Bevezetés a MATLAB programozásba
Feladatok I

Beadási határidő: 2013. október 7.

A feladatok utáni zárójelben a feladatra kapható maximális pontszám szerepel. A megszerezhető összpontszám: 400. A gyakorló feladatokra összesen 200 pont, az alkalmazásra szintén 200 pont szerezhető. Csak egy alkalmazásra lehet pontot kapni.

Jelölések

Nat • természetes számok halmaza: $\{1, 2, \dots\}$
Int • egész számok halmaza: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Rat • racionális számok halmaza: $\{a/b\colon a \in \mathbf{Int}, b \in \mathbf{Nat}\}$

1. Gyakorló feladatok

1. Feladat (1)**.** A MATLAB segítségével nézzünk utána, hogy az `atan2` függvény miben különbözik az `atan` függvénytől. Illusztráljuk a hasonlóságot és a különbséget is. Próbáljuk ki az alábbi lehetőségeket:

- a parancssorban a `help`, illetve a `doc` utasítás segítségével kérhetünk információt, vagy
- használjuk a Shift + F1 billentyűkombinációt a **Function Browser**-ben való kereséshez, illetve
- a **Help** menü első **Product Help** menüpontját választva a documentációban is kereshetünk.

2. Feladat (1)**.** Próbáljuk ki, hogy milyen eredményeket ad a MATLAB az alábbi kifejezések esetén, és értelmezzük a kapott eredményeket:

$$0/1,\ 1/0,\ -1/0, 0/0,\ 0/\infty,\ \infty/0,\ \infty/\infty,\ \infty+\infty,\ \infty-\infty, 0\cdot\infty,\ 1^0,\ 1^\infty,\ 0^1,\ 0^0,\ 0^\infty,\ \infty^0,\ \infty^\infty.$$

3. Feladat (6)**.** Legyen $x := 3$ és $y := 2$, határozzuk meg az alábbi kifejezések értékeit:

a) $(x^2 - y^2)/(x^3 y)$,
b) $\sin(x + y) - \sqrt{x - y}$,
c) $x^y - y^x$,
d) $4\pi y^2$,
e) $e^x + e^{-x} - 2\,\mathrm{ch}(x)$,
f) $y + x^2 \ln(x + y)$.

4. Feladat (5)**.** Írjunk egy MATLAB programot ami mérföldről kilométerre vált át. A távolságot a felhasználótól kérje be a program.

5. Feladat (18)**.** Legyen $x := [1, 2, 3]$ és $y := [0, 1, 1]$, állítsuk elő az alábbi listákat (minden művelet elemenként értendő).

a) $2x$,

b) $x+10$,

c) x^2,

d) $x+y$,

e) $x-y$,

f) $x\cdot y$,

g) y/x,

h) x^x,

i) $\ln(x)$.

6. Feladat (20)**.** Hozzuk létre a következő listákat a `:` vagy a `linspace` használatával. Ezeken kívül csak aritmetikai műveletek használhatók.

a) az első tíz egész szám: $[1, 2, \dots, 10]$,

b) az első öt páratlan szám: $[1, 3, \dots 9]$,

c) a $[-1, 1]$ intervallum öt egyenlő részre osztásával nyert pontok (az intervallum széleit is beleértve),

d) az első 10 négyzetszám: $[1, 4, 9, \dots, 100]$,

e) $[0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100]$,

f) $[1, 2, 4, 8, \dots, 256]$,

g) $[0, \pi/3, 2\pi/3, \dots, 2\pi]$,

h) tíz 1 és tíz -1 felváltva: $[1, -1, \dots, 1, -1]$,

i) $[a, d, g, \dots, y]$,

j) az ábécé visszafelé: $[z, y, \dots, a]$.

7. Feladat (5)**.** Adott $n \geq 3$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ értékekre állítsuk elő az origó középpontú szabályos n-szög $P_0, \dots, P_{n-1}$ csúcsait, majd rajzoljuk fel az így adódó sokszöget. Az origó középpontú szabályos n-szög $P_k = (x_k, y_k)$ csúcsait az alábbi formula szerint állíthatjuk elő:

$$x_k = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k + \varphi}{n}\right), \quad y_k = \sin\left(\frac{2\pi \cdot k + \varphi}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$. A $\varphi = 0$ választással (n-től függetlenül) $P_0 = (1, 0)$.

8. Feladat (10)**.** Adott $n \geq 1$ értékre rajzoljunk ki n darab véletlen (x, y) középpontú, véletlen d átmérőjű kört, ahol $0 \leq x, y \leq 10$ és $0 \leq d \leq 1$.

