4. Húr

Csillag Barnabás Gellért (COTNU3)

2020. április 10.

1. Elméleti háttér

Jelen jegyzőkönyv egy kifeszített húr mozgásának szimulálására írt program által szolgáltatott eredményeket hivatott magába foglalni.

Egy kifeszített két fal közé kifeszített, L hosszúságú húrra ható erők összege a következő:

$$\sum F_y = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

ahol ρ a húr szál menti sűrűsége, $y(x,t)$ pedig a helytől és az időtől függő kitérése. Ebből a húr alap szintjétől való eltérés szögét bevezetve néhány átalakítással kihozható a mozgásegyenlet (amely egy hullámegyenlet):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{2}$$

ahol $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ a hullám sebessége, T pedig a húr feszültsége, amely a nyugalmi helyzet felé hat.

A megoldás akkor egyértelmű, ha megfelelő kezdeti feltételekkel van ellátva a rendszer. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a húr $f(x)$ kitérített állapotból indul, ezzel megadtuk a kezdeti helyet, és nyugalomból, azaz kezdetben nincs sebessége - ezzel y kezdeti deriváltja is ismert:

$$y(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

A megoldás során feltesszük, hogy a húr végei tökéletesen rögzítve vannak a falakhoz, így a peremfeltételek a következők:

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0 \quad \forall t - re. \tag{4}$$

Az eddig rögzített feltételekkel a differenciálegyenlet analitikusan megoldható. Tapasztalati tény, hogy az úgynevezett normál módusokban állóhullámok vannak, vagyis a hely- és időkoordináta szétválaszthat$y(x,t)$-ben, így az egyenlet eredménye a változók szeparálásának segítségével meghatározható. A végeredmény:

$$y(x,t) = \sum_n B_n \cdot sin(k_n x) \cdot \cos(c k_n t), \tag{5}$$

ahol $k_n = \frac{\pi(n+1)}{L}$.

Ezen megoldással az a probléma, hogy általános esetben ez egy Fourier-sor, amellyel a gyakorlatban csak közelíteni lehet az elméleti megoldást annak függvényében, hogy meddig megyünk el a sorfejtésben. Így tehát néhány egyedi $f(x)$ kezdőfeltétel esetén, amikor egy bizonyos n felett minden tag nulla, jól alkalmazható, de ha a sornak végtelen sok tagja van, akkor érdemesebb lehet valamilyen numerikus módszerrel megoldani a problémát.

2. A megoldás módszerei

A numerikus megoldáshoz először is felveszünk egy hely-idő rácsot Δx, Δt felosztásokkal:

$$(x, t) \to (i\Delta x, j\Delta t). \tag{6}$$

Középponti differenciákkal dolgozunk, így tehát a deriválások a következőképpen alakulnak:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_{i,j-1} + y_{i,j+1} - 2 \cdot y_{i,j}}{(\Delta t)^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i-1,j} + y_{i+1,j} - 2 \cdot y_{i,j}}{(\Delta x)^2}. \tag{8}$$

Ezek alapján felírható a diszkretizált hullámegyenlet, majd algebrai úton levezethető belőle a következő kifejezés, amely alapján a szimuláció időben léptethető lesz:

$$y_{i,j+1} = 2 \cdot y_{i,j} - y_{i,j-1} + \frac{c}{c'} \cdot (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2 \cdot y_{i,j}), \tag{9}$$

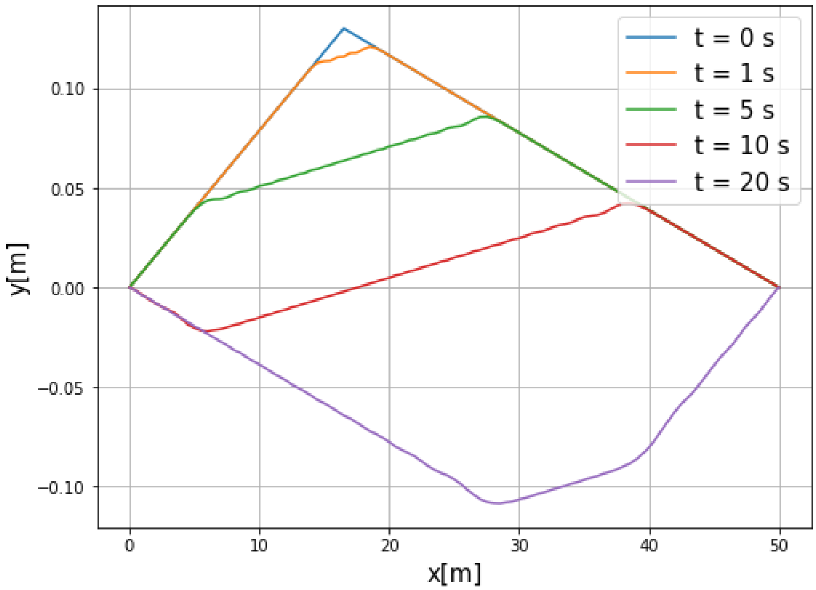
ahol $c' = \frac{\Delta x}{\delta t}$, amely egy, a szimuláció stabilitását jellemző paraméter.

Az itt felvázolt megoldási módszert gyakran *leapfrog* algoritmusnak nevezik.

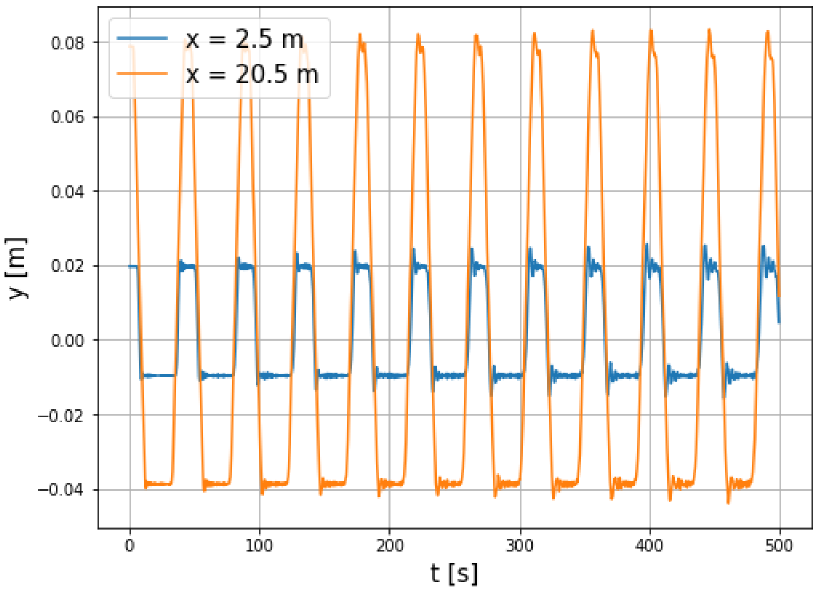
3. Eredmények

3.1. Ábrák és animáció a program működéséről

Az általam írt program a fentebb vázolt algoritmust valósítja meg. A kezdeti feltétel pendítés volt $x = x_0$ helyen, vagyis a nulladik időpillanatban a húr $x = 0m$-től $x = x_0$-ig egy pozitív meredekségű lineáris szakaszt formáz, és ugyanígy egy negatív meredekségű szakasz alakját veszi fel $x = x_0$-tól $x = L$-ig, mint ahogy az a következő ábrán is látható.



