# Unusual proofs of Some Elemental Inequalities

by J-m SHI

## Abstract

This paper provides the unusual proofs of some elemental inequalities, including the basic one, Hölder's, Jensen's and so on, and shows the use of Bernoulli's and Calculus method.

# 几个重要初等不等式的非寻常证明

史及民

# 摘　要

本文给出的是包括基本不等式、Hölder 不等式、Jensen 不等式等在内的一些不等式的非寻常证明，彰显了 Bernoulli 不等式与分析手段的运用.
功

## 引言

本文欲从比较角度出发，运用分析手段，给常见的几个初等不等式以别样的证明，以供学用参考。

文中所论向量，若无特别声明，总假定其分量皆是正数，并以粗体字母表示。而粗体字母的函数表示的则是这样的向量：它的分量按该函数式指示的算法算出。如

$$\mathbf{a} = \underset{n}{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{\alpha}\mathbf{b}^{1-\alpha} = \begin{pmatrix} a_1^{\alpha} b_1^{1-\alpha} \\ \vdots \\ a_n^{\alpha}\cdot b_n^{1-\alpha} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix} \quad 等$$

频繁使用的符号是

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|_1 \doteq \sum a_i$$

$$|\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^r|^{\frac{1}{r}} \doteq \left(\sum c_i a_i^r\right)^{1/r}$$

特别，当 $c_i \equiv 1$ 时，$|\mathbf{a}|_r = |\mathbf{a}^r|^{\frac{1}{r}} = \left(\sum a_i^r\right)^{1/r}$

当 $c_i > 0$ & $\sum c_i = 1$ 时 $|\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^r|^{\frac{1}{r}} \doteq M(r;\mathbf{a},\mathbf{c}) \doteq \left(\sum_1^n c_i a_i^r\right)^{1/r}$.

# 1. 基本不等式

在不等式体系中，占有特殊重要地位的这个不等式 $A \geq G$，不乏精巧绝妙的证明[3]. 这里给出的分析归纳证明，当属分析方法运用之典范，值得借鉴(见7).

定理 1

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \triangleq A \geq G \triangleq (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

证明　首先，由 $(a_1-a_2)^2 \geqslant 0$ 立见 (1) 於 $n=2$ 时成立.

其次设 $n=k$ 时 (1) 真，往证 $n=k+1$ 时亦真.

记 $A_k = \dfrac{a_1+\cdots+a_k}{k}$，$G_k = (a_1\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}$

$$A_{k+1} = \frac{a_1+\cdots+a_k+x}{k+1} = \frac{kA_k+x}{k+1}$$

$$G_{k+1} = (a_1\cdots a_k\cdot x)^{\frac{1}{k+1}} = (G_k^k\cdot x)^{\frac{1}{k+1}}$$

式中 $x$ 为任意正数.

令 $f(x) \triangleq \ln\dfrac{G_{k+1}}{A_{k+1}}$

易得

$$f'(x) = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{k\cdot A_k+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(k+1)\cdot x^2} + \frac{1}{(k\cdot A_k+x)^2}$$

及 $f'(x)=0$ 之根 $x_0 = A_k$.

由於 $f''(x_0)=\dfrac{1-(k+1)}{(k+1)^2\cdot A_k}<0$

故知 这个在 $(0,\infty)$ 上定义，光滑性好（在 $(0,\infty)$ 上除驻点 $x_0$ 外，别无其它奇异点）的函数，于 $x_0$ 处（向上凸）达极大值点，即

$$\max_{x\in(0,\infty)} f(x)=f(x_0)=\frac{k}{k+1}\cdot\ln G_k/A_k\leq 0 .$$

（末处 $\leq$ 用到归纳假设）

亦即 $A_{k+1}\geq G_{k+1}$ .

Q.E.D

---

注　由于有理数权的平均可化为均匀权平均。无理数权的平均又可由有理数权平均的序列来逼近，而在取极限过程中不等关系 $\geq$ 与 $\leq$ 保持不变。因此一个关乎平均值的不等式，若对匀权成立，则对任意权也成立。也就是说，由 (1) 成立，可得下式也成立：

$$\sum q_i a_i \triangleq A\geq G\triangleq a_1^{q_1}\cdots a_n^{q_n}, \qquad (1')$$

式中 $q_i>0$ & $\sum q_i=1$ ,

## 2. Bernoulli 不等式

定理2 对 $x\in(-1,\infty)$ 有

$$(1+x)^{\alpha}\ \begin{matrix}\leqslant\\=\\\geqslant\end{matrix}\ 1+\alpha x,\quad 当\ \alpha\ \begin{matrix}\in(0,1)\\=0,1\\\notin(0,1)\end{matrix} \tag{2}$$

证明. 函数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的在 $x_0=0$ 处的带有 Lagrange 余项形式之(至二次项的)Taylor 展式为：

$$(1+x)^{\alpha}=(1+0)^{\alpha}+\frac{\alpha(1+0)^{\alpha-1}}{1!}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(1+\xi)^{\alpha-2}}{2!}\cdot x^2 \tag{*}$$

其中 $x>-1$，而 $\xi$ 居 $0$ 与 $x$ 之间，故总有 $1+\xi>0$。

从 (*) 立得 (2).

