A Gausz-függvény univerzalitása

Csikja Rudolf

2026. február 1.

Bevezetés

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Johann Carl Friedrich Gauss német matematikus, természettudós, csillagász.

- *„Princeps Mathematicorum”* – a matematikusok fejedelme.
- Már gyerekként (7 évesen) elkápráztatta tanárait a számok gyors összeadásával (1-től 100-ig).
- Alapvető műve a *Disquisitiones Arithmeticae*, de maradandót alkotott a mágnességtanban (Gauss-törvény) és a földmérésben is.
- A statisztika alapjait a Ceres törpebolygó pályájának újrafelfedezésekor fektette le.

Miért éppen a haranggörbe?

A Gauss-függvény a természet „alapértelmezett” állapota.

- **Mérési hibák:** A véletlen hibák összeadódása természetes módon ezt a formát ölti.
- **Statisztikai stabilitás:** A centrális határeloszlástétel értelmében független hatások összege Gauss-eloszláshoz tart.
- **Fizikai invariancia:**
  - **Diffúzió és hővezetés:** A hővezetési egyenlet alapvető megoldása. Egy pontszerű forrásból induló hő vagy anyag eloszlása az időben mindig Gauss-görbe marad (csak ellaposodik).
  - **Fourier-invariancia:** Az egyetlen függvénycsalád, amelynek Fourier-transzformáltja önmaga (szintén Gauss-függvény).
  - **Entrópia-maximum:** Rögzített szórás mellett ez az eloszlás rendelkezik a legnagyobb entrópiával (a „legvéletlenebb” állapot).

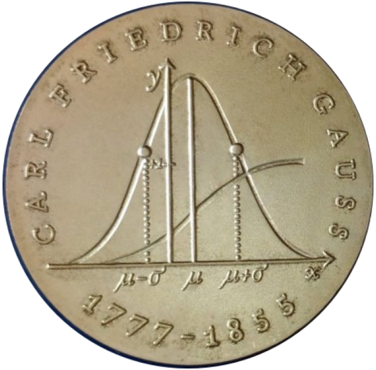
A 10 NÉMET MÁRKÁS BANKJEGY (1991–2001)

Ritka megtiszteltetés a matematikában: a német állam Gauss portréja mellett magát a függvényt és annak képletét is a nemzeti fizetőeszközre nyomtatta.

- Látható a standard Gauss-görbe.
- Mellette a sűrűségfüggvény képlete.

A Gauss-görbe mint kulturális örökség.

1955-ös NSZK bélyeg:
Halálának 100. évfordulójára.



1977-es érme:
Születsének 200. évfordulójára.

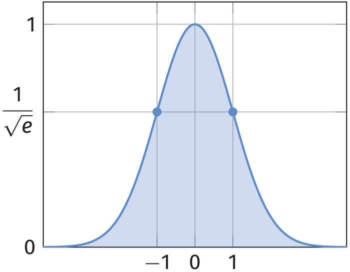
A Gauss függvény elemi vizsgálata

2.1. Definíció (Gauss függvény)

A valós $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt

$$g(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(standard) Gauss függvénynek hívjuk.



Elemi tulajdonságok

a) Pozitív $g(x) > 0$ és páros $g(x) = g(-x)$.

b) Sima függvény: $g \in C^\infty$.

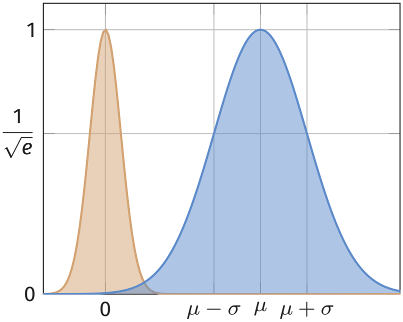
c) Globális maximuma van az $x = 0$ pontban: $g(x) \le g(0)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Monoton növekvő a $(-\infty, 0)$, illetve monoton csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon.

e) Inflexiós pontja van az $x = 1$ és $x = -1$ pontokban, továbbá konkáv a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon, illetve konvex a $(-1, 1)$ intervallumon.

