Differenciálegyenletek a hétköznapokban

BSc Szakdolgozat

Írta: Gondos Réka
Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Besenyei Ádám
adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak, hogy felkeltette érdeklődésem a téma iránt, ötleteivel segítette munkámat, illetve hogy rendíthetetlenül javította dolgozatomat és felhívta a figyelmemet az esetleges hibákra. Köszönöm barátaimnak, hogy végig ösztönöztük egymást és segítségüket, melyet kisebb felmerülő problémáim esetén nyújtottak. Szeretném még megköszönni tanáraimnak, hogy hozzájárultak matematikai tudásom bővítéséhez az elmúlt három év során végzett munkájukkal. Végül, de nem utolsósorban, köszönöm a családomnak a támogatást és a türelmet, amelyeket egyetemi pályafutásom alatt tanúsítanak irántam.

Előszó

A dolgozat célja különböző – hétköznapi életből vett – modellek bemutatása differenciálegyenletek, illetve differenciálegyenlet-rendszerek segítségével. Néhány differenciálegyenlet megoldása nem olyan egyszerű elemi módszerekkel, ezért az 1. fejezetben bevezetjük a Laplace-transzformáció fogalmát és megmutatjuk, hogyan lehet felhasználni differenciálegyenletek megoldására. Bemutatjuk, miként lehet néhány hétköznapi jelenséget leírni differenciálegyenletek segítségével, de fontos megjegyezni, hogy ezzel a felhasználási területeik korántsem merültek ki. Szó lesz a későbbiekben egy egyszerű autó követési modellről, majd a szimultán tanulás egy modelljéről, végül beszélünk még rekeszrendszerekről és azok néhány alkalmazási területéről.

A Laplace-transzformáltról szóló fejezetben bevezetjük először az alapfüggvény fogalmát, majd definiáljuk a Laplace-transzformáció és egyfajta egységugrásfüggvény fogalmát. Megnézzük hogyan viselkednek az alapfüggvények deriváltjai, integrálfüggvénye és konvolúciója. Kiszámoljuk néhány elemi függvény Laplace-transzformáltját, majd kitérünk arra, hogy mire és hogyan érdemes használni a Laplace-transzformációt.

A 2. fejezetben vázolunk egy követési modellt, melyben két autó egymáshoz viszonyított helyzetét vizsgáljuk, mikor a második autó sebessége az első sebességétől függ. Egy késleltetett differenciálegyenletet írunk fel a második autó sebességére, amit kétféle módszerrel oldunk meg: Laplace-transzformációval, illetve elemi számolás után megsejtjük, majd bizonyítjuk sejtésünket. A modellt megnézzük pontos értékekre is, és ábrázoljuk az eredményt. Megvizsgáljuk, hogy adott intervallumon történik-e ütközés, és ha igen, akkor az intervallum melyik pontján.

A szimultán tanulás egy kvalitatív matematikai modelljét a 3. fejezetben tárgyaljuk. A jelölések bevezetése után foglalkozunk a szabadon tanuló diák esetével, és arra jutunk majd általánosságban, hogy ekkor a diák egy bizonyos idő elteltével már állandó intenzitással tanulja a tárgyakat. Ezt mutatják a bemutatott speciális esetek is. Ezután azt is megnézzük, mi történik, ha a tanuló valamilyen külső kényszernek, ellenőrzésnek van kitéve. Azt fogjuk tapasztalni, hogy a túl gyakori ellenőrzés olyan, mintha nem is történne ellenőrzés.

Az utolsó fejezet egy gyógyszeradagolási példán keresztül bevezeti a rekeszrendszerek fogalmát. A gyógyszeradagolási problémánál azt vizsgáljuk, hogy miként jut az ember emésztőtraktusából a vérbe az antihisztamin, majd ürül ki onnan. A rekeszrendszereken belül is leginkább a lineáris kompartment modellekkel foglalkozunk majd, amelyekből nézünk lineáris kaszkád, illetve nem kaszkád esetet is. Utóbbinál az érdekel minket, hogy hogyan hat a környezetből származó ólom az emberi szervezetre; ezt egy háromrekeszes modellen keresztül követjük nyomon és illusztráljuk néhány ábrával.

1. fejezet

A Laplace-transzformált

A fejezet célja a Laplace-transzformált és tulajdonságainak bemutatása, melyek ismerete elengedhetetlen a 2. fejezetben leírtak megértéséhez. Megtudjuk, hogyan alkalmazzuk a transzformációt differenciálegyenletekre, illetve kezdetiérték-problémákra.

1.1. Alapfogalmak

A Laplace-transzformált fogalmának bevezetése előtt szükségünk van a következő definícióra.

1.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt *alapfüggvény*nek nevezzük, ha

(i) $f(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}^-)$;

(ii) f a $[0, +\infty)$ intervallum minden véges részintervallumán integrálható;

(iii) léteznek M_f, α_f nemnegatív valós számok, melyekkel:

$$|f(t)| \leq M_f e^{\alpha_f t} \quad (t \in [0, +\infty)).$$

1.2. Állítás. *Az alapfüggvények vektorteret alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen f és g két alapfüggvény. Megmutatjuk, hogy ekkor $f + g$ és cf $(c \in \mathbb{C})$ is alapfüggvény. Az *(i)* feltétel triviálisan teljesül rájuk és azt is tudjuk, hogy integrálható függvények összege és konstansszorosa is integrálható. Lássuk most a korlátosságot! Legyen $t \in [0, +\infty)$ tetszőleges, ekkor

$$|(f + g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq M_f e^{\alpha_f t} + M_g e^{\alpha_g t} \leq \max\{M_f, M_g\} e^{\max\{\alpha_f, \alpha_g\} t},$$

illetve

$$|(cf)(t)| \leq |c||f(t)| \leq |c| M_f e^{\alpha_f},$$

ahol $M_f, M_g, \alpha_f, \alpha_g$ az f-re és g-re vonatkozó – a *(iii)* feltételből adódó – megfelelő konstansok. $\square$

Most már minden a rendelkezésünkre áll a Laplace-transzformált fogalmának bevezetéséhez.

1.3. Definíció. Legyen f alapfüggvény. Ekkor f *Laplace-transzformált*jának nevezzük az $\mathcal{L}[f]$ függvényt, ahol

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > \alpha_f). \tag{1.1}$$

1.4. Megjegyzés. A definíció értelmes, azaz létezik az integrál és véges, ugyanis:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right| &\leq \int_0^\infty |e^{-st}|\cdot|f(t)|dt \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t}M_f e^{\alpha_f t} \\
&= M_f \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha_f)t}dt = M_f\frac{1}{\mathrm{Re}(s)-\alpha_f} < \infty.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ha $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$.

1.5. Megjegyzés. Bár nem teljesen precíz, sokszor fogjuk használni azt a jelölést, hogy $\mathcal{L}[f(t)]$; ezalatt az $\mathcal{L}[t \mapsto f(t)]$ függvényt értjük.

1.6. Tétel. *A Laplace-transzformáció az alapfüggvények vektorterén lineáris leképezés, valamint* $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$*, ha* f *alapfüggvény.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f és g alapfüggvény, illetve hogy valamely s_0-ra létezik $\mathcal{L}[f](s)$ és $\mathcal{L}[g](s)$, ha $\mathrm{Re}(s) > s_0$; továbbá legyen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\lambda f + \mu g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\lambda f(t) + \mu g(t))dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \mu\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = \lambda\mathcal{L}[f](s) + \mu\mathcal{L}[g](s).
\end{aligned}$$

A második fele a tételnek következik az (1.2) összefüggésből. □

1.2. A transzformált tulajdonságai

1.7. Tétel (A deriváltak Laplace-transzformáltja)**.** *Legyen* $N \in \mathbb{N}$ *és tegyük fel, hogy az* y *alapfüggvény* N*-szer folytonosan differenciálható, amelynek deriváltjai korlátosak a* $[0, +\infty)$ *intervallumon. Ekkor* $y^{(N)}$ *is alapfüggvény, és*

$$\mathcal{L}[y^{(N)}](s) = s^N\mathcal{L}[y](s) - s^{N-1}y(0) - s^{N-2}y'(0) - \ldots - y^{(N-1)}(0). \tag{1.3}$$

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett $y', \ldots, y^{(N)}$ alapfüggvények, hiszen tetszőleges k ($k = 1, \ldots, N$) esetén a *(iii)* feltételben választhatók az

$$\begin{aligned}
\alpha_{y^{(k)}} &= 0, \\
M_{y^{(k)}} &= \max|y^{(k)}|
\end{aligned}$$

konstansok. Az (1.3) összefüggést teljes indukcióval bizonyítjuk. Alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát $N = 1$ esetén:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'](s) &= \int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt = \Big[e^{-st}y(t)\Big]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (e^{-st})'y(t)dt \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-st}y(t) - e^{-s\cdot 0}y(0) + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt = -y(0) + s\mathcal{L}[y](s).
\end{aligned}$$

A teljes indukció szerint most tegyük fel, hogy N-re már tudjuk az állítást és lássuk be $(N+1)$-re; felhasználva az $N = 1$ esetet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y^{(N+1)}](s) =& \mathcal{L}[(y^{(N)})'](s) = s\mathcal{L}[y^{(N)}](s) - y^{(N)}(0) \\
=& s\{s^N\mathcal{L}[y](s) - s^{N-1}y(0) - s^{N-2}y'(0) - \ldots - y^{(N-1)}(0)\} - y^{(N)}(0) \\
=& s^{N+1}\mathcal{L}[y](s) - s^N y(0) - s^{N-1}y'(0) - \ldots - sy^{(N-1)}(0) - y^{(N)}(0).
\end{aligned}$$

□

1.8. Definíció. Az *a-ba eltolt egységugrásfüggvény*nek nevezzük az alábbi $\text{Step}(t, a)$-val jelölt függvényt:

$$\text{Step}(t, a) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t \geq a, \\ 0, & \text{ha} \quad 0 \leq t < a. \end{cases}$$

1.9. Megjegyzés. Az egységugrásfüggvényt szokás Heaviside-függvénynek is nevezni, és legtöbbször más függvények „be-”, illetve „kikapcsolására” használjuk. Például az $e^t[\text{Step}(t, 1) - \text{Step}(t, 2)]$ az 1-nél kapcsolja be az e^t függvényt és 2-nél kapcsolja ki.

1.10. Tétel (Eltolási tétel a transzformáltra)**.** *Legyen f alapfüggvény. Ekkor $e^{at}f(t)$ ($a \in \mathbb{R}$) is alapfüggvény és*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a) \quad (\text{Re}(s) > \alpha_f + a), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)\text{Step}(t, a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s), \quad a \geq 0 \quad (\text{Re}(s) > \alpha_f), \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}[f(t)\text{Step}(t, a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s), \quad a \geq 0 \quad (\text{Re}(s) > \alpha_f). \tag{1.6}$$

1.11. Megjegyzés. Az (1.5) és az (1.6) azonosságoknál az $a < 0$ eset érdektelen, hiszen beszorozva egy alapfüggvényt egy ilyen $\text{Step}(t, a)$ függvénnyel önmaga marad, mert az alapfüggvény negatív t értékekre 0, pozitív értékekre pedig $\text{Step}(t, a) = 1$.

Bizonyítás. Az $e^{at}f(t)$ alapfüggvény, hiszen az 1.1. Definíció első két tulajdonsága triviálisan teljesül, ha f alapfüggvény, valamint

$$|e^{at}f(t)| \leq e^{at}M_f e^{\alpha_f t} = M_f e^{(a+\alpha_f)t}.$$

Az (1.4) összefüggés könnyen látható a definícióból:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}[f](s-a),$$

illetve

$$\left| \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-(s-a)t}||f(t)|dt \leq \int_0^\infty e^{-(\text{Re}(s)-a)t}M_f e^{\alpha_f t}dt,$$

ami miatt szükséges a $\text{Re}(s) > \alpha_f + a$ feltétel.

