A Gausz-függvény univerzalitása

Csikja Rudolf

2026. január 26.

Bevezetés

A HARANG GÖRBE JELENTŐSÉGE

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Johann Carl Friedrich Gauss német matematikus, csillagász, geodéta és fizikus.

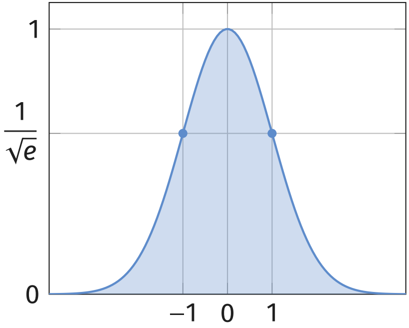
A Gauss függvény elemi vizsgálata

2.1. Definíció (Gauss függvény)

A valós $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt

$$g(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(standard) Gauss függvénynek hívjuk.



A következő tételben a Gauss függvény néhány alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg.

2.2. Tétel

A Gauss függvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

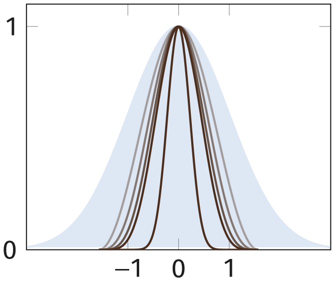
a) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g(x) > 0$.
b) Globális maximuma van az $x = 0$ pontban, és monoton növekvő a $(-\infty, 0)$, illetve monoton csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon.
c) Inflexiós pontja van az $x = 1$ és $x = -1$ pontokban, továbbá konkáv a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon, illetve konvex a $(-1, 1)$ intervallumon.

2.3. Feladat

Bizonyítsuk be a fenti tételt!

A COS FÜGGVÉNY HATVÁNYAI

$$f_n(x) := \cos^n(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$



Az s_n inflexiós pontokban

$$f_n(s_n) \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$

A probléma, hogy $s_n \to 0$, miközben a Gauss függvény inflexiós pontja ± 1. A megoldás, hogy minden egyes függvényre újraskálázzuk az értelmezési tartományt úgy, hogy az új függvénynek ± 1 pontban legyen az inflexiós pontja:

$$F_n(x) := f_n(s_n x) = \cos^n(s_n x), \quad -\frac{\pi}{2s_n} \le x \le \frac{\pi}{2s_n}.$$

2.4. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n''(1) = 0 \quad \text{és} \quad F_n(1) \to g(1) = 1/\sqrt{e}$$

.

2.5. Lemma

Az f_n függvény pozitív inflexiós pontja

$$s_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \qquad n \geq 2$$

2.6. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az F_n függvények értelmezési tartománya tart a $(-\infty, +\infty)$ intervallumhoz.

2.7. Feladat

Végezzük el az eddigi számításokat az

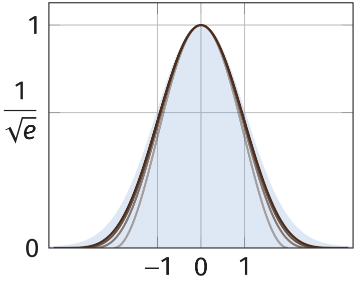
a) $f_n(x) := \left(1 + x^2\right)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$

b) $f_n(x) := \cosh(x)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$

függvényekre.

Az átskálázott függvények

$$F_n(x) = \cos^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x\right)$$



2.8. Tétel

Legyen $h\colon [-a, a] \to \mathbb{R}^+$ egy olyan páros függvény, amelyre $h(0) = 1, h'(0) = 0$ és $h''(0) < 0$, ekkor a $g_n(x) = h^n(s_n x)$ függvénysorozatra

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

ahol

$$s_n = \sqrt{\frac{2}{h''(0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f(s_n x) = F_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n, \quad x \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$$

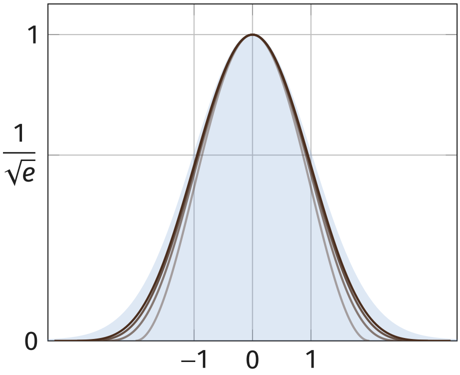
ami határértékben

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

A Gauss függvény integrálja

2.9. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \sqrt{\pi}$$


1
$\frac{1}{\sqrt{e}}$
0
−1
0
1

2.10. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \sqrt{\pi}$$

Ez egy általános blokk

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Figyelem!

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Fourier-transzformáció

A hővezetési egyenlet

A HŐVEZETÉS EGYENLETE

4.1. Definíció

Hővezetési egyenlet

$$\partial_0 u(t,x) = -D\partial_1^2 u(t,x)$$

Megoldások

Az a) állítás egyenesen következik az exponenciális függvény azon tulajdonságából, hogy mindig pozitív: $\exp(x) > 0$.

A monotonitás vizsgálatához a függvény deriváltja: $g'(x) = -xg(x)$, és mivel $g(x) > 0$, ezért a derivált előjelét a $(-x)$ tag előjele dönti el, amiből a b) és c) állítás már adódik. A globális maximum $g(0) = 1$ az előző két állításból következik.

Az inflexiós pontok meghatározásához a második deriváltat vizsgáljuk: $g''(x) = (x^2 - 1)g(x)$. A g függvény a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon konkáv ($g''(x) > 0$), illetve a $(-1, 1)$ intervallumon konvex ($g''(x) < 0$). A g'' függvénynek zérushelye, és így a g függvénynek inflexiós pontja van az $x = \pm 1$ pontokban.

$$f_n''(x) = n\cos^{n-2}(x)\left((n-1)\sin^2(x) - cos^2(x)\right)$$