1. ábra. Leapfrog algoritmussal szimulált húr alakja adott időpontokban $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $x_0 = \frac{L}{3}$, $A = 0.13m$ (ami a kezdeti kitérés maximuma) paraméterek mellett.



2. ábra. Leapfrog algoritmussal szimulált húr egy-egy pontjának mozgása $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $x_0 = \frac{L}{3}$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

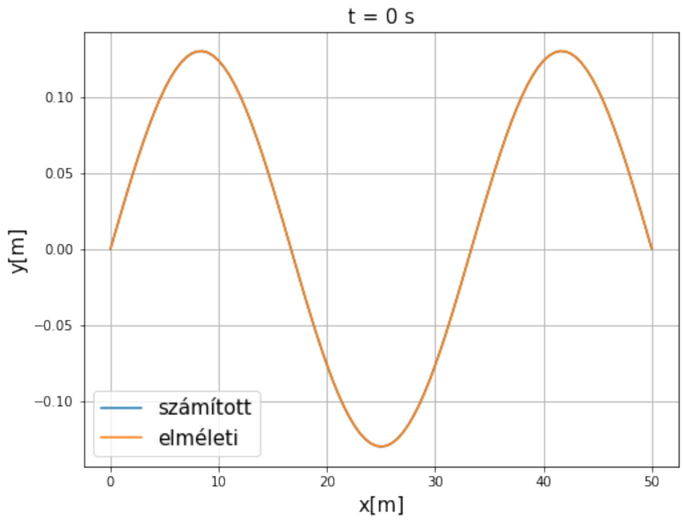
A 2. ábra egészen olyan, mintha Fourier-sorfejtéssel próbálkoztam volna valamilyen görbéket előállítani. Ezen kis fluktuációkat, amelyeket mind az ábrákon, mind az animációkon láthatunk, valószínűleg minimalizálni lehet a stabilitási paraméter (c') megfelelő beállításával.

A program kódját jelen jegyzőkönyvvel azonos mappába tettem. Ugyanitt található az animáció is. Mivel valamilyen rejtélyes okból a jupyter notebook-ban a matplotlib.animation.FuncAnimation rutinjának esetében az mp4 formátomú mentés nem működött, ezért GIF-ként voltam kénytelen elmenteni az animációt. A hozzá tartozó szimuláció paraméterei: $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $x_0 = \frac{L}{3}$, $A = 0.13m$.

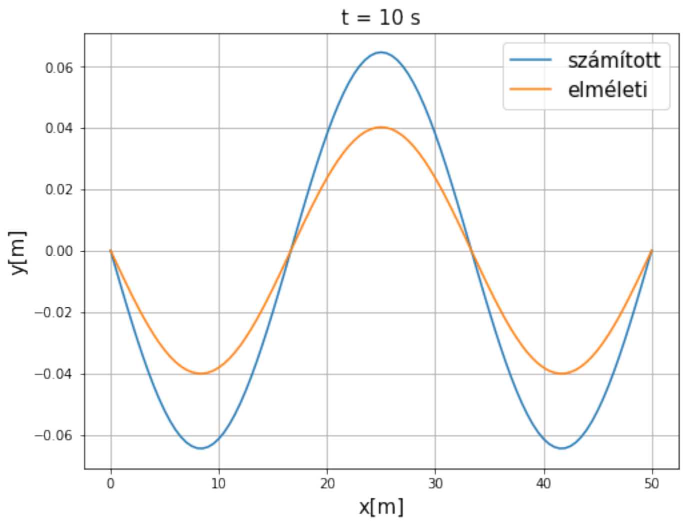
3.2. Összehasonlítás az analitikus megoldással állóhullám esetben

Állóhullám esetén az analitikus megoldásban a Fourier-sornak csak egy tagja szerepel. Itt én az $n = 2$-es módust választottam, így az analitikus megoldás alakja a következő volt:

$$y(x,t) = A \cdot sin(3x\pi/L) \cdot cos(3xc\pi/L). \tag{10}$$

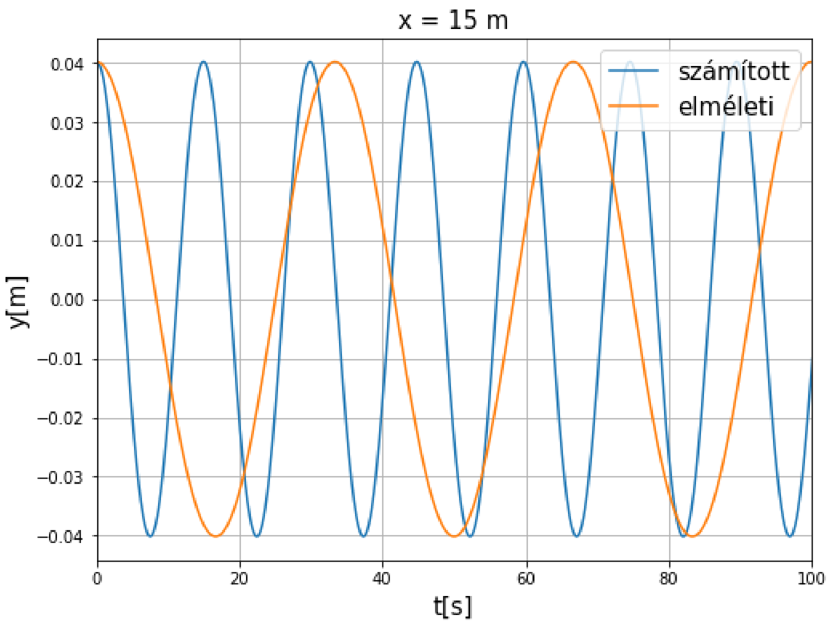


3. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás, illetve az analitikus megoldás összehasonlítása a húr alakjának szempontjából $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.



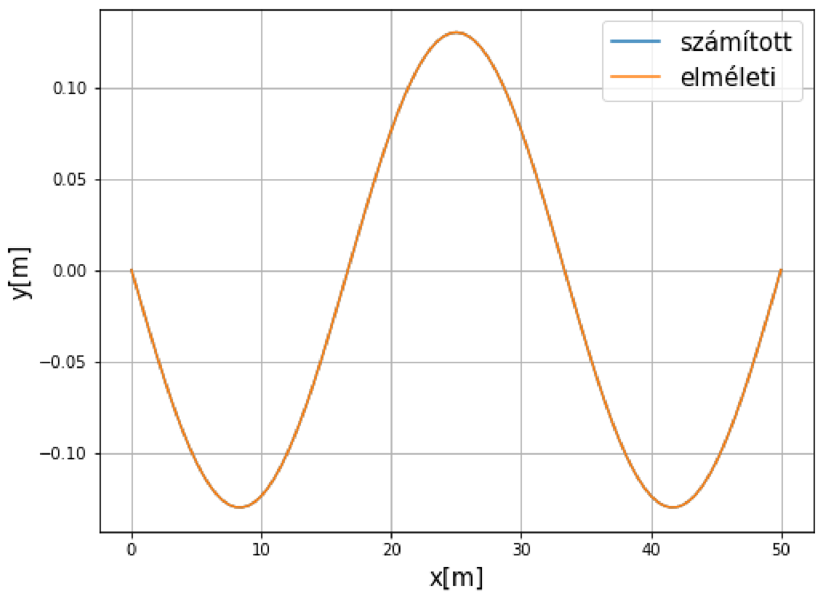
4. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás, illetve az analitikus megoldás összehasonlítása a húr alakjának szempontjából $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Láthatóan nem egyezik a két megoldás, holott ugyanazon helyről indultak. Mivel az alakok ugyanazok (mindkettő $n = 2$-es módusú állóhullám), arra tudok következtetni, hogy az analitikus megoldás esetében más a húr sebessége, mint a numerikus megoldás esetében. Hasonlítsuk össze a húr egy pontjának kitérését az idő függvényében!



