \hat{Z}^+) \quad (65)$$

$$\hat{Q}_i^+ = \hat{Q}_i + L_i.(Z^+ - \hat{Z}^+) \quad (66)$$

On aimerait éliminer le terme $\hat{U}_i = \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \\ \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix}$ dans l'observateur d'état réduit (0) grâce à l'équation de l'observateur de prélèvements imprévus (0). Cette élimination a été faite dans le cas de l'observateur complet au chapitre IV.5.3.4.. Cependant, la structure plus complexe de l'observateur réduit rend cette élimination impossible.

Nous modifions donc légèrement la structure de l'équation du système réduit et de l'observateur associé en utilisant l'hypothèse asymptotique formulée au chapitre IV.5.2.4.. Appliquée au prélèvement imprévu Q_i , cette hypothèse indique que ses variations sont en forme d'échelon. Ainsi, Q_i peut prendre une nouvelle valeur à l'instant k_0 , et reste constant par la suite. En particulier $Q_i^+ = Q_i$. Sous cette hypothèse, les équations d'état et de sortie du système réduit deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_2^+ &= A_{22} \cdot X_2 + A_{21} \cdot Z + B_2 \cdot U + B_{p2} \cdot U_p + (B_{p21} + B_{p22}) \cdot Q_i && \text{équation d'état} \\ \hat{Z}^+ &= A_{12} \cdot X_2 + A_{11} \cdot Z + B_1 \cdot U + B_{p1} \cdot U_p + (B_{p11} + B_{p12}) \cdot Q_i && \text{équation de sortie} \end{aligned}$$

et l'observateur réduit d'état et de prélèvement imprévu associé :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_2^+ &= A_{22} \cdot \hat{X}_2 + A_{21} \cdot Z + B_2 \cdot U + B_{p2} \cdot U_p + (B_{p21} + B_{p22}) \cdot \hat{Q}_i + L \cdot (Z^+ - \hat{Z}^+) \\ \dot{\hat{Q}}_i^+ &= \hat{Q}_i + L_i \cdot (Z^+ - \hat{Z}^+) \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une forme standard des observateurs, on effectue le changement de variable :

$$\hat{X}_2' = \hat{X}_2 - L \cdot Z$$

$$\hat{Q}_i' = \hat{Q}_i - L_i \cdot Z$$

Alors, les observateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_2'^+ &= (A_{22} - L \cdot A_{12}) \cdot \hat{X}_2' + [(B_{p21} + B_{p22}) - L \cdot (B_{p11} + B_{p12})] \cdot \hat{Q}_i' \\ &\quad + (B_2 - L \cdot B_1) \cdot U + (B_{p2} - L \cdot B_{p1}) \cdot U_p \\ &\quad + [A_{22} \cdot L + A_{21} - L \cdot A_{12} \cdot L - L \cdot A_{11} + (B_{p21} + B_{p22}) \cdot L_i - L \cdot (B_{p11} + B_{p12}) \cdot L_i] \cdot Z \\ \dot{\hat{Q}}_i'^+ &= -L_i \cdot A_{12} \cdot \hat{X}_2' + [1 - L_i \cdot (B_{p11} + B_{p12})] \cdot \hat{Q}_i' - L_i \cdot B_1 \cdot U - L_i \cdot B_{p1} \cdot U_p \\ &\quad + [L_i - L_i \cdot A_{12} \cdot L - L_i \cdot A_{11} - L_i \cdot (B_{p11} + B_{p12}) \cdot L_i] \cdot Z \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\hat{X}}_2'^+ \\ \dot{\hat{Q}}_i'^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 - L \cdot b_1 \\ -L_i \cdot A_{12} & 1 - L_i \cdot b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{X}_2' \\ \hat{Q}_i' \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} B_2 - L \cdot B_1 & B_{p2} - L \cdot B_{p1} & a_2 \cdot L + a_1 + (b_2 - L \cdot b_1) \cdot L_i \\ -L_i \cdot B_1 & -L_i \cdot B_{p1} & L_i \cdot (1 - A_{12} \cdot L - A_{11}) - L_i \cdot b_1 \cdot L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ U_p \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

avec :

$$a1 = A_{21} - L \cdot A_{11}$$

$$a2 = A_{22} - L \cdot A_{12}$$

$$b1 = B_{p11} + B_{p12}$$

$$b2 = B_{p21} + B_{p22}$$

Cette forme standard de l'observateur permet de reconstruire le vecteur $\begin{pmatrix} \hat{X}_2' \\ \hat{Q}_i' \end{pmatrix}$ permettant lui même de reconstituer le vecteur $\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}$ par :

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} \hat{X}' \\ \hat{Q}_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} Z \\ \hat{X}_2' + L.Z \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_i' + L_i.Z \end{pmatrix}$$

