

## 2. Ingák

Csillag Barnabás Gellért (COTNU3)

2020. március 8.

# 1. Elméleti háttér

Jelen jegyzőkönyv a különböző ingákra (matematikai, csillapított, gerjesztett, fizikai és kettős ingákra) felírt differenciálegyenletek numerikus megoldásait hivatott magába foglalni.

A **matematikai inga** az egyik legegyszerűbb fizikai rendszer, lényegében ekvivalens egy harmonikus oszcillátorral. A mozgására felírható differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta, \quad (1)$$

ahol  $\theta$  az inga függőleges helyzetétől való eltéréseinek szögét adja meg,  $g$  a nehézségi gyorsulást,  $l$  pedig az inga hosszát.

A valóságban van valamilyen súrlódás, disszipáció is a rendszerben, ha ezt is figyelembe vesszük, akkor **csillapított ingát** kapunk:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta - q \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad (2)$$

ahol  $q$  a súrlódási/légellenállási együttható.

Ha valamilyen periodikus gerjesztő erőt is alkalmazunk, akkor kapjuk a **gerjesztett ingát**:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta - q \cdot \frac{d\theta}{dt} + F_D \cdot \sin(\Omega_D t), \quad (3)$$

ahol  $F_D$  a gerjesztő erő amplitúdója, és  $\Omega_D$  a frekvenciája. Ez a differenciálegyenlet még analitikusan megoldható. Az analitikus megoldás a mozgás kezdeti, tranziens szakaszára (amely a csillapítás miatt jön létre):

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \exp^{-qt/2} \cdot \sin(\sqrt{\Omega^2 - q^2/4}t + \phi), \quad (4)$$

ahol  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  az inga sajátfrekvenciája,  $\theta_0$  és  $\phi$  pedig a kezdeti feltételek alapján határozhatók meg. A tranziens szakasz lecsengése után a gerjesztés hatása dominálja a rendszert, amely szakaszra szintén van analitikus megoldás, amennyiben kis kitéréseket vizsgálunk:

$$\theta(t) = \frac{F_D \sin(\Omega_D t + \phi)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2}}. \quad (5)$$

A rendszer eggyel ennél is összetettebb, ha nem csak kis kitérésekre vizsgáljuk az inga mozgását. Ekkor kapjuk a **fizikai inga** differenciálegyenletét:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\theta) - q \cdot \frac{d\theta}{dt} + F_D \cdot \sin(\Omega_D t). \quad (6)$$

Ezt a rendszert kaotikus mozgás jellemzi. Szintén kaotikus viselkedés jellemzi a **kettős ingát**, amelynek szimulációjára úgyszintén kísérletet teszünk. Ezen rendszer mozgásegyenletét nem lehet olyan egyszerűen felírni, mint ahogy azt az előző eseteknél láthattuk, de vannak módszerek, amelyek segíthetnek. Ha felírjuk a probléma Lagrange-függvényét, és deriváljuk az Euler-Lagrange differenciálegyenletnek megfelelően, akkor némi számolgatás és egyenletrendezés után a következő értékeket kapjuk az inga két kötélszárnak függőleges tengelytől való eltérésére (a tömegeket ismét egynek választjuk, ahogy eddig is):

$$\ddot{\Theta}_1 = \frac{l_2 \dot{\Theta}_2^2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + l_1 \dot{\Theta}_1^2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + 2g \sin(\Theta_1) - g \sin(\Theta_2) \cos(\Theta_1 - \Theta_2)}{l_1(2 - \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2))} \quad (7)$$

$$\ddot{\Theta}_2 = \frac{l_2 \dot{\Theta}_2^2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + 2L_1 \dot{\Theta}_1^2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 2g \sin(\Theta_1) \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 2g \sin(\Theta_2)}{l_2(2 - \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2))} \quad (8)$$

A kiértékelés során több alkalommal ki fogom számítani az adott inga energiáját, amely minden esetben a következő módon fog történni:

$$E = \frac{1}{2}(l\omega)^2 + lg(1 - \cos(\theta)), \quad (9)$$

ahol  $\omega$  a szögsebesség.

## 2. A megoldás módszerei

Stabilitási sorrend szerint fogunk végighaladni a módszereken, vagyis az első módszer lépésenkénti hibája a legnagyobb, a másodiké annál kisebb, és így tovább.

