

# Differenciálegyenletek

## Előismeretek

---

Csikja Rudolf

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

# Analízis

---

A függvény egy **hozzárendelési szabály**, például az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  skalár függvény vagy a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektor függvény.

Az  $f$  függvény értéke az  $x \in \mathbb{R}$  helyen egy **valós szám**:  $f(x) \in \mathbb{R}$ . A  $g$  függvény értéke a  $t \in \mathbb{R}$  helyen  $g(t) \in \mathbb{R}^n$ , egy  $n$ -dimenziós **vektor**.

A hozzárendelési szabályt gyakran formulával adjuk meg, például

$$f(x) = \sin(x), \quad g(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - t + 1 \\ 1 + t \ln(t) \end{bmatrix}.$$

A függvényeknek van **értelmezési tartománya** (és értékkészlete is). Sőt, az értelmezési tartomány a függvény definíciójának része! Az

$$x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvények nem azonosak.

# Függvények: modellezés

A függvények alkalmasak fizikai változók modellezésére. Például egy kemence hőmérsékletét az időben jellemezhetjük egy  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénnyel. Így a  $t \in \mathbb{R}$  időpontban a kemence hőmérsékletét a  $T(t)$  valós szám adja meg.

Egyszerre több változó modellezésére alkalmas a vektor függvény. Például, ha a kemencében lévő nyomást ( $P$ ) is számbavesszük, az

$$X := \begin{bmatrix} T \\ P \end{bmatrix}$$

vektor függvény egy alkalmas matematikai model lehet a kemence leírására, hiszen az  $X(t) \in \mathbb{R}^2$  vektor megadja a kemence hőmérsékletét és nyomását tetszőleges  $t \in \mathbb{R}$  időpontban.

Alapvető fontosságú az alábbi kifejezések ismerete és azok gyakorlatban való alkalmazása!

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$e^x$	$e^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

$$(cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g', \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

## Példa: logaritmus

Számítsuk ki a logaritmus függvény deriváltját, mint az exponenciális függvény inverzének deriváltja.

Tehát legyen  $f(x) := e^x$   $x \in \mathbb{R}$ , aminek inverze  $f^{-1}(x) = \ln(x)$   $x \in \mathbb{R}^+$ .  
Alkalmazva  $f$ -et inverzére

$$x = f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

majd deriválva mindkét oldalt:  $1 = e^{\ln(x)} (\ln(x))'$  megkapjuk a logaritmus deriváltját:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

### Feladat

Számoljuk ki az  $\ln(g(x))$  deriváltját!

# Lineáris Algebra

---

# Lineáris kombináció

A  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$  vektorok lineáris kombinációja:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_N v_N,$$

a  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N \in \mathbb{R}$  együtthatókkal.



# Komplex Számok

---

# Komplex számok

## Komplex számok alakjai

$$z = x + iy = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)$$

$$x = r \cos(\varphi) \quad y = r \sin(\varphi)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

### Euler formula

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

## Komplex konjugált

$$z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$$

$$zz^* = |z|^2 \quad \frac{z + z^*}{2} = a \quad \frac{z - z^*}{2} = b$$

## Műveletek

$$z = a + ib = re^{i\varphi}, \quad w = c + id = se^{i\theta}$$

$$z \pm w = (a + c) \pm i(b + d)$$

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc) = rse^{i(\varphi + \theta)}$$

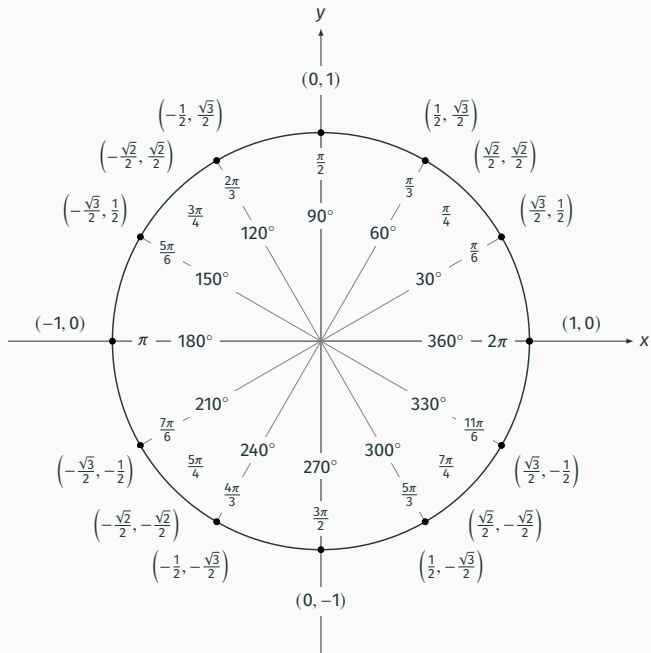
$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

## Egységgyökök

A  $z^n = 1$  egyenlet megoldásai:

$$z_k = \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$



## Feladat

Határozzuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakjait:

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1}{3-4i}, \quad e^{i2020\pi}, \quad ie^{i\frac{\pi}{2}}$$

## Feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket ( $z \in \mathbb{C}$ )

$$z^2 - 2z + 5 = 0, \quad z^3 = 1, \quad z^j = -1.$$

## Feladat

Fejezzük ki a  $\cos(3x)$ -et  $\cos(x)$  polinomjaként:

$$\cos(3x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos^2(x) + a_3 \cos^3(x).$$

Alkalmazzuk az Euler formulát az  $e^{j3x} = (e^{jx})^3$  egyenletre, majd hasonlítsuk össze az egyenlet két oldalát.