



UNIVERSITÉ DE NANTES

MASTER INFORMATIQUE

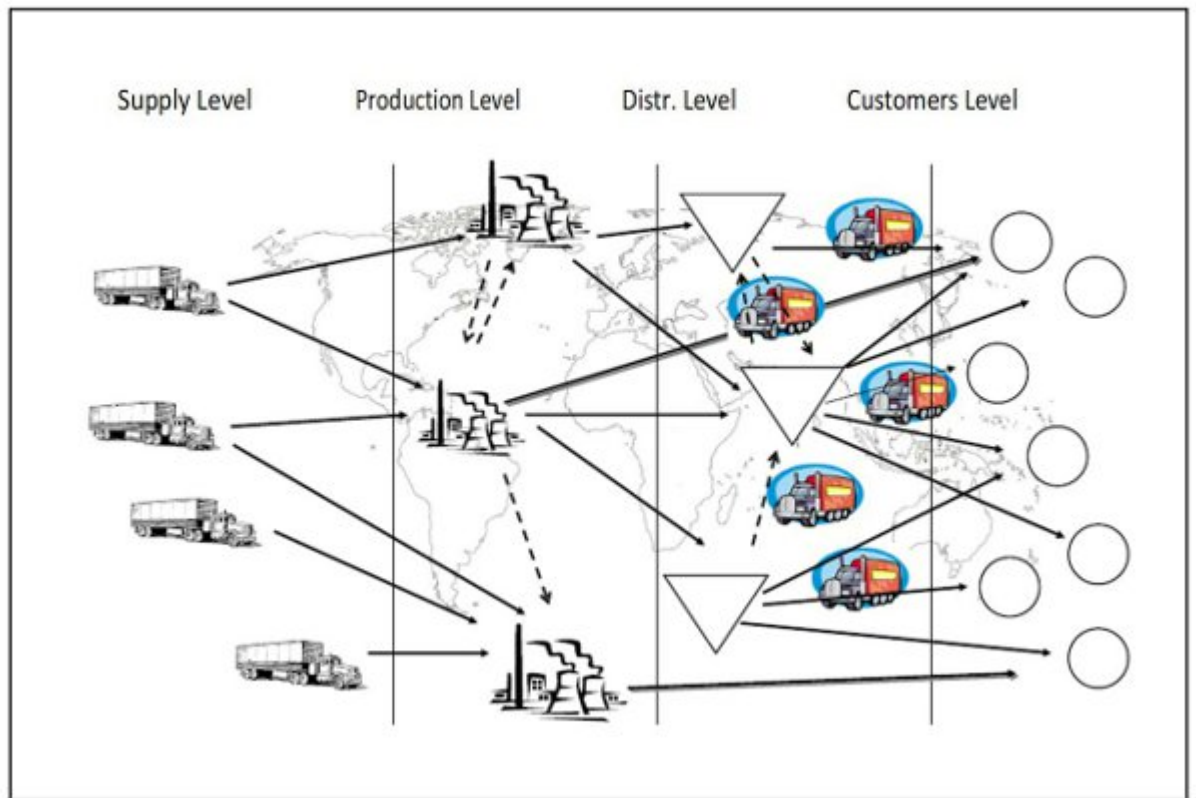
OPTIMISATION EN RECHERCHE  
OPERATIONNELLE

RAPPORT DE TER

---

**Problème combiné de localisation,  
routage et gestion des stocks**

---



Coulibaly SEYDOU

*Superviseur :* M. Olivier  
PETON

Janvier 2017 — Mai 2017

# 1 Introduction

Très longuement dans la littérature, des problèmes de Localisations, de Routages, ou d'Inventaires ont fut l'objet des thematiques de recherches dans plusieurs laboratoires et entreprise à travers le monde. Divers résultats ont été obtenus pour ces problèmes d'optimisation combinatoire notamment l'idée de l'association de plusieurs de ces problèmes (Localisation-Routage, Routage-Inventaire, Localisation-Inventaire) afin d'élaborer toujours de meilleures décisions strategiques, tactiques et operationnelles pour les entreprises. De la même idée (faire de meilleurs décisions), quelques experts ont eu l'idée de se pencher sur la combinaison des trois problèmes ci-dessus formant ainsi le LIRP (Location, Inventory and Routing Problem), un problème très present dans le domaine de la logistique pour les entreprises industrielles.