A legegyszerűbb differenciálegyenlet-megoldó módszer, amelyet alkalmazunk, az **Euler-módszer**. Ekkor egy megadható kezdősebességgel és kezdeti hellyel indul a rendszer, majd a differenciálegyenlet alapján léptetjük a sebességet és a helyet:

$$x(t + dt) = x(t) + v(t)dt, \quad (10)$$

$$v(t + dt) = v(t) + a(x(t))dt, t = t + dt. \quad (11)$$

Az ilyen numerikus megoldási módszerek esetén általában a differenciálegyenletnek annyi szerepe van, hogy az alapján számítsuk az  $a(x(t))$  gyorsulást minden pontban.

Az **Euler-Cromer** módszer esetében annyi a különbség, hogy a helyet már a léptetett sebességvektorral léptetjük:

$$v(t + dt) = v(t) + a(x(t))dt, \quad (12)$$

$$x(t + dt) = x(t) + v(t + dt)dt, t = t + dt. \quad (13)$$

Az eddig taglalt első két módszer  $\mathcal{O}(\tau^2)$  pontosságú. A következő módszer, a **negyedrendű Runge-Kutta** azonban  $\mathcal{O}(\tau^5)$  pontossággal rendelkezik. Mivel ennek egyenletei elég bonyolultak, ezért itt most egy kicsit egyszerűbb jelölésre térek át.

Tegyük fel, hogy  $y_0$  a léptetni kívánt változónk,  $h$  a lépésköz,  $t_0$  a kezdeti idő,  $f(t_n, y_n)$  pedig a derivált függvény. Ekkor egy lépés a következőképpen írható fel:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{a_n + 2 \cdot b_n + 2 \cdot c_n + d_n}{6}, \quad (14)$$

ahol

$$a_n = f(t_n, y_n), \quad (15)$$

$$b_n = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}ha_n), \quad (16)$$

$$c_n = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hb_n), \quad (17)$$

$$d_n = f(t_n + h, y_n + hc_n), t_{n+1} = t_n + h. \quad (18)$$

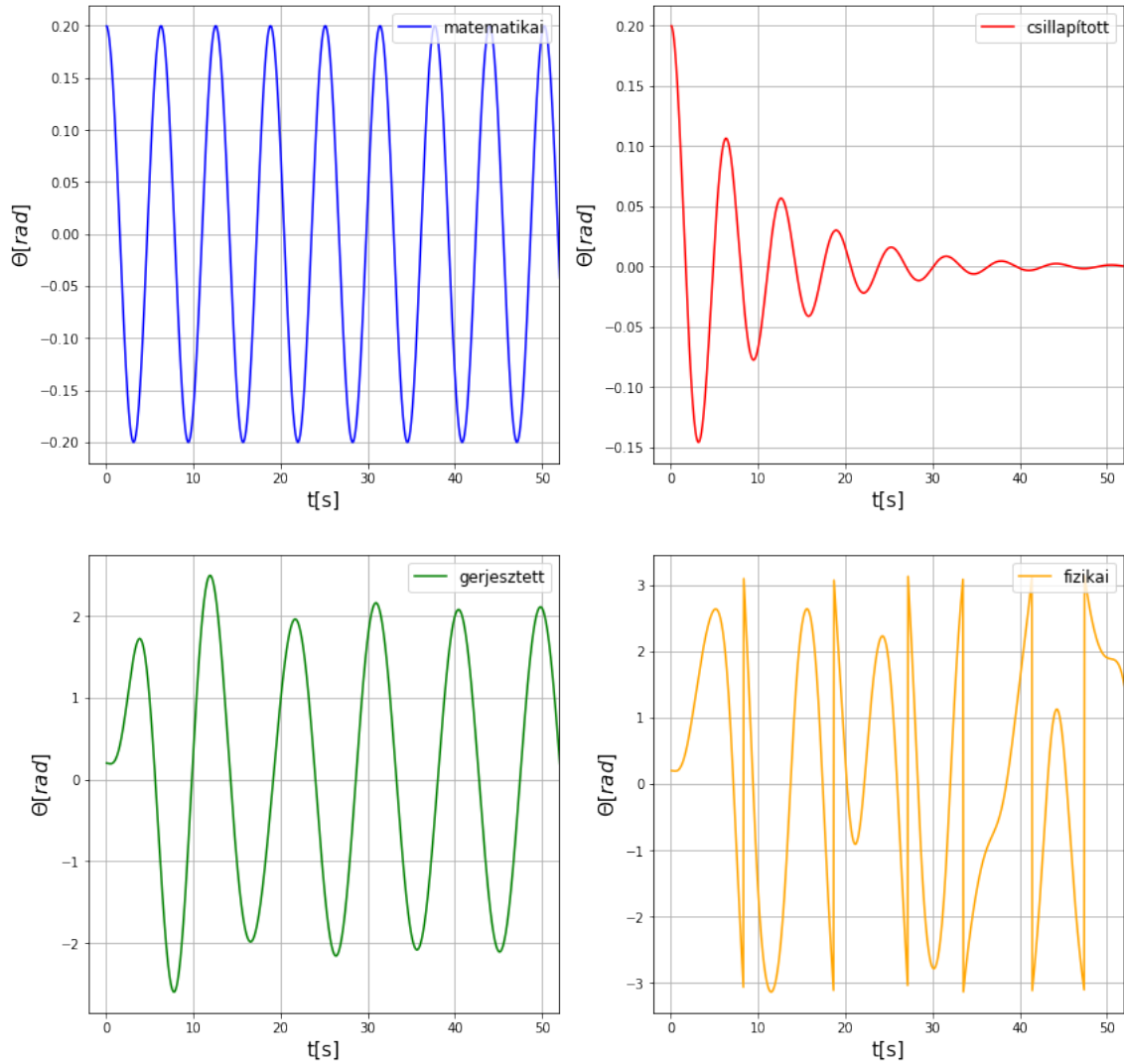
Az **adaptív Runge-Kutta** is hasonló elven működik azon különbséggel, hogy ott a lépésköz változhat a derivált meredekségének függvényében (minél meredekebb a derivált, annál sűrűbb a lépésköz a hibák minimalizálásának érdekében).