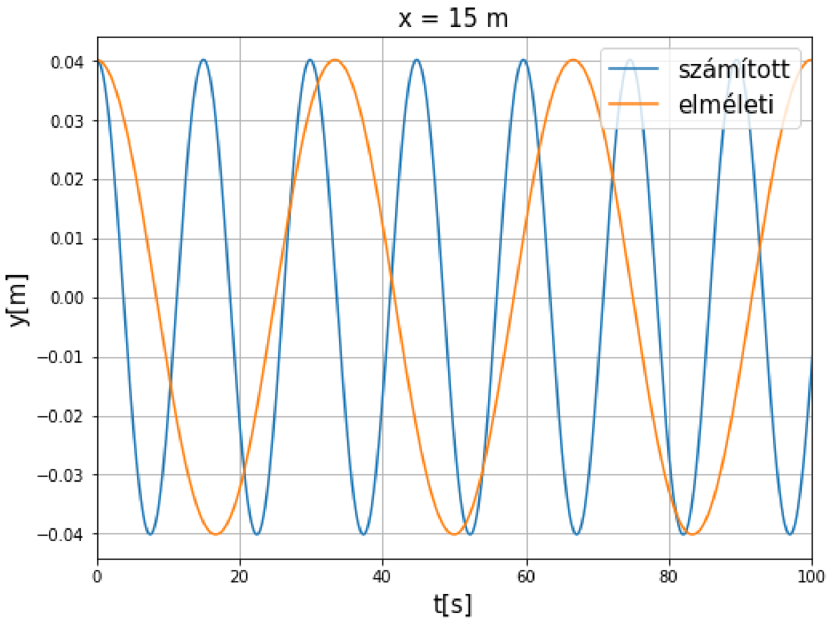
5. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás, illetve az analitikus megoldás összehasonlítása a húr egy pontjának mozgása szempontjából $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Egyértelműen cos görbe mindkettő, ahogy az várható volt, ugyanakkor láthatóan a kalkulált görbének jóval nagyobb a frekvenciája, vagyis nagyobb átlagsebességgel mozog ott a húr. Egyetlen dologra tudok gondolni: valószínűleg a formális sebesség, c' a húr tényleges sebességét is befolyásolja. Ezért megváltoztatom Δt-t $0.5s$-ra, hogy $c' = 1\frac{m}{s}$ legyen.



6. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás, illetve az analitikus megoldás összehasonlítása a húr alakjának szempontjából $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.5s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Mivel az ábrán a két húr teljesen átfed, feltételezhetően ilyen c' mellett nagyon kicsit az eltérés az analitikus és a numerikus megoldás között.

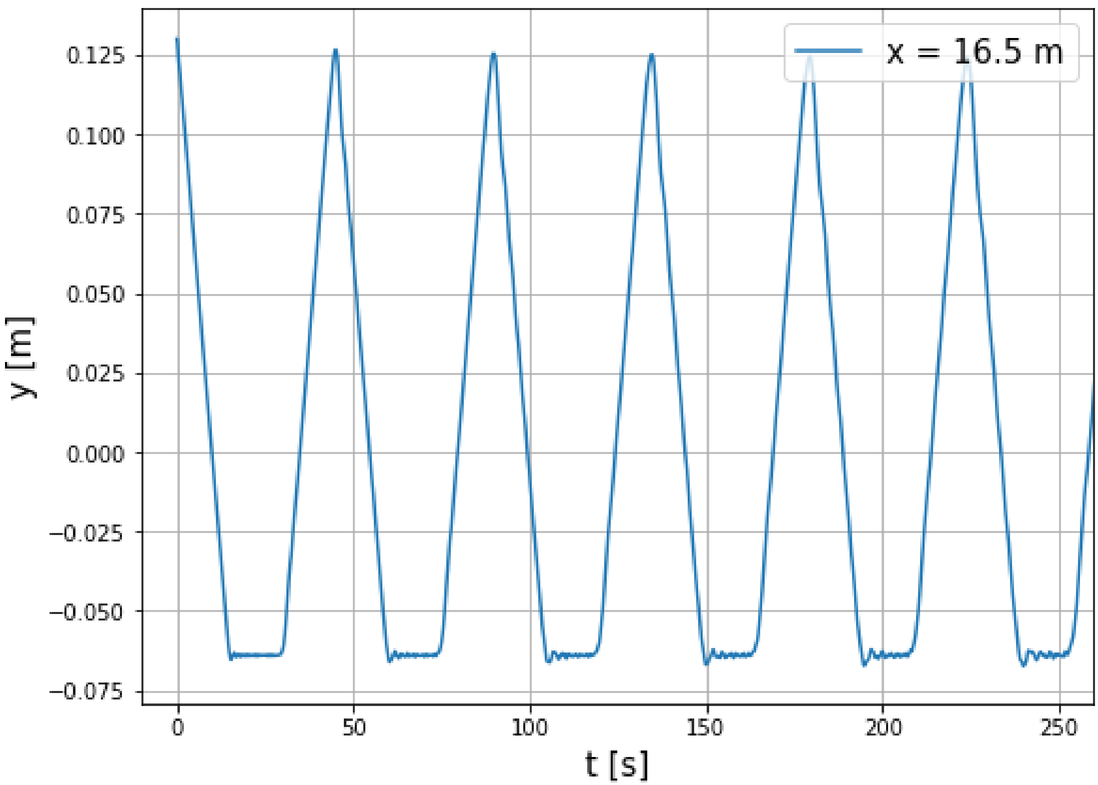


7. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás, illetve az analitikus megoldás összehasonlítása a húr egy pontjának mozgása szempontjából $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.5s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

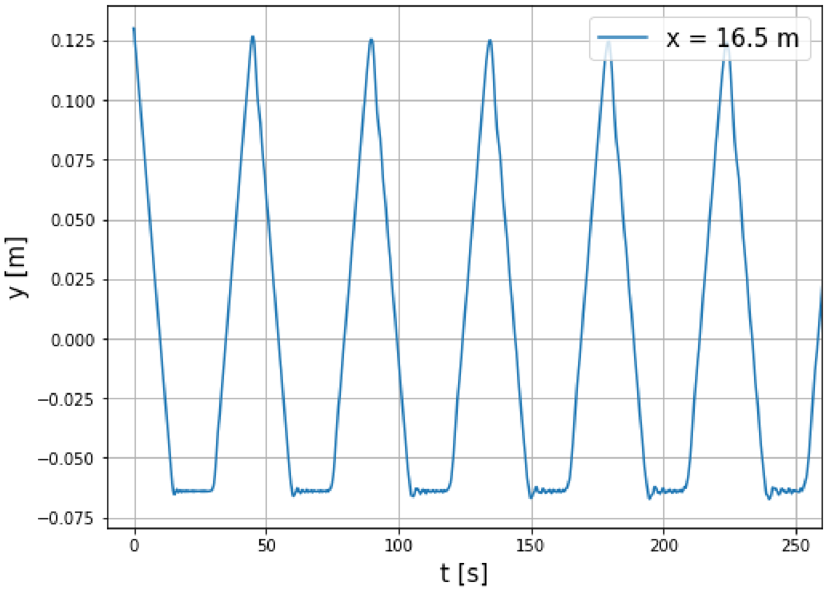
Itt már nem fed át teljesen a két görbe, de nagyon minimális az eltérés, tehát majdnem ugyanazt az eredményt adja $c' = 1\frac{m}{s}$ esetén az analitikus és a numerikus módszer. Ebből az a következtetés vonható le, hogy a leapfrog algoritmus stabilitása $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx 1\frac{m}{s} = c$ környékén ad jó eredményt, és ha ez a formális sebesség sokkal nagyobb, akkor a húr pontjai nagyobb frekvenciával fognak rezegni, ezáltal feltehetően a hullámok is gyorsabban terjednek, mint ahogy a kezdőfeltételek alapján kellene, viszont a periodikus mozgás által bejárt térbeli pálya ettől nem változik.

