Differenciálegyenletek

Modellezés differenciálegyenletekkel

Csikja Rudolf

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matemaikai Intézet, Analízis Tanszék

Klasszikus mechanika

Newton-féle mozgásegyenlet

Newton II. törvénye szerint egy test $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ lendületének (időbeli) megváltozása arányos a testre ható erővel $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{F}(t)$. A sebességre vonatkozó differenciálegyenlet így

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t)$$

Szabadesés

$$v'(t) = \frac{1}{m} F_g = g$$

hence

$$v(t) = v(0) + gt$$

Másfél perces esés végére a sebesség meghaladná a 3000 km/h-t.

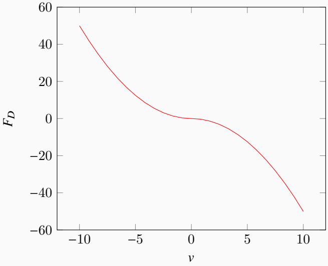
Szabadesés légellenállással

$$v'(t) = -\frac{1}{m}F_g + \frac{1}{m}F_D(v(t))$$

a légellenállásból származó erő

$$F_D(v) = -\frac{1}{2}\rho C_D A v^2 \operatorname{sign}(v)$$

Légellenállás a sebesség függvényében.



$$v'(t) = -g + \frac{\rho C_D A}{2m} v^2(t), \quad v(t) \le 0.$$

$$v'(t) = -g\left(1 - \left(\frac{v(t)}{V_T}\right)^2\right)$$

A végsebesség feltétele $v'(t) = 0$, amiből $V_T = \pm\sqrt{\frac{2gm}{\rho C_D A}}$.

Az eredeti egyenlet felírható így:
Megoldás:

$$v(t) = V_T\left(\frac{2}{1 + \frac{V_T - v_0}{V_T + v_0} e^{\frac{2g}{V_T}t}} - 1\right)$$