Az itt felsorolt négy módszert fogom a fentebb vázolt fizikai problémák megoldására alkalmazni.

### 3. Eredmények

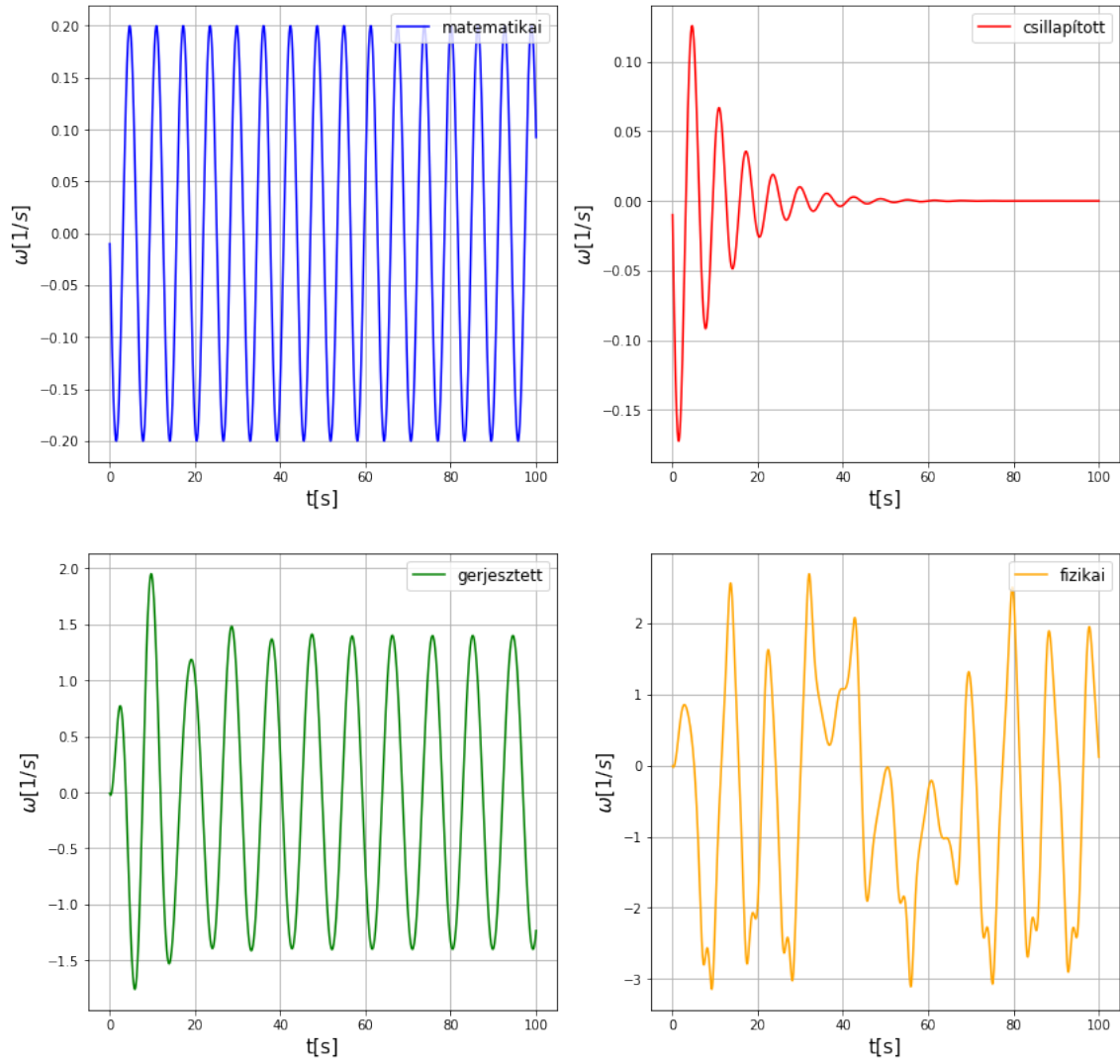
#### Első feladat

Mivel itt nem volt kikötve, hogy milyen metódust használjunk, és feltételezem, hogy nem kell mindet, hiszen akkor minimum 64 