Az (1.5) összefüggés bizonyításához használjuk fel, hogy $\text{Step}(t, a) = 0$, ha $t < a$ és 1, ha $t \geq a$, és alkalmazzuk a $t = x + a$ helyettesítést. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)\text{Step}(t, a)] &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\text{Step}(t, a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(x+a)}f(x)dx = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = e^{-as}\mathcal{L}[f]. \end{aligned}$$

Az előző összefüggésbe $g(t) = f(t-a)$-t helyettesítve, g-re megkapjuk az (1.6) azonosságot is. □

Érdemes megjegyezni a Laplace-transzformáció kapcsán – bár nem használjuk a későbbi fejezetekben – az alábbiakat.

1.12. Tétel (Az integrálfüggvény Laplace-transzformáltja)**.** *Legyen f alapfüggvény. Ekkor az integrálfüggvénye is alapfüggvény, és*

$$\mathcal{L}\left[\int_0 f\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s), \quad (\text{Re}(s) > \alpha_f).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|f(t)| \leq Me^{\alpha_f t}$, ha $t \geq 0$. Ekkor, ha $\alpha_f = 0$, akkor

$$\left| \int_0^t f \right| \leq Mt \leq Me^t.$$

Másrészt, $\alpha_f \neq 0$ esetén

$$\left| \int_0^t f \right| \leq \frac{M}{\alpha_f} e^{\alpha_f t},$$

azaz az integrálfüggvény is alapfüggvény. Most alkalmazva a parciális integrálás tételét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0 f \right](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)dudt = \left[e^{-st} f(t) \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} f(t) \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s), \quad \mathrm{Re}(s) > \alpha_f. \end{aligned}$$

□

1.13. Definíció. Tegyük fel, hogy $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, amelyekre az $\int_0^t f(u)g(t-u)du$ integrál létezik, minden $t \geq 0$ esetén. Ekkor az f és g függvények *konvolúció*jának nevezzük a következő függvényt

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du, \quad (t \geq 0),$$

$t \leq 0$ esetén pedig legyen 0.

1.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik $f * g$, illetve $f * h$, és legyen $k \in \mathbb{C}$. Ekkor igazak a következők:*

(i) *$g * f$ létezik és $g * f = f * g$ (kommutativitás).*

(ii) *$f * kg$ létezik és $f * kg = k(f * g)$.*

(iii) *$f * (g + h)$ is létezik és $f * (g + h) = f * g + f * h$ (linearitás).*

Bizonyítás. Triviálisan megkaphatók a konvolúció definíciójából. □

1.15. Tétel (Konvolúció-tétel)**.** *Legyen f és g alapfüggvény. Ekkor létezik a konvolúciójuk és az alapfüggvény, illetve teljesül az alábbi:*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

Bizonyítás. Az $f * g$ függvény alapfüggvény, ugyanis az 1.1. Definíció *(i)* tulajdonsága triviálisan teljesül; az integrálfüggvény folytonos, így integrálható is; illetve a *(iii)* tulajdonság is igaz, mert

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f(u)g(t-u)du \right| &\leq \int_0^t |f(u)||g(t-u)|du \leq \int_0^t M_f M_g e^{\alpha_f u + \alpha_g (t-u)} du \\ &= M_f M_g e^{\alpha_g t} \int_0^t e^{(\alpha_f - \alpha_g)u} du = M_f M_g e^{\alpha_g t} \frac{e^{(\alpha_f - \alpha_g)t} - 1}{\alpha_f - \alpha_g} \\ &\leq \frac{M_f M_g}{\alpha_f - \alpha_g} e^{\alpha_f t} \end{aligned}$$

teljesül, ha $\alpha_f > \alpha_g$. Ha $\alpha_f < \alpha_g$, akkor

$$\Big|\int_0^t f(u)g(t-u)du\Big| \leq M_f M_g e^{\alpha_g t}\frac{1-e^{(\alpha_f-\alpha_g)t}}{\alpha_g-\alpha_f} \leq M_f M_g \frac{e^{\alpha_g t}}{\alpha_g-\alpha_f},$$

illetve $\alpha_f = \alpha_g$ esetén

$$\Big|\int_0^t f(u)g(t-u)du\Big| \leq M_f M_g e^{\alpha_g t} t \leq M_f M_g e^{(\alpha_g+1)t}.$$

Így tehát értelmes a következő:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(u)g(t-u)dudt = \int_0^\infty f(u)\Big(\int_u^\infty e^{-st}g(t-u)dt\Big)du\\ &= \int_0^\infty f(u)\int_0^\infty e^{-s(u+r)}g(r)drdu = \int_0^\infty e^{-su}f(u)du\int_0^\infty e^{-sr}g(r)dr\\ &= \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s).\end{aligned}$$

□

1.3. Néhány példa

Számoljuk ki néhány elemi függvény Laplace-transzformáltját!

1.16. Példa. Legyen $f(t) = t, t \geq 0$. Ekkor alkalmazva a parciális integrálás tételét:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st}tdt = \Big[-\frac{e^{-st}}{s}t\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt\\ &= 0 + \Big[-\frac{e^{-st}}{s^2}\Big]_{t=0}^\infty = -0 + \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Tehát $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2}$.

1.17. Példa. Számítsuk ki a szinusz- és ezáltal a koszinusz-függvény Laplace-transzformáltját! Legyen tehát $f(t) = \sin bt$ és $g(t) = \cos bt$ (egyszerűség kedvéért vettük ugyanazt a $b \in \mathbb{R}$-et). Vezessük be még a következő jelöléseket:

$$S(s) = \mathcal{L}[f(t)](s), \quad C(s) = \mathcal{L}[g(t)](s).$$

Ekkor felhasználva a parciális integrálás szabályát

$$\begin{aligned}S(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\sin btdt = \Big[-e^{-st}\cdot\frac{\cos bt}{b}\Big]_0^\infty - \frac{s}{b}\int_0^\infty e^{-st}\cos btdt\\ &= \frac{1}{b} - \frac{s}{b}\int_0^\infty e^{-st}\cos btdt = \frac{1}{b} - \frac{s}{b}\cdot C(s)\end{aligned} \tag{1.7}$$

teljesül, mert tudjuk, hogy $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, ha $\mathrm{Re}(s) > 0$ és $\cos bt$ (és persze $\sin bt$ is) korlátos függvény. Másrészt

$$\begin{aligned}C(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos btdt = \Big[e^{-st}\cdot\frac{\sin bt}{b}\Big]_0^\infty + \frac{s}{b}\int_0^\infty e^{-st}\sin btdt\\ &= 0 + \frac{s}{b}S(s).\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az (1.7) egyenletbe adódik, hogy

$$S(s) = \frac{1}{b} - \frac{s^2}{b^2}S(s).$$

Ezt rendezve, majd $C(s)$ helyére is beírva a kapott $S(s)$-et:

$$S(s) = \frac{b}{b^2 + s^2}$$
$$C(s) = \frac{s}{b^2 + s^2}.$$

1.4. A transzformált használata

Általában a Laplace-transzformáltat nem számoljuk ki definíció szerint, hanem az alábbihoz hasonló táblázatokból olvassuk le a függvények transzformáltjait, illetve ezekből állapítjuk meg, hogy milyen függvényből állítottunk elő egy adott transzformált függvényt. Sokszor szükségünk lehet a parciális törtekre bontásra is, amikor próbáljuk a táblázat használatához megfelelő alakra hozni a transzformáltat.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$\mathrm{Step}(t, a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$e^{at} f(t)$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f(t-a)\mathrm{Step}(t, a)$	$e^{-as} F(s)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$

1.1. táblázat. Fontosabb függvények Laplace-transzformáltja

1.18. Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \alpha\} \ni s \mapsto F(s) \in \mathbb{C}$$

függvény *inverz Laplace-transzformált*jának nevezzük és $\mathcal{L}^{-1}(F)$-fel jelöljük azt a Laplace-transzformálható alapfüggvényt, amelynek transzformáltja F.

1.19. Példa. A Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát!

$$y'''(t) - 6y''(t) + 12y'(t) - 8y(t) = t^3 e^{2t} \tag{1.8}$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -2.$$

A rövidség kedvéért legyen $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Ekkor a deriváltakról szóló 1.7. Tételt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'''](s) &= s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y(s) - s^2 + s + 2\\
\mathcal{L}[y''](s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 1\\
\mathcal{L}[y'](s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1.
\end{aligned}$$

Az 1.1. táblázat 5. bejegyzéséből adódik, hogy

$$\mathcal{L}[t^3e^{2t}](s) = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Ezután visszahelyettesítve az (1.8) egyenletbe:

$$Y(s)(s^3 - 6s^2 + 12s - 8) - s^2 + s(1+6) + 2 - 6 + 12 = \frac{6}{(s-2)^4},$$

amiből rendezés és parciális törtekre bontás után:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2 - 7s + 16 + \frac{6}{(s-2)^4}}{s^3 - 6s^2 + 12s - 8} = \frac{(s-2)^2 - 3(s-2) + 6 + \frac{6}{(s-2)^4}}{(s-2)^3}\\
&= \frac{1}{s-2} - \frac{3}{(s-2)^2} + \frac{6}{(s-2)^3} + \frac{6}{(s-2)^7}.
\end{aligned}$$

Innen megint használva az 1.1. táblázat 5. sorát a visszatranszformáláshoz, kapjuk az

$$y(t) = e^{2t}\left(1 - 3t + 3t^2 + \frac{t^6}{120}\right), \quad (y \geq 0)$$

megoldást.

Megmutatjuk, hogy az 1.2. részben értelmezett konvolúció használható kezdetiérték-feladatok megoldására is.

1.20. Példa. Tegyük fel, hogy f alapfüggvény és tekintsük a következő kezdetiérték-problémát!

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Hasonlóan az előző példához, alkalmazzuk a Laplace-transzformációt mindkét oldalra:

$$(s^2 + s - 6)\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f].$$

Rendezés és szorzattá alakítás után kapjuk tehát

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f]\frac{1}{s^2 + s - 6} = \mathcal{L}[f]\frac{1}{(s-2)(s+3)}$$

kifejezést. Használva az 1.1. táblázatot $a = 2$, $b = -3$ esetén kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s+3)}\right] = \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t}).$$

Ekkor alkalmazva az 1.15. Tételt a visszatranszformáláshoz, adódik, hogy

$$y(t) = f(t) * \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t}) = \frac{1}{5}\int_0^t f(u)\Big[e^{2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\Big]du.$$

Ez a formula pedig minden f-re fennáll.

Ahogy az előbb is láttuk, arra is jó a konvolúció, hogy megtaláljuk egy függvény inverz Laplace-transzformáltját.

1.21. Példa. Legyen $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$; erre szeretnénk alkalmazni az $\mathcal{L}^{-1}$-operátort.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \\ &= \int_0^t \sin u \cdot 1 du = 1 - \cos t.\end{aligned}$$

2. fejezet

Követési modell

Két autó egymás mögül indul el, mikor a lámpa zöldre vált. Hogyan lehet leírni a második autó vezetőjének reakcióját az első autó sebességét figyelembe véve? Történik-e ütközés? Erre keresünk választ a következő fejezetben, melyre egy késleltetett differenciálegyenletet írunk fel, és azt az első fejezetben ismertetett Laplace-transzformáció segítségével is megoldjuk. A fejezet és az ábrák a [2] könyv alapján készültek.

2.1. Sebességszabályozás és a feladat vázolása

Két autó áll a piros lámpánál kezdetben. Tegyük fel, hogy a vezetők jól tudnak vezetni. Megfigyeljük, mi történik, amint a lámpa zöldre vált. Lehetséges, hogy a második autó túl gyorsan megy és kis idő elteltével beleütközik az első autóba. Miért lehet ez?