Q.E.D

注 1°. 置 $1+x=t>0$，(2) 可写成

$$t^{\alpha}\ \begin{matrix}\leqslant\\=\\\geqslant\end{matrix}\ (1-\alpha)+\alpha t,\quad 当\ \alpha\ \begin{matrix}\in(0,1).\\=0,1.\\\notin(0,1).\end{matrix} \tag{2'}$$

2°. (2) 也可用初等数学方法加以证明[3].

3°. 从不等式两边的函数图象上看，可称 (2) 为以直界曲的不等式。正因如此，它用场广阔，在不等式家族中占居重要位置。

## 3. Hölder 不等式

定理 3. 对任一实数 $r$，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{r} \cdot b_i^{1-r} \;\substack{\leqslant \\ \geqslant}\; \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{r} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^{1-r}, \quad \text{当 } r \substack{\in \\ \notin} (0,1) \qquad (3)$$

证明. 令 $\theta_i \triangleq a_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} a_j$，$\delta_i \triangleq b_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} b_j$

则 (3) 与

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^{r} \cdot \delta_i^{1-r} \;\substack{\leqslant \\ \geqslant}\; 1, \quad \text{当 } r \substack{\in \\ \notin} (0,1) \qquad (*)$$

等价. 注意 (*) 左可写成

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\theta_i}{\delta_i}\Big)^{r} \cdot \delta_i$$

对其中的 $\Big(\dfrac{\theta_i}{\delta_i}\Big)^{r}$ 用 (2')，(注意 $\Sigma \delta_i = 1 = \Sigma \theta_i$) 便立得 (*).

Q.E.D

注 1°. (3)可简记作

$$|\boldsymbol{a}^{r} \cdot \boldsymbol{b}^{1-r}| \;\substack{\leqslant \\ \geqslant}\; |\boldsymbol{a}|^{r} \cdot |\boldsymbol{b}|^{1-r}, \quad \text{当 } r \substack{\in \\ \notin} (0,1) \qquad (3')$$

2° 比照 (3') 易得

$$|a^p\cdot b^q| = |a^{p\cdot\frac{1}{r}\cdot r}\cdot b^{q\cdot\frac{1}{1-r}\cdot(1-r)}| \lesseqgtr |a^{p\cdot\frac{1}{r}}|^r\cdot|b^{q\cdot\frac{1}{1-r}}|^{1-r} \triangleq$$

$$\triangleq |a^{p\cdot k}|^{\frac{1}{k}}\cdot|b^{q\cdot k'}|^{\frac{1}{k'}} = |a^p|_k\cdot|b^q|_{k'}\ ,\ \text{当}\ k \gtrless 1. \qquad (4)$$

式中记 $\frac{1}{r}=k$，$\frac{1}{1-r}=k'$，而 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$. 叫 $k$ 与 $k'$ 共轭

又 $r \ {\in \atop \notin} (0,1)$ 等价于 $k \gtrless 1$.

特别，当 $p=q=1$ 时，(4)变成

$$|a\cdot b| \lesseqgtr |a|_k\cdot|b|_{k'}\ ,\ \text{当}\ k \gtrless 1. \qquad (4')$$

又当 $p=1$，$q=r-1$ 时，取 $k=r$，得 $(k'=r/r-1)$

$$|a\cdot b^{r-1}| \lesseqgtr |a|_r\cdot|b|_r^{r-1}\ ,\ \text{当}\ r \gtrless 1 \qquad (4'')$$

3° (4')是双向Hölder不等式的常见形式

为方便计，不妨叫(3)、(4)、(4'')分别为(二元)一次、二次、r-次的双向Hölder不等式.

4°. (3)的第一式可由A≥G来证. 而且用A≥G还能证明多元一次的单向Hölder不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\cdot b_i^{\beta}\cdot\dots\cdot l_i^{\lambda} \le (\Sigma a_i)^{\alpha}\cdot(\Sigma b_i)^{\beta}\cdot\dots\cdot(\Sigma l_i)^{\lambda} \qquad (5)$$

其中 $\alpha$、$\beta$、…、$\lambda$ 皆正且 $\alpha+\beta+\dots+\lambda=1$.

5° 因 $|a|_{k'} \begin{cases} \xrightarrow[k\to 1+0]{} \max a_i \\ \xrightarrow[k\to 1-0]{} \min a_i \end{cases}$ （参看后面定理7）

记 $A \triangleq \max\{[|a|_k \cdot |b|_{k'} : k<1] \cup [|a|_{k'} \cdot |b|_k : k<1] \cup [|a|\min b_i, |b|\min a_i]\}$

$B \triangleq \min\{[|a|_k \cdot |b|_{k'} : k>1] \cup [|a|_{k'} \cdot |b|_k : k>1] \cup [|a|\max b_i, |b|\max a_i]\}$

则据(4') 有 $A \leq |ab| \leq B$.