ábrát kellene készíteni az első feladatban, ami teljesen irreális, ezért a negyedrendű Runge-Kutta mellett döntöttem.



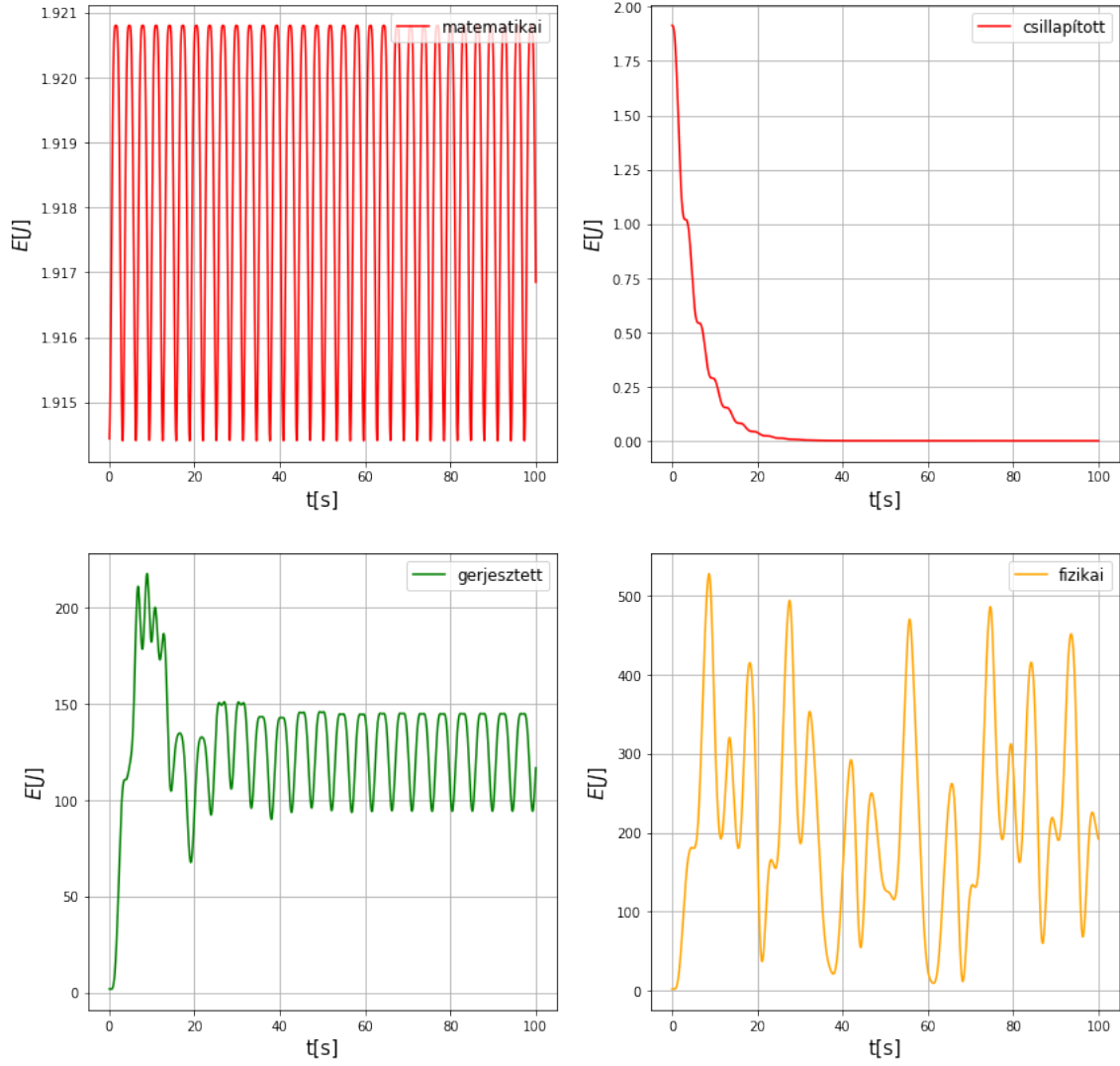
1. ábra. Negyedrendű Runge-Kutta szimulációk kitérés-idő grafikonjai 0.05-ös lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett.

