# 1. Harmonikus oszcillátor

Csillag Barnabás Gellért

2020. február 21.

# 1. Elméleti háttér

A harmonikus oszcillátor az egyik legegyszerűbb fizikai rendszer. A legtipikusabb példa erre egy idealizált rugó. Jelen jegyzőkönyvben ezen rendszert szimuláló, rendelkezésemre álló C++ programozási nyelvben megírt algoritmusok eredményeit teszem közzé.

A harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x, \tag{1}$$

vagyis az adott testre csak egy eltéréssel arányos, de ellenkező irányú (visszatérítő) erő hat. A differenciálegyenlet analitikus megoldása két lehetséges megoldás lineáris kombinációja $x_0$, $v_0$ kezdőfeltételek esetén:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot sin(\omega t). \tag{2}$$

# 2. A megoldás módszerei

A differenciálegyenlet numerikus megoldására számos lehetséges algoritmus kínálkozik, én most az Euler–Cromer metódust fogom főként használni, illetve próbaképpen ennek egy egyszerűsített változatát, az Euler-módszert.

Az ilyen numerikus differenciálegyenlet-integráló rutinok általában arra épülnek, hogy megadott kezdőfeltételek után adott ideig vagy végpontig léptetve juttatják el a rendszert.

Az Euler-Cromer módszer egy gyorsuló testre:

$$v(t + dt) = v(t) + a(x(t))dt, \tag{3}$$

$$x(t + dt) = x(t) + v(t + dt)dt. \tag{4}$$

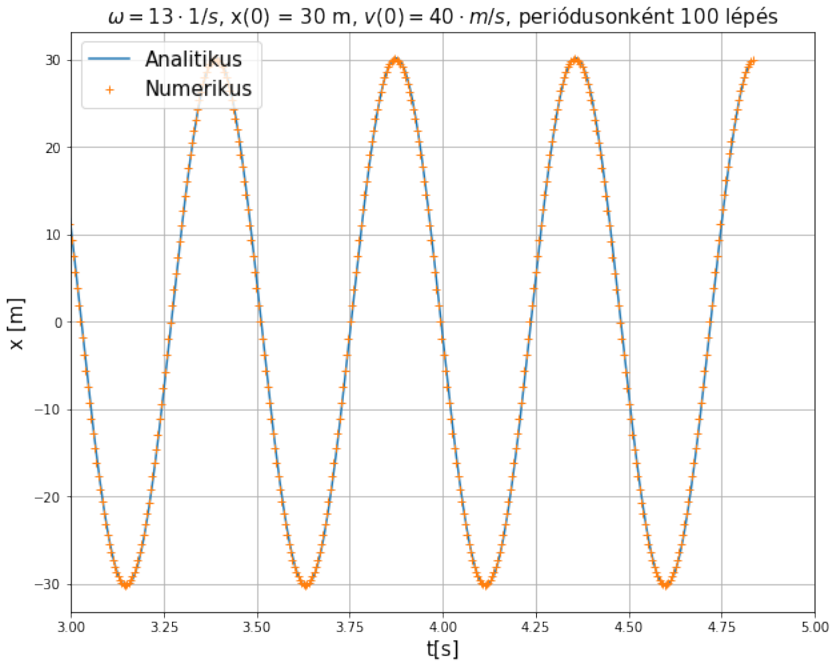
Az Euler-módszer esetében annyi a különbség, hogy

$$x(t + dt) = x(t) + v(t)dt, \tag{5}$$

és ahogy később látni fogjuk, ez az eredményeket nagyban befolyásolhatja.

