

# A GAUSZ-FÜGGVÉNY UNIVERZALITÁSA

---

Csikja Rudolf

January 30, 2026

## Bevezetés

### A Gauss függvény elemi vizsgálata

Alapvető tulajdonságok

Maximummal rendelkező függvények magas hatványai

A Gauss függvény integrálja

A Gauss függvény integrálja

### Fourier-transzformáció

### A hővezetési egyenlet

### Megoldások

# BEVEZETÉS

---



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Johann Carl Friedrich Gauss német matematikus, természettudós, csillagász.

# A GAUSS FÜGGVÉNY ELEMI VIZSGÁLATA

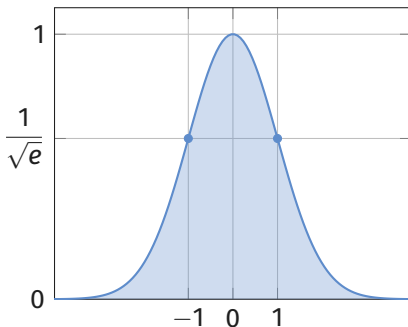
---

## 2.1. Definíció (Gauss függvény)

A valós  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt

$$g(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(standard) Gauss függvénynek hívjuk.



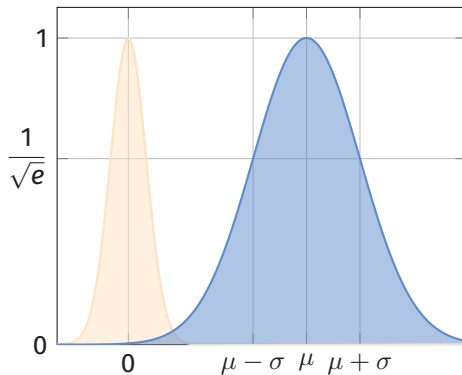
## Elemi tulajdonságok

A Gauss függvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) Pozitív  $g(x) > 0$  és páros  $g(x) = g(-x)$ .
- b) Globális maximuma van az  $x = 0$  pontban:  $g(x) \leq g(0)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- c) Monoton növekvő a  $(-\infty, 0)$ , illetve monoton csökkenő a  $(0, +\infty)$  intervallumon.
- d) Inflexiós pontja van az  $x = 1$  és  $x = -1$  pontokban, továbbá konkáv a  $(-\infty, -1)$  és az  $(1, +\infty)$  intervallumokon, illetve konvex a  $(-1, 1)$  intervallumon.

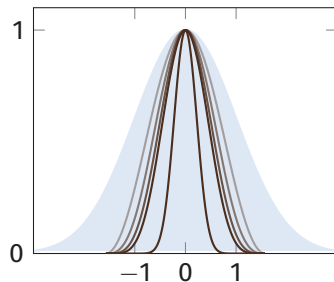
Minden nem standard Gauss függvény megkapható a standard változat eltolásával és skálázásával, pontosabban:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$





$$f_n(x) := \cos^n(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$



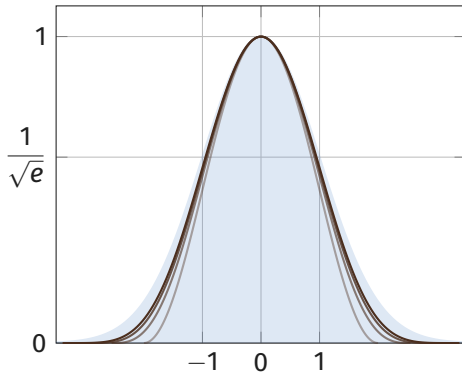
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s_n) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A probléma, hogy az inflexiós pontok a nullához tartanak, és így a függvények egyre elvékonyodnak. Sőt, az  $f_n(x)$  értékek az origón kívül mindenhol nullához tartanak. Viszont, ha minden egyes függvénynek az inflexiós pontját az  $x = 1$  pontba transzformáljuk, akkor az így kapott új függvény-sorozat nem vékonyodik el. Ezt úgy érhetjük el, hogy minden egyes függvényre átskálázzuk az értelmezési tartományt:

$$g_n(x) := f_n(s_n x) = \cos^n(s_n x), \quad -\frac{\pi}{2s_n} \leq x \leq \frac{\pi}{2s_n}.$$