Egy vezetőre sokféle inger hat: egy közlekedési lámpa színének változása, az előtte és mögötte haladó autó sebessége; ezekre sokféleképpen reagálhat. Előfordulhat, hogy lassít, gyorsít vagy megáll; de ez egyik esetben sem történik azonnal. A vezetőnek először észlelnie kell ezeket az ingereket és amikor reagált rá, akkor az autónak is szüksége van valamennyi időre a végrehajtáshoz. Most tekintsük az együttes késlekedést az egész autó *reakcióidejének*. Tehát, ha t időpontban hat egy inger az autóra, akkor az $t+T$ időpontban reagál rá, ahol $T>0$ a *késleltetési idő*. Tegyük fel, hogy most a meghatározó inger a két autó sebessége közti különbség, amit nevezzünk relatív sebességnek. Eszerint reagál a második autó gyorsítással, avagy lassítással. Tegyük fel azt is, hogy ennek mértéke arányos a relatív sebességgel és ezt az arányossági mérőszámot nevezzük az autó *érzékenységének*.

Legyen az $x_1(t)$, illetve $x_2(t)$ a két autó helyzete a t időpontban, ahol t-t onnantól mérjük, hogy a lámpa zöldre váltott. Feltehetjük, hogy az első autónak konstans $a\ m/s^2$ a gyorsulása, 5 méter hosszú és a két autó közt 2 méter van, így $x_1(0)=0$ és $x_2(0)=-7$. Így felírhatjuk a következő – *késleltetett differenciálegyenletet* tartalmazó – kezdetiérték-feladatot:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=v_1(t), \quad \dot{v}_1(t)=a, \quad \dot{x}_2(t)=v_2, && t\geq 0,\\
&\dot{v}_2(t)=\lambda[v_1(t-T)-v_2(t-T)], && t\geq T,\\
&x_1(0)=0, \quad v_1(0)=0, \quad x_2(0)=-7, && \\
&v_2(t)=0, && 0\leq t\leq T,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ahol v_1, v_2 a két autó sebessége és λ a második autó érzékenysége. Olyan x_1, x_2 megoldásokat szeretnék találni, amelyekre valamilyen t^* esetén teljesül, hogy

$$x_1(t^*)-x_2(t^*)=5;$$

ekkor ütköznek össze az autók.

2.1. Megjegyzés. Azért nevezzük késleltetettnek a differenciálegyenletet, mert $\dot{v}_2$ függ v_2 korábbi időpontbeli értékétől is; illetve v_2-re kezdetiérték függvényünk van, nem csak egy konkrét pontbeli feltétel.

2.2. A követési modell megoldása

Oldjuk meg a (2.1) kezdetiérték-problémát, hogy megkapjuk x_1-et és x_2-t. Ha megkaptuk őket, akkor eldönthetjük, hogy történik-e ütközés. Az elsőnél könnyű dolgunk van, elég kétszer integrálni és felhasználni az $x_1(0) = 0$ és $v_1(0) = 0$ kezdeti értékeket (vagy fizika tanulmányainkra hivatkozni). Azt kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} v_1(t) &= at, \quad t \geq 0; \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}at^2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A második autó helyzetének meghatározásához integráljunk és használjuk fel, hogy $x_2(0) = -7$:

$$x_2(t) = -7 + \int_0^t v_2(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

A v_2 sebességet azonban még nem tudjuk. Kétféleképpen is megtalálhatjuk, először nézzük meg Laplace-transzformáció nélkül.

Behelyettesítve $v_1(t-T)$ helyére az $a(t-T)$ szorzatot adódik, hogy

$$\dot{v}_2(t) = \lambda[a(t-T) - v_2(t-T)], \quad t \geq T.$$

Ekkor $T \leq t \leq 2T$ esetén a $v_2(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$ kezdeti feltétel miatt integrálás után teljesül a következő:

$$v_2(t) = \frac{\lambda a}{2}(t-T)^2 + c_1, \tag{2.4}$$

ahol $c_1 = 0$, ugyanis t helyére T-t helyettesítve látható, hogy csak akkor teljesül a kezdeti feltétel. Hasonlóan, most nézzük meg a v_2 függvényt, ha $2T \leq t \leq 3T$! Ekkor $T \leq t - T \leq 2T$, így az előző eredményt felhasználva kapjuk, hogy

$$\dot{v}_2(t) = \lambda[a(t-T) - \frac{\lambda a}{2}(t-2T)^2],$$

amelyből már integrálással megkapjuk $v_2(t)$-t:

$$v_2(t) = \frac{\lambda a}{2}(t-T)^2 - \frac{\lambda^2 a}{6}(t-2T)^3 + c_2,$$

ahol most $c_2 = 0$ a $t = 2T$ helyettesítéssel adódik. Belátjuk, hogy ekkor igaz a következő tétel.

2.2. Tétel. *Tetszőleges $n \geq 2$-re teljesül, hogy*

$$v_2(t) = a\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\lambda^{k-1}(t-(k-1)T)^k, \quad \text{ha} \quad (n-1)T \leq t \leq nT. \tag{2.5}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. A (2.4) azonosságból adódik az $n = 2$ eset. Tegyük most fel, hogy teljesül n-re, lássuk be $(n+1)$-re! Tekintsük tehát a v_2 függvényt az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon. Tudjuk, hogy a deriváltjára teljesül, hogy

$$\dot{v}_2(t) = \lambda[a(t-T) - v_2(t-T)],$$

ekkor $(n-1)T \leq t - T \leq nT$, amelyre viszont teljesül a (2.5) egyenlőség az indukciós feltétel miatt. Visszahelyettesítve adódik, hogy

$$\dot{v}_2(t) = \lambda a(t-T) - a\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\lambda^k (t-kT)^k.$$

Integrálás és rendezés után már kapjuk a következőket:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \frac{\lambda a}{2}(t-T)^2 - a\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lambda^k (t-kT)^{k+1} \\ &= \frac{\lambda a}{2}(t-T)^2 + a\sum_{l=3}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!}\lambda^{l-1}(t-(l-1)T)^l \\ &= a\sum_{l=2}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!}\lambda^{l-1}(t-(l-1)T)^l, \quad \text{ha} \quad nT \leq t \leq (n+1)T. \end{aligned}$$

□

Visszahelyettesítve a (2.3) egyenletbe, elvégezve az integrálást és átindexelés után kapjuk, hogy x_2 a következő alakban áll elő:

$$x_2(t) = -7 + a\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{(k+3)!}\lambda^{k+1}(t-(k+1)T)^{k+3}, \quad \text{ha} \quad (n-1)T \leq t \leq nT.$$

2.3. Megjegyzés. Az 1.8. Definícióban szereplő Step-függvényt használva x_2-re adódik, hogy

$$x_2(t) = -7 + a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+3)!}\lambda^{k+1}(t-(k+1)T)^{k+3}\text{Step}(t, (k+1)T).$$

Most keressük meg v_2-t a Laplace-transzformációt használva! A (2.1) rendszerből, a (2.2) egyenletből, valamint az 1.16. Példából és a Laplace-transzformált linearitásából kapjuk:

$$\mathcal{L}[v_1(t)](s) = \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)](s) = \mathcal{L}[at](s) = \frac{a}{s^2},$$
$$\mathcal{L}[\dot{v}_2(t)] = \lambda(\mathcal{L}[v_1(t-T)] - \mathcal{L}[v_2(t-T)]), \quad t \geq T.$$

Továbbá, mivel tudjuk, hogy $v_2(t) = 0$, amennyiben $0 \leq t \leq T$, akkor $\dot{v}_2(t) = 0$ is teljesül; illetve az (1.5) azonosságot és a deriváltakról szóló 1.7. Tételt felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{v}_2(t)] &= e^{Ts}\mathcal{L}[\dot{v}_2(t-T)\text{Step}(t,T)] = e^{Ts}\mathcal{L}[\dot{v}_2(t-T)] \\ &= e^{Ts}(s\mathcal{L}[v_2] - v_2(0)) = e^{Ts}s\mathcal{L}[v_2], \qquad t \geq T. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$\lambda(\mathcal{L}[v_1] - \mathcal{L}[v_2]) = e^{Ts}s\mathcal{L}[v_2].$$

Kifejezve ebből $\mathcal{L}[v_2]$-t és behelyettesítve $\mathcal{L}[v_1]$-et:

$$\mathcal{L}[v_2] = \frac{\lambda}{\lambda + se^{Ts}}\mathcal{L}[v_1] = \frac{\lambda}{\lambda + se^{Ts}} \cdot \frac{a}{s^2} \tag{2.7}$$

Ezt a kapott eredményt szeretnénk visszatranszformálni. Ez viszont nem olyan egyszerű, mert a (2.7) összefüggés jobb oldalán álló kifejezés visszatranszformálására nincs zárt képletünk. Próbáljuk meg tehát átírni másmilyen alakba! Ha kiemeljük a $\frac{\lambda}{se^{Ts}}$-t, akkor kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[v_2] = \frac{\lambda}{se^{Ts}} \cdot \left[\frac{1}{1 + \lambda/(se^{Ts})} \cdot \frac{a}{s^2}\right].$$

Most, ha átírjuk $\frac{1}{1+\lambda/se^{Ts}}$-et felhasználva a geometriai sor képletét és, hogy ha s elég nagy, akkor $\frac{\lambda}{se^{Ts}} < 1$, akkor a sor konvergens:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v_2] &= \frac{\lambda e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{a}{s^2} \cdot \left[1 - \frac{\lambda}{se^{Ts}} + \frac{\lambda^2}{s^2e^{2Ts}} - \frac{\lambda^3}{s^3e^{3Ts}} + \dots\right] \\ &= a\lambda\left[\frac{e^{-Ts}}{s^3} - \frac{\lambda e^{-2Ts}}{s^4} + \frac{\lambda^2 e^{-3Ts}}{s^5} - \frac{\lambda^3 e^{-4Ts}}{s^6} + \dots\right].\end{aligned}$$

Erre pedig már alkalmazhatjuk $\mathcal{L}^{-1}$-et (amiről tudjuk, hogy lineáris) és az 1.1. táblázatot, amiből:

$$\begin{aligned}v_2(t) &= a\lambda\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-Ts} \cdot \frac{1}{s^3} - \lambda e^{-2Ts} \cdot \frac{1}{s^4} + \lambda^2 e^{-3Ts} \cdot \frac{1}{s^5} - \lambda^3 e^{-4Ts} \cdot \frac{1}{s^6} + \dots\right] \\ &= a\lambda\Big[\frac{1}{2}(t-T)^2\mathrm{Step}(t,T) - \frac{\lambda}{6}(t-2T)^3\mathrm{Step}(t,2T) + \\ &\quad \frac{\lambda^2}{24}(t-3T)^4\mathrm{Step}(t,3T) - \frac{\lambda^3}{120}(t-4T)^5\mathrm{Step}(t,4T) + \dots\Big].\end{aligned}$$

Legvégül, visszahelyettesítve a (2.3) egyenletbe és 0-tól t-ig integrálva v_2-t:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= -7 + a\lambda\Big[\frac{1}{6}(t-T)^3\mathrm{Step}(t,T) - \frac{\lambda}{24}(t-2T)^4\mathrm{Step}(t,2T) \\ &\quad \frac{\lambda^2}{120}(t-3T)^5\mathrm{Step}(t,3T) - \frac{\lambda^3}{720}(t-4T)^6\mathrm{Step}(t,4T) + \dots\Big] \\ &= -7 + a\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{(k+3)!}(t-(k+1)T)^{k+3}\mathrm{Step}(t,(k+1)T).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz a megoldás, amit teljes indukcióval láttunk be! Egy könnyen használható képletet kaptunk, ugyanis egy rögzített $t > 0$-ra nem marad sok tagunk, mert az egységugrásfüggvények rendre kikapcsolják őket. Így tehát felírva a kezdő pár intervallumra a második autó helyzetét:

$$x_2(t) = \begin{cases} -7, & 0 \le t \le T, \\ -7 + \frac{a\lambda}{6}(t-T)^3, & T \le t \le 2T, \\ -7 + \frac{a\lambda}{6}(t-T)^3 - \frac{a\lambda^2}{24}(t-2T)^4, & 2T \le t \le 3T, \\ \vdots & \end{cases} \tag{2.9}$$

2.3. Illusztrálás példán

Tegyük fel, hogy az első autó gyorsulása konstans $a = 2m/s^2$, ekkor $x_1(t) = at^2/2 = t^2$, így a (2.9) eredményből:

$$x_1(t) - x_2(t) = \begin{cases} t^2 + 7, & 0 \le t \le T, \\ t^2 + 7 - \dfrac{\lambda}{3}(t-T)^3, & T \le t \le 2T, \\ t^2 + 7 - \dfrac{\lambda}{3}(t-T)^3 + \dfrac{\lambda^2}{12}(t-2T)^4, & 2T \le t \le 3T, \end{cases}$$

csak $0 \le t \le 3T$-re tekintve a különbséget.

