Differenciálegyenletek

Modellezés differenciálegyenletekkel

Csikja Rudolf

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matemaikai Intézet, Analízis Tanszék

Közönséges differenciálegyenletek

Matematikai modellezés

$$x(t+\Delta t) = x(t) + f(t, x(t))\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(t, x(t)) + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t)$$

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Populációdinamika

Exponenciális növekedés

$$x'(t) = kx(t)$$

Korlátozott növekedés

Annak érdekében, hogy figyelembe vegyük a véges erőforrást az exponenciális növekedés modeljében a növekedési rátát módosítjuk. A növekedési rátát függővé tesszük a populáció nagyságától:

$$x'(t) = K(x(t))x(t).$$

- Továbbra is elvárjuk, hogy kicsi populációra a növekedési ráta ugyanaz legyen, mint az expononenciális növekedés modeljében: $K(0) = k$.
- Ugyanakkor azt is elvárjuk, hogy egy bizonyos populáció elérésénél a növekedési ráta nulla legyen: $K(L) = 0$.

A lehető legegyszerűbb függvény, ami megfelel a fenti feltételeknek a

$$K(p) = k - \frac{k}{L}p$$

egyenes.

Korlátozott növekedés

$$x'(t) = kx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{L}\right)$$

Klasszikus mechanika

Newton-féle mozgásegyenlet

Newton II. törvénye szerint egy test $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ lendületének (időbeli) megváltozása arányos a testre ható erővel $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{F}(t)$. A sebességre vonatkozó differenciálegyenlet így

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t)$$

Centrális erőtér

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \sim F = F_x + iF_y$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$z' = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}$$

$$z'' = r''e^{i\theta} + 2ir'\theta'e^{i\theta} + ir\theta''e^{i\theta} - r\theta'^2e^{i\theta}$$

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{r'}{r} \quad \rightarrow \quad \theta' = \frac{1}{r^2}$$

Gravitáció

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_r$$

$$F_g = GM\frac{m}{r^2}$$

$$E_p(x) = \int_R^x \frac{mMg}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

Szökési sebesség:

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E_p(\infty) = GM\frac{m}{R}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 11.186\,\mathrm{km/s}$$

Szabadesés

$$v'(t) = \frac{1}{m} F_g = g$$

hence

$$v(t) = v(0) + gt$$

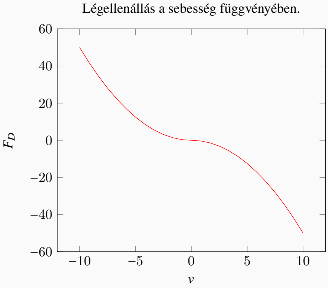
Másfél perces esés végére a sebesség meghaladná a 3000 km/h-t.

Szabadesés légellenállással

$$v'(t) = -\frac{1}{m}F_g + \frac{1}{m}F_D(v(t))$$

a légellenállásból származó erő

$$F_D(v) = -\frac{1}{2}\rho C_D A v^2 \operatorname{sign}(v)$$



$$v'(t) = -g + \frac{\rho C_D A}{2m}v^2(t), \quad v(t) \leq 0.$$

$$v'(t) = -g\left(1 - \left(\frac{v(t)}{V_T}\right)^2\right)$$

A végsebesség feltétele $v'(t) = 0$, amiből $V_T = \pm\sqrt{\frac{2gm}{\rho C_D A}}$.

Az eredeti egyenlet felírható így:
Megoldás:

$$v(t) = V_T\left(\frac{2}{1 + \frac{V_T - v_0}{V_T + v_0}e^{\frac{2g}{V_T}t}} - 1\right)$$