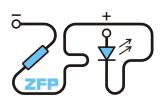
Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum



Úloha č. A20

Název úlohy: Fourierovská infračervená spektroskopie

Jméno: Michal Grňo Obor: FOF

Datum měření: 4. 11. 2019 Datum odevzdání: 17. 11. 2019

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0-3	
Teoretická část	0-2	
Výsledky a zpracování měření	0-9	
Diskuse výsledků	0-4	
Závěr	0-1	
Použitá literatura	0-1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne:

1 Pracovní úkoly

- 1. Proměřte rotačně-vibrační absorpční spektrum oxidu uhelnatého ve spektrální oblasti 2000 2500 cm⁻¹. Polohy absorpčních pásů zpracujte graficky a lineární regresí určete parametry vystupující v modelu pružného rotátoru pro základní vibrační stav molekuly a první excitovaný vibrační stav. Z těchto parametrů určete vzdálenosti jader uhlíku a kyslíku v základním a prvním excitovaném vibračním stavu.
- 2. Spočtěte teplotní a tlakové rozšíření absorpčních pásů, určete rozdíl vibrační frekvence pro isotopomery $^{12}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$ a $^{13}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$. Porovnejte tyto hodnoty s rozlišením použitého spektrálního přístroje.
- 3. Změřte spektrum bez vzorku, určete oblasti absorpce oxidu uhličitého a vodních par v optické dráze spektrometru. Interpretujte nejvýraznější pásy absorpce CO_2 .
- 4. Proměřte spektra propustnosti polyetylénové a polypropylénové folie a interpretujte nejvýraznější pásy.
- 5. Proměřte spektra propustnosti a odrazivosti skleněné a safírové destičky. Diskutujte rozdíl mezi oběma vzorky.

2 Teoretická část

2.1 Úvod

Infračervená spektroskopie je nástroj používaný k identifikaci molekul přítomných v látce podle módů jejich mechanických kmitů. Konkrétně Fourierovská infračervená spektroskopie detekuje změny ve spektru průchozího elektromagnetického záření způsobené interakcí s kmitající molekulou.

U jednoduchých molekul lze v jejich spektru pozorovat tři charakteristické oblasti – nízkofrekvenční pás P odpovídající oblasti, kde se rotační energie a energie fotonu skládají, střední pás Q odpovídající vibračním přechodům beze změny rotačního stavu (a kvantového čísla J), vysokofrekvenční oblast R, kde energie fotonů přispívá jak vibračním, tak rotačním stavům. [1]

2.2 Energie pásů

Z vlnočtu pásů, který naměříme pomocí spektroskopie, lze snadno vypočítat jejich energii:

$$E = hc\tilde{\nu},\tag{1}$$

kde h je Planckova konstanta, c rychlost světla a $\tilde{\nu} = \lambda^{-1}$ vlnové číslo. U dvouatomové molekuly pro energii odpovídající pásům P a R při stavu J v excitovaném stavu platí vztah:

$$\frac{R_J - P_J}{2J + 1} \frac{1}{h} = (2B_1 - 3D_1) - D_1 (2J + 1)^2,$$
(2)

a pro molekuly v základním stavu:

$$\frac{R_{J-1} - P_{J+1}}{2J+1} \frac{1}{h} = (2B_0 - 3D_0) - D_0 (2J+1)^2,$$
(3)

kde B_0, B_1, D_0, D_1 jsou konstanty charakteristické pro danou molekulu [1]. Pokud známe závislosti $R_J(J)$ a $P_J(J)$, tyto konstanty lze určit lineární regresí z rovnic (2) a (3).

2.3 Vzdálenost jader

Z [1] víme, že pro dvouatomové molekuly platí $I = \mu r^2$ a $B = h/(8\pi^2 I)$, kde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ je redukovaná hmotnost molekuly, I je moment setrvačnosti molekuly, r je vzdálenost jader atomů a m_1, m_2 jsou hmotnosti jejich jader. Z těchto rovnic si můžeme vyjádřit r jako funkci m_1, m_2 a B:

$$r = \sqrt{\frac{1}{B} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{h}{8\pi^2}}. (4)$$

Předpokládáme, že hmotnosti atomů je možné z tabulek vyčíst s libovolnou přesností, proto je chyba r určena pouze chybou B:

$$\Delta r = \left| \frac{\partial r}{\partial B} \, \Delta B \right| = r \, \frac{1}{2} \, \frac{\Delta B}{B}. \tag{5}$$

Protože B známe pro základní i excitovaný stav z rovnic (2) a (3), můžeme použít rovnici (4) pro výpočet vzdálenosti jader atomu při základním a excitovaném stavu.