Azt szeretnénk megnézni, hogy mikor történhet ütközés. Azaz milyen t^*-ra teljesül, hogy $x_1(t^*) - x_2(t^*) = 5$. Ez nyilván nem történhet a $[0, T]$ intervallumban, viszont alkalmas λ-val és T-vel a $[T, 2T]$-n igen. A biztos ütközéshez ebben az időintervallumban a következőre van szükség:

$$x_1(2T) - x_2(2T) = 4T^2 + 7 - \frac{\lambda}{3}T^3 \le 5.$$

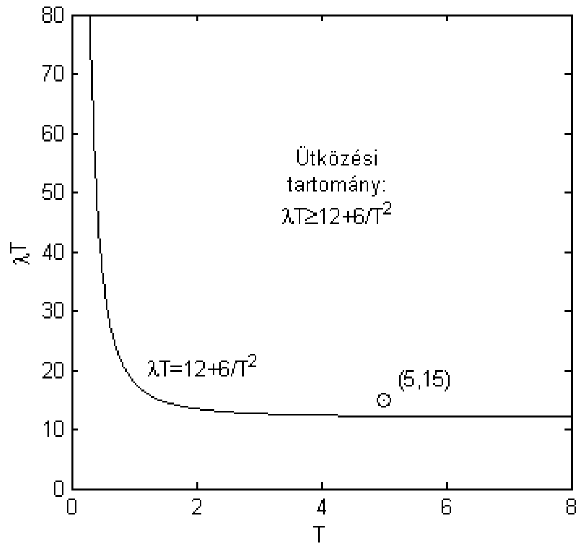
Átrendezve:

$$\lambda T \ge 12 + \frac{6}{T^2}. \tag{2.10}$$

Látható, hogy tényleg λ-tól és T-től függ az ütközés. Az úgynevezett *ütközési tartomány* a

$$\lambda T = 12 + \frac{6}{T^2}$$

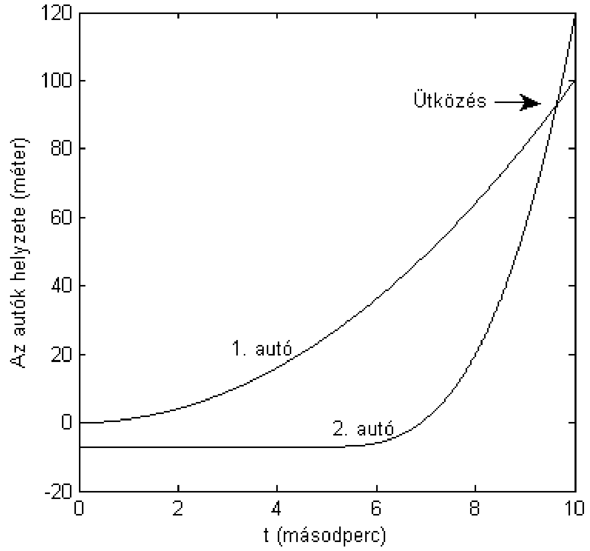
függvény feletti rész, amiben, ha van egy $(T, \lambda T)$ pontunk, akkor az ütközés megtörténik a $[T, 2T]$ intervallumban. Ezt illusztrálja a következő ábra is.



Most nézzük meg, mi a helyzet, ha megadunk pontos értékeket a T késleltetési időre és a λ érzékenységre! Legyen például

$$T = 5, \qquad \lambda = 3.$$

Ekkor például az $(5, 15)$ pont az ütközési tartományban van, ugyanis kielégíti a (2.10) egyenlőtlenséget, vagyis a t^* ütközés pillanata valahol a $[5, 10]$ időintervallumban van. Ebből a másik ábrából látszik is, hogy az ütközés a 9. és 10. másodperc között történik meg:



Ezekből a példákból láthatjuk, hogy meglepő módon ugyanolyan reakcióidő, de magasabb érzékenység esetén esélyesebb az ütközés. Ez azért történhet, mert az ingerekre való reakció nem azonnal történik, hanem a bizonyos T késleltetési idő elteltével, ekkor azonban már meg is változhatott az állapot, amire reagált a vezető. Így, ha kisebb az érzékenység, kisebb valószínűséggel történhet meg, hogy egy - már nem létező - ingerre válaszol a második autós, mondjuk intenzívebb gyorsítással.

3. fejezet

A szimultán tanulás

E fejezet célja a szimultán tanulás – azaz, amikor a diák több tantárgyat tanul egy időintervallumon keresztül – leírása egy egyszerű dinamikai modellel. Meglátjuk majd, hogy több tárgy tanulása esetén nagyobb intenzitást érhetünk el. Vizsgáljuk azt, hogy mi történik, ha a diák szabadon tanul – rendszeres ellenőrzés nélkül –, illetve mikor bizonyos időközönként történik ellenőrzés. Megnézünk néhány speciális esetet is. A fejezet a [3] cikk alapján készült.

3.1. Bevezető

A fejezetben bemutatunk egy matematikai modellt, amelyben egy diák huzamosabb ideig, egyszerre több tárgyat tanul. A megtanult anyagmennyiséget fogjuk vizsgálni, mint az idő függvényét, illetve annak a változását. Nem vesszük figyelembe a diák tulajdonságait, azaz, hogy milyen pszichológia folyamatok játszódnak le a tanulás során, tisztán objektív szempontból tekintjük a tanulási folyamatot. Így tehát a diák belső tulajdonságait a diákra jellemző állandóknak vesszük. Legyen most a vizsgált diák egy autonóm, illetve később egy külső kényszernek alávetett dinamikai rendszer. Természetesen ez a rendszer nem írhatja le tökéletesen a diákot, mivel egy dinamikai rendszer sosem lehet egyenlő egy emberrel, ugyanis az összes jellemzőjét nem tudjuk figyelembe venni.

A modell lineáris és majd látható, hogy a leglényegesebb kvalitatív jellemzők bemutatására lesz alkalmas. Kvantitatív következtetéseket nemigen vonhatunk le, a modell elméleti úton van konstruálva, így kiindulási alapot nyújtva értelmes kísérletekhez, amelyekből már pontosabb eredményekre is juthatunk.

3.2. A használt jelölések

Tegyük fel, hogy a vizsgált diák $n \geq 2$ tantárgyat tanul hosszabb ideig – mondjuk egy féléven, vagy egy tanéven keresztül. A tanulmányok megkezdésének időpontja legyen a $t = 0$ időpillanat. Ekkor az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ oszlopvektor jelölje a *tudásmennyiség vektort*, ahol x_i $(i = 1, \dots, n)$ jelöli a diák *tudásmennyiségét* az i-edik tárgyban. Ezt a tudásmennyiséget mérhetjük például könyvoldalakban, de számunkra most nem lényeges, hogy milyen mélységű a tudás. Nézhetjük valamely $T > 0$ esetén a $[0, T]$ időintervallumon (ahol például T jelölheti a vizsgaidőszak kezdetét) vagy akár a $[0, +\infty]$ intervallumon is.

Ezután az $x(t)$ függvény deriváltját tekintjük, vagyis jelölje $\dot{x}(t)$ a *tanulás intenzitását*, amely a tudásmennyiség időegység alatti megváltozását jelenti. Az időegység lehet egy hét vagy esetleg egy nap, és ezalatt az idő alatt a diák nem csak a tanulással foglalkozik, de feltételezzük, hogy akar tanulni, a tanulásra rendelkezésre álló időt tényleg a tanulásra

fordítja. Így az $\dot{x}(t)$ vektor koordinátafüggvényei vehetnek fel negatív és pozitív értékeket is, mert amikor a diák nem tanul éppen egy tárgyat, akkor felejt (de az is előfordulhat, hogy tanulás közben se mindig pozitív az érték). A későbbiek érdekében vezessük be az $y = \dot{x}$ jelölést is.
Az $x(t)$ függvény második deriváltját is használjuk majd, amit a *tudás gyorsulás*ának nevezünk. Ha tehát az $\ddot{x}_i(t)$ pozitív, akkor az i-edik tárgy tanulásának intenzitása nő; ha negatív, akkor csökken.

Vezessük be a következő definíciót:

3.1. Definíció. A diák *terhelhetőségi vektor*ának nevezzük és b-vel jelöljük a következő $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ oszlopvektort, ahol b_i jelöli a diák terhelhetőségét az i-edik tárgyban. Ez azt jelenti, hogy ha a diák csak az i-edik tárgyat tanulná, akkor ennyi lenne a maximális intenzitás, amelyet elérhet a tárgy tanulása során – miközben a többi tárgy tanulásának intenzitása 0.

Feltesszük, hogy ezen b_i-k állandók, vagyis a diák a több időegységből álló vizsgálandó időintervallum során nem fárad ki, mivel a nem tanulással töltött időt pihenésre, illetve sportolásra fordítja. Hozzátennénk még azt is, hogy a b_i értékek az adott diák képességeitől függnek, a tárgy minél könnyebb a diák számára, annál nagyobb lesz a terhelhetőség, ezek nyilván mind pozitív számok. A terhelhetőséget felhasználva a j-edik tárgy i-edikre vonatkoztatott *relatív nehézségi fok*át is megnézhetjük, ez könnyen adódik belőlük: b_i/b_j-vel értelmezzük.

Be kell még vezetnünk bizonyos r_{ij} konstansokat is, amik azt jelentik, hogy az i-edik tárgy tanulása után mennyire nem üdítő áttérni a j-edik tárgy tanulására, azaz mennyire hasonlítanak egymásra a tárgyak. Például valószínűségszámítás után statisztikát, vagy differenciálegyenletek után parciális differenciálegyenleteket nem túl üdítő tanulni, viszont lehet, hogy több erőnk lesz még egy kis történelemhez. Emiatt, ha tovább foglalkozunk az i-edik tárggyal egységnyi időn keresztül, az egyáltalán nem üdítő, ezért r_{ii}-t 1-nek vesszük, minden más j-re feltételezzük viszont, hogy $0 < r_{ij} < 1$. Nyilvánvaló, hogy $r_{ij} = r_{ji}$. Ezen adatokból már természetesen adódik a következő fogalom:

3.2. Definíció. *Relatív disszipáció mátrix*nak nevezzük és A-val jelöljük a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12}\frac{b_1}{b_2} & \ldots & r_{1n}\frac{b_1}{b_n} \\ r_{21}\frac{b_2}{b_1} & 1 & \ldots & r_{2n}\frac{b_2}{b_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{n1}\frac{b_n}{b_1} & r_{n2}\frac{b_n}{b_2} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a mátrix a_{ij} elemei megadják, hogy a j-edik tárgy tanulása milyen mértékben szívja el (disszipálja) a diák terhelhetőségét az i-edik tárgyban, r_{ij} mutatja mennyire nem üdítő áttérni az i-edikről a j-edik tárgyra, míg b_i/b_j jelöli a j-edik tárgy i-edikre vonatkoztatott relatív nehézségi fokát, ahol b_i a diák terhelhetősége az i-edik tárgyban.

