

### 3. Bolygómozgás

Csillag Barnabás Gellért (COTNU3)

2020. március 26.

# 1. Elméleti háttér

Jelen jegyzőkönyv a bolygók mozgására, illetve a három test problémára felírt differenciálegyenletek numerikus megoldásának eredményeit hivatott magába foglalni.

A **bolygók mozgása** Newton gravitációs erőtvényével jó közelítéssel leírható. Ezen törvény szerint két adott test között a következő erő hat:

$$\underline{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \underline{r}_{12}, \quad \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}. \quad (1)$$

Mivel az erő centrális, a perdület megmarad, ennek következtében az egészet kezelhetjük egy síkbeli problémaként. A körülményektől függően az egyenletek tovább egyszerűsíthetők:

- Ha egy Nap-bolygó rendszert vizsgálunk, akkor figyelembe vehetjük, hogy a Nap tömege a Jupiter tömegénél is ezerszer nagyobb, így feltehetjük, hogy a Nap mozdulatlan.
- Ha más, nagyságrendileg körülbelül azonos tömegű égitestek kölcsönhatását vizsgáljuk, akkor a két test tömegközéppontja lesz mozdulatlan:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2, \quad m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = 0. \quad (2)$$

A probléma analitikus megoldása a következő. A pálya egyenlete (polárkoordinátákban), tengelyei és a sebesség:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos(\theta)}, \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad v = \sqrt{G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (3)$$

ahol  $a, b$  az ellipszis tengelyei,  $\epsilon$  pedig az excentritás. A teljes energia, és a keringési idő (Kepler harmadik törvénye alapján):

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{2a}, \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}}, \quad (4)$$

a perdület pedig  $\underline{L} = \underline{r} \times (\mu \underline{v})$ .

Ha szimulálni akarjuk a mozgást valamilyen numerikus differenciálegyenlet-integráló módszerrel, akkor egyes paramétereket meg kell adnunk az elején - lehet ilyen mondjuk az excentritás, és a kezdeti távolság a koordináta rendszer origójától. Megtehetjük például, hogy a nagytengelyről indítjuk a vizsgált égitestet, és úgy választjuk a koordináta rendszert, hogy az  $x$  tengely a nagytengellyel párhuzamos legyen. Ekkor  $x(t=0) = a \cdot (1 + \epsilon)$ , továbbá a testnek csak  $y$  irányú sebessége lesz ezen pillanatban  $v = \sqrt{G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$  értékkel.

A **három test probléma** esetén mindegyik test esetében a rá ható erőt a másik két test helyzete határozza meg. Alap esetben mindegyik testhez tartozik egy tömeg ( $m_1, m_2, m_3$ ), és egy pozíció ( $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$ ), továbbá minden testnek fel tudjuk írni a mozgásegyenletét - itt van például az első:

$$\frac{d^2 \underline{r}_1}{dt^2} = -G m_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{(r_1 - r_2)^3} - G m_3 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_3}{(r_1 - r_3)^3}. \quad (5)$$

Általános tapasztalat, hogy a három test probléma numerikus megoldásai nagyon erősen függenek a kezdeti feltételektől. Analitikusan csak kevés, speciális esetet lehet megoldani. Ilyenek például a következők:

- a síkbeli három test probléma: a testek mind egy síkban mozognak,
- a korlátozott három test probléma: az egyik testnek nincs tömege.

A Naprendszer is tekinthető síkbeli három test problémának. Ekkor a relatív pozíciókra az alábbi egyenlőség teljesül:

$$\underline{s}_1 = \underline{r}_3 - \underline{r}_2, \quad \underline{s}_2 = \underline{r}_1 - \underline{r}_3, \quad \underline{s}_3 = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \Rightarrow \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3 = 0. \quad (6)$$

Így tehát a mozgásegyenletek a következőképp módosulnak:

$$\frac{d^2 \underline{s}_i}{dt^2} = -G \frac{m}{s_i^3} \underline{s}_i + m_i \underline{G}, \quad (7)$$

ahol  $m = m_1 + m_2 + m_3$ , és  $\underline{G} = G \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\underline{s}_i}{s_i^3}$ .

## 2. Megoldási módszerek

Két numerikus megoldási módszert fogok alkalmazni (mivel nem kaptam instrukciókat arra vonatkozóan, hogy mind a négy korábban alkalmazott metódust bevessem, és különben is, ez a kettő a legelterjedtebb). A **negyedrendű Runge-Kutta** módszer a következőképpen működik. Tegyük fel, hogy  $y_0$  a léptetni kívánt változónk,  $h$  a lépésköz,  $t_0$  a kezdeti idő,  $f(t_n, y_n)$  pedig a derivált függvény. Ekkor egy lépés a következőképpen írható fel:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{a_n + 2 \cdot b_n + 2 \cdot c_n + d_n}{6}, \quad (8)$$

ahol

$$a_n = f(t_n, y_n), \quad (9)$$

$$b_n = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}ha_n\right), \quad (10)$$

$$c_n = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hb_n\right), \quad (11)$$

$$d_n = f(t_n + h, y_n + hc_n), t_{n+1} = t_n + h. \quad (12)$$

Az **adaptív Runge-Kutta** is hasonló elven működik azon különbséggel, hogy ott a lépésköz változhat a derivált meredekségének függvényében (minél meredekebb a derivált, annál sűrűbb a lépésköz a hibák minimalizálásának érdekében).