Minden nem standard Gauss függvény megkapható a standard változat eltolásával és skálázásával, pontosabban:

$$G_{\mu,\sigma}(x) := g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$



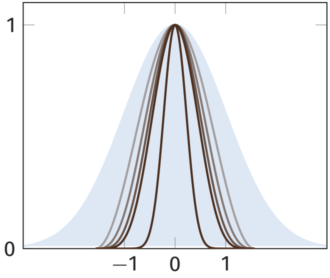
2.2. Feladat

Határozzuk meg azt az

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

alakú differenciálegyenletet, amelynek megoldása a standard Gauss-függvény.

$$f_n(x) := \cos^n(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(s_n) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A probléma, hogy az inflexiós pontok a nullához tartanak, és így a függvények egyre elvékonyodnak. Sőt, az $f_n(x)$ értékek az origón kívül mindenhol nullához tartanak. Viszont, ha minden egyes függvénynek az inflexiós pontját az $x = 1$ pontba transzformáljuk, akkor az így kapott új függvény-sorozat nem vékonyodik el. Ezt úgy érhetjük el, hogy minden egyes függvényre átskálázzuk az értelmezési tartományt:

$$g_n(x) := f_n(s_n x) = \cos^n(s_n x), \quad -\frac{\pi}{2s_n} \le x \le \frac{\pi}{2s_n}.$$

Az f_n függvény $s_n > 0$ inflexiós pontja

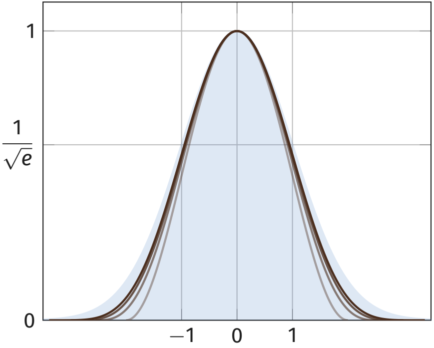
$$s_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

Az átskálázott g_n függvény

$$g_n(x) = \cos^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x\right)$$

Az g_n függvények értelmezési tartománya egyre nő:

$$\mathrm{dom}(g_n) = (-\pi/(2s_n), \pi/(2s_n)) \sim (-\pi\sqrt{n}, \pi\sqrt{n}).$$



Végtelen sok féle skálázás létezik, az általáunk választott az inflexiós pontokat egy pontba transzformálta, ennek nem kell így lennie,de aszimptotikusan meg kell, hogy egyezzenek:

$$s_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Konvergencia a Gauss-függvényhez

A g_n függvények ábrája azt sejteti, hogy a standard Gauss-függvényhez tartanak. Erről meggyőződhetünk, ha a bonyolult szögfüggvényeket egyszerű polinomokkal közelítjük, amikor $x \approx 0$ és $n \to \infty$. A közelítést alkalmazva:

$$g_n(x) \approx \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n ,$$

ami határértékben

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) .}$$

2.3. Feladat

Határozzuk meg az f_n függvény $s_n > 0$ inflexiós pontját a $f_n''(s_n) = 0$ egyenlet megoldásával!

2.4. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

- $g_n''(1) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = 1/\sqrt{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dom}(g_n) = (-\infty, +\infty)$

2.5. Feladat

Ismételjük meg az eddigi számításokat az

a) $f_n(x) := \left(1 + x^2\right)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$
b) $f_n(x) := \cosh(x)^{-n}, x \in (-\infty, \infty)$
c) $f_n(x) := (1 - x^2)^n, x \in (-1, 1)$

függvényekre.

2.6. Tétel

Tétel Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, ahol $0 \in \text{int}(I)$, és legyen $h : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre:

- **Maximum:** $h(0) = 1$ és $|h(x)| < 1$ minden $x \in I \setminus \{0\}$ esetén.
- **Simaság:** $h \in C^2$ a 0 környezetében, $h'(0) = 0$ és $h''(0) < 0$.

Ekkor a $g_n(x) = h^n(s_n x)$ függvénysorozat pontonként tart a standard Gauss-függvényhez:

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

ahol a skálázási tényező aszimptotikusan:

$$s_n \sim \frac{1}{\sqrt{n \cdot |h''(0)|}}$$

A tétel bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy a korábban elvégzett számításokat megismételhetjük egy olyan tetszőleges h függvényre, amelynek létezik a nulla körüli másodfokú Taylor-közelítése:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

ahol $o(x^2)$ azt jelenti, hogy a maradék gyorsabban tart nullához, mint x^2. Kihasználva, hogy $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$ és $h''(0) < 0$

$$h(x) = 1 - \frac{|h''(0)|}{2}x^2 + o(x^2)$$

Az $s_n = (n \cdot |h''(0)|)^{-1/2}$ skálázást alkalmazva:

$$g_n(x) = h(s_n x)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n, \quad x \in (-\sqrt{2n}, \sqrt{2n})$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2.7. Tétel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\Phi(x) := \int_{\infty}^{x} g(t)\,dt$$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} g(t)\,dt$$