 $^{^1}$ Nízkofrekvenční pás P bude v nižších hodnotách $f \propto \tilde{\nu},$ v grafu to ovšem znamená, že bude vpravo...

 $^{^2...}$ pás R bude naopak mít vysoké hodnoty $\tilde{\nu}$ a v grafu bude vlevo.

2.4 Rozlišení (teplotní a tlakové)

Je-li elektronový systém molekul v základním stavu (což je typické pro CO a CO_2 za obvyklých podmínek), přirozené šířky pásů jsou velice malé a pozorovaná šířka je téměř výhradně způsobená pohybem molekuly a jejími srážkami s okolními molekulami. [1]

První ze zmíněných jevů – rozšíření pásu vlivem pohybu molekuly – je způsoben Dopplerovým posunem procházejícího paprsku vzhledem k letící molekule a závisí výhradně na teplotě vzorku. Rozšířený pás má Lorentzovský profil a pro jeho FWHM³ platí vztah:

$$\delta \tilde{\nu}_T = \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \sqrt{\frac{8kT}{m} \ln 2},\tag{6}$$

kde $\tilde{\nu}_0$ je vlnočet maxima, c rychlost světla, k Boltzmannova konstanta, m hmotnost molekuly a T je teplota vzorku. [1]

Druhým jevem, který má vliv na rozšíření pásu, jsou srážky s okolními molekulami. Toto rozšíření je pro *čistý jednomolekulový plyn* závislé výhradně na tlaku, má opět Lorentzovský profil a pro jeho FWHM platí vztah⁴:

$$\delta \tilde{\nu}_p = 2\gamma p,\tag{7}$$

kde p je tlak plynu a γ je pološířka rozšíření (HWHM) na jednotku tlaku charakteristická pro daný plyn – tu je možné vyčíst v tabulkách.

Protože konvolucí dvou Lorentzových funkcí o pološířkách ℓ_1 a ℓ_2 dostaneme Lorenzovu funkci o pološířce $\ell = \ell_1 + \ell_2$ [2], bude pro šířku pásu platit

$$\delta \tilde{\nu} = \delta \tilde{\nu}_T + \delta \tilde{\nu}_p. \tag{8}$$

V experimentu chceme určit, zda je možné odlišit od sebe dva izotopology⁵ $^{12}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$ a $^{13}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$. Z [1] víme, že pro úhlovou frekvenci platí $\omega = \sqrt{f/\mu}$, tedy $\tilde{\nu} \propto \mu^{-1/2}$. Známe-li tedy vlnočet nějakého pásu $\tilde{\nu}_A$ pro první z izomerů a redukované hmotnosti obou izomerů μ_A, μ_B , můžeme snadno spočítat vlnočet téhož pásu pro druhý z izomerů $\tilde{\nu}_B = \tilde{\nu}_A \sqrt{\mu_A/\mu_B}$. Rozdíl mezi vlnočty izomerů tedy bude:

$$\Delta \tilde{\nu} = |\tilde{\nu}_A - \tilde{\nu}_B| = \tilde{\nu}_A \left| 1 - \sqrt{\frac{\mu_A}{\mu_B}} \right| \tag{9}$$

Pásy izomerů považujeme za od sebe rozlišitelné, pokud se vlnočty jejich maxim od sebe liší více než o $\delta \tilde{\nu}$, tedy $\Delta \tilde{\nu} > \delta \tilde{\nu}$. Po dosazení z rovnic (6) a (7) a drobné úpravě dostáváme nerovnost, která je naší podmínkou rozlišitelnosti izotopologů:

$$\left| 1 - \sqrt{\frac{\mu_A}{\mu_B}} \right| > \sqrt{\frac{8kT}{mc^2} \ln 2} + \frac{2\gamma p}{\tilde{\nu}}. \tag{10}$$

2.5 Tabulkové hodnoty

Hmotnosti významných izotopů uhlíku a kyslíku jsme převzali z [3]:

izotop	m [u]
$^{12}\mathrm{C}$	12.000000
$^{13}\mathrm{C}$	13.003355
$^{16}\mathrm{O}$	15.994915
^{17}O	16.999132