3.3. A szabadon tanuló diák

Megnézzük, mi történik, hogyha a vizsgált diákra a tanulás folyamata során nem hat külső kényszer, azaz nincs például dolgozatírás vagy kötelező beadandó. Ilyenkor egészen egyszerűen leírhatjuk a diák $x(t)$ tudásmennyiség-vektorát a következő differenciálegyenlet-rendszerrel, felhasználva a fenti relatív disszipáció mátrixot és a terhelhetőségi vektort:

$$\ddot{x} = b - A\dot{x}.$$

Ezt átírva $y(t)$-re, amivel az intenzitást jelöltük, kapjuk:

$$\dot{y} = b - Ay. \tag{3.1}$$

Ugyan ez a differenciálegyenlet-rendszer nem tartalmazza magát az $x(t)$ vektort, de $y(t)$-ből egyszerű integrálást és az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt (mivel kezdetben minden tárgyban nulla a tudásmennyiség) alkalmazva majd meghatározhatjuk:

$$x(t) = \int_0^t y(s)ds. \tag{3.2}$$

A (3.1) egy elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén lineáris rendszer, melynek tehát i-edik egyenlete:

$$\dot{y}_i = b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Látható, hogy ha a tanulás intenzitása minden $k \neq i$ esetén nulla, azaz $y_k = 0$, akkor

$$\dot{y}_i = b_i - y_i,$$

vagyis az intenzitás az i-edik tárgyban egészen a b_i terhelhetőségig növelhető (ahogy el is várható), különben az intenzitás megváltozása negatívvá válna. Ha a diák a többi tárgyat is tanulja – további y_k-k pozitívvá válnak –, akkor y_i nem érheti el b_i-t, mert ebben az esetben a jobb oldalból további pozitív tagokat vonunk ki (a_{ik}-k is pozitívak).

Oldjuk meg most a (3.1) rendszert! Feltételezhetjük, hogy az A mátrix reguláris, illetve, hogy minden λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sajátértéke egyszeres. A hozzájuk tartozó sajátvektorokat rendre jelöljük $s_1, s_2, \ldots, s_n$-nel. Így $(-A)$ sajátértékei: $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$. Az A mátrix hasonló az r_{ij}-kből épített R szimmetrikus mátrixhoz, ugyanis az A mátrixot – a 3.2. Definíció értelmében – úgy kaphatjuk R-ből, hogy balról szorozzuk egy olyan diagonális mátrixszal, melynek főátlójában a b_i értékek állnak, majd ezt jobbról egy olyannal, aminek a főátlójában ezek reciprokai vannak. Ekkor A-t kapjuk, hiszen egy diagonális mátrixszal való jobbról szorzás A oszlopainak a diagonális mátrix megfelelő elemeivel való beszorzását eredményezi, míg a balról szorzás sorokra ugyanezt. Így A-nak minden λ_i sajátértéke valós. Triviális, hogy a (3.1) egyenletrendszer egyik megoldása az

$$y(t) = A^{-1}b$$

konstans függvény. Tudjuk, hogy ekkor az általános megoldás az

$$y(t) = A^{-1}b + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-\lambda_k t} s_k,$$

ahol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges konstansok. Előbbi $y(t)$ akkor ad viszonylag reális képet a tanulás intenzitásának megváltozásáról a $[0, +\infty]$ intervallumban (vagy ennek hosszabb részintervallumain), ha ott a koordináták korlátosak. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a $(-A)$ mátrix minden sajátértékére fennálljon, hogy $-\lambda_i \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Azaz $\lambda_i \geq 0$, de tudjuk, hogy A reguláris, így nem lehet a 0 sajátértéke. Ebből adódik, hogy a (3.1) rendszer aszimptotikusan stabilis, mert $(-A)$ minden sajátértéke negatív. Az összes megoldás pedig az $A^{-1}b$ megoldáshoz tart, ez határozza meg a stacionárius viselkedést a végtelenben:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = A^{-1}b.$$

Ebből tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy ha a diák szabadon tanul, akkor kezdettől fogva, vagy egy bizonyos átmeneti idő elteltével a diák állandó intenzitással tanulja az összes tárgyat. Ezt az állandó intenzitást viszont úgy kell érteni, hogy egy viszonylag hosszabb időegység, például egy hét, alatt állandó. Adódik most már a (3.2) összefüggés alapján, hogy

$$x(t) = A^{-1}bt.$$

3.4. Speciális esetek

Megnézzük az előző, szabadon tanuló diák modelljének néhány speciális esetét. Mi történik, ha két tárgyat tanul a vizsgált diák, azaz $n = 2$? Ekkor a (3.1) rendszer így egyszerűsödik, ha használjuk az $r = r_{12} = r_{21}$ jelölést:

$$\dot{y}_1 = b_1 - y_1 - r\frac{b_1}{b_2}y_2,$$
$$\dot{y}_2 = b_2 - r\frac{b_2}{b_1}y_1 - y_2.$$

A relatív disszipáció mátrix ellentettje, a $(-A)$ mátrix így néz ki ekkor:

$$\begin{pmatrix} -1 & -r\frac{b_1}{b_2} \\ -r\frac{b_2}{b_1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus polinomja

$$\det(-A - \lambda I) = \det(A + \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + (1 - r^2).$$

Mindkét sajátérték negatív, hiszen a determináns pozitív, illetve a gyökök szorzata $1-r^2 > 0$ (mert $0 < r < 1$ teljesül) és az összegük -2. Így aszimptotikusan stabilis rendszert kapunk. Az állandó megoldás pedig az előző 3.3. részből adódóan, illetve

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - r^2}\begin{pmatrix} 1 & -r\frac{b_1}{b_2} \\ -r\frac{b_2}{b_1} & 1 \end{pmatrix}$$

alapján következik, hogy

$$y(t) = A^{-1}b = \frac{1}{1 + r}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ebből az látszik, hogy ha a diák két tárgyat szabadon tanul, akkor a terhelhetőségeik felénél nagyobb állandó intenzitású a tanulás.

Vizsgáljuk meg most az $n = 3$ esetet! Tudjuk, hogy $r_{ij} = r_{ji}, j \neq i = 1, 2, 3$, így most az A mátrix a következőképpen fog kinézni:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r_{12}\frac{b_1}{b_2} & r_{13}\frac{b_1}{b_3} \\ r_{12}\frac{b_2}{b_1} & 1 & r_{23}\frac{b_2}{b_2} \\ r_{13}\frac{b_3}{b_1} & r_{23}\frac{b_3}{b_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

A $(-A)$ mátrix karakterisztikus polinomjának vizsgálatához használjuk fel a következő – tanulmányainkból jól ismert – tételt.

3.3. Tétel (Routh-Hurwitz-kritérium)**.** *Legyen $N \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}$, és tekintsük a $p(x) := x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomot. A p polinom minden gyökének valós része pontosan akkor negatív, ha az*

$$\begin{pmatrix} a_{N-1} & 1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{N-3} & a_{N-2} & a_{N-1} & 1 \quad 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \quad \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots \quad \dots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots\dots & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

$(N \times N)$-es mátrix

$$a_{N-1}, \begin{vmatrix} a_{N-1} & 1 \\ a_{N-3} & a_{N-2} \end{vmatrix}, \dots$$

bal oldali sarokaldeterminánsai pozitívak.

A karakterisztikus polinom a következő alakban áll elő:

$$-\det(-A - \lambda I) = \det(A + \lambda I) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + B\lambda + \det A, \tag{3.3}$$

ahol B és $\det A$ így néznek ki:

$$B = 3 - (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2),$$
$$\det A = 1 + 2r_{12}r_{23}r_{13} - (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2).$$

Ekkor a 3.3. Tételben szereplő polinom most a (3.3) egyenletben lévő, tehát a tételbeli mátrix most így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \det A & B & 3 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

Ebből tudjuk, hogy pontosan akkor teljesül a stabilitás (azaz negatívak a sajátértékek), ha igaz, hogy

$$3B - \det A > 0, \tag{3.4}$$

illetve

$$(\det A)(3B - \det A) > 0.$$

A (3.4) egyenlőtlenség automatikusan teljesül, hiszen $0 < r_{ij} < 1$ miatt

$$3B - \det A = 8 - 2(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2) - 2r_{12}r_{23}r_{13} > 8 - 2 \cdot 3 - 2 = 0.$$

Tehát a rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha $\det A > 0$. Innen már számolás után adódik, hogy az állandó megoldás az

$$y = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b_1(1 - r_{23}^2 + r_{13}r_{23} + r_{12}r_{23} - r_{12} - r_{13}) \\ b_2(1 - r_{13}^2 + r_{23}r_{13} + r_{12}r_{13} - r_{12} - r_{23}) \\ b_3(1 - r_{12}^2 + r_{23}r_{12} + r_{13}r_{12} - r_{13} - r_{23}) \end{pmatrix}$$

vektor. Ha $r_{12} = r_{23} = r_{13} = r$, akkor a stabilitási feltétel így egyszerűsödik:

$$2r^3 - 3r^2 + 1 = (r-1)^2(2r+1) > 0,$$

ami nyilván teljesül, ha $0 < r < 1$. Ekkor a megoldás a következő:

$$y = A^{-1}b = \frac{1}{2r+1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ez – hasonlóan az előző esethez – azt jelenti, hogy ha a diák három tárgyat tanul szabadon, akkor a tanulás állandó intenzitása a tárgyak terhelhetőségeinek harmadánál nagyobb. Ilyenkor viszont van egy kétszeres sajátérték, ez azonban nem baj, a következő eset kapcsán meglátjuk, miért.

Utolsó speciális esetként vizsgáljuk meg, ha tetszőleges n darab tárgy van, viszont igaz, hogy

$$r_{ij} = r, \quad i \neq j = 1, 2, \ldots, n;$$

azaz bármely tárgyról áttérni bármely másikra ugyanannyira nem üdítő. Most az A mátrix ilyen alakú lesz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r\frac{b_1}{b_2} & r\frac{b_1}{b_3} & \ldots & r\frac{b_1}{b_n} \\ r\frac{b_2}{b_1} & 1 & r\frac{b_2}{b_3} & \ldots & r\frac{b_2}{b_n} \\ r\frac{b_3}{b_1} & r\frac{b_3}{b_2} & 1 & \ldots & r\frac{b_3}{b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\frac{b_n}{b_1} & r\frac{b_n}{b_2} & r\frac{b_n}{b_3} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

a karakterisztikus polinomja pedig, ha 1 helyére b_i/b_i-t írunk ($i = 1, \ldots, n$) és a determináns i-edik sorából b_i-t, i-edik oszlopából $1/b_i$-t emelünk ki, akkor a

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{b_1}{b_1} - \lambda & r\frac{b_1}{b_2} & \ldots & r\frac{b_1}{b_n} \\ r\frac{b_2}{b_1} & \frac{b_2}{b_2} - \lambda & \ldots & r\frac{b_2}{b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\frac{b_n}{b_1} & r\frac{b_n}{b_2} & \ldots & \frac{b_n}{b_n} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \begin{vmatrix} 1-\lambda & r & \ldots & r \\ r & 1-\lambda & \ldots & r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & \ldots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

alakba írható. Vonjuk ki az első sort az összes többi sorból, majd adjuk hozzá az összes többi oszlopot az első oszlophoz! Ekkor a

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & r & r & \ldots & r \\ r-1+\lambda & 1-r-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ r-1+\lambda & 0 & 1-r-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r-1+\lambda & 0 & \ldots & 0 & 1-r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+(n-1)r-\lambda & r & \ldots & r \\ 0 & 1-r-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1-r-\lambda \end{vmatrix}$$

felső háromszögmátrixot kapjuk, amelyből már adódnak a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1 - r, \quad \lambda_2 = 1 + (n-1)r,$$

ahol λ_1 $(n-1)$-szeres, λ_2 egyszeres sajátértékek. Mindkettő pozitív, ha $0 < r < 1$ teljesül, tehát a (3.1) rendszer most is aszimptotikusan stabilis. Azonban ekkor nem teljesül azon feltevésünk, hogy minden sajátérték egyszeres. Ha viszont az r_{ij} értékek egy kicsit eltérnek egymástól, akkor is aszimptotikusan stabilis marad a rendszer, mert a sajátértékek a mátrix elemeinek folytonos függvényei. Így a feltevésünk továbbra is fennállhat. Arra viszont figyelni kell, hogy 0-hoz, illetve 1-hez közeli sajátértékek ne forduljanak elő, mert ekkor a stabilitás megszűnhet.