Legyen $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$. Tekintsük az I^2 integrált az $\mathbb{R}^2$ síkon:

$$I^2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dxdy$$

Alkalmazzuk a $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ transzformációt. A helyettesítéses integrálás tétele szerint:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(\Phi(r, \theta)) \cdot |J_\Phi(r, \theta)|\, drd\theta$$

ahol a Jacobi-determináns $|J_\Phi(r, \theta)| = r$. Ekkor:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \cdot r\, drd\theta$$

A belső integrál értéke $\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{\infty} = 1$, így:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi \implies \boxed{I = \sqrt{2\pi}}$$

Definiáljuk az $a > 0$ paramétertől függő integrált:

$$I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)\, dx$$

A paraméter szerinti deriválás (Leibniz-szabály) alapján:

$$I'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x^2}{2} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)\, dx$$

Parciális integrálással ($u = x$, $v = \frac{1}{a} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)$):

$$I'(a) = \left[\frac{x}{a} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \exp\left(-a\frac{x^2}{2}\right)\, dx = -\frac{1}{a} I(a)$$

A kapott $\frac{I'(a)}{I(a)} = -\frac{1}{a}$ egyenletből $\ln I(a) = -\ln \sqrt{a} + C$, azaz:

$$I(a) = \frac{K}{\sqrt{a}}, \quad \text{ahol } K = \sqrt{2\pi} \text{ az } I(1) \text{ értékéből.}$$

3. Módszer: A Gamma-függvény és a helyettesítés tétele

Legyen $f(x) = \exp(-x^2/2)$. A párosság miatt $J = \int_0^\infty f(x)\,dx$ a keresett integrál fele. Alkalmazzuk a helyettesítéses integrálás tételét a $\varphi(t) = \sqrt{2t}$ függvénnyel:

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\infty)} f(x)\,dx = \int_0^\infty f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Mivel $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}$, kapjuk:

$$J = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\sqrt{2t})^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty t^{-1/2} \exp(-t)\,dt$$

A $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\,dt$ definíció alapján $z = 1/2$ mellett:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Végül: $I = 2J = \sqrt{2\pi}$.

A Normális eloszlás

A NORMÁLT GAUSS-FÜGGVÉNY

Az integrálról tanultak alapján definiálhatjuk a terület-egységnyi Gauss-görbét.

3.1. Definíció

A $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek definíciója:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

standard normális sűrűségfüggvénynek (vagy normált Gauss-függvénynek) nevezzük.

- **Normalizáltság:** Az előző fejezet bizonyításai alapján:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

- **Valószínűségi jelentés:** Ez a függvény írja le a 0 várható értékű és 1 szórású standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását.

A helyettesítéses integrálás elveit követve, ha a függvényt σ-szorosára nyújtjuk az x-tengely mentén, a magasságát $1/\sigma$-szorosára kell vennünk a normalizáltság megőrzéséhez:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- μ **(Lokáció):** A maximum helye, a várható érték.
- σ **(Skála):** A szórás, amely a görbe „szélességét” határozza meg.
- **Invariancia:** Bármely ilyen függvény integrálja a teljes valós egyenesen 1.

Harmonikus analízis

Kitekintés: A Fourier-transzformáció fixpontja

A Gauss-függvény egyik legmélyebb tulajdonsága a harmonikus analízisben mutatkozik meg.

Tekintsük a Fourier-transzformációt az alábbi alakban:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x)\, dx$$

Fixpont tulajdonság

A $g(x) = \exp(-x^2/2)$ függvény (konstans szorzótól eltekintve) a Fourier-transzformáció **fixpontja**:

$$\widehat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

Ez a tulajdonság alapozza meg a határozatlansági relációt a kvantummechanikában, és magyarázatot ad arra, miért a Gauss-függvény a diffúziós folyamatok természetes válasza.

A Fourier-transzformáció fixpontja

A Gauss-függvény és a Fourier-transzformáció kapcsolata alapvető a harmonikus analízisben.