6° Hölder不等式是对乘积和~~予以界定~~（尤其是诸多成对的数的乘积和）进行界定，而此种和在数学中的普遍存在（如定积分便是），决定了它在不等式家族中的独特地位。

## 4. 模均幂指函数

谋求用分析方法对模与幂平均中的一些问题作一揽子统一处理，引入$r$（非0实数）的函数

$$\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{C})=\left(\sum_{i=1}^{n}c_i a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}=|\mathbb{C}\cdot\mathbb{a}^r|^{\frac{1}{r}}$$

式中$a_i$, $c_i$皆为正数，由于$c_i\equiv1$时，其为$\mathbb{a}$的$r$-模$\|\mathbb{a}\|_r$；而当$c_i>0$ & $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$时，其为$\mathbb{a}$的$r$-阶幂平均$M(r;\mathbb{a},\mathbb{C})$。故姑且称之为模均幂指函数。关于它因$r$递增而变化的情况，我们有

定理4　当$r\uparrow$则

$$\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{C})\begin{cases}\searrow & \text{在 } c_i\geq1\ (i=1,\cdots,n)\text{ 时（特别 } c_i=1\ (i=1,\cdots,n)\text{ 时）；}\\ \nearrow & \text{在 } \sum_{i}^{n}c_i\leq1\text{ 时（特别是 } \sum c_i=1\text{ 时）}\end{cases}\qquad(6)$$

证明．由$\Phi=e^{\ln\Phi}=e^{\frac{1}{r}\ln\sum c_i a_i^r}\triangleq e^{\varphi(r)}$知$\Phi'_r$与$\varphi'_r$同号．

而
$$\varphi'(r)=\frac{-1}{r^2}\ln\sum_i c_i a_i^r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\sum_i c_i a_i^r\ln a_i}{\sum_j c_j a_j^r}$$
$$=\frac{1}{r^2}\left[\sum_i\left(\frac{c_i a_i^r}{\sum_j c_j a_j^r}\right)\cdot\ln a_i^r-\ln\sum_i c_i a_i^r\right]$$
$$=\frac{1}{r^2}\left[\ln\prod_{i=1}^{n}(a_i^r)^{\theta_i}-\ln\sum_i c_i a_i^r\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \ln \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_i}{c_i}\right)^{\theta_i},$$

其中 $\theta_i \triangleq c_i a_i^r \Big/ \sum_{j=1}^{n} c_j a_j^r$，$\sum_1^n \theta_i = 1$.

故 $\varphi'(r)$ 是正是负，取决于 $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_i}{c_i}\right)^{\theta_i}$ 是否大于1.

易见

1°. 当 $c_i \geq 1$ $(i=1,\cdots,n)$ 时，$\prod_{i=1}^{n} (\theta_i/c_i)^{\theta_i} < 1$

故此时 $\varphi'(r)$ 与 $\Phi'(r)$ 皆小于0，即 $\Phi(r) \searrow$.

尤其 $c_i \equiv 1$ 时如此。而这也正是 Jensen 不等式之所谓.

2°. 当 $\sum_{i=1}^{n} c_i \leq 1$ 时

$$\prod_{i=1}^{n} (\theta_i/c_i)^{\theta_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (c_i/\theta_i)^{\theta_i}} \overset{①}{\geq} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \frac{c_i}{\theta_i}} \geq 1.$$

(①处用到 $A \geq G$)　即此时 $\Phi'(r) \geq 0$，$\Phi(r)$ 非降.

特别当 $\Sigma c_i = 1$ 时如此，而正是 $r$-幂平均 $M(r; a, c)$ 随 $r$ 而递增.

Q.E.D

注　附上一个虽不及上面证法简捷，但仍有值得参考的亮点的证法于后．

[又法]　模与幂平均的在 $r\uparrow$ 时的变化性态也可证明如下。

因 $\Phi'_r(r;a,c)$ 与 $\left[\frac{1}{\Sigma a_i}\cdot\Phi(r;a,c)\right]'_r=\Phi'_r\left(r;\frac{a}{\Sigma a_i},c\right)$ 同号．故不失一般性，确定 $\Phi'_r(r;a,c)$ 的符号时，可索性认定 $a_i$ 皆 $\in(0,1)$．

从 $\varphi'(r)=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^n c_ia_i^r}\cdot\ln\left[\prod_{i=1}^n\left(\frac{1\cdot a_i^r}{\sum_j c_ja_j^r}\right)^{c_ia_i^r}\right]$

知　$\varphi'(r)$ 是正或负，取决于 $[\ \cdot\ ]$ 之是否大于1．

在 $c_i\equiv1$ 时，$[\ \cdot\ ]=\prod_{i=1}^n\delta_i^{a_i^r}<1$　（因 $\delta_i\in(0,1)$，$a_i^r>0$）．