Ezen két módszert fogom a fentebb vázolt fizikai problémák megoldására alkalmazni.

A testek mozgásának vizsgálata során szükségünk lesz a pályák  $x$  tengelymetszeteire. Mivel mindkét módszer véges lépéshosszal működik, nem várható el, hogy pont az  $y = 0$ -ba fognak esni kiértékelési pontok, így amikor keresztezi a test pályája az  $x$  tengelyt, akkor vissza kell léptetni az  $y = 0$ -ba. Ezt úgy tehetjük meg, hogy áttérünk  $t$ -ről  $y$  változóra:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt}, \quad (13)$$

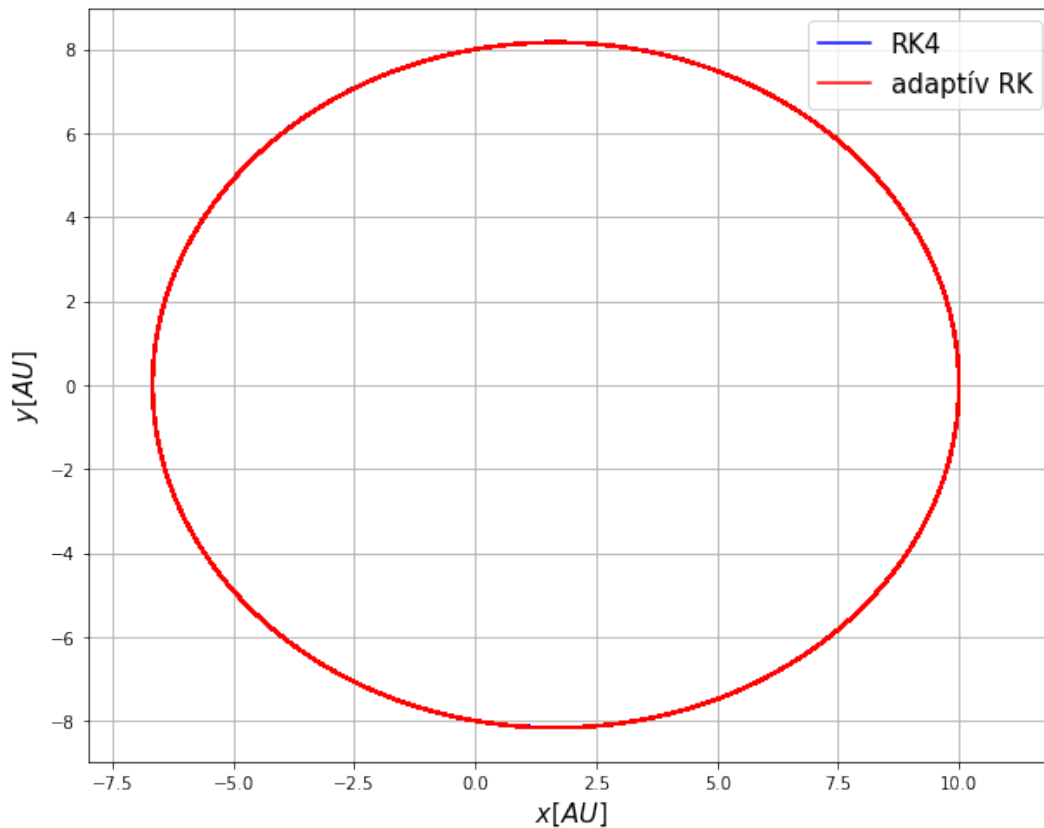
és a Runge-Kutta lépésközt  $-y$ -nak választjuk ezen egy iteráció erejéig.