4.1. Tétel

Tétel Legyen $g(x) = \exp(-x^2/2)$. Ekkor a Fourier-transzformáltja önmaga (skálázottja):

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(-i\xi x)\, dx = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

- **Bizonyítás vázlat:** Az $I(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ integrált paraméter szerint deriválva az $I'(\xi) = -\xi I(\xi)$ differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása újra egy Gauss-függvény.
- **Következmény:** A Gauss-függvény alakja invariáns a frekvenciatartományba való átlépéskor.

Reciprok szélesség a Fourier-térben

Vizsgáljuk meg, mi történik a transzformálttal, ha a Gauss-függvényt „összenyomjuk” ($\sigma < 1$) vagy „szétnyújtjuk” ($\sigma > 1$):

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)$$

Megfigyelés

- Ha $f(x)$ térben koncentrált (σ kicsi), akkor $\widehat{f}(\xi)$ a frekvenciatartományban kiterjedt ($1/\sigma$ nagy).
- Minél pontosabban ismerjük egy jel helyét, annál bizonytalanabb a frekvenciája (impulzusa), és fordítva.

A szórások szorzata ($\sigma_x \cdot \sigma_\xi$) a választott definícióktól függően konstans.

A kvantummechanikában a részecske állapotát a $\psi(x)$ hullámfüggvény írja le. A hely ($\hat{x}$) és az impulzus ($\hat{p}$) operátorok közötti kapcsolatot a Fourier-transzformáció teremti meg.

- **Helybizonytalanság (Δx):** A $|\psi(x)|^2$ sűrűségfüggvény szórása.
- **Impulzusbizonytalanság (Δp):** A $|\widehat{\psi}(p)|^2$ sűrűségfüggvény szórása.

A határozatlansági reláció

Minden $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ állapotra fennáll:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

A Gauss-függvény szerepe: A relációban az egyenlőség *kizárólag* akkor teljesül, ha $\psi(x)$ egy Gauss-függvény. Ez a „minimális bizonytalanságú hullámcsomag”.

A kvantummechanikában a legegyszerűbb hullámfüggvény, amely a Heisenberg-féle határozatlansági relációban az egyenlőséget teljesíti, a **Gauss-hullámcsomag**.

Tekintsük egy szabad részecske hullámfüggvényét $t = 0$ időpontban:

$$\psi(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta x_0^2}\right) \exp\left(\frac{ip_0 x}{\hbar}\right)$$

ahol A a normalizációs konstans, p_0 a részecske kezdeti impulzusa, Δx_0 pedig a kezdeti helybizonytalanság.

- **Helybizonytalanság:** Ennek a hullámfüggvénynek a várható helye $\langle x \rangle = 0$, és a helybizonytalansága pontosan Δx_0. Minél kisebb Δx_0, annál jobban ”lokalizált” a részecske a térben.
- **Impulzusbizonytalanság:** A hullámfüggvény Fourier-transzformáltja (ami az impulzustérbeli hullámfüggvényt adja) is egy Gauss-függvény:

$$\widehat{\psi}(p, t = 0) = B \exp\left(-\frac{(p - p_0)^2}{2\Delta p_0^2}\right)$$

Itt $\langle p \rangle = p_0$, és az impulzusbizonytalanság Δp_0.

Az egyenlőség feltétele

Ezen Gauss-hullámcsomagokra éppen teljesül a határozatlansági relációban az egyenlőség:

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_0 = \frac{\hbar}{2}$$

A hővezetés egyenlete

5.1. Definíció

Hővezetési egyenlet

$$\partial_0 u(t,x) = -D\partial_1^2 u(t,x)$$

Megoldások

Az a) állítás egyenesen következik az exponenciális függvény azon tulajdonságából, hogy mindig pozitív: $\exp(x) > 0$.

A monotonitás vizsgálatához a függvény deriváltja: $g'(x) = -xg(x)$, és mivel $g(x) > 0$, ezért a derivált előjelét a $(-x)$ tag előjele dönti el, amiből a b) és c) állítás már adódik. A globális maximum $g(0) = 1$ az előző két állításból következik.

Az inflexiós pontok meghatározásához a második deriváltat vizsgáljuk: $g''(x) = (x^2 - 1)g(x)$. A g függvény a $(-\infty, -1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumokon konkáv ($g''(x) > 0$), illetve a $(-1, 1)$ intervallumon konvex ($g''(x) < 0$). A g'' függvénynek zérushelye, és így a g függvénynek inflexiós pontja van az $x = \pm 1$ pontokban.

$$f_n''(x) = n \cos^{n-2}(x) \left((n-1) \sin^2(x) - cos^2(x) \right)$$