## Hypothèse I

Dans tout ce qui va suivre, on suppose qu'on dispose d'une usine, d'un ensemble de dépôts dispersés dans une region donnée et de plusieurs clients. Les produits sont fabriqués puis acheminés de l'usine aux dépôts où ils peuvent être stocker. L'usine peut ne pas être proche des dépôts et ces derniers assurent la livraison des produits au clients en fonction de leur demande et de leur état de stocks.

## Problème de Localisation

Dans ce problème, on s'intéresse à la localisation des dépôts à ouvrir parmi un nombre fini de depots, chacun ayant un coût d'installation et un espace (superficie) dans lequel il peut livrer ou fournir des clients. L'objectif est de minimiser le coût total d'installation des sites à ouvrir tout en s'assurant de satisfaire tous les clients sans exception. Il existe plusieurs variantes de ce problème dans la littérature parmi lesquelles des contraintes de capacités sur les dépôts à ouvrir.

## Problème de Routage

Le problème de routage est le problème dans lequel on cherche à trouver la route ayant la distance la plus minimale afin de l'emprunter. Chaque route passe par un ensemble de points qui peuvent être des dépôts ou des clients. Plusieurs variantes en existe comme le TSP (où un visiteur fait le tour d'un ensemble de ville en passant qu'une et une seule fois par une ville donnée), le VRP (Vehicule Routing Problem), CVRP (Capacited Vehicule Routing Problem) , etc. Chaque variante ajoute sa touche de contraintes.

## Problème d'Inventaire

Quant au problème d'inventaire, il cherche à décider de la quantité de commande à effectuer à un temps  $t$  pour satisfaire la demande des clients. Cette quantité est contraint par une capacité de stocks du site dans lequel il sera posé. Un coût est associé à chaque quantité de stockage ainsi qu'à chaque commande effectuée, l'objectif est de trouver cette quantité de commande au temps  $t$  minimisant le coût total sur un horizon fini. Plusieurs variantes en existe également.