### 3. Eredmények

#### Első feladat

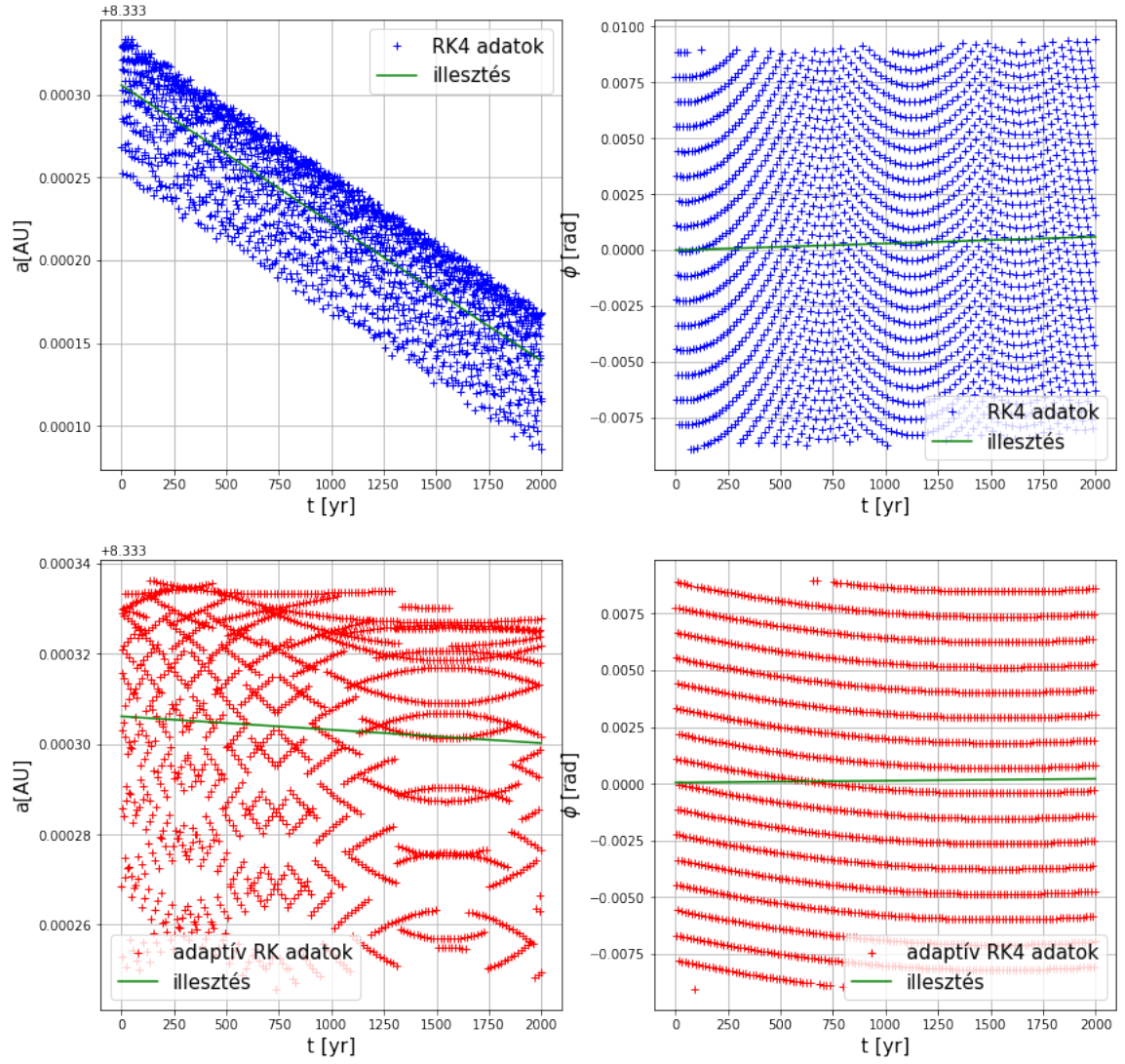
Itt az volt a kérdés, hogy két égitest kölcsönhatása esetén ha az aphéliumból indítjuk a rendszert, és úgy választjuk meg a Descartes-koordináta rendszerünket, hogy a nagytengellyel párhuzamos legyen, akkor lépésmérettől illetve módszertől függően mennyire fog elforogni az ellipszispálya nagytengelye az idő előrehaladtával, illetve mennyire változik meg a fél nagytengely hossza.

Ezt én úgy oldottam meg, hogy különböző lépéshossz beállítás és megoldási módszerek mellett futtattam le szimulációkat, majd minden eredmény esetén megkerestem a sugár koordináta lokális maximumait, ezt követően pedig kiírtam az ezen koordinátához tartozó polárszöget és sugarat. Az utóbbiból a aphéliumban érvényes  $r = a(1 + \epsilon)$  egyenlőséget felhasználva kiszámoltam a fél nagytengelyeket. Nem várható el, hogy bármikor is pont a aphéliumban lesz a rendszer, de így, a sugár koordináta maximumához periódusonkénti legközelebbi pontok felhasználásával a trendek láthatóak (ha vannak).



1. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 0.1yr$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t = 0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.001-es adaptív pontosság esetén.