3.5. Tanulás külső kényszer hatására

Külső kényszer alatt periodikus külső kényszert fogunk érteni, azaz szabályos időközönként történnek ellenőrzések, amelyek a diák számára negatív vagy pozitív következményekkel járnak. Vagyis a diáknak az ellenőrzés miatt érdekében áll, hogy növelje a tanulás intenzitását. Ez a kényszer lehet házi vagy zárthelyi dolgozat, esetleg feleltetés. Általánosságban igaz az is, hogy a diák ezen ellenőrzés után leereszt, csökkenti a tanulás intenzitását. Tehát a periodikus külső kényszer hathat negatívan és pozitívan is a diák teljesítményére, amit úgy adhatunk meg, ha egy periodikus tagot (mely bármely valós értéket felvehet) adunk hozzá a (3.1) egyenlet jobb oldalához. Legyen ez a $T > 0$ periódusú t-től függő p függvény, azaz $p(t+T) = p(t)$. Ekkor így alakul a (3.1) differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{y}(t) = b - Ay + p(t). \tag{3.5}$$

Itt feltételeztük, hogy minden tárgyban T periódus szerint történik ellenőrzés. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy p szinuszfüggény. Vezessük most be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} m_i &\geq 0, \quad \text{az } i\text{-edik tárgyban gyakorolt kényszer amplitúdója} \\ \varphi_i &, \quad \text{az } i\text{-edik tárgyban gyakorolt kényszer kezdőfázisa} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T}, \quad \text{a szögsebesség.} \end{aligned}$$

Ekkor a periodikus tag i-edik koordinátája a következőképpen fog kinézni:

$$p_i(t) = m_i \sin(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A φ_i kezdőfázisok megadják, hogy a különböző tárgyakban az ellenőrzés mennyire van elcsúsztatva az időben. Az m_i amplitúdók pedig függnek a kényszer fent említett előnyös vagy hátrányos következményeitől, illetve attól, hogy a diák hogyan reagál erre az egyes tárgyak esetén.

Ezek szerint kapjuk a (3.5) rendszer i-edik koordinátáját:

$$\dot{y}_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + m_i \sin(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Bebizonyítjuk a következő állítást:

3.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $(-A)$ mátrix aszimptotikusan stabilis, azaz minden sajátértéke negatív. Ekkor a (3.5) rendszernek – a fenti módon definiálva p-t – létezik T periódusú megoldása, amely*

$$z(t) = A^{-1}b + \psi(t)$$

alakú, ahol a $\psi(t)$ függvény i-edik koordinátája a következő módon adható meg:

$$\psi_i(t) = c_i \sin(\omega t + \delta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

alkalmas c_i és δ_i konstansokkal.

Bizonyítás. Azt szeretnénk belátni, hogy léteznek olyan c_i, δ_i konstansok, melyekkel igaz a fenti állítás. Ha ezt a z-t behelyettesítjük a (3.6) kifejezéssel definiált rendszerbe, akkor kapjuk, hogy

$$\dot{\psi}(t) = -A(A^{-1}b + \psi(t)) + b + p(t),$$

azaz

$$\dot{\psi}(t) = -A\psi(t) + p(t).$$

Ez azt jelenti az i-edik koordinátára nézve, hogy

$$\omega c_i \cos(\omega t + \delta_i) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \sin(\omega t + \delta_j) + m_i \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Most használjuk az addíciós tételeket:

$$\begin{aligned}
&\omega c_i \cos\delta_i \cos\omega t - \omega c_i \sin\delta_i \sin\omega t \\
&= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \big(\sin\omega t \cos\delta_j + \sin\delta_j \cos\omega t\big) + m_i\big(\sin\omega t \cos\varphi_i + \sin\varphi_i \cos\omega t\big) \\
&= \left(m_i \sin\varphi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \sin\delta_j\right)\cos\omega t + \left(m_i \cos\varphi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \cos\delta_j\right)\sin\omega t.
\end{aligned}$$

Ebből pedig $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén:

$$\begin{aligned}
\omega c_i \cos\delta_i &= m_i \sin\varphi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \sin\delta_j, \\
-\omega c_i \sin\delta_i &= m_i \cos\varphi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \cos\delta_j.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Az áttekinthetőség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket az alábbi oszlopvektorokra:

$$\begin{aligned}
c^{(k)} &= (c_1\cos\delta_1, c_2\cos\delta_2, \ldots, c_n\cos\delta_n)^T, \\
c^{(s)} &= (c_1\sin\delta_1, c_2\sin\delta_2, \ldots, c_n\sin\delta_n)^T, \\
m^{(k)} &= (m_1\cos\varphi_1, m_2\cos\varphi_2, \ldots, m_n\cos\varphi_n)^T, \\
m^{(s)} &= (m_1\sin\varphi_1, m_2\sin\varphi_2, \ldots, m_n\sin\varphi_n)^T.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Most a (3.7) kifejezésekbe behelyettesítve az előző jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\omega c^{(k)} &= m^{(s)} - Ac^{(s)}, \\
-\omega c^{(s)} &= m^{(k)} - Ac^{(k)}.
\end{aligned}$$

Szorozzuk meg a második egyenletet $(-i)$-vel és adjuk hozzá az első egyenlethez! Ekkor

$$\omega(c^{(k)} + ic^{(s)}) = m^{(s)} - im^{(k)} + A(ic^{(k)} - c^{(s)}) = iA(c^{(k)} + ic^{(s)}) - i(m^{(k)} + im^{(s)}).$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$(A + i\omega I)(c^{(k)} + ic^{(s)}) = m^{(k)} + im^{(s)}.$$

Feltettük, hogy $(-A)$ aszimptotikusan stabilis, azaz minden sajátértéke negatív, így $i\omega$ nem sajátértéke $(-A)$-nak, tehát az $A + i\omega I$ mátrix reguláris; képezhetjük az inverzét:

$$c^{(k)} + c^{(s)} = (A + i\omega I)^{-1}(m^{(k)} + im^{(s)}). \tag{3.9}$$

Az $m^{(k)}$ és $m^{(s)}$ vektorokat ismerjük, így az előbbi egyenlőségbe helyettesítve megkaphatjuk a $c^{(k)}$ és $c^{(s)}$ vektorokat, amelyekből pedig már meghatározhatjuk az ismeretlen c_i amplitúdókat és δ_i kezdőfázisokat. □

3.5. Megjegyzés. A c_i értékek választhatók nemnegatívnak is, hiszen ha valamelyik c_i negatív a (3.8) vektorokban, akkor δ_i helyett $(\delta_i + \pi)$-t választva c_i helyett $(-c_i)$-t kell írnunk.

3.6. Megjegyzés. Nemcsak, hogy létezik az előbbi z megoldás, hanem minden megoldás is így fog viselkedni hosszú távon és ugyanezzel a periódussal fog rendelkezni.

Speciális esetként vizsgáljuk az $n = 2$ esetnek azon variációját, amikor az első tárgyat szabadon, míg a másodikat külső kényszer hatása alatt tanulja a diák. Befolyásolja-e a második tárgyban alkalmazott külső kényszer az első tárgy tanulását? Ha igen, akkor hogyan? Ha az $m_2 = m > 0$, illetve $\varphi_2 = \varphi$ jelölést használjuk és tudjuk, hogy $m_1 = 0$, akkor a rendszer így alakul:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= b_1 - y_1 - r\frac{b_1}{b_2}y_2, \\ \dot{y}_2 &= b_2 - r\frac{b_2}{b_1} - y_2 + m\sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$c^{(k)} + ic^{(s)} = ce^{i\delta},$$

illetve

$$m^{(s)} + im^{(k)} = me^{i\varphi},$$

a (3.9) összefüggés a következő alakú lesz:

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{i\delta_1} \\ c_2 e^{i\delta_2} \end{pmatrix} = (A + i\omega I)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ me^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

ahol

$$(A + i\omega I)^{-1} = \frac{1}{1 - r^2 - \omega^2 + 2i\omega} \begin{pmatrix} 1 + i\omega & -r\frac{b_1}{b_2} \\ -r\frac{b_2}{b_1} & 1 + i\omega \end{pmatrix},$$

mivel

$$A + i\omega I = \begin{pmatrix} 1 + i\omega & r\frac{b_1}{b_2} \\ r\frac{b_2}{b_1} & 1 + i\omega \end{pmatrix}.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy

$$c_1 e^{i\delta_1} = \frac{-r\frac{b_1}{b_2}me^{i\varphi}}{1 - r^2 - \omega^2 + 2i\omega},$$

amelyből abszolút értéket véve kapjuk, hogy

$$c_1 = \frac{rm}{(\omega^4 + 2(1 + r^2)\omega^2 + (1 - r^2)^2)^{1/2}} \frac{b_1}{b_2}.$$

A kapott c_1 azt mutatja, hogy a szabadon tanulásnál vizsgált $n = 2$ esetben az első tárgy intenzitása mekkora amplitúdóval rezeg az $\frac{1}{1+r}b_1$ érték körül. Ez tehát a második tárgyban gyakorolt periodikus kényszer zavaró hatása az első tárgy tanulására. A kapott összefüggésből látható, hogy c_1 egyenesen arányos $\frac{b_1}{b_2}$-vel és a második tárgyban gyakorolt kényszer erősségével. Azt is láthatjuk továbbá, hogy ha a második tárgyban az ellenőrzések gyakorisága nő (azaz ω nő), akkor c_1 csökken. Ebből az következik, hogy a túl gyakori ellenőrzés már olyan, mintha nem is történne ellenőrzés.

4. fejezet

Rekeszrendszerek

A következő fejezetben ismertetjük a rekeszrendszerek (vagy kompartment modellek) felépítését, illetve néhány példán keresztül bemutatjuk felhasználási lehetőségüket. Az itt ismertetett modellek és a használt ábrák a [2] könyv modelljeit és ábráit veszik alapul. Egy hasonló – a vérkeringésbe jutó gyógyszer koncentrációjának változását követő – probléma tárgyalása olvasható a [4] könyvben.

4.1. Gyógyszeradagolási modell

A kompartment modelleket sok területen alkalmazhatjuk: például a kémiában, amikor anyagok egymásba átalakulását vizsgáljuk, vagy amikor valamilyen anyag élő szervezetbe jutását követjük nyomon. Emellett még alkalmazható a populációdinamikában is, mikor egyedek vándorlását figyeljük meg adott területek között. Ezeknél az egyes állapotok a kompartmentek vagy rekeszek. A következő modellen keresztül előkészítjük a rekeszrendszer definícióját.

Megfázás esetén a legtöbben beveszünk valamilyen gyógyszert, hogy enyhítsük a tüneteket. Ez a gyógyszer esetünkben az antihisztamin lesz, aminek végigkövetjük az útját a test két rekeszén át. Azt figyeljük meg, hogy egy bizonyos dózis az emésztőrendszerből miként jut a vérbe, ahol igazából kifejti a hatását, majd tűnik el onnan is az idő múlásával.