Itt a várakozásoknak megfelelő eredményt kaptunk. A matematikai inga egy harmonikus oszcillátor, ez itt is látszik. A második ábrán a kitérés exponenciális burkolója tart nullához, ahogy az el is várható csillapított oszcillátor esetén. A harmadik és a negyedik ábrán látható egy a tranziens szakasz, majd jól kivehető módon a gerjesztés dominálta tartomány rajzolódik ki. A negyedik ábrán a fizikai inga kaotikus mozgást végez, direkt olyan paramétertartományt választottam, ahol ez teljesül.



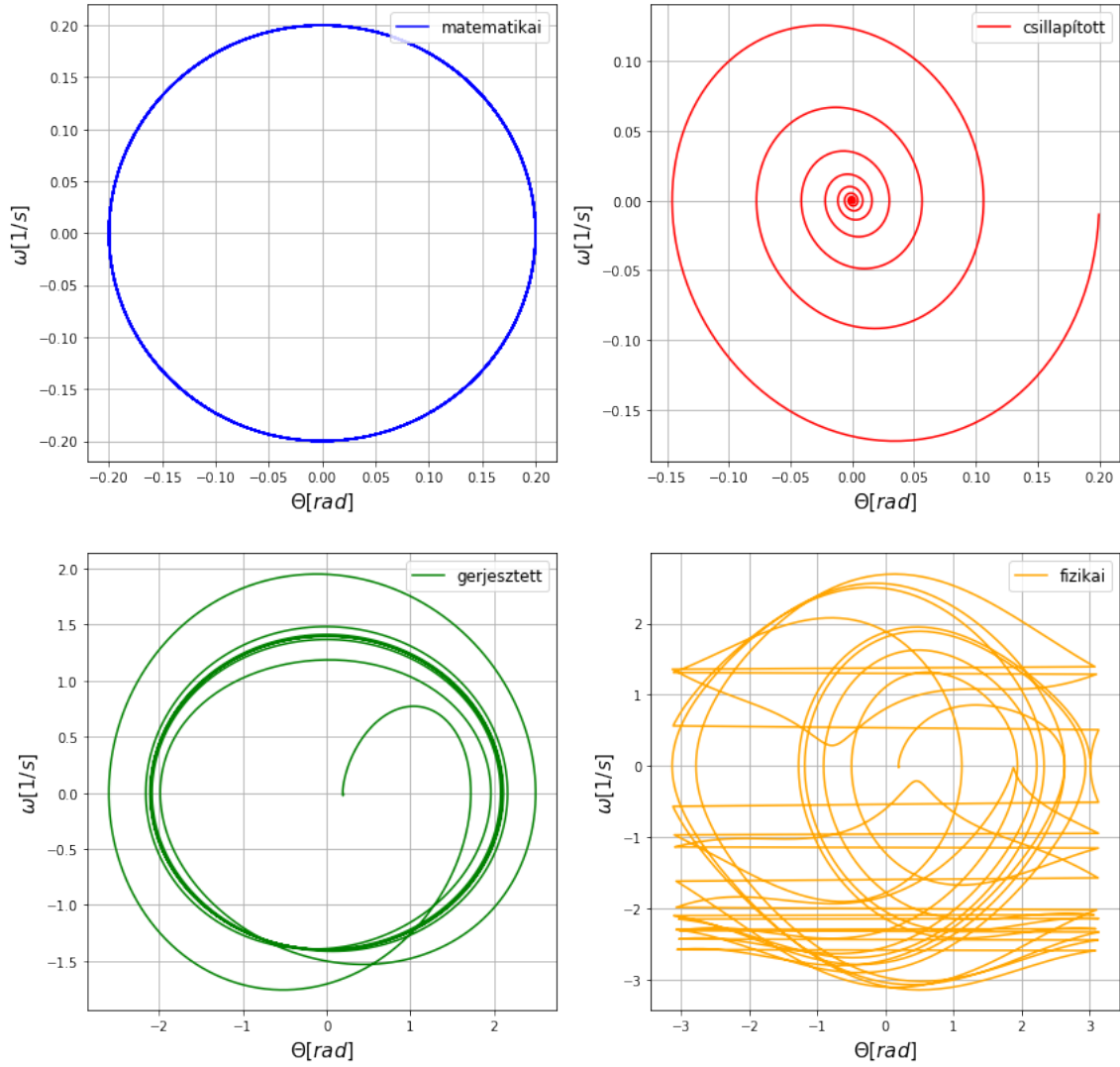
2. ábra. Negyedrendű Runge-Kutta szimulációk szögsebesség-idő grafikonjai 0.05-ös lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett.