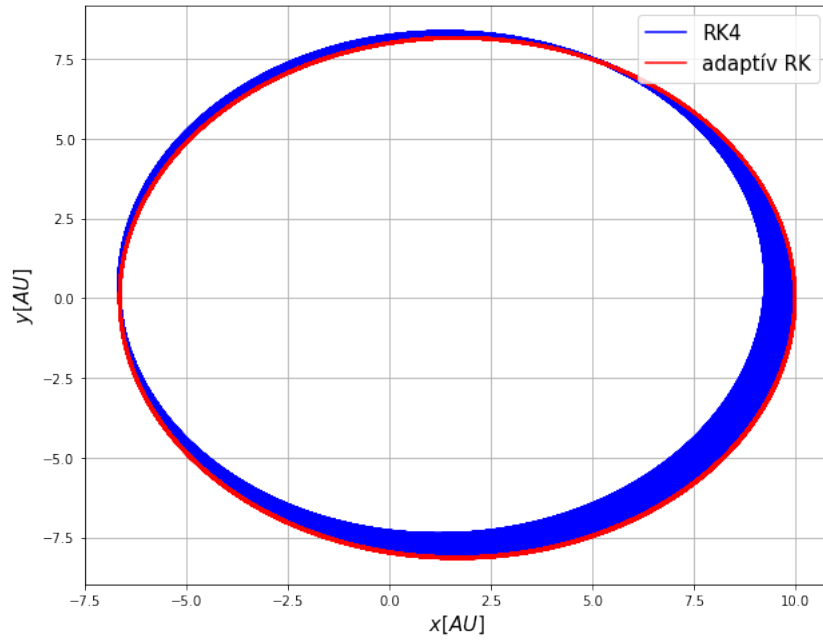
Ezen az ábrán a negyedrendű Runge-Kutta eredményei azért nem látszódnak, mert olyan mértékben átfednek az adaptív eredményeivel, hogy ilyen felbontáson nincs köztük különbség, így az egyik kitakarja a másikat.



2. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 0.1yr$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t = 0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.001-es adaptív pontosság esetén. A bal felső ábrán látható illesztett egyenes meredeksége  $-8.32455791 \cdot 10^{-8}$ .

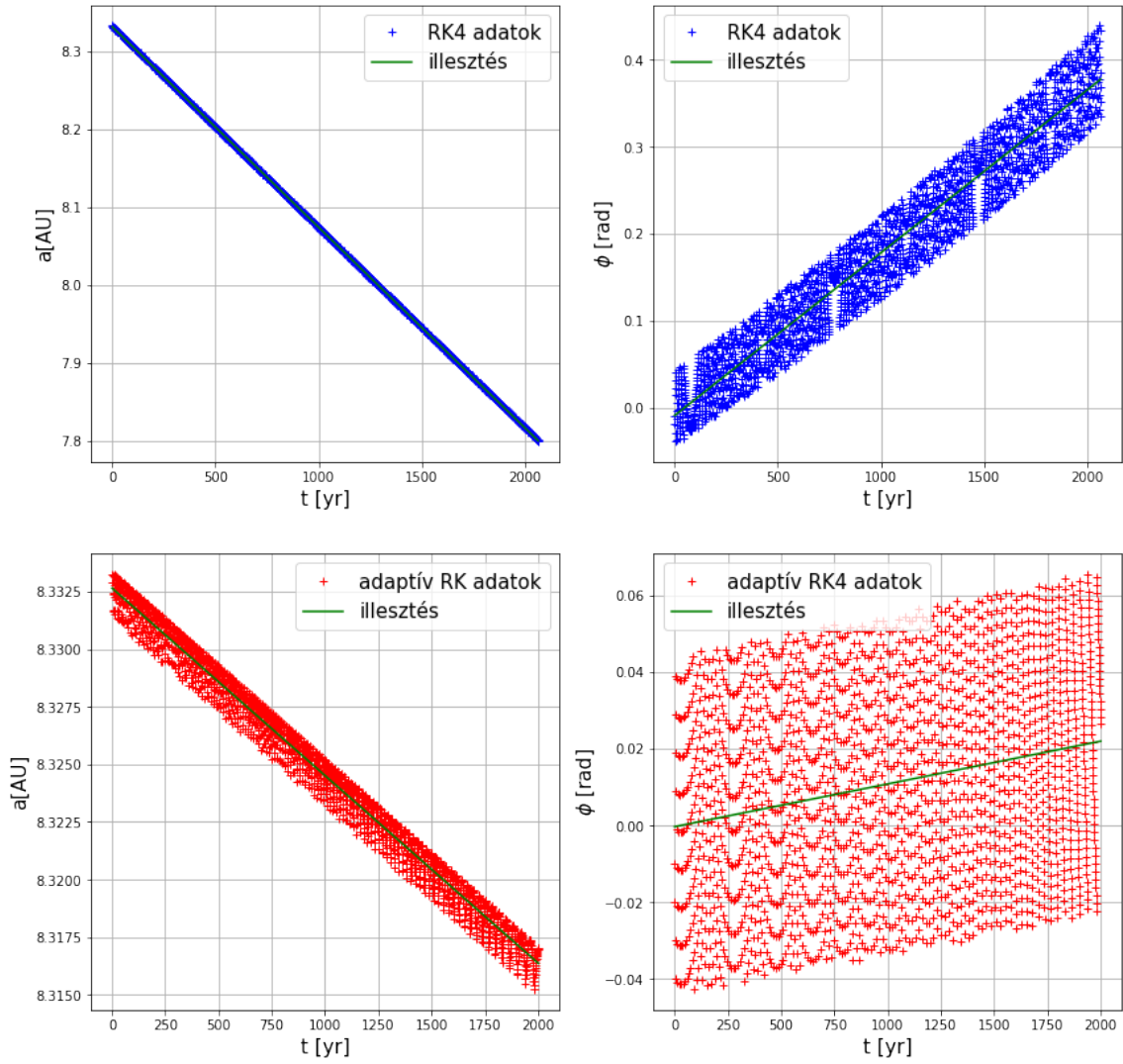
Mint ahogy az ábrákon is látszik úgy vettem, hogy egy periódus egy év. A fél nagytengely hosszára, illetve a nagytengely kezdeti értékhez képesti polárszög elmozdulására egyenest illesztettem, amely a legtöbb esetben jó közelítésnek tűnt a valódi nagytengelyhez tartozó polárszögre illetve hosszra vonatkozóan (amelyet a véges méretű lépésköz miatt nem tudunk közvetlenül vizsgálni).

