Differenciálegyenletek

Előismeretek

Csikja Rudolf

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matemaikai Intézet, Analízis Tanszék

Analízis

Függvények

A függvény egy **hozzárendelési szabály**, például az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skalár függvény vagy a $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vektor függvény.

Az f függvény értéke az $x \in \mathbb{R}$ helyen egy **valós szám**: $f(x) \in \mathbb{R}$. A g függvény értéke a $t \in \mathbb{R}$ helyen $g(t) \in \mathbb{R}^n$, egy n-dimenziós **vektor**.

A hozzárendelési szabályt gyakran formulával adjuk meg, például

$$f(x) = \sin(x), \quad g(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - t + 1 \\ 1 + t\ln(t) \end{bmatrix}.$$

Egy függvénynek van **értelmezési tartománya** (és értékkészlete is). Sőt, az értelmezési tartomány a függvény definíciójának része! Az

$$x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvények nem azonosak.

Függvények: modellezés

A függvények alkalmasak fizikai változók modellezésére. Például egy kemence hőmérsékletét az időben jellemezhetjük egy $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel. Így a $t \in \mathbb{R}$ időpontban a kemence hőmérsékletét a $T(t)$ valós szám adja meg.

Egyszerre több változó modellezésére alkalmas a vektor függvény. Például, ha a kemencében lévő nyomást (P) is számbavesszük, az

$$X := \begin{bmatrix} T \\ P \end{bmatrix}$$

vektor függvény egy alkalmas matematikai model lehet a kemence állapotának leírására, hiszen az $X(t) \in \mathbb{R}^2$ vektor megadja a kemence hőmérsékletét és nyomását tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ időpontban.

Differenciálszámítás

Alapvető fontosságú az alábbi kifejezések ismerete és azok gyakorlatban való alkalmazása!

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

$$(cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g', \quad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Példa: logaritmus

Számítsuk ki a logaritmus függvény deriváltját, mint az exponenciális függvény inverzének deriváltja.

Legyen $f(x) := e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, aminek inverze $f^{-1}(x) = \ln(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$. Alkalmazva az f függvényt annak inverzére

$$x = f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

majd deriválva mindkét oldalt kapjuk, hogy $1 = e^{\ln(x)}(\ln(x))'$, amiből a logaritmus deriváltja kifejezhető:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Feladat

Számoljuk ki az $\ln(g(x))$ deriváltját!

Lineáris Algebra

Lineáris kombináció

A $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineáris kombinációja:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_N v_N \in \mathbb{R}^n,$$

a $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ együttatókkal.

Komplex Számok

Komplex számok

Komplex számok alakjai

$$z = x + iy = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$$

$$x = r\cos(\varphi) \quad y = r\sin(\varphi)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Euler formula

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Komplex konjugált

$$z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$$

$$zz^* = |z|^2 \quad \frac{z + z*}{2} = a \quad \frac{z - z*}{2} = b$$

Műveletek

$$z = a{+}ib = re^{i\varphi}, \quad w = c{+}id = se^{i\theta}$$

$$z \pm w = (a + c) \pm i(b + d)$$

$$zw = (ac{-}bd){+}i(ad{+}bc) = rse^{i(\varphi+\theta)}$$

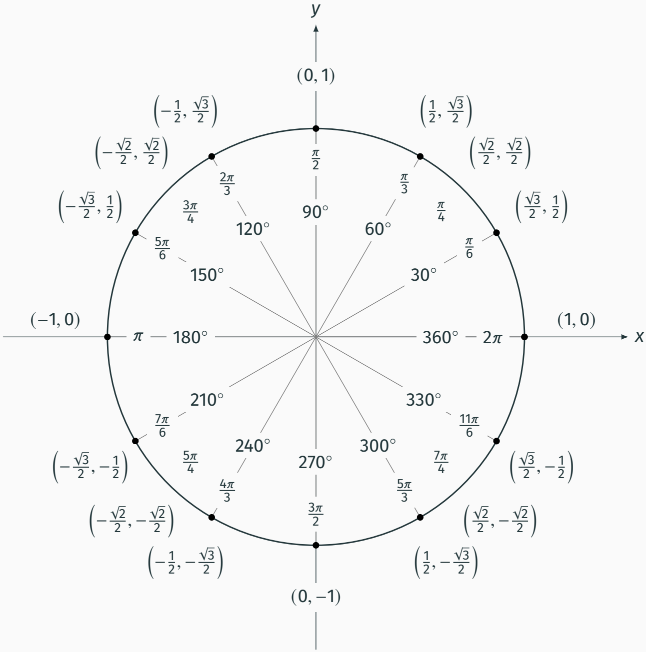
$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

Egységgyökök

A $z^n = 1$ egyenlet megoldásai:

$$z_k = \cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{k}{n}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$



y
x
(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(1, 0)
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(0, −1)
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
(−1, 0)
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$
90°
$\frac{\pi}{3}$
60°
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
30°
360°
2π
330°
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{4}$
300°
$\frac{5\pi}{3}$
270°
$\frac{3\pi}{2}$
240°
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$
210°
$\frac{7\pi}{6}$
π
180°
150°
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{4}$
120°
$\frac{2\pi}{3}$

Feladat

Határozzuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1}{3-4i}, \quad e^{i2020\pi}, \quad ie^{i\frac{\pi}{2}}$$

Feladat

Oljduk meg az alábbi egyenleteket ($z \in \mathbb{C}$)

$$z^2 - 2z + 5 = 0, \quad z^3 = 1, \quad z^i = -1.$$

Feladat

Fejezzük ki a $\cos(3x)$-et $\cos(x)$ polinomjaként:

$$\cos(3x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos^2(x) + a_3 \cos^3(x).$$

Alkalmazzuk az Euler formulát az $e^{i3x} = (e^{ix})^3$ egyenletre, majd hasonlítsuk össze az egyenlet két oldalát.