Tabulka 1: Hmotnosti izotopů C a O

Z těchto je hned možné vypočítat redukované hmotnosti izotopologů oxidu uhelnatého:

$$\begin{array}{c|c} \textbf{izotopolog} & \mu \ [\textbf{u}] \\ \hline & ^{12}\text{C}^{16}\text{O} & 6.856209 \\ \hline & ^{13}\text{C}^{16}\text{O} & 7.172413 \\ \end{array}$$

Tabulka 2: Redukované hmotnosti izotopologů CO

Pro převod z atomových jednotek na jednotky SI platí následující vztah:

$$1 u = 1.6605390666050 \cdot 10^{-27} kg \tag{11}$$

 $^{^3{\}rm FWHM}={\rm pln\acute{a}}$ šířka v polovině maxima

 $^{^4}$ Vztah buď vyčíst v tabulkách, nebo vyvodit z obecného vztahu 2.25 v [1] po dosazení odpovídajících hodnot, tedy $T_{REF} = T$ a $n_c = n$

⁵Izotopology jsou molekuly, které jsou totožné až na izotopové záměny.

2.6 Chyba nepřímého měření

Pozn.: Všude, kde není uvedeno jinak, využíváme toho, že jsou chyby malé a pro chybu nepřímého měření tedy platí:

$$f = f(x_1, x_2, \dots)$$

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}$$
 (12)

3 Výsledky měření

3.1 Oxid uhelnatý (CO)

Jako první vzorek jsme měřili transmitanci kyvety se stěnami z CaF_2 obsahující CO pod tlakem 7 mbar. Měření bylo předem kalibrováno na transmitanci vzduchu a probíhalo na rozsahu 2000 až $2500\,\mathrm{cm}^{-1}$ při rozlišení $0.35\,\mathrm{cm}^{-1}$. Protože se mezi kalibrací a měřením změnil podíl CO_2 v měřeném prostoru, bylo kromě spektra CO viditelné i spektrum CO_2 . V obou případech byla jasně rozlišitelná pásma P a R, pásmo Q nebylo pozorováno. Zatímco v případě CO jsou jasně rozlišitelná absorpční maxima odpovídající pásům P_J a R_J pro celočíselné hodnoty J, spektrum CO_2 vykazuje určitou míru překryvu a jeho maxima nejsou jasně oddělená. Naměřené spektrum bylo zaneseno do grafu na obrázku č. 1.

Naměřená absorpční maxima jsme potom odstředu očíslovali a jejich vlnočet jsme převedli na energii podle vzorce (1). Pás P začíná od jedničky $P_1 = 4.288 \cdot 10^{-20} \, \mathrm{J}$ a pokračuje k vyšším hodnotám (v grafu doleva), pás R začíná od nuly $R_0 = 4.280 \cdot 10^{-20} \, \mathrm{J}$ a pokračuje k nižším hodnotám (v grafu doprava). Takto vypočtené a očíslované energie P_J a R_J jsme v závislosti na jejich kvantovém čísle J vynesli do grafu na obrázku č. 2 nahoře.

Následně jsme podle vzorců (2) a (3) vynesli závislost $(P_a - R_b) / h (2J + 1)$ na $(2J + 1)^2$ do grafu na obrázku č. 2 dole. Pomocí lineární regrese metodou nejmenších čtverců jsme nalezli konstanty B_0, B_1, D_0, D_1 .

veličina & jednotky		$\mathbf{hodnota}$	
$2B_1 - 3D_1$	$[10^{11}\mathrm{s}^{-1}]$	1.14238	± 0.00008
$2B_0 - 3D_0$	$[10^{11}\mathrm{s}^{-1}]$	1.15287	$\pm\ 0.00012$
D_1	$[10^5 \mathrm{s}^{-1}]$	1.83	± 0.10
D_0	$[10^5 \mathrm{s}^{-1}]$	1.82	± 0.17
B_1	$[10^{10}\mathrm{s}^{-1}]$	5.7119	$\pm \ 0.0004$
B_0	$[10^{10}\mathrm{s}^{-1}]$	5.7644	± 0.0006

Tabulka 3: Konstanty charakteristické pro molekulu CO získané regresí. První čtyři řádky odpovídají přímo parametrům fitu dle rovnic (2) a (3), poslední dva řádky jsme dostali prostým vyjádřením B.