A  $dt = 0.1yr$  volt a legkisebb lépéshossz, ahol mérhető változást észleltem a vizsgált értékeken. Az ábrán jól látható, hogy az adaptív Runge-Kutta stabilan tartja mind a nagytengely irányát, mind a fél nagytengely hosszát (ha van is eltérés, mérhetetlen), azonban a rögzített lépéshosszú módszer esetében a fél nagytengely hossza lassan, lineárisan az idő függvényében.



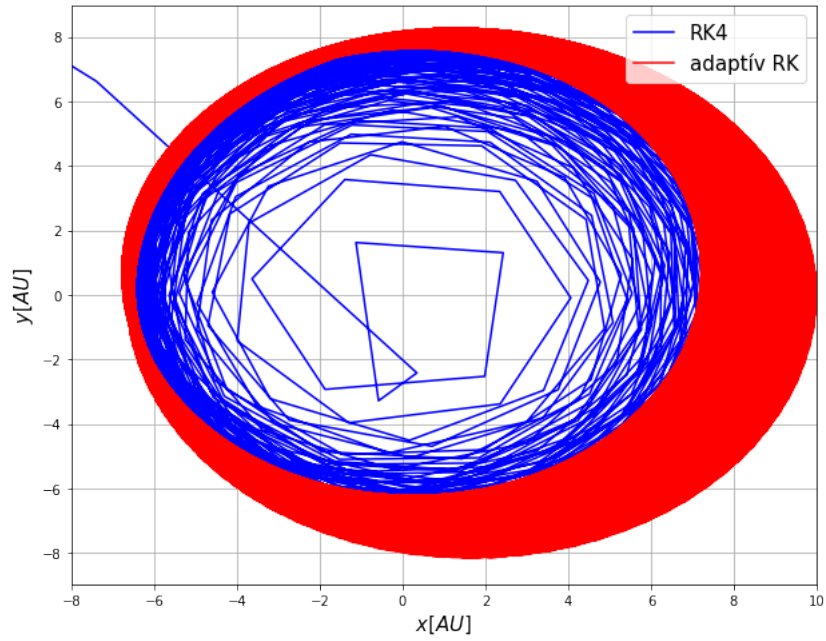
3. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 0.5yr$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t = 0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.0001-es adaptív pontosság esetén.

Itt, ötször nagyobb lépéshossz esetén már szemmel látható az ellipszispálya torzulása.



4. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 0.5$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t = 0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.0001-es adaptív pontosság esetén. Az illesztett egyenesek meredekségei rendre  $-2.57936751 \cdot 10^{-4}$ ,  $0.00018761$ ,  $-8.13630740 \cdot 10^{-6}$  és  $1.11340319 \cdot 10^{-5}$ .