Tegyük fel, hogy kezdetben az emésztőtraktusban A egység antihisztamin van. Jelölje $x(t)$, illetve $y(t)$, hogy mennyi gyógyszer marad az emésztőtraktusban, illetve mennyi a gyógyszer mennyisége a vérben t idő elteltével. Az időt órákban mérjük. A gyógyszer folyamatosan jut a vérbe, illetve tűnik el onnan – a vesék és a máj munkájával. Feltételezzük, hogy a vizsgálat ideje alatt nem kerül újabb adag antihisztamin a szervezetbe. Így a gyógyszer mennyisége a rekeszekben leírható a következő differenciálegyenlet-rendszerrel, ugyanis a gyógyszer mennyiségének változása arányos a még meglévő mennyiséggel:

$$\dot{x}(t) = -k_1 x(t), \quad x(0) = A, \tag{4.1}$$

$$\dot{y}(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t), \quad y(0) = 0. \tag{4.2}$$

Ezt a rendszert könnyen meg tudjuk oldani. Először tekintsük a (4.1) feladatot; szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $e^{k_1 t}$-vel és integráljunk, majd használjuk az $x(0) = A$ kezdeti feltételt. Ekkor az x megoldás a következő alakot veszi fel:

$$x(t) = Ae^{-k_1 t}.$$

Helyettesítsük vissza x-et a (4.2) összefüggésbe, hogy megkapjuk y-t. Így y-ra az

$$\dot{y}(t) + k_2 y(t) = k_1 A e^{-k_1 t}$$

differenciálegyenletet nyerjük. Hasonlóan az előzőhöz, szorozzunk be $e^{k_2 t}$-vel, majd integráljunk:

$$\begin{aligned}(e^{k_2 t} y)' &= k_1 A e^{(k_2-k_1)t} \\ e^{k_2 t} y &= \frac{k_1 A}{k_2 - k_1} e^{(k_2-k_1)t} + C.\end{aligned}$$

Felhasználva az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kapjuk, hogy

$$C = \frac{k_1 A}{k_1 - k_2}.$$

Ebből adódik már az y függvény:

$$y(t) = \frac{k_1 A}{k_1 - k_2}\big(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}\big).$$

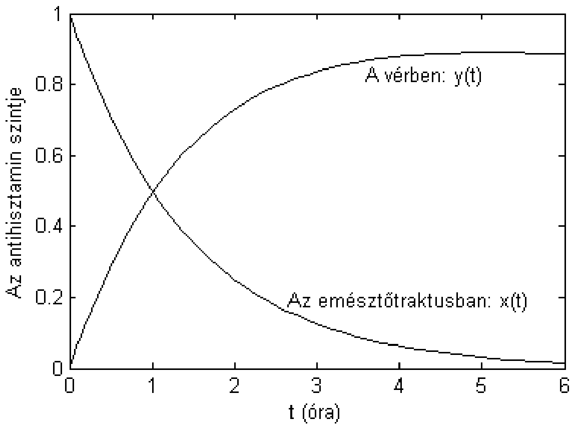
Ebből az látszik, hogy az antihisztamin szintje a vérben elér egy maximumot, majd fokozatosan esik vissza. Végül $t \to \infty$ esetén eltűnik a gyógyszer az emésztőtraktusból és a vérből is.

4.1. Megjegyzés. Ha $k_1 = k_2$ teljesül, akkor $x(t)$ ugyanaz marad, $y(t)$-re pedig igaz lesz, hogy $y(t) = k_1 A t e^{-k_1 t}$, ami még mindig 0-hoz tart, ha $t \to \infty$.

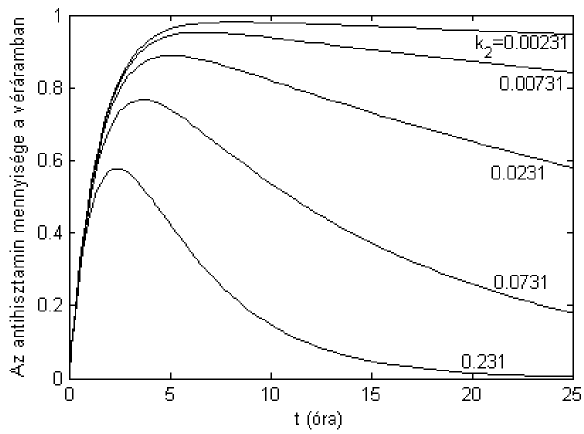
Vizsgáljuk meg most az eredményeket k_1, illetve k_2 ismeretében! Egy gyógyászati cég becslése alapján értékük az antihisztamin esetében a következő (az adatok a [2] könyvből származnak):

$$k_1 = 0,6931, \quad k_2 = 0,0231. \tag{4.3}$$

Mivel k_2 sokkal kisebb a k_1 értéknél, ezért az antihisztamin hosszabb ideig marad magasabb szinten a vérben, mint az emésztőtraktusban. Ezt mutatja az alábbi ábra is, ha feltételezzük, hogy $A = 1$.



Azonban k_2, azaz a gyógyszer kiürülési sebességének együtthatója, nagyban függhet a gyógyszert bevevő egyén korától és egészségi állapotától. Pontosabban, egy idős és beteg embernek sokkal több idő alatt ürül ki a szervezetéből az antihisztamin. Ábrázoljuk k_2 öt különböző értékére a vérben lévő antihisztamin szintjét egy 24 órás időintervallumon!

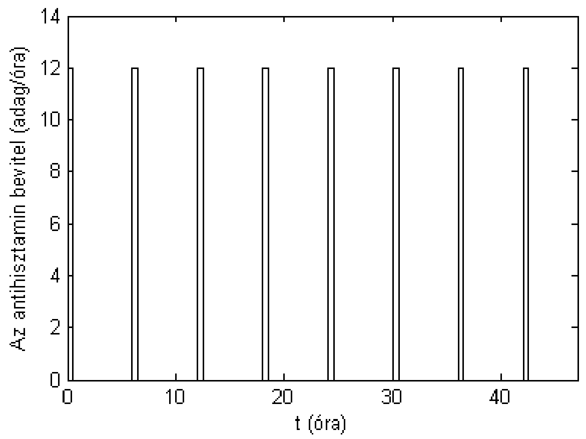


Látható az ábrából, hogy legkisebb k_2 esetén még 24 óra múltán is nagyon magas az antihisztamin szintje, míg például a legnagyobb értéknél 15 óra elteltével már szinte ki is ürült a szervezetből.

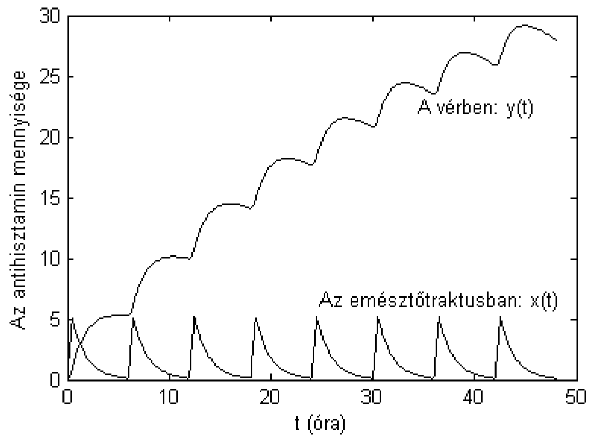
Nem mindig elég azonban egy adag gyógyszer a tünetek enyhítésére. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor kezdetben nem konstans mennyiségű antihisztamin van az emésztőtraktusban, hanem 0, és minden hatodik órában beveszünk egy adagot a gyógyszerből; vagyis a rendszer így módosul, ha a (4.3) értékeket használjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= I(t) - 0,6931x(t), \quad x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) &= 0,6931x - 0,0231y(t), \quad y(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

ahol $I(t)$ egy négyzetes hullám, melynek az amplitúdója 12, a periódusa 6 óra, és minden periódus elején fél órára van bekapcsolva – azaz minden periódusban 6 egység antihisztamin jut a szervezetbe. Így néz ki tehát:

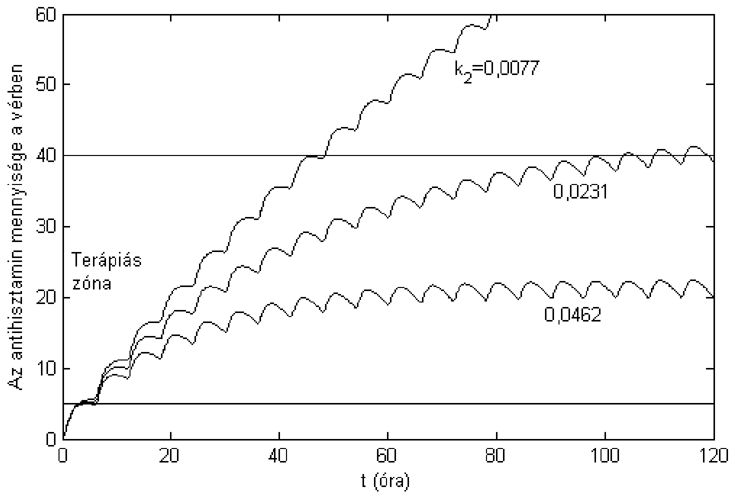


A (4.4) differenciálegyenlet-rendszert numerikusan megoldva az alábbi ábrán szemléltethetjük a megoldásokat.



Az ábrából látható, hogy az $x(t)$ mennyiség egyensúlyi állapotba kerül, míg az $y(t)$ mennyiség egyre növekszik.

Szeretnénk elérni, hogy a vérben lévő antihisztamin szint éppen a megfelelő szinten legyen; vagyis ne legyen túl magas, mert akkor álmosságot okoz, de annyira alacsony se legyen, hogy már ne hasson. Feltételezzük, hogy a terápiás terület 5 és 40 között van. Megvizsgáljuk három különböző egyénre, különböző k_2 értékekkel a vér antihisztamin szintjét. Mindegyikük tünetei enyhülnek hat órán belül, azonban a legkisebb k_2 értékkel rendelkezőnek a vérében túl sok antihisztamin van, így félő, hogy álmosság tör rá.



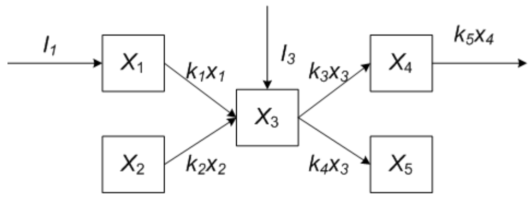
4.2. Kompartmentek

Az előző példából adódik a rekeszrendszer definíciója.

Egy *rekeszrendszer* véges darab rekeszből áll, melyeket nyilakkal kötünk össze. Egy nyíl mutatja, hogy milyen sebességgel megy egyik kompartmentből egy másikba egy anyag, vagy populáció, vagy milyen sebességgel alakul át egy anyag a másikká. Mindig érvényesül az egyensúlyi törvény, azaz egy rekeszből egy másikba lépő anyag mennyiségének változási sebessége egyenlő a másik rekeszbe belépő anyag mennyiségének változási sebességével. Ha egy nyíl egy rekesz felé nem egy másik felől mutat, akkor az az anyag külső forrása vagy inputja, amelyet általában I-vel jelölünk majd és lehet konstans, vagy t nemnegatív függvénye. Ha egy nyíl kifelé mutat egy rekeszből, de nem egy másik felé, akkor ott elhagyja a rendszert az anyag.

A fejezet során lineáris kompartment modellekkel foglalkozunk majd; a linearitás abban nyilvánul meg, hogy a rekeszből kilépő anyag mennyiségének változási sebessége függ a rekeszben lévő anyag mennyiségétől. Azaz az i-edik rekeszből kilépő anyagmennyiség változásának sebessége $k_j x_i(t)$, ahol $x_i(t)$ az i-edik rekeszben lévő anyag mennyisége t időpillanatban, k_j pedig pozitív konstans. Ezek közül is legegyszerűbb a *lineáris kaszkád*, amikor nincs irányított kör a rekeszek között, vagyis amikor nyilak sorozata nem végződik ugyanabban a rekeszben, amelyből elindultunk.

Nézzünk erre egy példát:



A mennyiségek megváltozása az idő függvényében ekkor könnyen kifejezhető egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel:

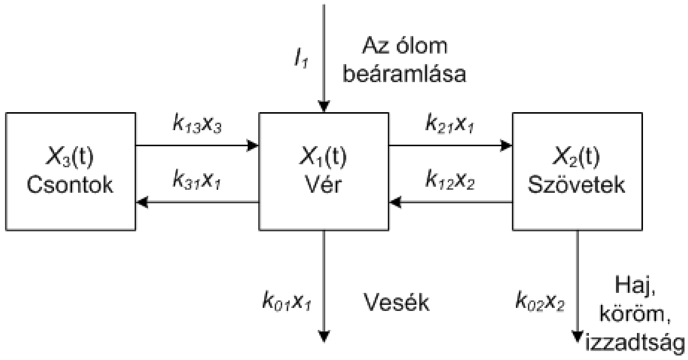
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= I_1 - k_1x_1,\\
\dot{x}_2 &= -k_2x_2,\\
\dot{x}_3 &= I_3 + k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_3,\\
\dot{x}_4 &= k_3x_3 - k_5x_4,\\
\dot{x}_5 &= k_4x_3.
\end{aligned}$$

A rendszer megoldható lépésről lépésre, hasonlóan a fenti 4.1 részben tárgyalt rendszerhez. Tekintsünk most egy bonyolultabb példát, mely ugyan lineáris, de nem kaszkád.