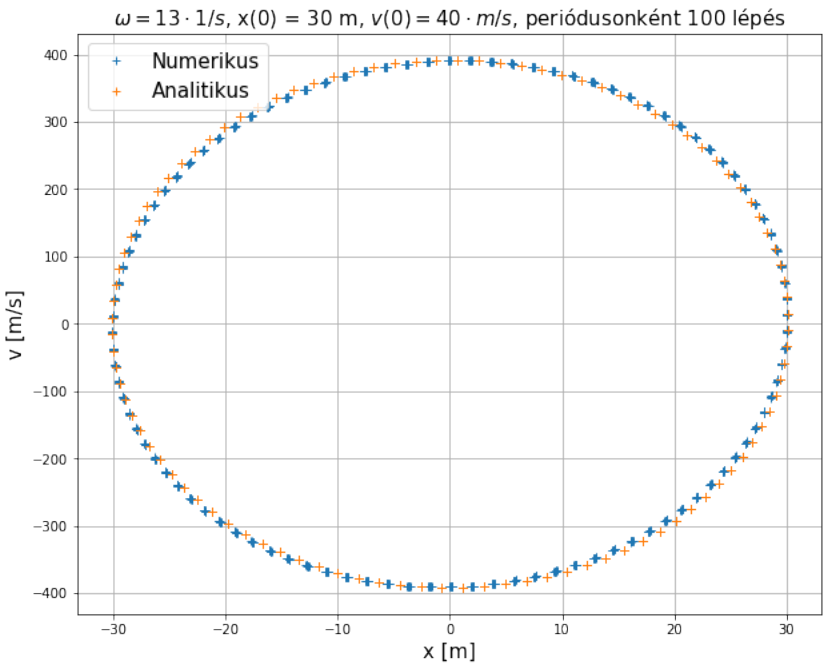
## 3. Eredmények

A következőkben lefuttattam néhány szimulációt először az Euler-Cromer, majd az Euler módszerrel. A beállítások az ábrák tetején láthatóak.



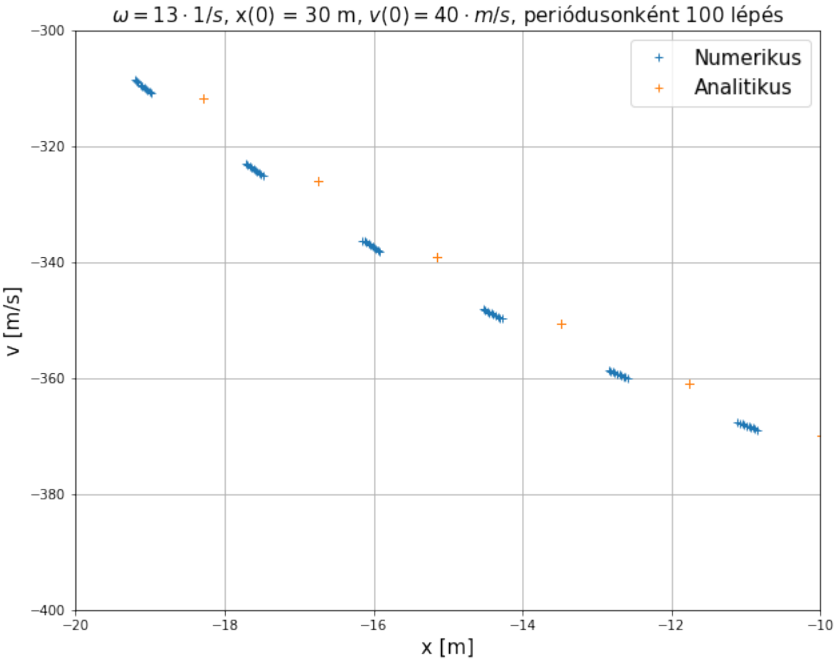

1. ábra. Harmonikus oszcillátor kitérés-idő ábrája diszkréten mintavételezett analitikus megoldás, illetve Euler-Cromer módszer alkalmazásával. Szemmel nem vehető észre eltérés a két görbe között.

A következő ábra a sebesség-kitérés fázisteret ábrázolja. A harmonikus oszcillátor mozgását fázistérben egy ellipszis írja le, így egy diszkréten mintavételezett ellipszist várok.



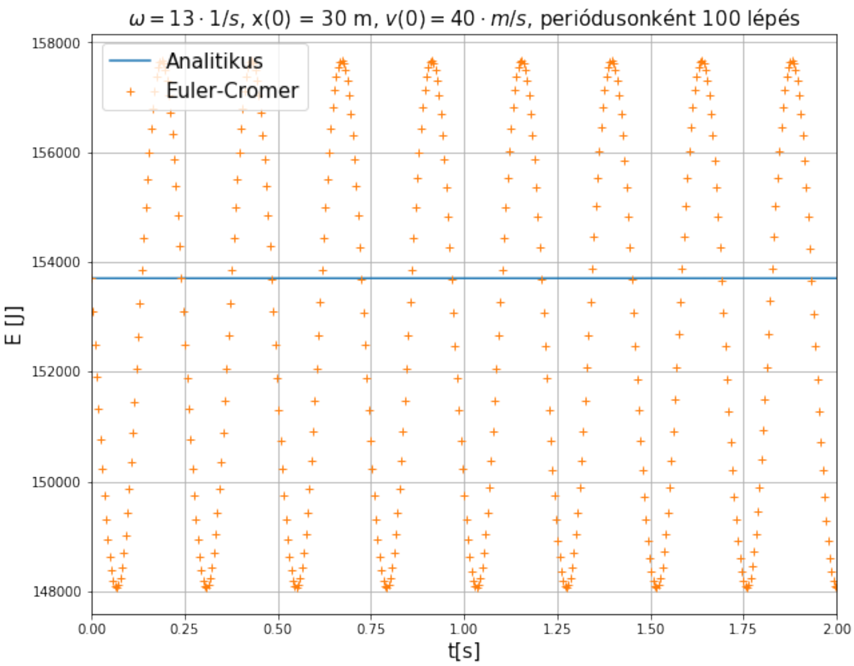

2. ábra. Harmonikus oszcillátor sebesség-kitérés ábrája diszkréten mintavételezett analitikus megoldás, illetve Euler-Cromer módszer alkalmazásával.