Poté jsme použili známé redukované hmotnosti z tabulky č. 2 a pomocí vzorce (4) jsme vypočetli vzdálenost jader v molekule CO. Protože v grafu na obrázku č. 1 nebyl pozorován žádný izotopolog, bez dalších informací nebylo jednoznačné, o který izotop uhlíku se jedná. Výpočet r jsme tudíž provedli pro $^{1}2\text{C}^{1}6\text{O}$, i pro $^{1}3\text{C}^{1}6\text{O}$. Protože je ale izotop $^{1}2\text{C}$ mnohem běžnější, velice pravděpodobně jsou správné hodnoty $r_{12.0}$ a $r_{12.1}$.

vel.	$[10^{-10}\mathrm{m}]$		
$r_{12,0}$	1.13081	± 0.00006	
$r_{12,1}$	1.13599	$\pm \ 0.00004$	
$r_{13,0}$	1.10560	$\pm \ 0.00006$	
$r_{13,1}$	1.11067	$\pm\ 0.00004$	

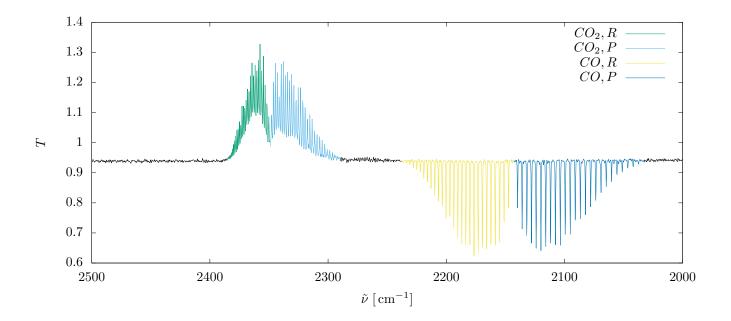
Tabulka 4: Vzdálenosti jader izotopologů CO v základním a excitovaném stavu.

Izotopology $^12\text{C}^16\text{O}$ a $^13\text{C}^16\text{O}$ jsme nepozorovali, bylo by tedy vhodné ověřit, zda jsou vůbec za našich podmínek rozlišitelné. Pásy CO jsme pozorovali mezi $\tilde{\nu}=2040$ a 2230. Podle (9) vypočteme, že maxima izotopologů by od sebe měla být vzdálena:

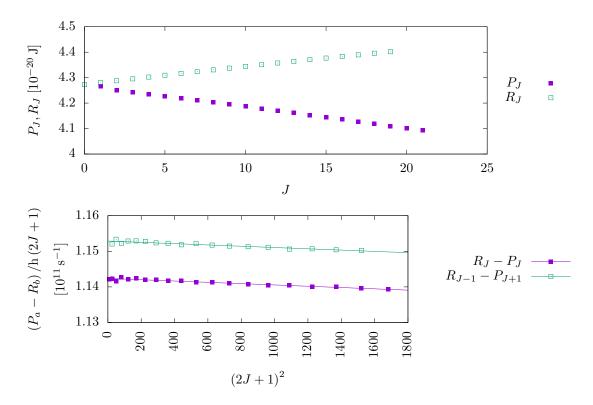
$$\Delta \tilde{\nu} \approx 2130 \,\mathrm{cm}^{-1} \left| 1 - \sqrt{\frac{\mu(^{12}C^{16}O)}{\mu(^{13}C^{16}O)}} \right| \approx 2130 \cdot 0.022 \,\mathrm{cm}^{-1} \approx 50 \,\mathrm{cm}^{-1}.$$
 (13)

To je o několik řádů vyšší než rozlišení přístroje, které je $0.35\,\mathrm{cm}^{-1}$. Rozlišení přístroje tedy pozorování izotopologů nebrání.

⁶Maxima absorpce, tj. minima naměřené intenzity.



Obrázek 1: Měření transmitance kyvety s oxidem uhelnatým (CO). Postupně vidíme (zleva) pásy R a P oxidu uhličitého (CO₂), pásy R a P oxidu uhelnatého (CO). Pás Q pozorovatelný nebyl.