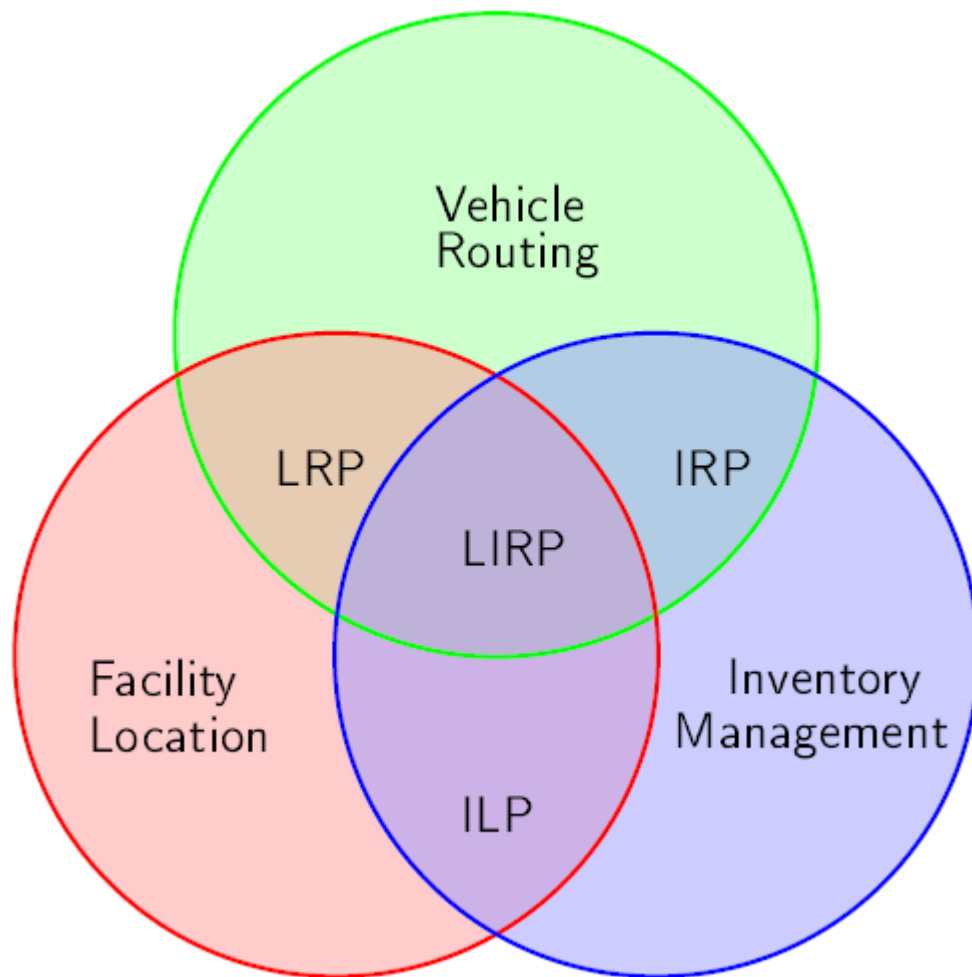


Figure 1: **Location + Inventory + Routing = LIRP** [5]

Mot-clés : problème d'inventaire, problème de localisation, problème de routage, heuristique, methodes exactes, CPLEX.

## 2 Modèle LIRP

Le premier modèle mathématiques connu du problème LIRP a été réalisé par *Liu and Lee* (2003) [3] puis en 2005 *Liu and Lin* [4] ont proposé une metaheuristique hybride (recherche tabou et recuit simulé) pour le résoudre. Des années évoluant, d'autres chercheurs s'y sont intéressé et ont présenté des solutions nouvelles comme *Ambrosino Scutella* (2005) [1], *Javid, A. A. and N. Azad* (2010) [2], *Guerrero et al* (2013) [6].

### 2.1 Topologie du modèle

Plusieurs variantes existant pour chacun des sous-problèmes formant le LIRP, un choix s'impose sur les types de contraintes à adopter et le modèle à élaborer. Le schema 2 ci-dessous illustre quelques variantes possible du modèle.