3.3. A hullám terjedési sebességének becslése

Itt az x_0 helyen való pendítés kezdőfeltételét alkalmaztam csakúgy, mint az első feladatnál. A hullám sebességét úgy becsültem, hogy az $y(x_0, t)$ függvény maximumainak időbeni távolságát átlagoltam, ez kiadta azt az időt, amíg a hullám oda-vissza végigfut a húron. Így a $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $x_0 = \frac{L}{3}$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett az eredmény $c_b = 2.2311\frac{m}{s}$ lett. Ez az érték több mint kétszerese c-nek. Az eltérés oka minden bizonnyal az, hogy c' megint túl nagy, és a szimuláció nem kellően stabil. Ezért lefuttattam egy ugyanilyet $\Delta t = 0.1s$, $\Delta x = 0.1m$ paraméterek mellett.



8. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr egy pontjának mozgása $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

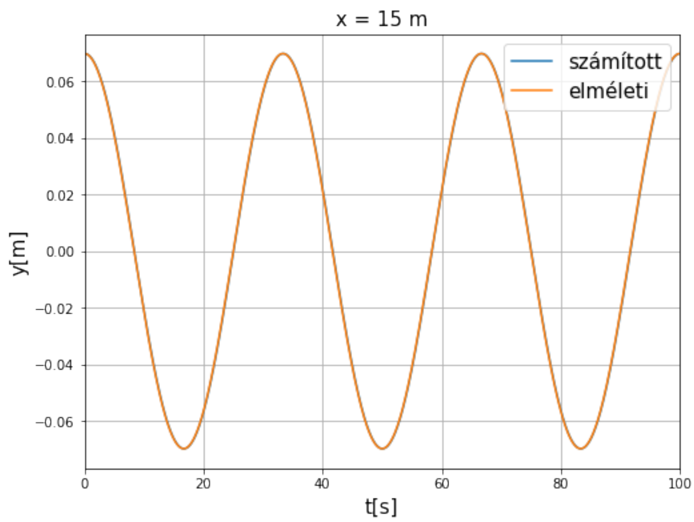


9. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr egy pontjának mozgása $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Ezen paraméterek mellett a hullám kiszámított sebessége $c_b = 1.0022\frac{m}{s}$ lett, ami már egészen közel van a betáplált sebességhez. Ezen eredmény is azon megállapításom támasztja alá, hogy az algoritmus $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx 1\frac{m}{s} = c$ esetén működik a leginkább rendeltetésszerűen.

3.4. Stabilitásvizsgálat

Az eddigiek alapján azt tudjuk, hogy akkor működik a leginkább rendeltetésszerűen a rendszer, ha $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx 1\frac{m}{s} = c$. De érdekes lehet, hogy mi történik akkor, ha $c' = c$, de mondjuk $\Delta x > \Delta t$. Vizsgáljunk egy ilyen esetet egy állóhullám kezdőfeltétellel, hogy össze lehessen hasonlítani a szimuláció eredményét az analitikus megoldással:



10. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr egy pontjának mozgása $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1s$, $c = 5\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Egyértelműen látszik, hogy a szimuláció ekkor is szinte teljesen átfed az analitikus megoldással. Ebből arra következtetnék, hogy a rendszer általános esetben $c' = c$ paraméterekkel működik a legstabilabban.

Megnézhetjük, hogy mi történik, ha $c' = 1\frac{m}{s}$, de mondjuk $c = 5\frac{m}{s}$. Ez esetben viszont a szimulált húr kitérésének értékei elszálltak a végtelenbe, tehát egyáltalán nem volt stabil az algoritmus. Ugyanezt tapasztaltam $c' = 1\frac{m}{s}$, $c = 1.2\frac{m}{s}$ esetén is.

Azt már az előző feladatban láttuk, hogy $c = c'$ esetén nem csak a húrok sebessége, de a hullámok terjedési sebessége is jó közelítéssel megegyezik az analitikus és a numerikus megoldás esetében. Így egyetlen paraméter-területet, a $c < c'$ tartományt van értelme még jobban feltérképezni (hiszen a $c > c'$ esetet nem nagyon lehet vizsgálni). Ezt úgy tettem meg, hogy különböző c', c értékeknél megmértem a hullámok terjedési sebességét pendítési kezdőállapotból indulva, ugyanúgy mint a hármas feladatban. Legyen s a hullámok terjedési sebessége a szimulált húron:

1. táblázat. A hullámok becsült terjedési sebessége különböző paraméterek mellett.

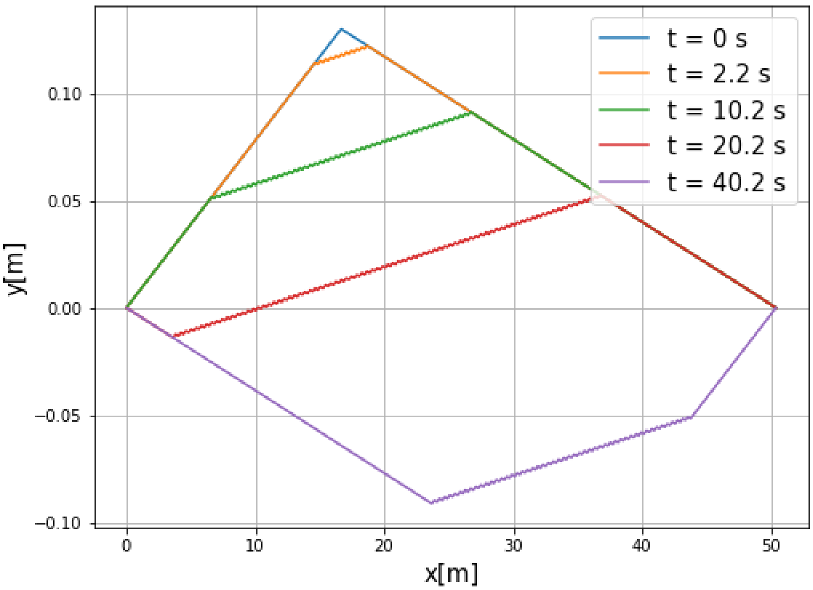
Δt	Δx	$c'[m/s]$	$c[m/s]$	$s[m/s]$
0.5	0.5	1	1	1.0022
0.1	0.5	5	0.5	0.3905
0.1	0.2	2	0.9	3.4247
0.1	0.4	4	1.2	1.025

Mivel ezek csak becslések, ezért messzemenő következtetéseket nem feltétlenül kell belőlük levonni - mindenesetre én nem látok ezen táblázat adataiban különösebb rendszert.