A kapott eredménnyel kapcsolatban két észrevételem van. Az egyik, hogy a numerikus megoldás esetén az ellipszis eltorzult, asszimetrikus lett - ennek oka lehet az analitikus és a numerikus megoldás közötti mintavételezési különbség is. A másik, hogy míg az analitikus megoldás esetében adott szakaszon csak 1-1 adatpont van, a numerikus megoldásnál kisebb ponthalmazok láthatóak - ezt jobban szemlélteti a következő ábra.



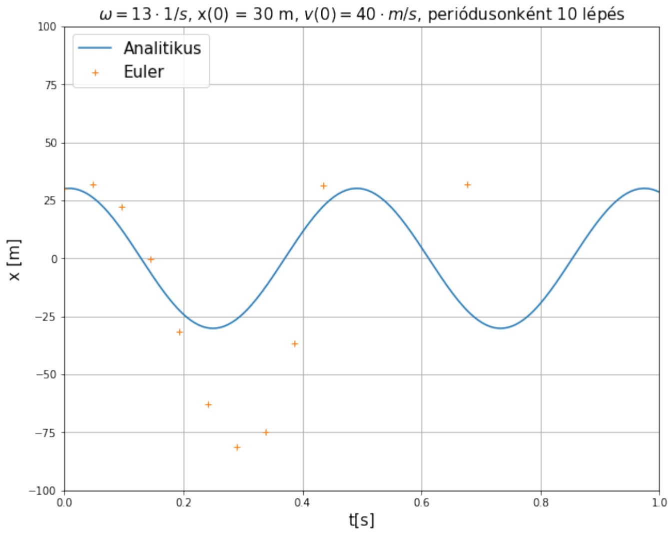

3. ábra. Harmonikus oszcillátor sebesség-kitérés ábrája diszkréten mintavételezett az analitikus megoldás, illetve az Euler-Cromer módszer alkalmazásával - ráközelítve az ellipszis szélére.

Véleményem szerint a jelenség oka az lehet, hogy a numerikus megoldás csak közelít, maga a metódus egy hibával dolgozik. Szemlátomást ez a numerikus hiba sokkal nagyobb a fázistérben, mint a kitérés-idő tekintetében.



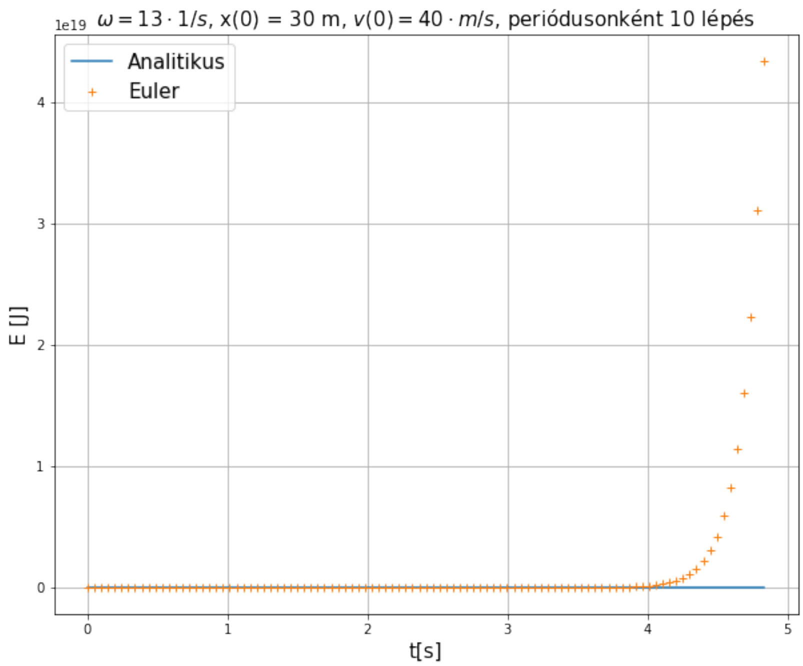

4. ábra. Az energia megmaradásának vizsgálata az Euler-Cromer módszer esetén.

Az energia ez módszer esetében jó láthatóan az analitikus megoldás körül oszcillál, jelen paraméterek esetén körülbelül az analitikus energia 6.4%-ának megfelelő amplitudóval.