$\therefore\ \varphi'(r)<0$，$\Phi=|a|_r\downarrow$．

在 $\Sigma c_i=1$ 时，$[\ \cdot\ ]\overset{①}{=}\prod_{i=1}^n(\delta_i/c_i)^{c_ia_i^r}=$

$$=\frac{1}{\prod_{i=1}^n(c_i/\delta_i)^{c_ia_i^r}}=\frac{1}{\prod_{i=1}^n\left[(c_i/\delta_i)^{a_i^r}\right]^{c_i}}\overset{②}{\geqslant}\frac{1}{\sum_{i=1}^n c_i(c_i/\delta_i)^{a_i^r}}\overset{③}{\geqslant}$$

$$\geqslant\frac{1}{\sum_{i=1}^n c_i\left[(1-a_i^r)+a_i^r\cdot\frac{c_i}{\delta_i}\right]}\overset{④}{=}1,$$

其中①：置 $c_ia_i^r/\sum_j c_ja_j^r\triangleq\delta_i$，$\frac{c_ia_i^r}{\delta_i}=\sum_j c_ja_j^r$．

②：用 $A\geq G$

③．因 $a_i\in(0,1)$，$r>0$，$\therefore a_i^r\in(0,1)$，进而用Bernoulli不等式(2')．

④．见①，

$\therefore$ 此时 $\varphi'(r)>0$．即 $\Phi(r)=M(r;a,c)\uparrow$．

Q.E.D

$\Phi(r;a+b,c)$ 与 $\Phi(r;a,c)+\Phi(r;b,c)$ 相比较，即

我们有

定理 5.

$$\Phi(r;a+b,c) \begin{matrix}\leq\\=\\\geq\end{matrix} \Phi(r;a,c)+\Phi(r;b,c),\ 当\ r \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 1\ 時. \qquad (7)$$

证明.

$$\Phi^r(r;a+b,c)=\sum_{i=1}^n c_i(a_i+b_i)^r=\sum_{i=1}^n c_i(a_i+b_i)\cdot(a_i+b_i)^{r-1}$$

$$=\sum_{i=1}^n c_i a_i(a_i+b_i)^{r-1}+\sum_{i=1}^n c_i b_i(a_i+b_i)^{r-1}$$

$$=\sum_{i=1}^n (c_i^{\frac{1}{r}}a_i)\cdot\left[c_i^{\frac{1}{r}}(a_i+b_i)\right]^{r-1}+\sum_{i=1}^n (c_i^{\frac{1}{r}}b_i)\left[c_i^{\frac{1}{r}}(a_i+b_i)\right]^{r-1}$$

$$\overset{①}{\begin{matrix}\leq\\\geq\end{matrix}}\left[\sum_{i=1}^n c_i a_i^r\right]^{\frac{1}{r}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^n c_i(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{r-1}{r}}+\left[\sum c_i b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}\left\{\quad\cdot\quad\right\}^{\frac{r-1}{r}}$$

$$=\left[\Phi(r;a,c)+\Phi(r;b,c)\right]\cdot\Phi^{r-1}(r;a+b,c),\quad 当\ r \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 1$$

边边同除以 $\Phi^{r-1}(r;a+b,c)$ 便得

$$\Phi(r;a+b,c) \begin{matrix}\leq\\\geq\end{matrix} \Phi(r;a,c)+\Phi(r;b,c),\quad 当\ r \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 1.$$

① 处用了 (4″).

Q.E.D

注 1°. 注意(7)在任何 $c_i > 0$ 场合皆成立，可称之为 $\Phi(r;\mathfrak{a},\mathfrak{c})$ 的 Минковский 不等式.

2°. (易见) 对 $\Phi(r;\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots+\mathfrak{l})$ 有与(7)类似的结果.

由$\varphi(r)$的复杂表式（见定理4证明）知$\varphi''(r)$与$\Phi''(r)$更会不胜繁复．也就是说要想对作为幂指函数的$\Phi(r)$之凹凸性作一般性研究，会困难重重，难以逾越．而当把目光转向$\Phi^r(r)$（它是指数函数的线性组合）及其周边，则便易有发现．下面的定理便是一例．

定理6.　$\ln\Phi^r(r;a,c)$为严格下凸函数

证明　由$\ln\Phi^r=\ln\sum_{i=1}^n c_i a_i^r$　易算出

$$\frac{d}{dr}\ln\Phi^r=\sum_{i=1}^n \theta_i\ln a_i \quad \left(其中\ \theta_i \triangleq \frac{c_i a_i^r}{\sum c_j a_j^r}\right) 及$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\ln\Phi^r=\sum_{i=1}^n \theta_i\ln^2 a_i-\left(\sum_{i=1}^n \theta_i\ln a_i\right)^2 .$$

而依定理4（$r$-幂平均的递增性）知

$$M(2;\ln\theta,\theta)\geqslant M(1;\ln\theta,\theta)$$

两边平方，便知$\frac{d^2}{dr^2}\ln\Phi^r\geqslant 0.$

即$\ln\Phi^r$为严下凸函数.

Q.E.D.

注　本定理对$\Phi(r;a,c)$中的$c$的要求只是$c_i>0$.

