A Gausz-függvény univerzalitása

Csikja Rudolf

2026. január 29.

Bevezetés

A HARANG GÖRBE JELENTŐSÉGE

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Johann Carl Friedrich Gauss német matematikus, csillagász, geodéta és fizikus.

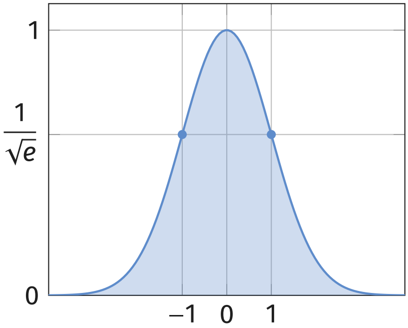
A Gauss függvény elemi vizsgálata

2.1. Definíció (Gauss függvény)

A valós $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt

$$g(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(standard) Gauss függvénynek hívjuk.



A következő tételben a Gauss függvény néhány alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg.

2.2. Tétel

A Gauss függvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

a) Pozitív és páros.
b) Globális maximuma van az $x = 0$ pontban, és monoton növekvő a $(-\infty, 0)$, illetve monoton csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon.
c) Inflexiós pontja van az $x = 1$ és $x = -1$ pontokban, továbbá konkáv a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon, illetve konvex a $(-1, 1)$ intervallumon.

2.3. Feladat

Bizonyítsuk be a fenti tételt!

A Gauss-függvények családja

Minden nem standard Gauss függvény megkapható a standard változat eltolásával és skálázásával, pontosabban:

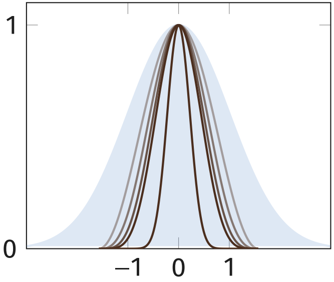
$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \qquad g(x) = G_{\mu,\sigma}(\sigma(x+\mu))$$

$$G_{\mu_1,\sigma_1}(x)G_{\mu_2,\sigma_2}(x) = G_{\mu,\sigma}(x)$$

$$\mu = \mu_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} + \mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$$

A COS FÜGGVÉNY HATVÁNYAI

$$f_n(x) := \cos^n(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$



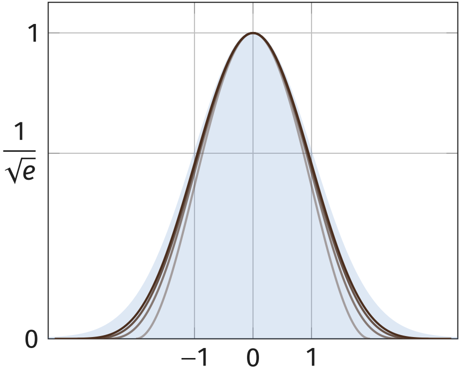
$$\lim_{n\to\infty} f_n(s_n) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A probléma, hogy az inflexiós pontok a nullához tartanak, és így a függvények egyre elvékonyodnak. Sőt, az $f_n(x)$ értékek az origón kívül mindenhol nullához tartanak. Viszont, ha minden egyes függvénynek az inflexiós pontját az $x = 1$ pontba transzformáljuk, akkor az így kapott új függvény-sorozat nem vékonyodik el. Ezt úgy érhetjük el, hogy minden egyes függvényre átskálázzuk az értelmezési tartományt:

$$g_n(x) := f_n(s_n x) = \cos^n(s_n x), \quad -\frac{\pi}{2s_n} \le x \le \frac{\pi}{2s_n}.$$

Az f_n függvény pozitív inflexiós pontja, és így az átskálázott g_n függvény

$$s_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \quad g_n(x) = \cos^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x\right) \quad n \geq 2$$



2.4. Feladat

Határozzuk meg az f_n függvény $s_n > 0$ inflexiós pontját a $f_n''(s_n) = 0$ egyenlet megoldásával!

2.5. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

- $g_n''(1) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = 1/\sqrt{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dom}(g_n) = (-\infty, +\infty)$

2.6. Feladat

Ismételjük meg az eddigi számításokat az

a) $f_n(x) := \left(1 + x^2\right)^{-n}$, $x \in (-\infty, \infty)$
b) $f_n(x) := \cosh(x)^{-n}$, $x \in (-\infty, \infty)$
c) $f_n(x) := (1 - x^2)^n$, $x \in (-1, 1)$

függvényekre.

2.7. Tétel

Tétel Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, ahol $0 \in \operatorname{int}(I)$. Legyen $h : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre:

- **Maximum:** $h(0) = 1$ és $|h(x)| < 1$ minden $x \in I \setminus \{0\}$ esetén.
- **Simaság:** $h \in C^2$ a 0 környezetében, $h'(0) = 0$ és $h''(0) < 0$.

Ekkor a $g_n(x) = h^n(s_n x)$ függvénysorozat pontonként tart a standard normális eloszlás magjához:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ahol a skálázási tényező aszimptotikusan:

$$s_n \sim \frac{1}{\sqrt{n \cdot |h''(0)|}}$$

A tétel bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy a korábban elvégzett számításokat megismételhetjük egy olyan tetszőleges h függvényre, amelynek létezik a nulla körüli másodfokú Taylor-közelítése:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

ahol $o(x^2)$ azt jelenti, hogy a maradék gyorsabban tart nullához, mint $x \mapsto x^2$, vagyis $\lim_{x\to 0} r(x)/x^2 = 0$.

$$s_n = \sqrt{\frac{2}{h''(0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f(s_n x) = F_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n, \quad x \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$$

ami határértékben

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

2.8. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \sqrt{\pi}$$

2.9. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \sqrt{\pi}$$

Ez egy általános blokk

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Figyelem!

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Fourier-transzformáció

A HŐVEZETÉSI EGYENLET

4.1. Definíció

Hővezetési egyenlet

$$\partial_0 u(t,x) = -D\partial_1^2 u(t,x)$$

Megoldások

Az a) állítás egyenesen következik az exponenciális függvény azon tulajdonságából, hogy mindig pozitív: $\exp(x) > 0$.

A monotonitás vizsgálatához a függvény deriváltja: $g'(x) = -xg(x)$, és mivel $g(x) > 0$, ezért a derivált előjelét a $(-x)$ tag előjele dönti el, amiből a b) és c) állítás már adódik. A globális maximum $g(0) = 1$ az előző két állításból következik.

Az inflexiós pontok meghatározásához a második deriváltat vizsgáljuk: $g''(x) = (x^2 - 1)g(x)$. A g függvény a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon konkáv ($g''(x) > 0$), illetve a $(-1, 1)$ intervallumon konvex ($g''(x) < 0$). A g'' függvénynek zérushelye, és így a g függvénynek inflexiós pontja van az $x = \pm 1$ pontokban.

$$f_n''(x) = n\cos^{n-2}(x)\left((n-1)\sin^2(x) - cos^2(x)\right)$$