Összefoglalásul: ha $c > c'$, a szimuláció numerikusan instabillá válik, és szétesik. Ha $c < c'$, akkor a szimuláció ugyan stabilan le tud futni, de pontatlan eredményeket ad. Akkor a leghitelesebb az eredmény, és egyszerre stabil a szimuláció, ha $c = c'$. Amennyiben egy adott helyzetben pontosítani szeretnénk az eredményen, úgy ennek tükrében csak úgy lehet, ha Δt, Δx értékét ugyanakkorán tartjuk.

3.5. Linearitás vizsgálata

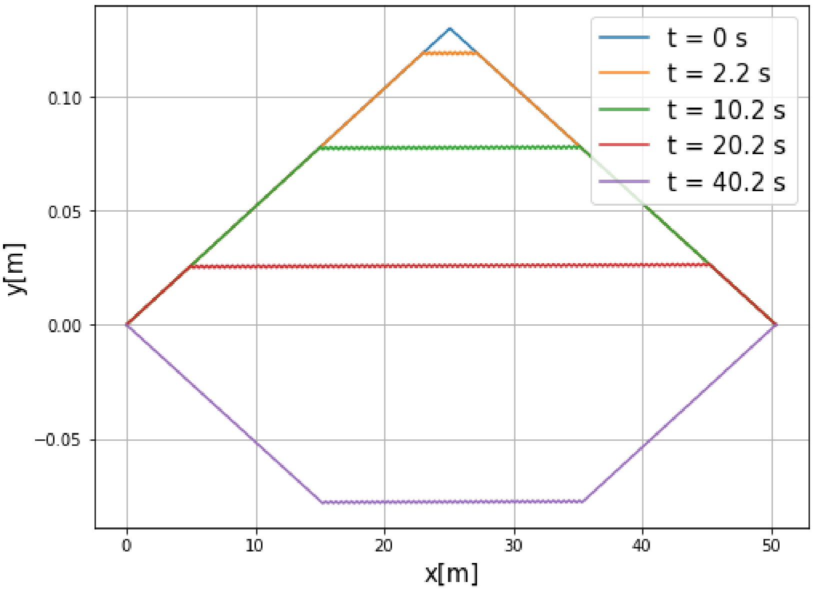
A leapfrog algoritmus linearitásának ellenőrzésére először lefuttattam külön-külön, egy $x_0 = 16.5m$ és $x_0 = 25m$ paraméterekkel ellátott pendítéses kezdőfeltételű szimulációt, majd két kezdő kitérés összegét adtam meg kezdeti feltételnek, és úgy is kiszámítottam a programmal a húr mozgását. Ezt követően ábrázoltam a két különböző kezdőfeltétellel kapott eredményt, majd a az első két eredmény kitéréseit összeadtam, és egy ábrára tettem a kombinált kezdőfeltételű szimuláció eredményeivel. Amennyiben a program jól van megírva, és az eredményei tényleg ekvivalensek az (5)-ös képletnél látható Fourier sorral, úgy a kezdőfeltételeket tekintve lineárisnak kellene lennie. Vagyis azt várom, hogy azon a képen, ahol együtt ábrázolom az összeadott kitéréseket, illetve a kombinált kezdőfeltétellel kapott kitéréseket, csak egy görbét lássak, hiszen ez azt jelentené, hogy numerikus hibahatáron belül az eredmények megegyeznek, és a program a kezdőfeltételeket tekintve lineáris.



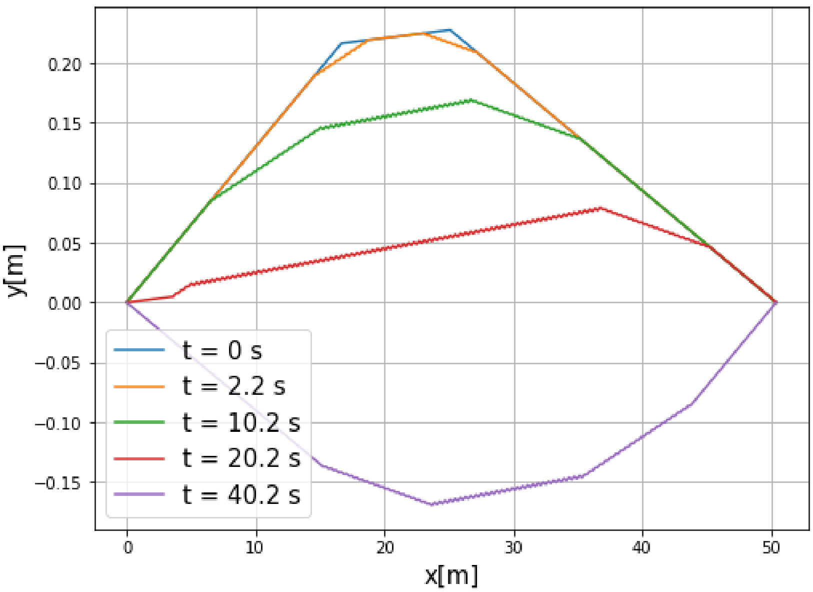
11. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr alakja adott időpontokban $x_0 = 16.5m$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.2s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

$c' = 1\frac{m}{a} = c$ paraméter-beállításokat alkalmaztam ebben a feladatban, mert az a tapasztalataim alapján biztosan stabilan működik.