特别在$c_i\equiv 1$与$\sum c_i=1$时定理给出了$r$-模与$r$-幂平均的Lyapunov不等式；即对$0<r<s<t$，有

$$|a|_s^s \quad < \left[\, |a|_r^r \,\right]^{\frac{t-s}{t-r}} \cdot \left[\, |a|_t^t \,\right]^{\frac{s-r}{t-r}} \qquad (8_1)$$

及

$$M^s(s;\, a,\, c) < \left[M^r(r;\, a,\, c)\right]^{\frac{t-s}{t-r}} \cdot \left[M^t(t;\, a,\, c)\right]^{\frac{s-r}{t-r}} \qquad (8_2)$$

藉关系式 $\Phi(-r;\mathbb{a},\mathbb{C})=\Phi^{-1}(r;\mathbb{a}^{-1},\mathbb{C})$

可把 $\Phi(r)$ 的研究由 $(0,\infty)$ 拓广到 $(-\infty,0)$ 上去。

对在 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上定义的 $\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{C})$，有以下关于其极限值的结果。

定理 7

$$\Phi(r;\mathbb{a};\mathbb{C})\xrightarrow[r\to+\infty]{}\max a_i \tag{$9_1$}$$

$$\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{C})\xrightarrow[r\to-\infty]{}\min a_i \tag{$9_2$}$$

$$\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{C})\xrightarrow[r\to0\pm]{}\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}a_i^{c_i}=G(\mathbb{a},\mathbb{C}), & \text{当 } \sum c_i=1;\\ \begin{cases}\infty\\0\end{cases}, & \text{当 } \sum c_i>1;\\ \begin{cases}0\\\infty\end{cases}, & \text{当 } \sum c_i<1.\end{cases} \tag{$9_3$}$$

证.

为求 $\Phi=e^{\varphi}$ 的极限，宜从 $\varphi$ 的极限入手。

不考虑 $a_i\equiv1$ 的情形，在 $r\to+\infty$ 时 $\varphi(r)$ 的极限属不定型，须藉 L'hopital 法则给出：即 $\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r)=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\sum_i c_i a_i^r\cdot\ln a_i}{\sum_j c_j a_j^r}$

$=\lim\limits_{r\to+\infty}\sum_i\dfrac{1}{\sum_j\left(\frac{c_j}{c_i}\right)\left(\frac{a_j}{a_i}\right)^r}\cdot\ln a_i=\ln\max a_i$

因而 $\Phi(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \max a_i$.

又 $\Phi(-r;a,c) = \dfrac{1}{\Phi(r;a^{-1},c)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \dfrac{1}{\max\frac{1}{a_i}} = \min a_i$

即 $\Phi(r) \xrightarrow[r\to-\infty]{} \min a_i$

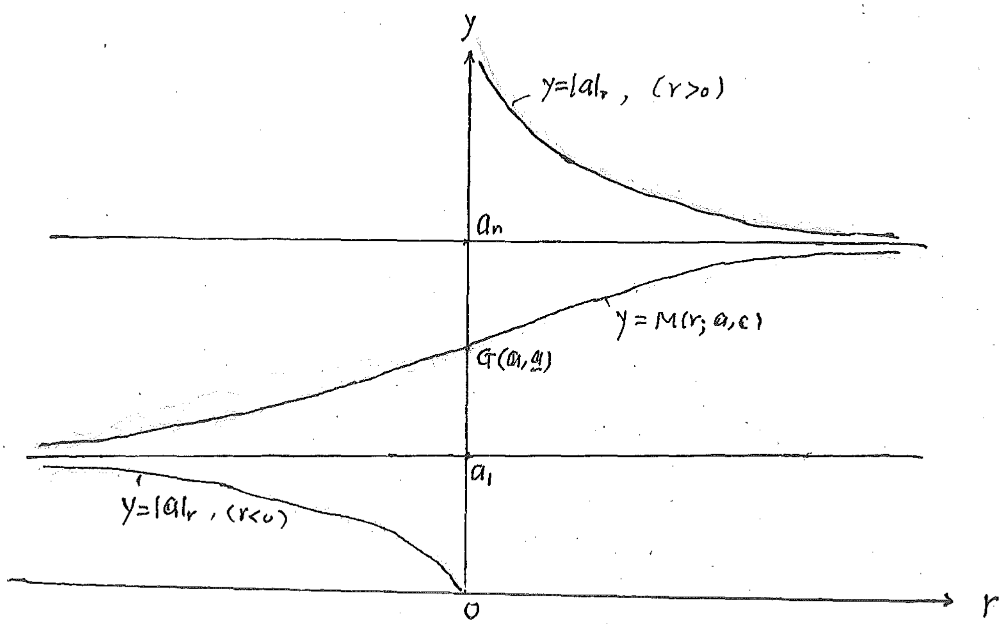
注意，当 $r \longrightarrow 0\pm$ 时 $\varphi(r)$ 的极限在 $\sum c_i$ $>1$ 情形为 $\pm\infty$，$<1$ 情形为 $\mp\infty$.