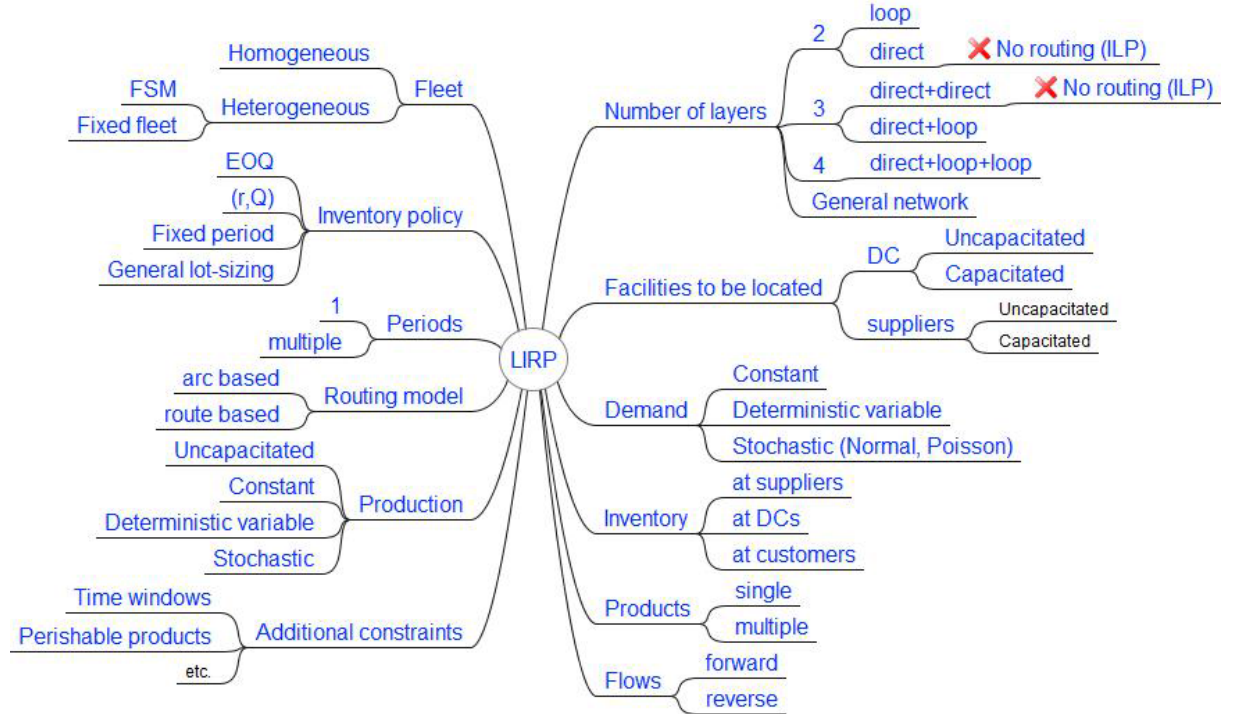


Figure 2: Topologie du modèle LIRP [5]

#### 2.1.1 Hypothèse II

A partir de l'Hypothèse I de l'introduction, on s'intéresse à un LIRP dont le nombre de couches est 3 (Usines, Dépôts et Clients). On associe une ca-

pacité de stocks à chaque Dépôt et client, des demandes variables dans le temps (plusieurs périodes) pour les Clients. Un seul produit transporté par des véhicules homogènes et on suppose également que l'emplacement ou coordonnées des 3 types de sites sont connues.

Graphiquement un exemple de solution de model LIRP est illustré dans le schema 3 ci-dessus à un temps  $t$  quelconque où on a une usine (en rouge), quelques dépôts ouverts (en rouge), et des clients (en bleu). Les routes utilisées sont représentées par des pointillés et tous les clients sont servis par exactement une route et un dépôt.

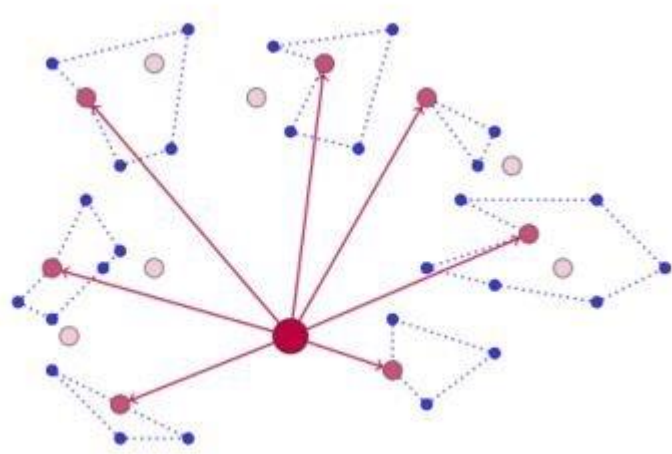


Figure 3: Exemple de solution possible de LIRP [5]

## 2.2 Formulation mathématiques

Cette formulation est issue du document de Olivier Peton [5] introduisant le Problème LIRP.

### 2.2.1 Notations

Ensemble	Définition
$I$	ensemble de clients
$J$	ensemble de centres de distributions ou dépôts
$P$	ensemble d'usines (1 usine ici)
$T = \{0, \dots,  T \}$	ensemble de periodes (days)
$K$	nombre de vehicule
$V$	ensemble de sites $V = P \cup I \cup J$
$V^*$	ensemble de dépôts et de clients $V^* = I \cup J$
$R$	ensemble de routes possible

Données	Définition
$f_j$	Coût fixe d'ouverture du dépôt $j \in J$
$Q$	Capacité du Vehicule (homogènes, qui sont de même taille)
$d_i^t$	Demande du client $i \in I$ au temps $t \in \{1, \dots,  T \}$
$h_i^t$	Coût de stockage d'une unité du site $i \in V^*$ au temps $t \in T$
$I_{i0}$	Inventaire initial $i \in V^*$
$c_j$	Coût de livraison de dépôt $j \in J$
$c_r$	Coût de livraison de la route $r \in R$
$\alpha_{ir}$	1 si la route $r \in R$ visite le site $i \in V^*$ . 0 sinon
$I_i^{max}$	Inventaire maximal du site $i \in V^*$