Obrázek 2: Energie pásů P a R v CO. V horním grafu jsou vyznačeny energie spektrálních čar CO (viz graf v obrázku č. 1) v závislosti na jejich kvantovém čísle J. V obou pásech roste J směrem od středu pozorovaného obrazce ven, v pásu P má první absorpční maximum J=1, v pásu R má první maximum J=0. Ve spodním grafu potom vidíme závislost z rovnic (2) a (3) proloženou přímkou.

Vypočteme ještě teplotní a tlakové "rozostření". Podle vzorce (6) platí:

$$\delta \tilde{\nu}_T \approx (2130 \,\mathrm{cm}^{-1}) \,\sqrt{300 \,\mathrm{K}} \,\sqrt{\frac{8\mathrm{k}}{m_{CO} \,c^2} \ln 2} \approx 0.005 \,\mathrm{cm}^{-1}.$$
 (14)

Podle vzorce (7), kde $\gamma \approx 0.05\,\mathrm{cm^{-1}/bar}$ [1] a $p=7\,\mathrm{mbar}$ platí:

$$\delta \tilde{\nu}_p \approx 0.05 \cdot 0.007 \,\mathrm{cm}^{-1} \approx 4 \cdot 10^{-5} \,\mathrm{cm}^{-1}.$$
 (15)

Je tedy zřejmé, že $\delta \tilde{\nu}$ je řádově menší než $\Delta \tilde{\nu}$ a podmínka rozlišitelnosti izomerů (10) je splněna.

3.2 Vzduch a polymerové folie

Dále jsme měřili bez vzorku a kalibrace transmitanci vzduchu od $\tilde{\nu}=500$ do $4500\,\mathrm{cm}^{-1}$. Naměřené pektrum je v grafu na obrázku č. 3. Zajímavé oblasti byly: P-R pásy CO₂ na 2400; P-Q-R pásy CO₂ na 600; husté lesy čar mezi 3500-4000 a mezi 1300-2000 patřící vodním parám. Chaotická povaha čar naznačuje, že molekuly vody vibrují mnohem složitěji – například kvůli častým interakcím s ostatními molekulami H₂O pomocí vodíkových můstků.

Poté jsme již s kalibrací měřili transmitanci tří různých polymerových folií na rozsahu $\tilde{\nu}=500$ až $4000\,\mathrm{cm}^{-1}$, jejich spektra jsou v grafu na obrázku č. 4. V grafu jsou jasně vidět rysy způsobené proměnlivostí složení vzduchu – obě oblasti odpovídající vodním parám i obě oblasti odpovídající $\mathrm{CO_2}$ jsou pozorovatelné ve spektru folií. Všechny tři folie byly vyrobeny buďto z polyetylenu (PE), nebo z polypropylenu (PP), naším cílem je interpretovat významné rysy spekter jednotlivých vzorků a určit, který vzorek byl vyroben z jakého materiálu. Klíčová indície k rozlišení materiálů je, že PE je ztvořen dlouhými řetězci — $\mathrm{CH_2}$ —, zatímco PP má složitější řetězec — $\mathrm{CH}(\mathrm{CH_3})$ – $\mathrm{CH_2}$ —.

Prvním výrazným rysem je téměř úplná absorpce světla v oblasti 2840 až 2970 cm⁻¹, a to u všech tří vzorků. Zatímco vzorky 1 a 2 zablokovaly v této oblasti všechno světlo a lze u nich pozorovat pouze dlouhé plateau s T=0, u vzorku 3 vidíme, že se ve skutečnosti jedná o dvě absorpční maxima: první $\tilde{\nu}=2920\,\mathrm{cm}^{-1}$ odpovídá antisymetrickým valenčním kmitům " $\nu_{\rm as}$ " skupiny —CH₂— a druhé $\tilde{\nu}=2850\,\mathrm{cm}^{-1}$ odpovídá jejím symetrickým valenčním kmitům " $\nu_{\rm s}$ ". [1]. Skupina —CH₂— je společná polyetylenu i polypropylenu. PP má navíc skupinu —CH₃, jejíž valenční kmity by odpovídaly maximům na 2960 cm⁻¹ a 2870 cm⁻¹. Vidíme, že vzorek 3 zřejmě taková maxima nemá, což je evidence pro to, že byl vyroben z PE. Druhé dva vzorky mají v této oblasti plateau, nemůžeme o nich tedy zatím říci nic.