A matematikai inga esetében pont azt kaptam amit vártam, egy sima szinuszt. Jól kivethető, ahogy a szögsebesség oszcillál, illetve egy exponenciális burkolóval tart ez is nullához a csillapított oszcillátor esetében. A gerjesztett oszcillátor esetében itt is jól elkülöníthető a két tartomány, a fizikai ingánál pedig egy letisztultabb görbe látható.



3. ábra. Negyedrendű Runge-Kutta szimulációk energia-idő grafikonjai 0.05-ös lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett.

0.05-ös nagyságú lépésköz esetén nem meglepő, hogy az energia oszcillál a 0.001-es nagyságrendben a matematikai ingánál. A csillapított inga esetében a disszipáció miatt az energia elvész, ez szépen látszik. A fluktuációk a görbén ugyanazon ingadozást jelenítik meg, amelyet a matematikai inga esetén is láthatunk. A gerjesztett inga esetében a disszipáció miatt az energia távozik a rendszerből, de a gerjesztés viszont energiát ad át az ingának, így a két hatás tart hozzávetőleges egyensúlyt. Az ingadozást az okozza, hogy amikor gyorsabb az inga, akkor nagyobb a disszipáció is (a sebességgel arányos). A fizikai inga esetén kaotikus viselkedést láthatunk, amely az eddigiek fényében nem meglepő.



4. ábra. Negyedrendű Runge-Kutta szimulációk szögsebesség-hely grafikonjai 0.05-ös lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett.

A matematikai ingánál általános esetben a fázistérben egy ellipszist láthatunk, most a speciális paraméterválasztás miatt lett ez kör. A csillapított inga bekonvergál spirál-szerű alakban az origóba, ez elvárható volt, hiszen láttuk már, hogy a vizsgált időintervallum végére gyakorlatilag megállt, az energiáját elvesztette.