### 2.2.2 Variables

<i>Variables Binaires</i>	
$y_j$	$\rightarrow$ 1 si le dépôt $j$ is selectionné. 0 sinon
$z_r^t$	$\rightarrow$ 1 si route $r \in R$ est selectionnée au temps $t \in T$ . 0 sinon
$x_j^t$	$\rightarrow$ 1 si le dépôt $j \in J$ est selectionné au temps $t$ . 0 sinon
<i>variables Continues</i>	
$q_j^t$	$\rightarrow$ Quantité delivrée au dépôt $j \in J$ au temps $t \in T$
$u_{ir}^t$	$\rightarrow$ Quantité delivrée par la route $r \in R$ au client $i \in I$ dans le temps $t \in T$
$I_i^t$	$\rightarrow$ Inventaire du site $i \in I \cup J$ au temps $t \in T$

### 2.2.3 MIP defintion

$$\min \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{t \in T} \left( \sum_{j \in J} c_j x_j^t + \sum_{r \in R} c_r z_r^t + \sum_{t \in T} \sum_{i \in V^*} h_i^t I_i^t \right) \quad (1)$$



$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \in R} \alpha_{ir} z_r^t \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2)$$

$$q_j^t \leq Q x_j^t \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (3)$$

$$x_j^t \leq y_j \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} u_{ir}^t \leq Q z_r^t \quad \forall r \in R, t \in T \quad (5)$$

$$\sum_{r \in R} z_r^t \leq |K| \quad \forall t \in T \quad (6)$$

$$z_r^t \leq \sum_{j \in J} \alpha_{jr} y_j \quad \forall r \in R, \forall t \in T \quad (7)$$

$$I_j^{t-1} + q_j^t = I_j^t + \sum_{r \in R} \alpha_{jr} \left( \sum_{i \in I} u_{ir}^t \right) \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (8)$$

$$I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_{r \in R} u_{ir}^t - d_i^t \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (9)$$

$$I_i^t \leq \min(I_i^{max}, \sum_{\substack{t' < T \\ t' > t}} d_i^{t'}) \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (10)$$

$$I_j^t \leq I_j^{max} y_j \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (11)$$

$$u_{ir}^t \leq Q \alpha_{ir} \quad \forall i \in I, \forall r \in R, \forall t \in T \quad (12)$$

$$q_j^t \geq 0 \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (13)$$

$$u_{ir}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall r \in R, \forall t \in T \quad (14)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad (15)$$

$$z_r^t \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in R, \forall t \in T \quad (16)$$

$$x_{ij}^t \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (17)$$

$$I_i^t \geq 0 \quad \forall i \in V^*, \forall t \in T \quad (18)$$

$$(19)$$

La fonction objective (1) minimise le coût total : d'ouverture de sites, de la gestion de stocks et du coût de routage. La contrainte (2) fait état à ce que chaque client soit visité par au moins une route à un temps T. La contrainte (3) est une contrainte de capacité sur la quantité de distribution de dépôt qui dépasse pas la quantité maximale d'un vehicule. La contrainte (4) impose qu'un dépôt est distribué si et seulement s'il est ouvert. La contrainte (5) est une contrainte de capacité sur la quantité distribuée par une route qui ne dépasse pas celle d'un vehicule. La contrainte (6) impose une borne sur le nombre de route à utiliser à un instant T en fonction du nombre de vehicule. La contrainte (7) assure qu'une route passe par un et un seul depot ouvert si elle est selectionnée au temps T. La contrainte (8) est une conservation de flots d'inventaire au

niveau des dépôts. La contrainte (9) est une conservation de flots d'inventaire au niveau des clients. La contrainte (10) impose une borne supérieure sur la quantité de stocks des clients au temps  $T$ . La contrainte (11) impose une borne supérieure sur la quantité de stocks des dépôts au temps  $T$ . La contrainte (12) est une contrainte de capacité sur la quantité délivrée à un client connaissant la route et l'instant de livraison.