Další oblastí, která stojí za zmínku, je maximum vzorku 1 na 2723 cm⁻¹. Toto maximum se za pomoci tabulek v [1] nepodařilo vysvětlit.

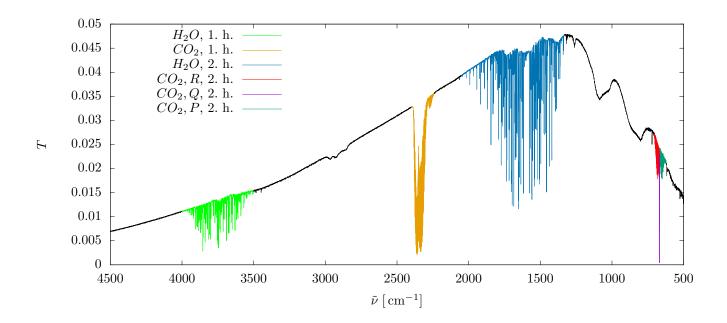
Následuje oblast 1500 až 700 cm⁻¹, kde je výskyt maxim hojný. Nejprve je zde oblast 1475 až 1430 – vzorky 1 a 2 tu opět mají plateau, vzorek 3 dvojici peaků 1473 cm⁻¹ a 1462 cm⁻¹. Tyto jsou nejblíže tabulkovým maximům 1470 pro nůžkovou deformaci " δ " skupiny —CH₂— a 1465 pro asymetrickou deformaci " δ as" skupiny —CH₃ [1]. To by napovídalo, že vzorek 3 obsahuje i skupinu —CH₃, o vzorcích 1 a 2 stále nic říci nemůžeme.

Dále je zde maximum 1377, které sdílí vzorek 1 a 2. Toto maximum nejlépe odpovídá tabulkovému maximu $\tilde{\nu}=1375\,\mathrm{cm^{-1}}$ pro symetrické deformace " δ_{s} " skupiny —CH₃. To je evidence pro přítomnost —CH₃ skupiny ve vzorcích 1 a 2 a její absenci ve vzorku 3. Maximum vzorku 1 je vysoké 0.62, maximum vzorku 2 je vysoké 0.30. To lze vysvětlit tak, že vzorek 1 obsahuje větší množství —CH₃ skupin než vzorek 2.

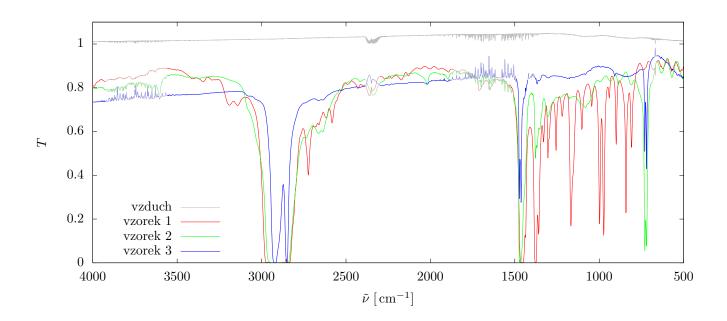
V oblasti 1330 až 800 cm $^{-1}$ má vzorek 1 les maxim, nejvýraznější z nich jsou 1168, 998, 973 a 841. Vzorek 3 zde má naopak téměř ploché spektrum. Vzorek 2 má v této oblasti spektrum "kopcovité", se vzorkem 1 sdílí pouze jedno maximum $\tilde{\nu}=1303\,\mathrm{cm}^{-1}$ (kroutivá deformace " τ " skupiny $-\mathrm{CH}_2$ —[1]), jinak se jeví nahodile. V tabulkách v [1] se nepodařilo najít vysvětlení tohoto hojného výskytu maxim, pravděpodobně je ale výsledkem komplexních interakcí mezi několika různými funkčními skupinami – tj. něco, co bychom čekali u PP a nečekali u PE.

Poslední dvojici maxim sdílí vzorky 2 a 3. Jeden peak se nachází na $\tilde{\nu} = 730\,\mathrm{cm}^{-1}$, druhý na 720 cm⁻¹. Druhé maximum odpovídá kolébavé deformaci " ϱ " skupiny —CO₂. Vzorek 1 má v této oblasti ploché spektrum.