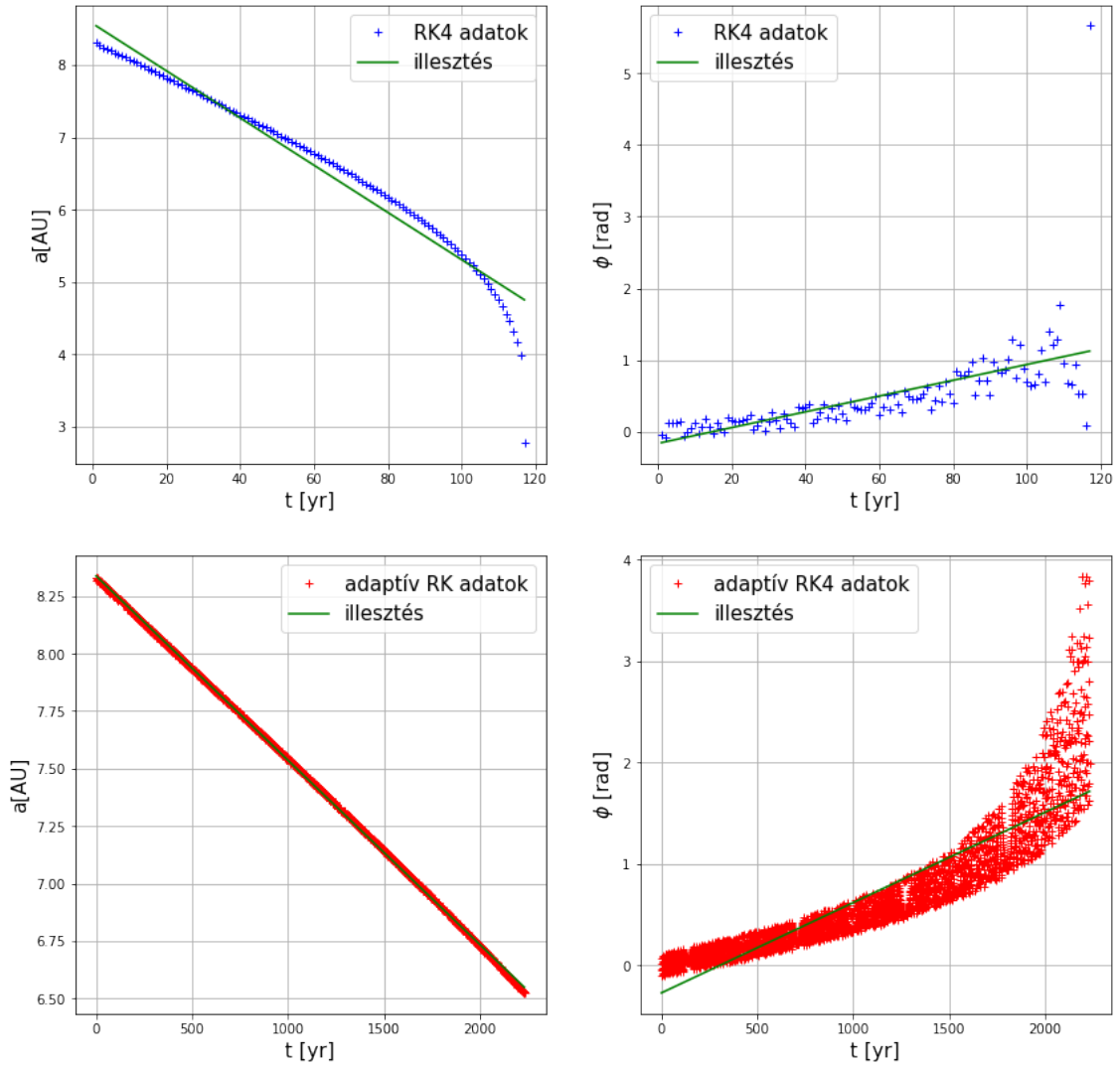
Ezen lépéshossz mellett már jóval nagyobb elmozdulásokat, trendeket láthatunk - szemre mind lineárisak, így jól illeszkedik rájuk az egyenes. Figyelemreméltó változást mutat az adaptív módszer is: bár a maximális lépéshossz ötször nagyobb lett, elméletileg tízszer pontosabbra lett állítva az a módszer, mégis romlott a módszer stabilitása az ábrák alapján.



5. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 1.25$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t = 0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.01-es adaptív pontosság esetén.

Már ezen ábrából is látszik, hogy ilyen nagy lépéshossz esetén egyik módszer sem nevezhető kifejezetten stabilnak. A negyedrendű Runge-Kutta által képzett ellipszis szétesik, és az adaptív módszer előállított pálya is erősen torzul.