### 3 Implémentation

L'implémentation du modèle ci-dessus est réalisée en C à l'aide du solveur CPLEX. Les instances du problème étudiées lors des tests, sont composées de :

1. Cinq clients, trois dépôts en trois périodes
2. Cinq clients, cinq dépôts en cinq périodes
3. Cinq clients, cinq dépôts en sept périodes
4. Sept clients, cinq dépôts en cinq périodes
5. Quinze clients, cinq dépôts en cinq périodes

#### 3.1 Les données d'instances

Quant à la donnée d'instances, on dispose des éléments suivants en entrée :

- Nombre de clients
- Nombre de dépôts
- Nombre de périodes
- Nombre de véhicules
- Capacité du véhicule
- Coût par km
- Coût d'installation pour chaque dépôt
- Coût de commande pour chaque dépôt
- Quantité de stock initial pour chaque dépôt et client
- Quantité de stock maximal pour chaque dépôt et client
- Demande des clients en fonction du temps
- Coût de stockage d'une unité pour chaque dépôt et client en fonction du temps, on suppose que le coût de stockage change en fonction du temps
- Les coordonnées en deux dimensions des clients, dépôts et de l'usine.

La dernière étape de la préparation des données est la generation des routes assurant la livraison. Pour s'y faire plusieurs méthodes nous est offert comme la generation de toutes les combinaisons de routes possible, ce qui peut valoir des millions de routes lorsque la taille de l'instances augmente. Par ailleurs, on peut utiliser des heuristiques simples et limiter le nombre de routes à generer à un nombre de paramètre definit dans le fichier d'instances. Parmi ces paramètres, on peut citer :

{	CMAX	Nombre de clients maximal sur une route
	RMAX	Nombre de route maximale à generer
	LMAX	Coût maximal d'une route
	DMAX	Distance maximal entre un dépôt de livraison et son client

Lorqu'une route est generée, on teste si son coût est plus que LMAX et si c'est le cas, la route est abandonnée. En outre quand la distance entre un dépôt et un client est superieure à DMAX alors il n'existera aucune route reliant ces deux sites.

### Toutes les routes

Cette option est interessante uniquement lorsque le paramètre CMAX sur une route n'est pas assez élevé pour pouvoir resoudre le modèle dans un temps raisonnable. Le nombre de routes dans ce contexte vaut  $m * (2^{CMAX} - 1)$  dans le pire des cas où m est le nombre de dépôts. On genere pour chaque dépôt, de 1 client à CMAX clients, une route.

### Algorithme

```

for  $m \in \text{Depôt}$  do
  for  $e \in \text{ensemble de clients de taille } \leq CMAX$  do
    if  $\forall i \in e, \text{distance}(m, i) \leq DMAX$  then
      generer la route passant par m et e
    end if
  end for
end for

```

### heuristiques

Dans le reste des cas, on genere RMAX routes possible en fonction de CMAX et DMAX. Quatres heuristiques sont élaborer :

- Les routes choisis aleatoirement dans l'ensemble  $m * (2^{CMAX} - 1)$
- Les routes les plus courtes de 1 client à CMAX clients en s'arretant lorsque RMAX est atteint

- Les routes les plus longues de CMAX clients à 1 client en s'arretant lorsque RMAX est atteint
- Les routes par paquet : ici, on prend toutes les routes ,  $m * (2^{CMAX} - 1)$  en les fractionnant par paquet de taille RMAX. Les paquets sont construits aleatoirement. On lance le modèle sur chaque paquet de route et l'union des routes selectionnées pour chaque paquet forme " les routes generées " sur lesquelles le model est relancé pour avoir de bonnes solutions sinon la solution optimale. On constate que le dernier paquet peut avoir une taille plus petite que RMAX et peut arriver à provoquer la non faisabilité du modèle sur ce dernier.