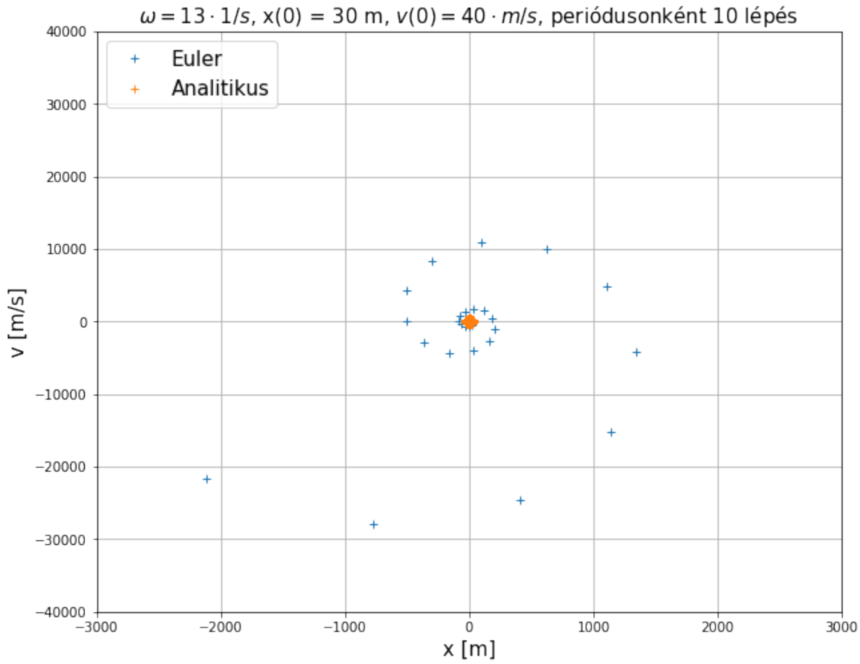

5. ábra. Harmonikus oszcillátor kitérés-idő ábrája diszkréten mintavételezett az analitikus megoldás, illetve az Euler módszer alkalmazásával - a lépésszámot itt a tizedére csökkentettem, hogy látványosabbak legyenek a változások.

Ezúttal látványos az eltérés az analitikus és a numerikus megoldás között. Ezért választottam ezt a lépésszámot: tudtam, hogy ilyen lépéssűrűség esetén jól kijönnek az Euler-módszer problémái. Láthatóan elszáll a rezgés amplitudója, így azt várhatom, hogy az energiájával is ez fog történni.



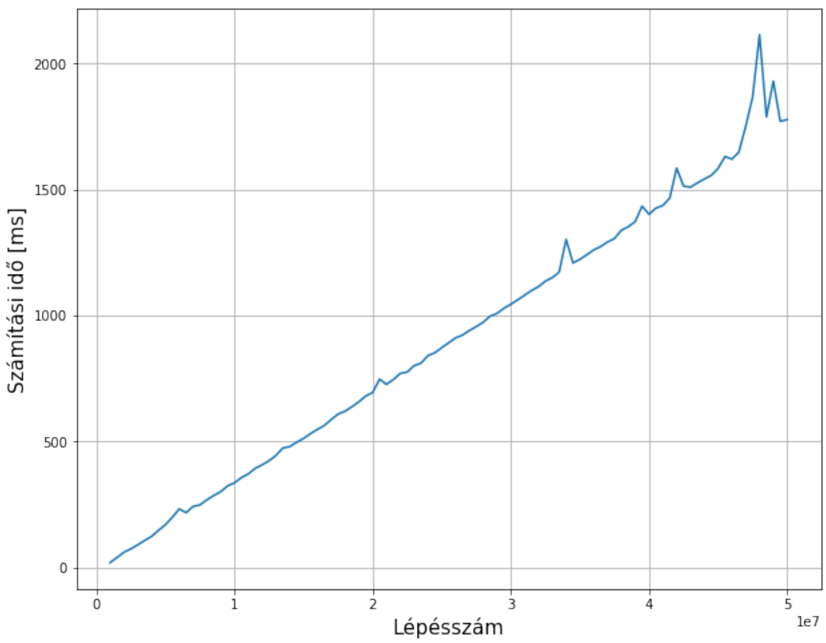

6. ábra. Az energia megmaradásának vizsgálata az Euler módszer esetén.

Az energia elszáll, pont ahogy azt vártam.




7. ábra. Harmonikus oszcillátor sebesség-kitérés ábrája diszkréten mintavételezett az analitikus megoldás, illetve az Euler módszer alkalmazásával.

A fenti ábra megerősít abban, hogy az energia és a rezgés amplitudója is elszáll ezen lépéssűrűség esetén Euler módszerben.




8. ábra. Az Euler-Cromer algoritmus futási idejének változása a lépésszám függvényében.

Jól látható, hogy ahogy növelem a lépésszámot, úgy lineárisan növekszik a futási idő is. A tüskék nagy része valószínűleg abból jön, hogy nem csak a fejlesztői környezet volt megnyitva a gépemen a mérés során, hanem például zenét is hallgattam, így az is igénybe vette a CPU-t.