IV.5.4.3. Convergence de l'observateur réduit

Vérifions que l'observateur réduit global (d'état et de prélèvements imprévus) est asymptotiquement stable. Pour cela, de la même manière qu'au chapitre IV.5.3.5., on calcule l'erreur d'observation $e_o = X_2 - \hat{X}_2$:

$$\begin{aligned} X_2^+ &= A_{22}.X_2 + A_{21}.Z + B_2.U + B_{p2}.U_p + (B_{p21} + B_{p22}).Q_i \\ \hat{X}_2^+ &= A_{22}.\hat{X}_2 + A_{21}.Z + B_2.U + B_{p2}.U_p + (B_{p21} + B_{p22}).\hat{Q}_i + L.(Z^+ - \hat{Z}^+) \\ \Rightarrow e_o^+ &= A_{22}.e_o + (B_{p21} + B_{p22}).(Q_i - \hat{Q}_i) - L.(Z^+ - \hat{Z}^+) \end{aligned}$$

Or :

$$Z^+ = A_{12}.X_2 + A_{11}.Z + B_1.U + B_{p1}.U_p + (B_{p11} + B_{p12}).Q_i$$

et par définition :

$$\begin{aligned} \hat{Z}^+ &= A_{12}.\hat{X}_2 + A_{11}.Z + B_1.U + B_{p1}.U_p + (B_{p11} + B_{p12}).\hat{Q}_i \\ \Rightarrow (Z^+ - \hat{Z}^+) &= A_{12}.e_o + (B_{p11} + B_{p12}).(Q_i - \hat{Q}_i) \\ \Rightarrow e_o^+ &= (A_{22} - L.A_{12}).e_o + [(B_{p21} + B_{p22}) - L.(B_{p11} + B_{p12})].(Q_i - \hat{Q}_i) \end{aligned}$$

On calcule également l'équation relative au prélèvement imprévu \hat{Q}_i :

$$\hat{Q}_i^+ = \hat{Q}_i + L_i.(Z^+ - \hat{Z}^+) = \hat{Q}_i + L_i.A_{12}.e_o + L_i.(B_{p11} + B_{p12}).(Q_i - \hat{Q}_i)$$

Le comportement asymptotique de l'observateur réduit global (d'état et de prélèvements imprévus) peut être étudié à partir de l'équation matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}^+ &= \begin{pmatrix} A_{22} - L.A_{12} & -(B_{p21} + B_{p22}) + L.(B_{p11} + B_{p12}) \\ L_i.A_{12} & 1 - L_i.(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_{p21} + B_{p22} - L.(B_{p11} + B_{p12}) \\ L_i.(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} Q_i \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}^+ &= A_e \cdot \begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} + B_e \\ \text{où } A_e &= \begin{pmatrix} A_{22} - L.A_{12} & -(B_{p21} + B_{p22}) + L.(B_{p11} + B_{p12}) \\ L_i.A_{12} & 1 - L_i.(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et } B_e = \begin{pmatrix} B_{p21} + B_{p22} - L_i(B_{p11} + B_{p12}) \\ L_i(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} Q_i$$

Le raisonnement appliqué au chapitre IV.5.3.5. peut encore s'appliquer ici. Il indique que si les modules des valeurs propres de A_e sont strictement inférieurs à 1 alors $1 - A_e$ est inversible et la suite affine $\begin{pmatrix} e_o \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix}$ converge. Sa limite à l'infini vérifie également (démonstration identique à celle du chapitre IV.5.3.5.) :

$$\begin{pmatrix} e_o^\infty \\ \hat{Q}_i^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_i^\infty \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A_e sont imposées par le choix des matrices L et L_i . Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{pmatrix} A_{22} - L_i A_{12} & -(B_{p21} + B_{p22}) + L_i(B_{p11} + B_{p12}) \\ L_i A_{12} & 1 - L_i(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{22} & -(B_{p21} + B_{p22}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L \\ -L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{12} & -(B_{p11} + B_{p12}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le problème est donc similaire à celui du chapitre IV.5.3.5.. Les matrices peuvent être calculées avec les mêmes algorithmes, et en particulier avec la fonction "place" de MatLab.

IV.5.5. Conclusion

Les gains de la commande optimale ont pu être calculés à partir de la modélisation linéaire du bief de canal, obtenue au chapitre II. Un intégrateur a été ajouté, sur plusieurs variables correctement choisies en fonction des objectifs de régulation, afin d'annuler les écarts statiques de réglage. L'hypothèse asymptotique a été faite, afin de conduire à des gains constants, et simplifier de ce fait la réalisation technique du contrôleur. La commande obtenue permet la poursuite d'objectifs variables ("tracking") et peut tenir compte de prédictions sur les prélèvements aux prises.

Un observateur complet, puis un observateur réduit ont été développés. Un observateur des prélèvements a été adjoint afin d'améliorer l'observation du vecteur d'état en cas de prélèvements inconnus. L'observateur global résultant a été démontré stable et convergent, dans les deux cas. L'hypothèse asymptotique a dû être faite dans le cas de l'observateur réduit d'état et de prélèvement.