9. Feladat (18)**.** Adott az $x := [4, 5, 3, 7, 11, 2, 14, 9, 3, 11]$ lista. A lista k-adik elemét x_k-val jelöljük, amikor $k = 1, \dots, 10$, továbbá az $[x_k\colon P]$ egy olyan listát jelent, amelynek elemei ugyanolyan sorrendben vannak, mint x elemei, és csak azon x_k elemeket tartalmazza, amelyekre a P állítás igaz. Állítsuk elő a következő listákat:

a) $[x_k\colon x_k > 7]$,

b) $[x_k\colon 3 < x_k \leq 9]$,

c) $[x_k\colon 3|x_k \text{ vagy } 7|x_k]$,

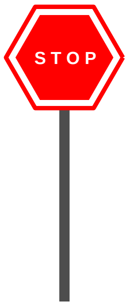
d) $[x_k\colon x_k|126]$,

e) $[x_k\colon |x_{k+1} - x_k| \geq 8]$, ahol $x_{11} = x_1$,

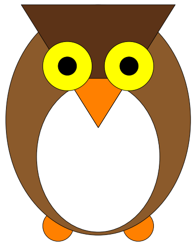
f) $[x_k\colon x_k + x_{k+2} > x_{k+1}]$, ahol $x_{11} = x_1$ és $x_{12} = x_2$.

10. Feladat (30)**.** Rajzoljuk meg az 1a. ábrán látható stop táblát és az 1b. ábrán látható baglyot. Nézzünk utána a `saveas` parancsnak a dokumentációban, és ennek segítségével mentsük el az elkészült képeket `.bmp` és `.pdf` formátumokba.

11. Feladat (27)**.** Feltételezzük, hogy $n, k, p_i, w_i \in \mathbf{Nat}$, $r_i \in \mathbf{Int}$, $x_i, a, b, c \in \mathbf{Rat}$. Definiáljuk az alábbi függvényeket anonymus függvények segítségével:



(a) Stop tábla



(b) Bagoly

1. ábra. Egyszerű geometriai alakzatok használatával rajzolt képek

a) sum_n$(n) = 1 + 2 + \cdots + n$,

b) ssum_n$(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$,

c) fact$(n) = n!$,

d) ffact$(n) = n!!$,

e) binom$(n, k) = \binom{n}{k}$, $n \geq k$,

f) $\ln 2(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$,

g) nnum$([p_1, \ldots, p_n], [r_1, \ldots, r_n]) = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$,

h) wmean$([x_1, \ldots, x_n], [w_1, \ldots, w_n]) = \frac{w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + \cdots + w_n}$,

i) solve_quad(a, b, c) $= [z_1, z_2]$, ahol z_1 és z_2 az $az^2 + bz + c = 0$ kvadratikus egyenlet megoldása ($a \neq 0$).

12. Feladat (21)**.** Definiáljuk az alábbi függvényeket anonymus függvények segítségével ($m, n \in \mathbf{Nat}$):

a) first$([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = x_1$,

b) rest$([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = [x_2, \ldots, x_n]$,

c) take$([x_1, x_2, \ldots, x_n], m) = [x_1, \ldots, x_m]$,

d) drop$([x_1, x_2, \ldots, x_n], m) = [x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]$,

e) riffle$([x_1, x_2, \ldots, x_n], [y_1, y_2, \ldots, y_m]) = [x_1, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots, x_n, y_1, y_2 \ldots, y_m]$

f) cumavr$([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = [x_1, (x_1 + x_2)/2, (x_1 + x_2 + x_3)/3, \ldots, (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n]$,

g) movavr$([x_1, x_2, \ldots, x_n], m) = [(x_1 + \cdots + x_m)/m, (x_2 + \cdots + x_{m+1})/m, (x_3 + \cdots + x_{m+2})/m, \ldots,$
$(x_{n-m+1} + \cdots + x_n)/m]$.

13. Feladat (24)**.** Állítsuk elő az alábbi mátrixokat a `diag`, `zeros`, `ones`, `eye`, `:`, `repmat`, `reshape`, `cat` és `flipdim` használatával:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

14. Feladat (14)**.** Adott az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix, írjunk olyan az A mátrixot tartalmazó kifejezéseket, amelyek megadják:

a) minden sor legnagyobb elemét,

b) minden oszlop legkisebb elemét,

c) az oszlopokban lévő elemek összegét,

d) a sorokban lévő páratlan elemek összegét,

e) az első és utolsó oszlop elemenkénti szorzatát,

f) a második oszlop és a harmadik sor diadikus szorzatát,

g) a nulla elemek számát,

h) a legnagyobb elemet,

i) a három legnagyobb elemet.