可立马看出．只是在 $\sum c_i = 1$ 情形须求助于 L'hopital 法则，得

$$\varphi(r) \xrightarrow[r\to 0\pm]{} \ln \prod_{i=1}^{n} a_i^{c_i} \quad . \quad \text{亦即}\ M(r;a,c) \xrightarrow[r\to 0]{} G(a,c).$$

Q.E.D

结合定理 4 与定理 7 给出的 $r$-模与 $r$-幂平均的信息，我们可绘出它们的趋势~~略图~~




注 1) $a_1 \triangleq \min a_i$

$a_n \triangleq \max a_i$

2) 图示曲线的走行趋势（递增递减情形）符合实情

但凹凸情形之实际不明（见定理6前述语）

3) 当 $\underset{2}{a} = \binom{a_1}{a_2} = \binom{a}{a}$ 时 $\Phi(r) = a\cdot 2^{\frac{1}{r}}$ 确有如图所示的凹凸性（此时 $a_1=a_n=a$）.

# 模均幂指函数

$$\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{c})=\left(\sum c_i a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\ ,\quad c_i>0$$

## 的性态纵　　览

1.

| $\mathbb{c}=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ 状况 | $\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{c})$ 在 $r\uparrow$ 时演变情况 |
|---|---|
| $\min c_i \not< 1$ | $\searrow$ |
| $\lvert\mathbb{c}\rvert=\sum c_i \not> 1$ | $\nearrow$ |
| $\min c_i<1$ & $\sum c_i>1$ | 未详 |

2. 凡 $\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{c})$ 皆有 Мин 氏不等式（即 $\Phi(\cdot,\mathbb{a}+\mathbb{b},\cdot)\leq\Phi(\cdot,\mathbb{a},\cdot)+\Phi(\cdot,\mathbb{b},\cdot)$ 等等）

3. 凡 $\Phi(r;\mathbb{a},\mathbb{c})$ 皆有 Ляпунов 不等式（即 $\ln\Phi^r(r;\mathbb{a},\mathbb{c})$ 向下凸）

4.

| $\mathbb{c}$ 状况 \ $\Phi(r)$ 趋向 \ $r$ 趋向 | $r\to+\infty$ | $r\to-\infty$ | $r\to0+$ | $r\to0-$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sum c_i<1$ | $\max a_i$ | $\min a_i$ | $0$ | $\infty$ |
| $\sum c_i>1$ | $\max a_i$ | $\min a_i$ | $\infty$ | $0$ |
| $\sum c_i=1$ | $\max a_i$ | $\min a_i$ | $G(\mathbb{a},\mathbb{c})$ | |

## 5. Чебышев 不等式

序似与序反

两向量 $\underset{n}{a}$、$\underset{n}{b}$ 若满足：对任何 $1\leq i,j\leq n$ 有

$$(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geq 0$$

则称它们的排序相似，简称序似。若上式不等号反向，称它们排序相反，简称序反。

把两向量皆按其分量大小依序排出，就得两向量序似（把这样的两向量都将第 i 分量与第 j 分量调换，结果就得的两向量仍旧序似）。把一个按由大到小排，另一个由小到大排就得的两向量为序反（把序反的两向量都将第 i 分量与第 j 分量调换，所得的两向量依旧为序反）。

对于序似的两向量 a、b，有~~定理~~

定理 8　若 a、b 序似，则

$$n\cdot|ab|\geq|a|\cdot|b| \qquad (10)$$

说明　本定理也颇多证法[2]，而把 $|a|\cdot|b|$ 与方阵 $(a_i\cdot b_j)_{i,j=1}^{n}$ 的元联系起来，促成对(10)的

新表述和证法.

我们把 $|a|\cdot|b| = (\sum_1^n a_i)(\sum_1^n b_i)$ 视作方阵 $(a_i b_j)_{i,j=1}^n$ 的 $n^2$ 个元之和，记以 $\Sigma_a$，则 $|ab| = \sum_1^n a_i b_i$ 便是阵的主对角线元之和，记以 $\Sigma_d$. 而 $\Sigma_a - \Sigma_d \triangleq \Sigma_e$ 便是阵的其余 $n(n-1)$ 个元之和了. (10) 即

$$n\cdot\Sigma_d \geqslant \Sigma_a \qquad (10')$$

证明. 用归纳法

首先 $n=2$ 时 因

$$2\Sigma_d - \Sigma_a = (a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1-a_2)(b_1-b_2) \geqslant 0$$

故 (10′) 真.

其次假定 $n=k$ 时有 $k\Sigma_d \geqslant \Sigma_a$ 即有

$$k\cdot\sum_{i=1}^k a_i b_i \geqslant (\sum_1^k a_i)(\sum_1^k b_i)$$

往证 $n=k+1$ 时 (10′) 亦真.