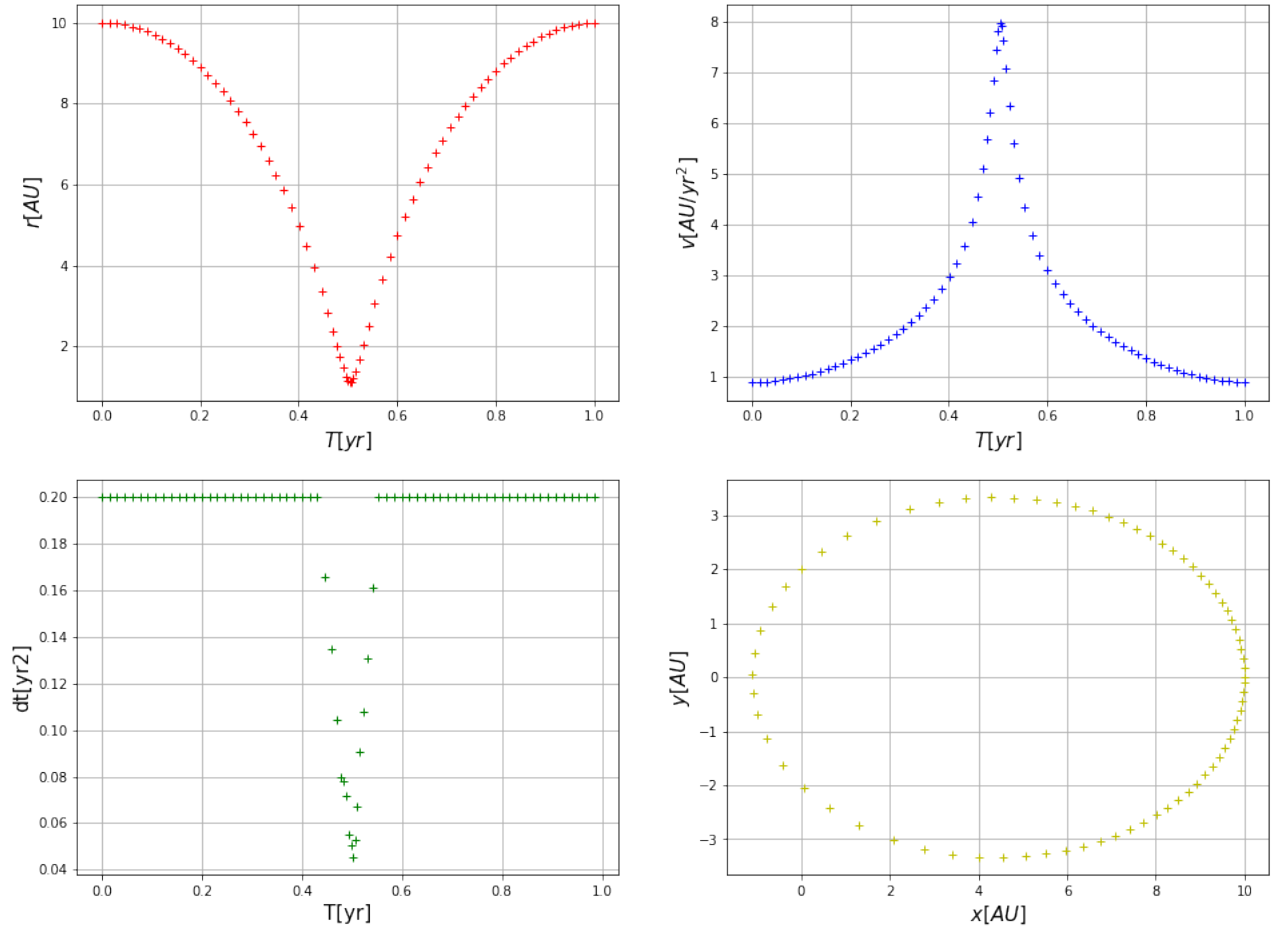
6. ábra. Negyedrendű és adaptív Runge-Kutta szimulációk eredményei  $dt = 1.25$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2$  excentritás,  $x(t=0) = 10AU$  kezdeti pozíció, 2000 periódus és 0.01-es adaptív pontosság esetén. Az illesztett egyenesek közül a bal alsó meredeksége:  $-8.02010271 \cdot 10^{-4}$ .

Ezen ábrákon látszik, hogy a négyből három adatsorra nem megfelelő a lineáris illesztés, továbbá hogy a rögzített lépéshosszú módszer ellipszise félig körbefordul mozgása során.

Rövid konklúzió: a nagytengelyhez tartozó polárszög ha megváltozott, az mindig a pozitív irányba történt - ez attól függ, hogy milyen irányú kezdősebességet adunk az égitestnek. A fél nagytengely nagysága vagy állandó volt, vagy csökkent - utóbbi oka egyszerűen a túl nagy lépésköz miatti energiavesztés volt, amely által az égitest egyre szűkebb és szűkebb pályára kényszerült.

## Második feladat

Itt az egyik részfeladat az volt, hogy vizsgáljuk meg az adaptív Runge-Kutta lépéshossz-változásait az égitest pályáján. A másik részfeladat szerint az adaptív és a rögzített lépéshosszú módszer futási idejét kell összehasonlítani azonos precizitás mellett.



7. ábra. Adaptív Runge-Kutta szimuláció eredményei  $dt = 0.2$  lépésköz,  $\epsilon = 0.8$  excentritás,  $x(t = 0) = 10 \text{ AU}$  kezdeti pozíció, egy periódus és 0.0001-es adaptív pontosság esetén ( $dt$  és  $T$  dimenziója itt nem azonos: mindkettő idő, de a prefixumaik különböznek).

A Kepler-törvények szerint minél közelebb van az égitest azon nagyobb tömegű testhez, amely körül kering, annál nagyobb lesz a sebessége. Az ábrákon az látszik, hogy a pálya nagy részén az algoritmus marad a maximális lépéshosszon, de amikor közel ér egymáshoz a két test, akkor korrigál, sokkal kisebbeket lép, mert drasztikusan megnő a sebesség.

Direkt nagyra választottam az excentritást, hogy lépéshossz-változások jobban látszódnának.