**Remarque :**  $m * (2^{CMAX} - 1)$  est la taille de toutes les routes possible en fonction de l'instances d'entrée dans le pire des cas possible vu que grâce à DMAX, on élague certains routes de l'ensemble. La valeur de CMAX est toujours plus petit ou egale à n.

### 3.2 Exécution

Suite à la preparation de toutes les données necessaire au codage du model LIRP à partir d'une instance, CPLEX est executé afin de recuperer le coût total (coût d'installations des dépôts ouverts, coût de la gestion des stocks et le coût de routage pour effectuer la livraison) et les quantités distribuées en fonction du temps au niveau de chaque site. L'exemple ci-dessous provient d'une instance de cinq dépôts, de cinq clients en cinq periodes et l'heuristique choisit pour la generation des routes est aleatoire.

Coût d'installation	4788	4846	4841	4878	4832
---------------------	------	------	------	------	------

Coût de commande	500	500	100	500	500
------------------	-----	-----	-----	-----	-----

Inventaire initiale	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
---------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Inventaire maximal	20	12	7	5	2	10	5	6	8	9
--------------------	----	----	---	---	---	----	---	---	---	---

Coût de stockage valant 1 pour tous les clients et dépôts										
-----------------------------------------------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Demande	T1	T2	T3	T4	T5
11	3	16	7	12	
10	12	6	11	7	
8	4	10	0	3	
12	11	11	11	12	
9	17	11	11	11	

Coordonnées	X	Y
	95.00	61.00
	2.00	7.00
	78.00	31.00
	95.00	6.00
	59.00	55.00
	16.00	44.00
	89.00	69.00
	61.00	75.00
	75.00	70.00
	32.00	84.00
	75.00	11.00
Paramètres	Identifiant	Valeur
	Q	21
	K	5
	Coût par km	350
	RMAX	100
	CMAX	5
	DMAX	100
	LMAX	6000

Le nombre de routes possible dans l'initiale sans élaguation est :  $m * (2^{C_{MAX}} - 1) = 155$ , ce qu'est plus grand que RMAX, ainsi une generation total de toutes les routes au nombre de 155 est impossible. Comme le choix d'heuristique aleatoire est choisit, on genere alors RMAX (100) routes parmi les 155 de manière complement aleatoire. Après exécution de CPLEX sur le model, on obtient un coût total de 39267.09 dont :

#### Les depôts ouverts

Depôt 1	Periode	Stock	Quantité reçu
	Periode 1	0	21
	Periode 2	0	21
	Periode 3	0	
	Periode 4	0	
	Periode 5	0	
Depôt 2	Periode	Stock	Quantité reçu
	Periode 1	0	18
	Periode 2	0	21
	Periode 3	0	21
	Periode 4	0	21
	Periode 5	0	21

Depôt 3	Periode	Stock	Quantité reçu
	Periode 1	0	21
	Periode 2	0	19
	Periode 3	0	21
	Periode 4	0	21
	Periode 5	0	

### Etat des clients

Client 1	Periode	Stock	Quantité reçu	Via Route et Depôt
	Periode 1	12	21	Route 6 et Depôt 3
	Periode 2	9		
	Periode 3	14	21	Route 6 et Depôt 3
	Periode 4	12	5	Route 67 et Depôt 3
	Periode 5	0		

Client 2	Periode	Stock	Quantité reçu	Via Route et Depôt
	Periode 1	3	11	Route 54 et Depôt 2
	Periode 2	12	21	Route 79 et Depôt 2
	Periode 3	6		
	Periode 4	7	12	Route 54 et Depôt 2
	Periode 5	0		

Client 3	Periode	Stock	Quantité reçu	Via Route et Depôt
	Periode 1	0	6	Route 82 et Depôt 1
	Periode 2	6	10	Route 82 et Depôt 1
	Periode 3	0	4	Route 19 et Depôt 2
	Periode 4	0		
	Periode 5	0	3	Route 19 et Depôt 2

Client 4	Periode	Stock	Quantité reçu	Via Route et Depôt
	Periode 1	5	15	Route 82 et Depôt 1
	Periode 2	5	11	Route 82 et Depôt 1
	Periode 3	0	6	Route 19 et Depôt 2
	Periode 4	5	16	Route 67 et Depôt 3
	Periode 5	0	7	Route 19 et Depôt 2