2. Alkalmazások

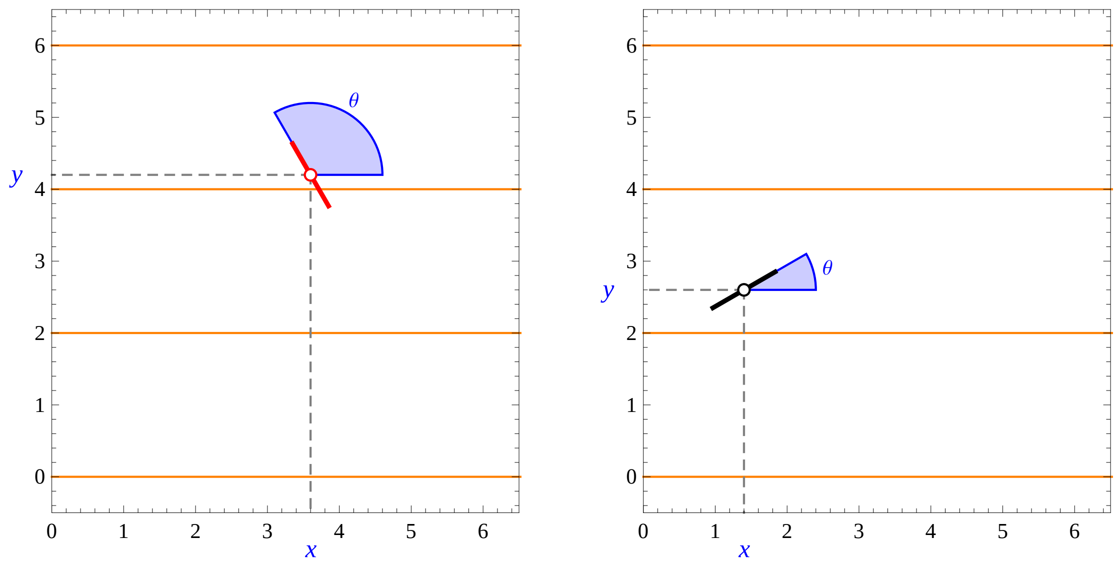
2.1. A Buffon-féle tűprobléma szimulációja

Az alábbi feladat Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffontól [1] származik. Egy papírlapra párhuzamos vonalakat húzunk egymástól egyenlő d távolságra, majd véletlenszerűen a papírlapra ejtünk egy l hosszúságú tűt. A kérdés, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik vonalat. Ez a probléma tipikus példája a **geometriai valószínűség** fogalmának alkalmazására.

A feladat leírása. Adottak egymástól $d = 2$ távolságra lévő vízszintes, párhuzamos egyenesek a síkon. A következő kísérletet végezzük el: leejtünk egy $l = 1$ hosszúságú tűt a síkra. A kísérletet sikeresnek tekintjük, ha a tű metszi valamelyik egyenest, és sikertelennek tekintjük, ha a tű egy egyenest sem metsz. Mindkettőre láthatunk példát a 2. ábrán. Egymástól függetlenül n kísérletet végzünk. Jelöljük a_n-nel az n-edik kísérlet eredményét, pontosabban

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{ha az } n\text{-edik tű metsz egy vonalat,} \\ 0, & \text{ha az } n\text{-edik tű nem metsz vonalat.} \end{cases}$$

[1] Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788): francia matematikus, természetbúvár és csillagász.



2. ábra. Egy sikeres és egy sikertelen kísérlet.

Egy $A_n := [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ kísérletsorozat sikeres kísérleteinek száma:

$$N(A_n) := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Például, egy lehetséges öt hosszú kísérletsorozat eredménye: $A_5 = [1, 1, 0, 0, 1]$, és így $N(A_5) = 3$. A szimulációval szeretnénk ellenőrizni azt a tényt, hogy elég nagy n esetén a sikeres kísérletek relatív gyakorisága:

$$\frac{N(A_n)}{n} \approx \frac{1}{\pi}.$$

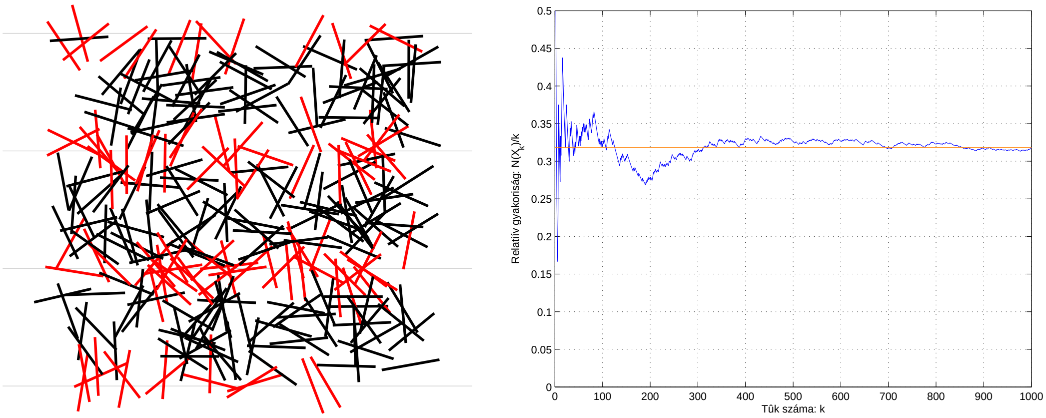
Egy tű **állapotát** a középpontjának helyzete $x_k, y_k \in [0, 5]$ és a vízszintessel bezárt szöge $\theta_k \in [0, \pi]$ egyértelműen meghatározza (2. ábra). A tű (x_k, y_k, θ_k) állapota pedig meghatározza a kísérlet sikerességét, ugyanis a k-adik kísérlet pontosan akkor sikeres, ha

$$\sin(\theta_k) \geq 2(1 - |(y_k \bmod 2) - 1|).$$

A programozási feladat leírása. A szimuláció bemeneti paramétere: n, a kísérletek (leejtett tűk) száma; a szimuláció eredménye pedig két ábra, külön ablakban (3. ábra):

a) A kísérlet vizuális eredménye: a síkon lévő vonalak és tűk megjelenítése. Az egyenest metsző tűket rajzoljuk pirossal, a többit feketével. Az átláthatóság érdekében legfeljebb 300 tűt jelenítsen meg az ábra.

b) Egy grafikon, ami a sikeres kísérletek $N(A_k)/k$ relatív gyakoriságát ábrázolja a k elvégzett kísérletek számának függvényében, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$. A koordináta rendszerben használjunk segédvonalakat, és a függőleges tengely határai 0 és 0.5 legyenek. A tengelyek feliratozását se felejtsük el. Egy egyenessel jelöljük be az $1/\pi \approx 0.3183$ konstans értéket is. Használjuk a `plot` függvényt.

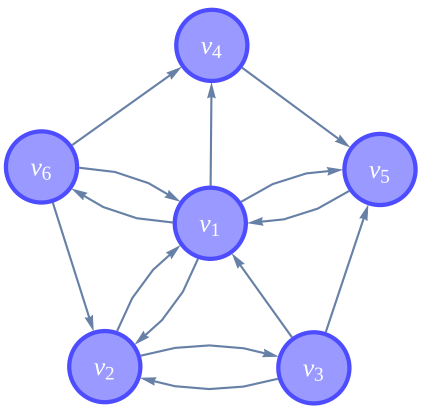


3. ábra. A szimuláció eredménye.

2.2. Népszerűségi index

Amikor például a Google keresőben rákeresünk egy szóra vagy kifejezésre; a kereső megnézi, hogy mely weboldalakon szerepel a keresett szó vagy kifejezés. A kérdés az, hogy milyen sorrendben jelenítsük meg a találatokat. Hogyan sikerül a Google keresőnek szinte mindig a releváns találatokat kiválasztania az esetleges sok százezer, vagy millió találat közül? Na persze nem úgy, ahogy az alábbi feladat mutatja, de az alapötletet hasonló.

A feladat leírása. A választ egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be. Először is föltesszük, hogy csupán 6 találat volt a keresésre, tehát összesen 6 weboldalról van szó. A szóbanforgó 6 weboldal kapcsolatát a 4. ábrán látható **irányított gráffal** reprezentálhatjuk. A gráf v_i **csúcsai** a weboldalakat szimbolizálják, míg a gráf $v_i \twoheadrightarrow v_j$ **élei** a weboldalak között lévő kapcsolatot: *a* v_i *csúcsból a* v_j *csúcsba pontosan akkor megy él, ha a* v_i *weboldalról mutat link a* v_j *weboldalra.* A 4. ábrán látható hálózatban ezek szerint a v_4 weboldaról csak a v_5 weboldalra mutat link, ugyanakkor a v_4 weboldalra két link is mutat (a v_1 és a v_6 weboldalról). Egy gráfot a V csúcsainak és E éleinek halmazával adhatunk meg



4. ábra. A keresés eredményeként felépített irányított gráf.