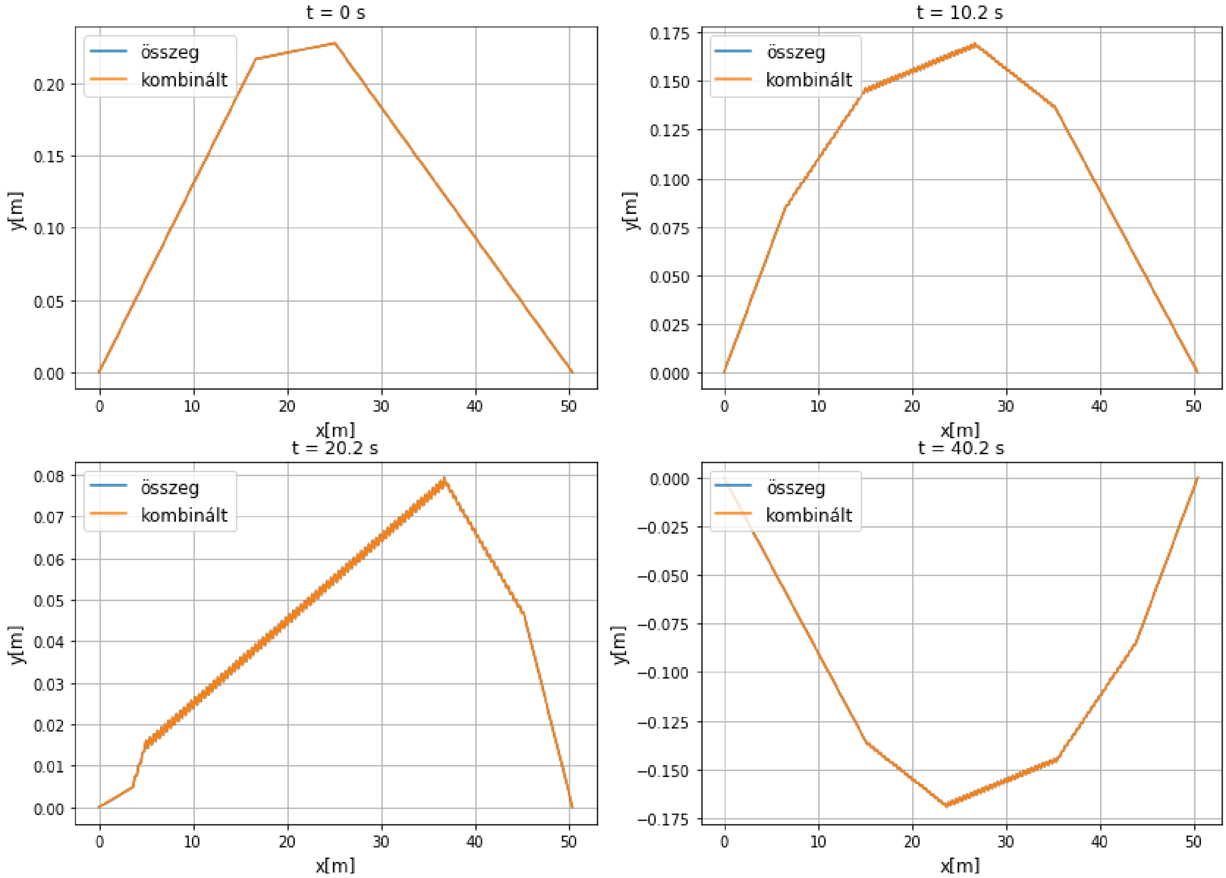
Jól kivehető az ábrán, hogy ahogy lejjebb vettem a térbeli felosztást az első feladathoz képest, úgy a húr fluktuációi is kisebbek lettek.



12. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr alakja adott időpontokban $x_0 = 25m$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.2s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

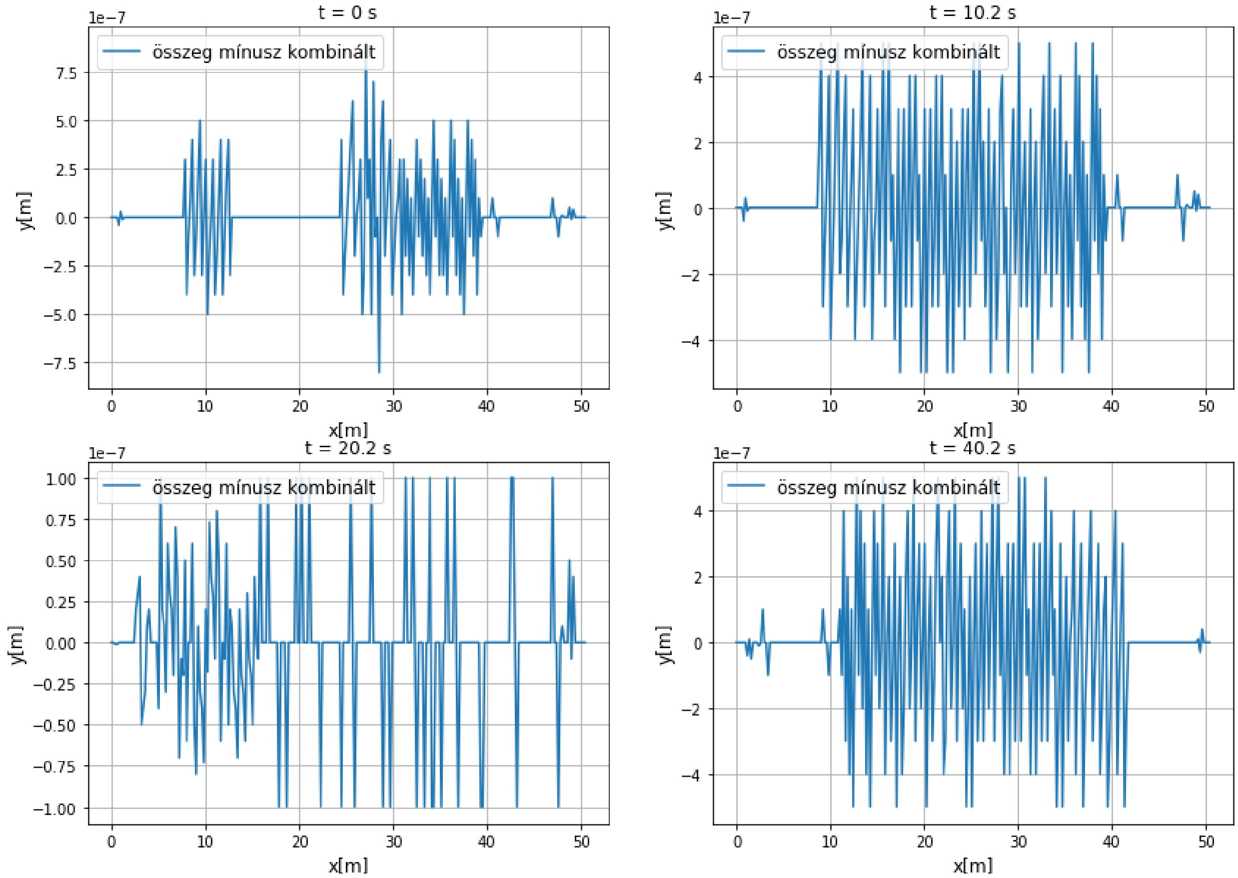


13. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr alakja adott időpontokban kombinált kezdőfeltételekkel $x_{01} = 16.5m$, $x_{02} = 25m$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.2s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.



14. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén a húr alakja adott időpontokban kombinált kezdőfeltételekkel, és a két külön szimuláció eredményeként létrejött húr alakja $x_{01} = 16.5m$, $x_{02} = 25m$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.2s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

A két görbe szemlátomást teljesen átfed. Vizsgáljuk meg a kitérések különbségét!