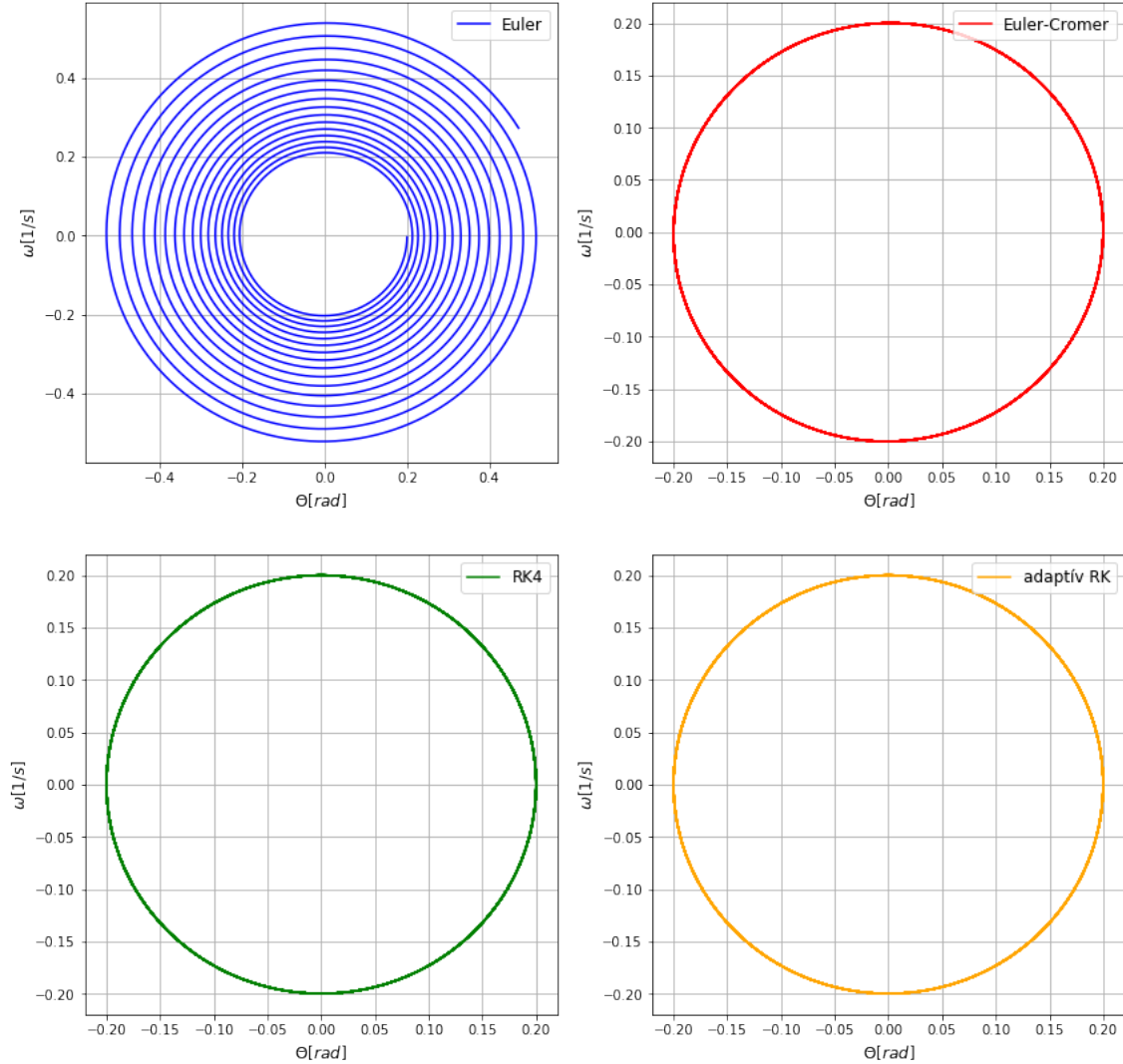
A gerjesztő erő miatt a harmadik rendszer által meghatározott fázistérbeli görbe menti értékek körülbelül egy nagyságrenddel nagyobbak, mint az első két inga esetében - azonban látszik, hogy  $\Theta = 0.2$ -ből indul, de a gerjesztés hatására először nagyon megnő az energiája, majd beáll egy ellipszisek által meghatározott, viszonylag szűk sávba.

A fizikai inga fázistere is kaotikus mozgást mutat, azonban látszik rajta, hogy az energia be van határolva, nem ugorhat akármekkorákat, nem szállhat el - ennek nyilván a beállított disszipáció és a gerjesztő erő az oka.

## Második feladat

Úgy gondolom, hogy a legtöbb információt egy numerikus megoldás pontosságáról a fentiek közül a fázistérbeli trajektória tartalmaz, ezért ezen feladat esetében leginkább ilyen ábrákkal fogom demonstrálni az eredményeket. Ezekről a kezdőfeltételek ismeretében le lehet olvasni, hogy nőtt, csökkent, vagy megmaradt az energia az időfejlődés során, illetve a mozgás különböző szakaszai is elkülöníthetők.