Az  $f_n$  függvény pozitív inflexiós pontja, és így az átskálázott  $g_n$  függvény

$$s_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \quad g_n(x) = \cos^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x\right) \quad n \geq 2$$



## 2.2. Feladat

Határozzuk meg az  $f_n$  függvény  $s_n > 0$  inflexiós pontját a  $f_n''(s_n) = 0$  egyenlet megoldásával!

## 2.3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

- $g_n''(1) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = 1/\sqrt{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dom}(g_n) = (-\infty, +\infty)$

## 2.4. Feladat

Ismételjük meg az eddigi számításokat az

- a)  $f_n(x) := (1 + x^2)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$
- b)  $f_n(x) := \cosh(x)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$
- c)  $f_n(x) := (1 - x^2)^n, x \in (-1, 1)$

függvényekre.

## 2.5. Tétel

Tétel Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallum, ahol  $0 \in \text{int}(I)$ , és legyen  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelyre:

- **Maximum:**  $h(0) = 1$  és  $|h(x)| < 1$  minden  $x \in I \setminus \{0\}$  esetén.
- **Simaság:**  $h \in C^2$  a 0 környezetében,  $h'(0) = 0$  és  $h''(0) < 0$ .

Ekkor a  $g_n(x) = h^n(s_n x)$  függvénysorozat pontonként tart a standard Gauss-függvényhez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

ahol a skálázási tényező aszimptotikusan:

$$s_n \sim \frac{1}{\sqrt{n \cdot |h''(0)|}}$$

A tétel bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy a korábban elvégzett számításokat megismételhetjük egy olyan tetszőleges  $h$  függvényre, amelynek létezik a nulla körüli másodfokú Taylor-közelítése:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

ahol  $o(x^2)$  azt jelenti, hogy a maradék gyorsabban tart nullához, mint  $x^2$ . A pozitív inflexiós pont

$$s_n = \sqrt{\frac{2}{|h''(0)|s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n \cdot |h''(0)|}}$$

kihasználva, hogy  $h'(0) = 0$  és  $h''(0) < 0$

$$g_n(x) = h(s_n x)^n \sim \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n, \quad x \in (-\sqrt{2n}, \sqrt{2n})$$

és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

## 2.6. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \sqrt{\pi}$$



## 2.7. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \sqrt{\pi}$$



## Ez egy általános blokk

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

## Figyelem!

Transzformáció:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

# FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

---

# A HŐVEZETÉSI EGYENLET

---

## 4.1. Definíció

Hővezetési egyenlet

$$\partial_0 u(t, x) = -D \partial_1^2 u(t, x)$$

# MEGOLDÁSOK

---

Az a) állítás egyenesen következik az exponenciális függvény azon tulajdonságából, hogy mindig pozitív:  $\exp(x) > 0$ .

A monotonitás vizsgálatához a függvény deriváltja:  $g'(x) = -xg(x)$ , és mivel  $g(x) > 0$ , ezért a derivált előjelét a  $(-x)$  tag előjele dönti el, amiből a b) és c) állítás már adódik. A globális maximum  $g(0) = 1$  az előző két állításból következik.

Az inflexiós pontok meghatározásához a második deriváltat vizsgáljuk:

$g''(x) = (x^2 - 1)g(x)$ . A  $g$  függvény a  $(-\infty, -1)$  és az  $(1, +\infty)$  intervallumokon konkáv ( $g''(x) > 0$ ), illetve a  $(-1, 1)$  intervallumon konvex ( $g''(x) < 0$ ). A  $g''$  függvénynek zérushelye, és így a  $g$  függvénynek inflexiós pontja van az  $x = \pm 1$  pontokban.

$$f_n''(x) = n \cos^{n-2}(x) ((n-1) \sin^2(x) - \cos^2(x))$$