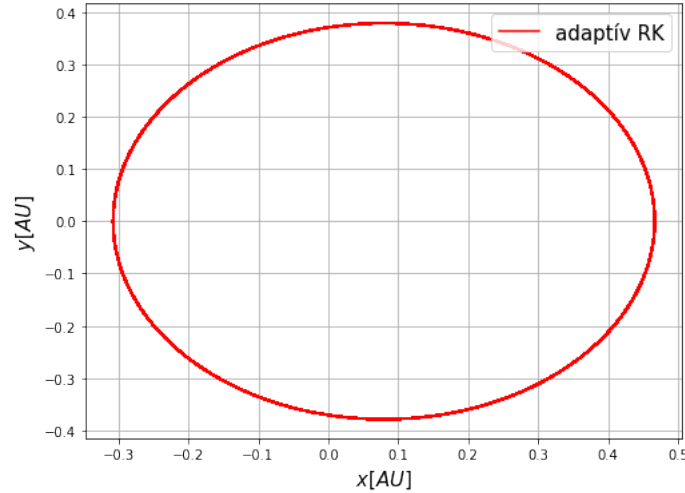
Időmérést is csináltam, itt a paraméterek a következők voltak:  $\epsilon = 0.8$  excentritás,  $x(t = 0) = 10 \text{ AU}$  kezdeti pozíció, egy periódus és 0.0001-es adaptív pontosság, és  $dt = 0.05$  az adaptív módszer, továbbá  $dt = 0.049$  az egyszerű negyedrendű Runge-Kutta esetében - így majdnem teljesen azonos lépésszámú lett a két szimuláció (2673 illetve 2620). A negyedrendű Runge-Kutta 690.588, míg az adaptív 1368.82 milliszekundumig futott - innen is látszik, hogy a beépített plusz programrészletek az adaptív módszerben több mint kétszeres futási időt eredményeznek akkor is, ha a körülmények nem igényelnek sok lépésváltoztatást.

### Harmadik feladat

Itt a Merkúr perihéliumának precesszióját kellett megvizsgálni úgy, hogy figyelembe vesszünk egy általános relativitáselméletből származó korrekciót:

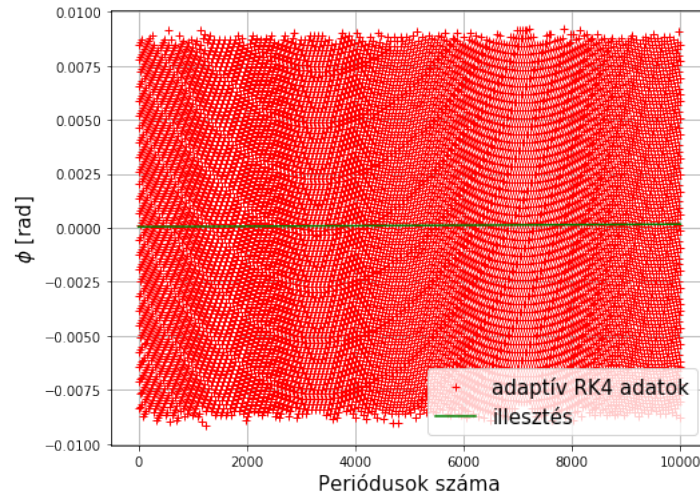
$$F = -G \frac{m_{Nap} m_{Merkr}}{r^2} \left( 1 + \frac{\alpha}{r^2} \right). \quad (14)$$

A programot átírtam ennek figyelembe vételére. Adaptív Runge-Kutta módszert alkalmaztam - azonban azt kellett tapasztalnom, hogy az én első feladatnál vázolt módszeremmel ilyen apró jelenséget nem lehet mérni a rendelkezésemre álló számítási kapacitással:



8. ábra. Adaptív Runge-Kutta szimuláció eredményei  $dt = 0.001$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2056$  excentritás,  $x(t = 0) = 0.46669835 AU$  kezdeti pozíció (Merkúr aphéliuma), 10000 periódus és 0.000001-es adaptív pontosság esetén.

Az ábrán látszik, hogy maga az algoritmus stabil, az energia ilyen sok periódus esetén sem szökik el látható érzékelhető mértékben.



9. ábra. Adaptív Runge-Kutta szimuláció eredményei  $dt = 0.001$  lépésköz,  $\epsilon = 0.2056$  excentritás,  $x(t = 0) = 0.46669835 AU$  kezdeti pozíció (Merkúr aphéliuma), 10000 periódus és 0.000001-es adaptív pontosság esetén.

Sajnos vagy még kisebb lépésköz, vagy több periódus kellene ahhoz, hogy pontos eredményt kapjak, de most csak egy ilyen hosszú szimulációra volt időm. Itt az illesztett egyenes meredeksége alapján a százévenkénti precessziós szögelfordulása az aphéliumnak 1.0562 szögmásodperc, ami durván negyvenede a valódi értéknek.

A hibának számos oka lehet, például a módszerem pontatlansága, vagy az, hogy a Merkúr tömegét azonosnak vettem a Föld tömegével, hiszen a Nap tömege úgylát hét nagyságrenddel nagyobb, ahhoz képest az eltérés elhanyagolható.

## 4. Összefoglalás

A példakód átdolgozása után megvizsgálásra kerültek különböző bolygó pályák, és rajtuk keresztül valamelyest a most használt differenciálegyenlet-megoldó algoritmusok is - vagyis a negyedrendű és az adaptív Runge-Kutta. Egy általam kitalált módszerrel számítottam ki a pályák nagytengelyeinek szögelfordulását és hosszváltozását az idő függvényében, és ezen módszerrel próbáltam meg a Merkúr perihéliumának precesszióját is meghatározni, de itt már nem jártam sikerrel, mert ez a módszer ilyen aránylag kis effektusok meghatározására már nem alkalmas.

A negyedik feladatra már sajnos nem maradt időm, de szívesen pótolnám később, amennyiben lesz rá lehetőség.