Client 5	Periode	Stock	Quantité reçu	Via Route et Depôt
	Periode 1	0	7	Route 54 et Depôt 2
	Periode 2	2	19	Route 80 et Depôt 3
	Periode 3	2	11	Route 19 et Depôt 2
	Periode 4	0	9	Route 54 et Depôt 2
	Periode 5	0	11	Route 19 et Depôt 2

Au final, 11 routes sont sélectionnées durant l'exécution de CPLEX :

- Periode 0 ROUTE 6 visiting clients : 0 (cost 657.95)
- Periode 0 ROUTE 54 visiting clients : 1 4 (cost 2769.69)
- Periode 0 ROUTE 82 visiting clients : 2 3 (cost 1996.16)
- Periode 1 ROUTE 79 visiting clients : 1 (cost 2700.83)
- Periode 1 ROUTE 80 visiting clients : 4 (cost 657.95)
- Periode 1 ROUTE 82 visiting clients : 2 3 (cost 1996.16)
- Periode 2 ROUTE 6 visiting clients : 0 (cost 657.95)
- Periode 2 ROUTE 19 visiting clients : 2 3 4 (cost 2367.97)
- Periode 3 ROUTE 54 visiting clients : 1 4 (cost 2769.69)
- Periode 3 ROUTE 67 visiting clients : 0 3 (cost 2159.76)
- Periode 4 ROUTE 19 visiting clients : 2 3 4 (cost 2367.97)

**Remarque :** Lors de la réalisation de la generation des routes, un TSP a été mis en place pour connaitre exactement l'ordre à laquelle le vehicule se deplace sur une route donnée. Ce TSP a été effectué en utilisant le solveur exacte CPLEX.

## 4 Conclusion

Les travaux présentés dans ce rapport abordent la combinaison des problèmes de localisations, de routage et de la gestion des stocks. L'objectif était de modéliser le modèle LIRP issu du document [5] à l'aide du solveur CPLEX afin d'observer les solutions obtenues. L'approche utilisée pour réaliser cet objectif, a été de préparer les données nécessaires au vu du modèle et d'implémenter ce dernier.

La première partie du travail consistait à faire des choix sur la topologie du problème à utiliser et de créer des instances. La seconde, s'est généralement basée sur la génération des routes possibles existant entre les dépôts et les clients. Et finalement la dernière partie a été consacrée à l'implémentation proprement parlant du modèle avec le solveur CPLEX. Parallèlement à mon travail, un autre étudiant sous la tutelle de mon superviseur étudie le même problème et implémente un second modèle (décrit dans le document [5]) en utilisant le langage JAVA. Ce travail servira également de support pour son projet et lui évitera de générer des routes qu'il pourra récupérer et lancer son modèle.

Pour conclure sur les perspectives, une comparaison est à mener sur une solution du problème LIRP et des problèmes Localisation-Routage, Routage-Inventaire, Localisation-Inventaire afin d'évaluer la nécessité et la qualité d'une telle combinaison de problème. Aussi il serait intéressant de comparer les résultats à celui d'autres experts du domaine implémentant le modèle LIRP même s'ils ont des topologies différentes.



## References

- [1] D. Ambrosino and M. G. Scutella. Distribution network design: New problems and related models. 2005.
- [2] A. A. Javid and N. Azad. Incorporating location, routing and inventory decisions in supply chain network design. 2010.
- [3] S. C. Liu and S. B. Lee. A two-phase heuristic method for the multi-depot location routing problem taking inventory control decisions into consideration. 2003.
- [4] S. C. Liu and C. C. Lin. A heuristic method for the combined location routing and inventory problem. 2005.
- [5] Olivier Peton. Description problem lrp. page 22, 2016.
- [6] William Javier GUERRERO RUEDA. *Modèles et méthodes d'optimisation pour le problème de localisation- routage avec contraintes de stockage*. PhD thesis, Thèse en cotutelle avec la Universidad de Los Andes - Bogota - Colombie, 2014.