$G = (V, E)$. A jelenlegi példában a csúcsok halmaza $V = \{v_1, \dots, v_6\}$, az élek halmaza pedig:

$$E = \{v_1 \twoheadrightarrow v_2, v_1 \twoheadrightarrow v_4, v_1 \twoheadrightarrow v_5, v_1 \twoheadrightarrow v_6, v_2 \twoheadrightarrow v_1, v_2 \twoheadrightarrow v_3, v_3 \twoheadrightarrow v_1, v_3 \twoheadrightarrow v_2,$$
$$v_3 \twoheadrightarrow v_5, v_4 \twoheadrightarrow v_5, v_5 \twoheadrightarrow v_1, v_6 \twoheadrightarrow v_1, v_6 \twoheadrightarrow v_2, v_6 \twoheadrightarrow v_4\}$$

A G gráf reprezentálható egy úgynevezett **szomszédsági mátrixszal.** Ez a mátrix mindig négyzetes és mérete megegyezik a hálózat csúcsainak számával. A mátrix elemeit pedig a következőképpen határozzuk meg: $a_{ij} = 1$ pontosan akkor, ha $v_i \twoheadrightarrow v_j \in E$. Vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában lévő eleme $a_{ij} = 1$ pontosan akkor, ha a v_i csúcsból mutat él a v_j csúcsba. Ez alapján a 4. ábrán látható gráf esetén tehát:

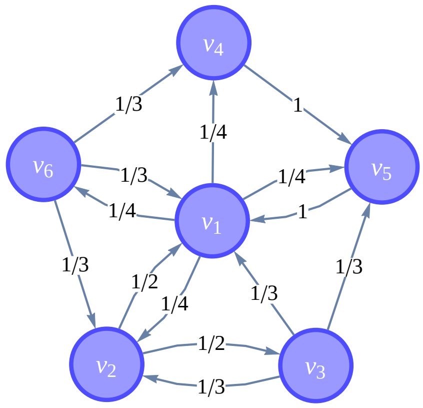
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. A szomszédsági mátrix egy másik olvasata, hogy az i-edik oszlopában éppen azon a helyen vannak egyesek, amely csúcsba fut ki él a v_i csúcsból, illetve a mátrix i-edik sorában éppen ott vannak egyesek, amely csúcsból fut be él a v_i csúcsba.

Annak eldöntéséhez, hogy melyik csomópont a legnépszerűbb, naivan mondhatnánk: *számoljuk össze, hogy melyik csúcsba mennyi él fut be (tehát, hogy mennyi link mutat az adott weboldalra), és aki nagyobb értéket kap, előrébb kerül a rangsorban.* A probléma az, hogy a hálózatban mindenki linkje ugyanannyit ér, ugyanakkor a rangsoroláskor figyelembe szeretnénk venni, hogy egy népszerű weboldalról mutató link többet ér, mint egy szinte senki által nem ismert weboldlalról mutató link. Ezért a következőket tesszük; a gráf $v_i \twoheadrightarrow v_j$ éleit kicseréljük **súlyozott élekre:** $(v_i \twoheadrightarrow v_j, w_{ij})$. Az élek súlyait a következőképpen határozzuk meg: minden csúcshoz meghatározzuk az adott csúcsból kimenő élek $d(v_i) = \#\{v_j \in V : v_i \twoheadrightarrow v_j \in E\}$ számát, majd ugyanezen csúcs minden kimenő éléhez a $w_i := w_{ij} = 1/d(v_i)$ súlyt rendeljük: $(v_i \twoheadrightarrow v_j, w_i)$. Például: $d(v_1) = 4$, így a v_1 csúcsból kimenő súlyozott élek $(v_1 \twoheadrightarrow v_j, 1/4)$, $j = 2, 4, 5, 6$. A gráf éleinek súlyai reprezentálják egy kapcsolat értékességét. A G gráfból nyert súlyozott gráfot láthatjuk az 5. ábrán.

Ehhez a súlyozott gráfhoz is tartozik szomszédsági mátrix, amit az előző szomszédsági mátrixhoz hasonlóan kapunk, csak most 1 helyett az adott él súlya kerül be a mátrix megfelelő helyére.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



5. ábra. A gráf súlyozott változata.