4.3. Az ólom bejutása a szervezetbe

A következőkben megvizsgálunk egy – a gyógyszeradagolási problémához hasonló – példát lineáris kompartment modellre. Most viszont nem egy gyógyszer szintjét figyeljük meg, hanem az ólom szennyező hatását az emberi szervezetre, azaz, hogy milyen mennyiségű ólom van adott t időpontban a test három rekeszében: a vérben, a szövetekben és a csontokban. Eljut-e egyfajta egyensúlyi állapotba az ezekben a rekeszekben lévő ólom mennyisége vagy hosszú távon is tovább növekszik?

Rendezzük a következő sorrendbe az egyes rekeszeket: véráram, szövetek, csontok. Így jelölje rendre $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ a vérben, a szövetekben és a csontokban lévő ólom mennyiségét a t időpillanatban. Az i-edik rekeszből egy j-edik rekeszbe vagy a rekeszrendszerből kifelé áramló ólom sebessége arányos $x_i(t)$-vel. Az arányossági állandót jelölje az i-edik rekeszből a j-edikbe k_{ji}, ahol $k_{ji} \geq 0$ mindig teljesül, és pontosan akkor teljesül $k_{ji} = 0$, ha nincs áramlás ebbe az irányba. Ha az áramlás a rendszerből kifelé történik (például a vérből a vesék kiválasztják az ólmot, vagy a szövetekből távozik az izzadsággal, a hajjal és a körmökkel), akkor jelölje az arányossági tényezőt k_{0i}. Ekkor tegyük fel, hogy a rekeszrendszer következőképpen néz ki:



Mivel található irányított kör a rendszerben, a rendszer nem kaszkád. Az ábra alapján felírhatjuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= I_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 - (k_{01} + k_{21} + k_{31})x_1\\ \dot{x}_2 &= k_{21}x_1 - (k_{02} + k_{12})x_2\\ \dot{x}_3 &= k_{31}x_1 - k_{13}x_3,\end{aligned}$$

ahol I_1 konstans, vagy nemnegatív függvénye t-nek. Ha I_1 konstans, akkor a rendszer autonóm, célszerű tehát konstans megoldásokat keresni, azaz amikor a deriváltak mind zérusok. Ez egyensúlyi állapot hosszú távon is. Ha viszont I_1 t függvénye, akkor érdemes számítógépet használni a megoldások kirajzolására, hogy lássuk a rekeszekben lévő ólom mennyiségének változásait az időben.

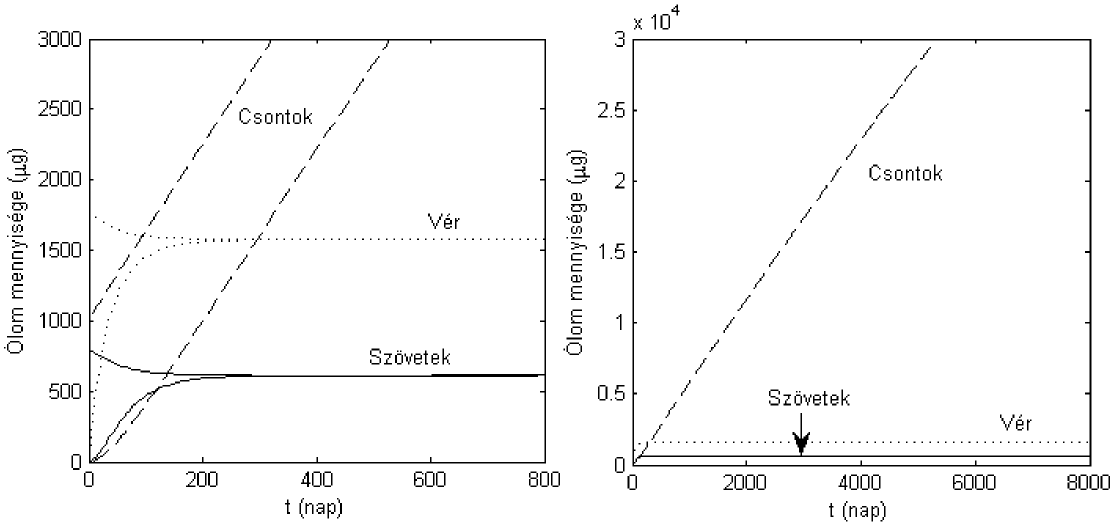
4.2. Példa. A [2] könyvben említett – Michael Rabinowitz, George Wetherill és Joel Kopple által Dél-Kaliforniában végzett – kísérlet alapján az együtthatók becsült értékei, illetve az I_1 ólombevitel értéke legyen a következő:

$$\begin{aligned}&I_1 = 49,3;\\ &k_{01} = 0,0211, \quad k_{21} = 0,0111, \quad k_{31} = 0,0039;\\ &k_{02} = 0,0162, \quad k_{12} = 0,0124, \quad k_{13} = 0,000035;\end{aligned}$$

ahol I_1-et μg/nap-ban, k_{ji}-t $(\text{nap})^{-1}$-ben mérjük. Ekkor minden x_i-re két különböző kezdeti értékkel a kezdetiérték-probléma az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -0,0361x_1 + 0,0124x_2 + 0,000035x_3 + 49,3, && x_1(0) = 0, \quad 1800;\\ \dot{x}_2 &= 0,0111x_1 - 0,0286x_2, && x_2(0) = 0, \quad 800;\\ \dot{x}_3 &= 0,0039x_1 - 0,000035x_3, && x_3(0) = 0, \quad 1000.\end{aligned} \tag{4.5}$$

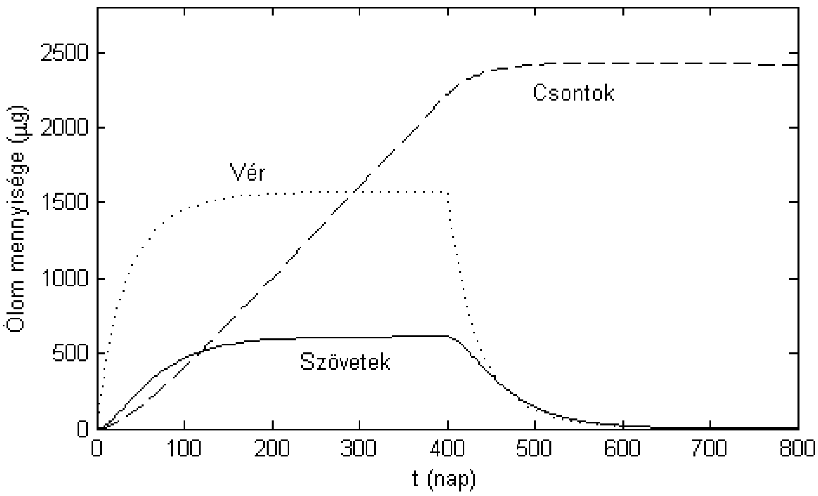
A következő két ábra mutatja, hogy mindkét kezdeti feltétel mellett a vérben és szövetekben lévő ólom mennyisége beáll egyensúlyi helyzetbe, míg a csontokban lévő ólomtartalom még 8000 nappal később is növekszik, az $x_i(0) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ feltétel mellett is. Ez a nagyon kicsi k_{13} érték miatt történhet.



4.3. Példa. Most tekintsük a (4.5) rendszer azon változatát, amikor $I_1 = 49,3$ helyére $I_1 = 49,3(1 - \mathrm{Step}(t, 400))$-at helyettesítünk! Továbbra is feltételezzük, hogy

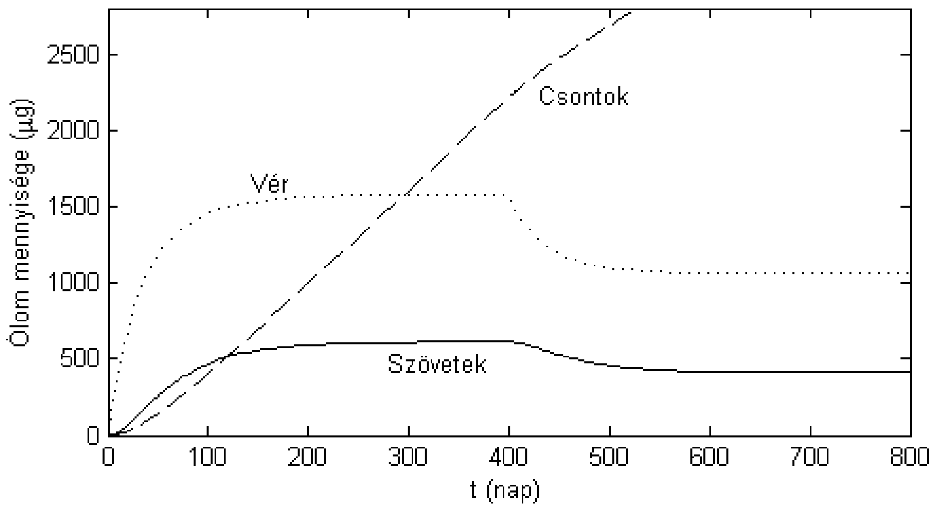
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy 400 napig ugyanúgy konstans 49,3 a bekerülő ólom mennyisége, míg elérve a 400. napot teljesen megszűnik az ólom beáramlása. Ekkor egy 800 napos időintervallumon így néz ki a mennyiségek alakulása:



Ebből látható, hogy az ólom 100%-os kivonása a környezetből teljes mértékben eltünteti a vérből és a szövetekből az ólmot. Viszont a csontokban továbbra is konstans mennyiségű ólom van, azaz látszik, hogy ekkor csak igen lassan (több év múlva) tűnik el az ólom a csontokból.

Elég lehetetlen elképzelni azonban egy teljesen ólommentes környezetet, mikor a mindennapi életben ennyire szükségünk van rá. Kicsivel reálisabb vizsgálni egy olyan helyzetet, amikor az ólom kibocsátást csaknem a harmadával csökkentjük.



Ebben az esetben a vér és a szövetek ólomtartalma ugyan nem a 0 mentén, de beáll egyensúlyi állapotba, viszont a csontokban lévő ólom mennyisége megint növekszik, csak most kisebb intenzitással.

Még vizsgálhatnánk számos esetet, de az eddigi esetek is már megfelelően demonstrálták az ólommennyiség viselkedését hosszú távon: látható, hogy általában a vérben és a szövetekben beáll egy bizonyos egyensúlyi helyzetbe, viszont a csontok leginkább elraktározzák a bekerülő ólmot, így valóban nagyon veszélyes az ólomkibocsátás az emberi szervezetre.

Irodalomjegyzék

[1] Simon L. Péter és Tóth János: *Differenciálegyenletek – Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex Kiadó, 2009

[2] Robert L. Borrelli and Courtney S. Coleman: *Differential Equations – A Modeling Perspective*, John Wiley & Sons, Inc., 2004

[3] Farkas Miklós: *A szimultán tanulás dinamikai elmélete*, Alkalmazott Matematikai Lapok 2. 103-114, Budapest, 1976

[4] Csiszár Imre, Heppes Aladár, Kovács László Béla, Medgyessy Pál és Vincze István: *10 példa a matematika gyakorlati alkalmazására*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1967

Az ábrákhoz a MathWorks MATLAB 7.11.-es verzióját használtam.
http://www.mathworks.com/products/matlab/