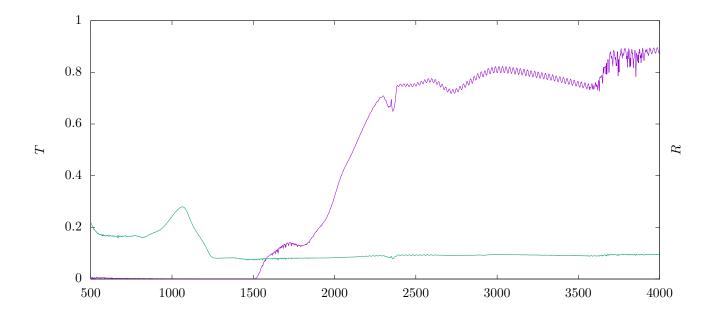
Shrneme-li nyní pozorované rysy, dospějeme k následujícímu závěru: vzorky 1 a 3 jsou si nejméně podobné, vzorek 2 sdílí některé rysy se vzorkem 1 a některé se vzorkem 3. Vzorek 1 splňuje nejvíce kritérií, která by měl splňovat PP (jmenovitě maximum na $\tilde{\nu}=1375\,\mathrm{cm}^{-1}$, les maxim mezi 1330 a 800 cm⁻¹) a nesplňuje některá kritéria, která by měl splňovat PE (maximum na $\tilde{\nu}=720\,\mathrm{cm}^{-1}$). Oproti tomu vzorek 3 nesplňuje zmíněná kritéria pro PP a splňuje kritéria pro PE. S těmito informacemi můžeme učinit závěr, že vzorek 1 byl z polypropylenu, vzorek 3 byl z polyetylenu a vzorek 2 byl z jejich směsi, anebo jiného podobného plastu.



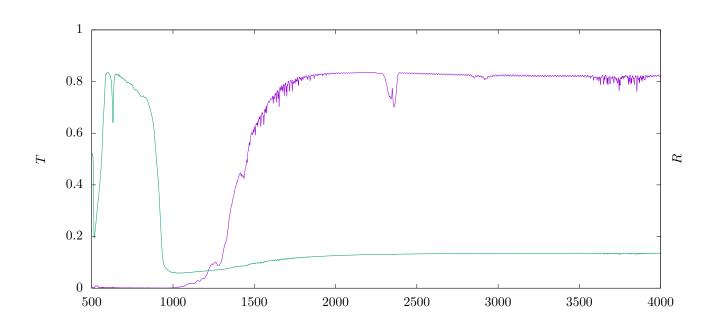
Obrázek 3: Měření transmitance vzduchu



Obrázek 4: Měření transmitance polymerových folií. Rysy způsobené fluktuací složení vzduchu jsou vykresleny světlejší a méně sytou barvou.



Obrázek 5: Měření transmitance a odrazivosti skla



Obrázek 6: Měření transmitance a odrazivosti safíru

4 Diskuse

Při výpočtu vzdálenosti atomů molekuly CO podle vzorce (4) byla v redukované hmotnosti zanedbána vazebná energie molekuly, ta je řádově $10\,\mathrm{eV}$ [4]. Rychlý výpočet ukazuje, že m_CO $c^2\approx (12\,\mathrm{u}+16\,\mathrm{u})c^2\approx 10^{10}\,\mathrm{eV}$, tedy vazbová energie tvoří řádově 10^{-9} hmotnosti molekuly. Protože byla chyba B řádově 10^{-4} , šlo o oprávněnou aproximaci.

5 Závěr

Bylo to hezké. assadfasd

6 Literatura

- [1] P. Hlídek, *Infračervená spektroskopie*. září 2017. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_420.pdf.
- [2] J. Tatum, Map: Stellar Atmospheres, vol. Appendix A: Convolution of Gaussian and Lorentzian Functions. LibreTexts, University of California, 2019. [cit. 2019-11-17]. Dostupné z: https://web.archive.org/web/20191117230715/https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Astronomy_and_Cosmology_TextMaps/Map%3A_Stellar_Atmospheres_(Tatum)/10%3A_Line_Profiles/Appendix_A%3A_Convolution_of_Gaussian_and_Lorentzian_Functions.
- [3] R. Whittal, "Table of isotopic masses and natural abundances," 2003. [cit. 2019-11-17]. Dostupné z: https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic_mass_abund.pdf.
- [4] Wikipedia contributors, "Carbon monoxide Wikipedia, the free encyclopedia," 2019. [cit. 2019-11-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Carbon_monoxide&oldid=926337542.