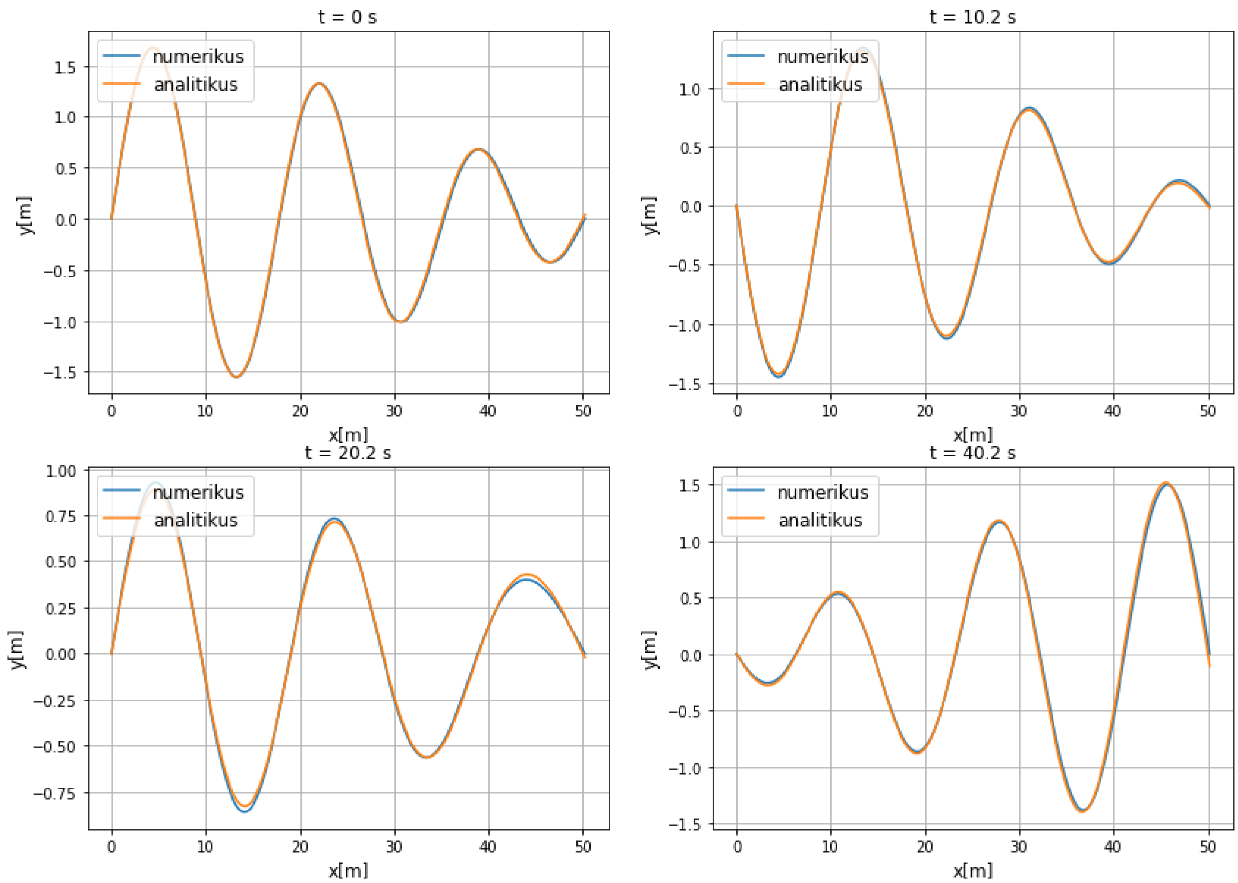
15. ábra. A leapfrog algoritmussal készített megoldás esetén adott időpontokban kombinált kezdőfeltételekkel létrejött húr alakjának, és a két külön szimuláció eredményeként létrejött húr alakjának különbsége $x_{01} = 16.5m$, $x_{02} = 25m$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.2s$, $c = 1\frac{m}{s}$, $L = 50m$, $A = 0.13m$ paraméterek mellett.

Az ábrákon azt láthatjuk, hogy adott időpontokban a két húr kitéréseinek különbsége $10^{-7}m$ nagyságrendű, vagyis nagyon kicsi a húrok méretéhez, illetve a térbeli rácshoz képest. Ez alapján kijelenthetjük, hogy teljesül a linearitás.

A rendszer linearitását egy másik módszerrel is meg lehet vizsgálni. Ha két közeli normálmódust adunk össze az előző módon (a kombinált kezdőfeltétellel való futtatással), és megvizsgáljuk a húr alakját adott időpillanatokban, továbbá ezt összehasonlítjuk az analitikus megoldással, akkor ezzel ismét tesztelhetjük, hogy teljesül-e a linearitás. A változatosság kedvéért a kitérések összeadásakor most két külön számmal meg is szorzom a kitéréseket, hogy minél általánosabb eredményt kapjak. Így tehát az analitikus megoldás alakja jelen esetben:

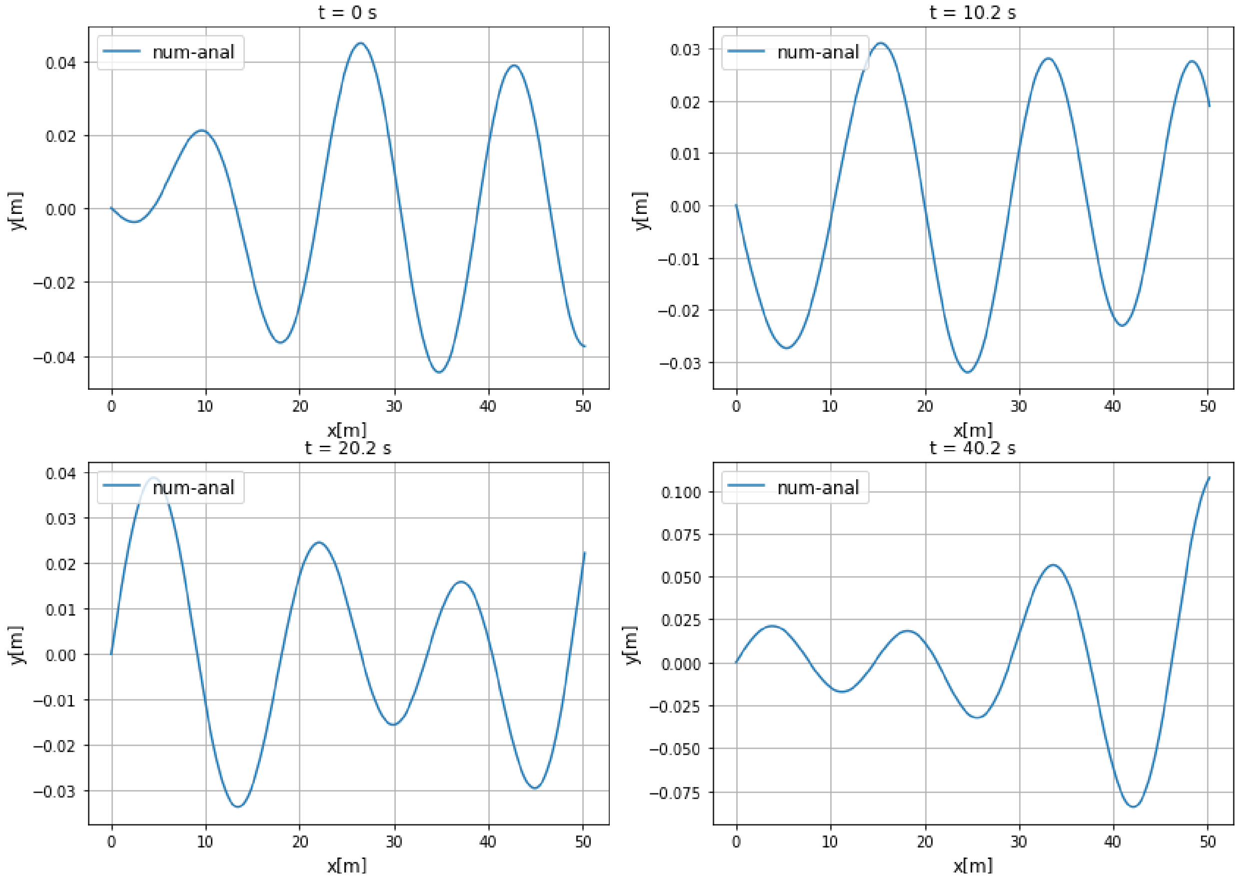
$$y(x,t) = a \cdot A \cdot sin(k_n x) \cdot cos(ck_n t) + b \cdot A \cdot sin(k_m x) \cdot cos(ck_m t), \tag{11}$$

ahol az én paraméter beállításomban $n = 4$, $a = 5$, $m = 5$, $b = 8$, $A = 0.13m$, $L = 50m$, ás a szimuláció paraméterei is ugyanezek, kiegészülve a $\Delta t = 0.2s$, $\Delta x = 0.2m$ rácsparaméterekkel.