注意 $(\sum_1^{k+1} a_i)(\sum_1^{k+1} b_i) = (a_{k+1} + \sum_1^k a_i)(b_{k+1} + \sum_1^k b_i)$

$$= (\sum_1^k a_i)(\sum_1^k b_i) + a_{k+1}\cdot\sum_1^k b_i + b_{k+1}\sum_1^k a_i + a_{k+1}\cdot b_{k+1}$$

$$\leqslant k\cdot\sum_1^k a_i b_i + \left[\sum_{i=1}^k (a_{k+1}b_i + b_{k+1}\cdot a_i)\right] + a_{k+1}\cdot b_{k+1}. \qquad (*)$$

而 $\left\{\sum_{i=1}^k (a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1})\right\} - \left[\sum_{i=1}^k (a_{k+1} b_i + b_{k+1}\cdot a_i)\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i(b_i - b_{k+1}) - \sum_{i=1}^{k} a_{k+1}(b_i - b_{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(b_i - b_{k+1})(a_i - a_{k+1}) \geqslant 0$$

故在(※)中以{·}替代[·]后，(※)右变大成为 $(k+1)\cdot\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i$，换言之，在 $k+1$ 阶情形仍有方陣的全元和小于主对角线元和之 $(k+1)$ 倍.

Q.E.D.

由(7)知 $M(r;a+b,q)$ 与 $M(r;a,q)+M(r;b,q)$ 可比较

自然会问 $M(r;ab,q)$ 与 $M(r;a,q)\cdot M(r;b,q)$ 是否也可比较?

答案是 当 $a$ 与 $b$ 序似时可以. 即我们有

定理9. 若 $r>0$, 又 $a$ 与 $b$ 序似, 则有

$$M(r;ab,q)\geq M(r;a,q)\cdot M(r;b,q).$$

证明: 由于 $a$ 与 $b$ 序似, 则对任何 $r\neq 0$ 皆有

$a^r$ 与 $b^r$ 亦序似. 对它们用定理8之(10)式

就有 $n\sum_1^n a_i^r b_i^r \geq (\sum_1^n a_i^r)(\sum_1^n b_i^r)$

两边同以 $n^2$ 除, 并同开 $r$ 次方 (注意 $r>0$

故 $\geq$ 不变方向) 得

$$M(r;ab,\tfrac{1}{n})\geq M(r;a,\tfrac{1}{n})\cdot M(r;b,\tfrac{1}{n})$$

又以定理1后注述理由, 知亦成立下式:

$$M(r;ab,q)\geq M(r;a,q)\cdot M(r;b,q)$$

Q.E.D

注 1° 两向量的排法只影响对应分量乘积和，而不影响每个向量的分量和．既然任一对向量 $a$ 与 $b$ 满足[见(4')]

$$|ab| \geq |a|_k \cdot |b|_{k'}, \quad k<1$$

又当 $a$ 与 $b$ 同序时有 $|ab| > \frac{1}{n}|a|\cdot|b|$

就可断定必有 $\frac{1}{n}|a|\cdot|b| > |a|_k \cdot |b|_{k'}$，其中 $k<1$ 为任意.

2° 由定理9的证明可知：

若 $a$ 与 $b$ 序似，又 $r>0$，则 $n^{\frac{1}{r}} \cdot |ab|_r \geq |a|_r \cdot |b|_r$

3° 由(10)可得（因 $a$ 与自身序似）$M(1;a,\frac{1}{n}) \leq M(2;a,\frac{1}{n})$

## 6. 其它

有两个在不等式体系中，远离核心少被提及的不等式，因证法或应用上的独特，加上作者趣好，也被纳入本文，下略作陈述。

### 一、匀权场合的常见三均值

它们是 $H(a)=M(-1;a,\frac{1}{n})$ （调和平均）

$G(a)=M(0;a,\frac{1}{n})$ （几何平均）

$A(a)=M(1;a,\frac{1}{n})$. （算术平均）

由定理4知 $H<G<A$，此外，三者间还有更深层的联系，即

$$A^{n-1}H\geq G^{n}\geq AH^{n-1} \qquad (11)$$

[证法梗概] 以(11)左为例，其等价于

$$\frac{A^{n-1}H}{G^{n}}\geq 1 \qquad (11)_L.$$

用归纳法证，先验知 $n=2$ 时 $(11)_L$ 成立，然后（仿定理1证明中作法）置 $f(x)=\ln\frac{A^{n-1}H}{G^{n}}$，在 $A=\frac{(n-1)A'+x}{n}$，

$G=(G'^{\,n-1}\cdot x)^{\frac{1}{n}}$，　$H=\frac{n}{\frac{n-1}{H'}+\frac{1}{x}}$　（其中 $A'=\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$

$G'=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$，　$H'=\frac{n-1}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}}$，　又 $x>0$）及

$\frac{A'^{\,n-2}\cdot H'}{G'^{\,n-1}}\geq 1$ 条件下，用典型的求极值的分析手段：通过求 $f'(x)$，$f''(x)$ 及驻点 $x_0$（满足 $f'(x_0)=0$），并

验得 $f''(x_0)>0$. 故知 $f(x)\geq f(x_0)>0$ (末处 > 是由实际计算 $f(x)$ 于驻点处值，运用归纳假设得到的)，即 $(11)_L$ 对 ~~[illegible]~~ $n$ 成立.