Megjegyzés. Az $\mathbf{M}$ mátrixot közvetlenül az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy kaphatjuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix adott oszlopában minden egyest lecserélünk az oszlopban szereplő egyesek számának reciprokára. Például, az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopában négy darab egyes van, így az $\mathbf{M}$ mátrix első oszlopát úgy kaptuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopában szereplő egyesek helyére $1/4$-et írtunk. Vegyük észre, hogy ezáltal egy olyan mátrixot kaptunk, amelyben ha bármely oszlopban szereplő számokat összeadjuk, egyet kapunk.

Egy weboldal népszerűsége a rá mutató weboldalak népszerűségének (a kapcsolatok fontossága szerinti) súlyozott átlaga. Egyenletekkel megfogalmazva ez a következőt jelenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + u_5 + \frac{1}{3}u_6, & u_2 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_6, & u_3 &= \frac{1}{2}u_2, \\ u_4 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{3}u_6, & u_5 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + u_4, & u_6 &= \frac{1}{4}u_1, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol u_i jelöli a v_i csúcs népszerűségét. Azt akarjuk megtudni, hogy milyen u_i népszerűségi indexek tesznek eleget a fenti egyenletrendszernek. Figyeljük meg, hogy az egyenletekben szereplő u_i ismeretlenek együtthatói, éppen az $\mathbf{M}$ mátrix elemei, és valóban; az (1) egyenletrendszert mátrixos alakban így írhatjuk: $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{u}$, ahol $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_6]^\top$. A népszerűségi indexeket tehát meghatározhatjuk az $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ egyenletrendszer megoldásával. [2] A megoldás meghatározásához az $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ egyenletet írjuk át az $(\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ homogén alakba. A megoldásból a $\mathbf{z}$ relatív népszerűségi indexet a $\mathbf{z} := \mathbf{u}/\max\mathbf{u}$ formula segítségével határozhatjuk meg.

A programozási feladat leírása. Írjunk egy olyan programot, amelynek bemenő paramétere a G gráf, vagyis a csúcsok és élek halmaza; eredményül pedig az alábbiakat írja ki:

- a csúcsokat és az éleket,
- az $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixot,
- a $\mathbf{z}$ relatív népszerűségi indexeket és

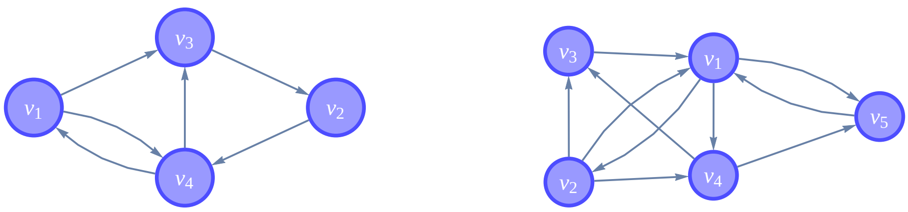
[2] Szerencsére az olyan típusú mátrixokra, mint amilyen az $\mathbf{M}$ mátrix is, a Perron–Frobenius-tétel biztosítja, hogy az $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ egyenletnek mindig létezik olyan megoldása, amire $\mathbf{u}$ minden komponense pozitív. Lehetséges, hogy a MATLAB, a keresett pozitív $\mathbf{u}$ vektor helyett, annak mínusz egyszeresét adja meg, ezért javasolt az `abs` függvény használata.

- a **z** relatív népszerűségi indexek alapján kialakuló rangsort.

A példánk esetében a program kimenete a következőképpen néz ki:

```
Vertices:
     1     2     3     4     5     6

Edges:
1->2, 1->4, 1->5, 1->6, 2->1, 2->3, 3->1, 3->2,...
3->5, 4->5, 5->1, 6->1, 6->2, 6->4

Adjacency matrix:
     0     1     1     0     1     1
     1     0     1     0     0     1
     0     1     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     1
     1     0     1     1     0     0
     1     0     0     0     0     0

Relative popularity index:
    1.0000    0.4000    0.2000    0.3333    0.6500    0.2500

Ranking:
     1     5     2     4     6     3
```

Teszteljük a 6a. és 6b. ábrán látható gráfokon. A témában további információ: Markov chain.



(a) Négy csúcsú tesztgráf

(b) Öt csúcsú tesztgráf

6. ábra. Tesztgráfok