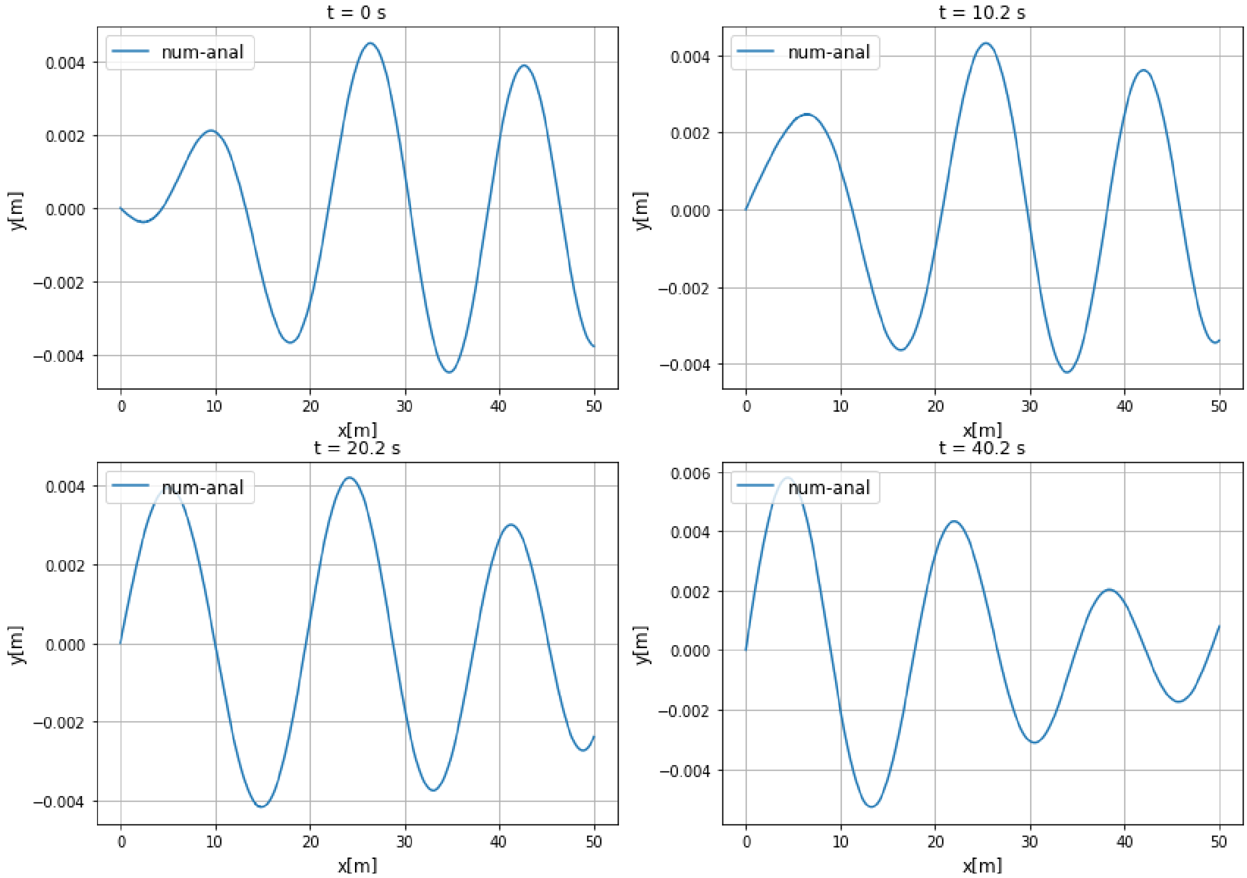
16. ábra. Az analitikus és a numerikus megoldás eredményeinek összehasonlítása a fenti paraméterek, illetve kezdőfeltételek mellett.

Itt látható némi eltérés a két görbe között. Ahhoz, hogy pontosabb képet kapjunk, vizsgáljuk meg a görbék különbségét!



17. ábra. Az analitikus és a numerikus megoldás eredményeinek különbsége.

Látható, hogy a különbségek a rácsparaméterek nagyságrendjébe esnek - vagyis a linearitás itt is teljesül, és a különbséget csak a rács véges felbontása okozza. Hogy ezt bizonyítsam, felvettem egy nagyságrenddel részletesebb felbontású, $\Delta t = 0.02s$, $\Delta x = 0.02m$ paraméterekkel ellátott rácsot, és ábrázoltam ez esetben is az analitikus illetve a numerikus megoldások különbségét.



18. ábra. Az analitikus és a numerikus megoldás eredményeinek különbsége a fenti paraméterek, illetve kezdőfeltételek mellett.

Látható, hogy itt az eltérés nagyságrendje már egyel kisebb, mint a rácsparamétereké. Ez azt jelent, hogy a numerikus hiba nem a rácsparaméterek nagyságának átlagától függ lineárisan, hanem valamilyen bonyolultabb összefüggés van. Mindenesetre ez bizonyítja, hogy az eltérés csak numerikus hiba, és hogy a szimulációs program kezdőfeltételeinek esetében valóban teljesül a linearitás elve.

4. Összefoglalás

Írtam egy programot egy egy dimenziós, kifeszített, súrlódásmentes húr mozgásának szimulációjára. Egy esetben animációt is készítettem az eredményekről. Egy normálmódusnak megfelelő kezdeti feltétel esetén összehasonlítottam a mozgásegyenlet analitikus és numerikus megoldását. A szimuláció eredményei alapján megbecsültem két paraméter beállításnál a húron terjedő hullámok sebességét. Különböző c', Δt, Δx, c beállításokat megvizsgálva arra jutottam, hogy $c = c'$ esetén ad a kezdőfeltételek alapján elvárható megoldást a szimuláció, és ekkor stabilan is működi, $c > c'$ esetén a szimuláció numerikusan instabillá válik adott időn belül, vagyis a kitérések értékei elszállnak a végtelenbe, illetve $c < c'$ esetén a szimuláció stabilan lefut, de a húr és a hullámok sebessége nagyobb lesz kezdőfeltételek alapján várhatónál, így nem megbízható eredményt kapunk.

Mindezek után feltérképezés gyanánt megbecsültem különböző c', Δt, Δx, c beállítások mellett a hullámok terjedési sebességét. Végül megvizsgáltam, hogy a szimuláció lineárisan viselkedik a kezdőfeltételek tekintetében. Ezt két különböző kezdőfeltételekkel ellátott szimuláció összeadásának, illetve a kezdőfeltételek kombinálásával futtatott szimuláció eredményének összehasonlításával hajtottam végre, és azt találtam, hogy numerikus hibán belül teljesül a linearitás. Ezen eredményemet ellenőriztem két közeli normálmódus lineáris kombinációjának vizsgálatával úgy, hogy ennek megfelelő kezdőfeltételeket adtam a szimulációnak, majd az eredményeket összehasonlítottam az analitkus megoldással. Itt is arra jutottam, hogy a szimuláció a kezdőfeltételek tekintetében lineáris.