对 $(11)_R$ 也可类似施证. 不过使用业已获证的 $(11)_L$，利用三平均间的固有关联更易证明：对 $\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)$ 用 $(11)_L$ 得

$$A^{n-1}\left(\frac{1}{a}\right)\cdot H\left(\frac{1}{a}\right)\geq G^n\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a_1}\cdots\cdot\frac{1}{a_n}\right)$$

即 $$\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{1/a_1+\cdots+1/a_n}\geq\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}$$

两端各取倒数，得反向不等式：

$$\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\right)^{n-1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leq a_1\cdots a_n$$

即 $H^{n-1}(a)\cdot A(a)\leq G^n(a)$. 此即 $(11)_R$.

## 二、数据分布的刻划

描述一组数据 $a_1,\cdots,a_n$ 的分布，就是给出其所在区间的中点与半径. 利用基于幂平均递增性的一个不等式便做到了这一点.

我们知道 $M(2^k;a,\frac{1}{n})\leq M(2^{k+1};a,\frac{1}{n})$.（$k$ 为自然数）

即 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot a_i^{2^k}\right)^{1/2^k}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot a_i^{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}}$，记 $b_i\triangleq a_i^{2^k}$

就是 $$\left(\frac{\sum_1^n b_i}{n}\right)^{\frac{1}{2^k}}\leq\left(\frac{\sum_1^n b_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

两边同取 $2^{k+1}$ 次方，得

$$\left(\frac{\sum b_i}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\sum b_i^2}{n}$$

即 $\quad p^2 \triangleq \left(\sum_1^n b_i\right)^2 \leqslant n\sum_1^n b_i^2 \triangleq nS$

令 $\quad p'=p-b_j$ ， $S'=S-b_j^2$

则亦有 $\quad p'^2 \leqslant (n-1)S'$ ，即 $(p-b_j)^2<(n-1)(S-b_j^2)$

整理可得

---

$$f(b_j)=nb_j^2-2p-(\lambda-S)<0$$ ，其中 $\lambda \triangleq nS-p^2>0$

它的判别式为

$$\Delta=(-2p)^2+4n\cdot(\lambda-S)=4(n-1)\lambda>0$$

$\therefore f(x)=0$ 有二实根

$$x_{1,2}^{(k)}=\frac{p}{n}\pm\sqrt{n-1}\sqrt{\frac{\lambda}{n^2}}=\frac{p}{n}\pm\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{\frac{S}{n}-\left(\frac{p}{n}\right)^2}=\frac{p}{n}\pm\sqrt{n-1}\sqrt{\frac{\sum a_i^{2^{k+1}}}{n}-\left(\frac{\sum a_i^{2^k}}{n}\right)^2}$$

由于 $f(b_j)<0$，故 $b_j \triangleq a_j^{2^k} \in \left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}\right) \qquad (j=1,\cdots,n)$

特别 $k=0$ 时得

$$b_j=a_j\in\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)}\right)=\left(\frac{\sum a_i}{n}-\sqrt{n-1}\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}-\left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^2},\ \frac{\sum a_i}{n}+\sqrt{n-1}\sqrt{\qquad}\right),\ (j=1,\cdots,n)$$

这正是 Lagurre 不等式之所谓.

注 1°. 若 r.v. $\xi$ 具分布 $\begin{array}{c|c} \xi & a_j \\ \hline P_r & \frac{1}{n} \end{array}$ $(j=1,\cdots,n)$，则 $E\xi=\Sigma a_j/n$，$E\xi^2=\Sigma a_j^2/n$

$D\xi=\sigma^2=E\xi^2-(E\xi)^2$，故 Lagurre 不等式可表为

$P_r[|\xi-E\xi|<\sqrt{n-1}\,\sigma]=1$ （$\xi$ 具上述均匀分布）

特别在 $n=10$ 时有 $P_r[|\xi-E\xi|<3\sigma]=1$ [比较概率论论断：对任一 r.v. $\xi$ 有 $P_r[|\xi-E\xi|<3\sigma]\geq 0.997$ ]

2°. 注意由上可知 取 $k=0$ 可得 $a_j$ 尽 $\in(x_1^0, x_2^0)_{(\circledast)}$.

取 $k=1$ 则得 $a_j^2\in(x_1^{①}, x_2^{①})_{(\ast)}$

究竟哪个结果尚佳，仍值得进一步讨论.

结束语

本想从初等不等式的深刻的内在关联中，理出个好的头绪，为感兴趣的学生提供一点帮助，却难遂愿。故只好不择体例，且将研习中似有感悟的一些零星认知，和盘托出，谨供批评指正，或参考。

# 参考文献

[1] G. H. Hardy et al.

inequalities, Cambridge ~~Univers~~ University press

2nd Edition 1952

[2] 徐利治 王兴华

数学分析的方法及例题选讲 高等教育出版社 第二版 1984

[3] 史济怀

平均 人民教育出版社 1964