Differenciálegyenletek

Modellezés differenciálegyenletekkel

Csikja Rudolf

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matemaikai Intézet, Analízis Tanszék

Klasszikus mechanika

Newton-féle mozgásegyenlet

Newton II. törvénye szerint egy test $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ lendületének (időbeli) megváltozása arányos a testre ható erővel $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{F}(t)$. A sebességre vonatkozó differenciálegyenlet így

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t)$$

Szabadesés

$$v_z'(t) = -\frac{1}{m}F_g$$

$$x_z'(t) = v_z(t)$$

Szabadesés légellenállással

$$v'(t) = -\frac{1}{m}F_g - \frac{1}{m}F_D(v(t)), \qquad F_D(v) = \frac{1}{2}\rho C_D A v^2 \operatorname{sign}(v)$$

$$v'(t) = -g + \frac{\rho C_D A}{2m} v^2(t)$$

A végsebesség feltétele $v'(t) = 0$, amiből $V_T = \pm\sqrt{\frac{2gm}{\rho C_D A}}$. Az eredeti egyenlet felírható így:

$$v'(t) = -g\left(1 - \left(\frac{v(t)}{V_T}\right)^2\right)$$

Megoldás:

$$v(t) = V_T\left(\frac{2}{1 + \frac{V_T - v_0}{V_T + v_0} e^{\frac{2g}{V_T}t}} - 1\right)$$

Populáció dinamika

Exponenciális mövekedés

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t\big(kx(t) + \varepsilon(\Delta t)\big), \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$