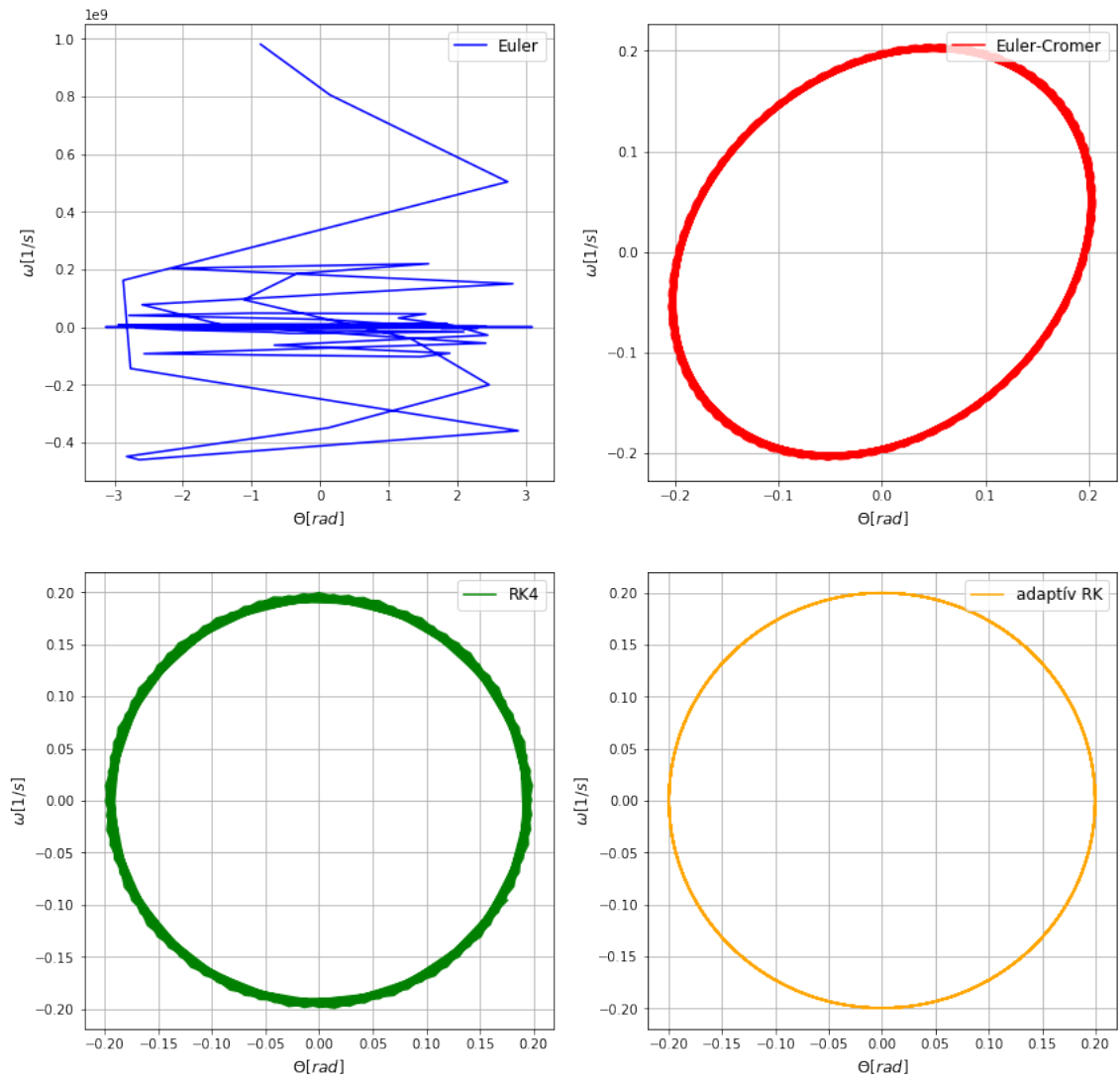
A **matematikai ingára** lefuttatott szimulációim eredményei a következők voltak:



5. ábra. Négy különböző módszerrel végrehajtott matematikai inga szimuláció fázistérbeli görbéi 0.02-es lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

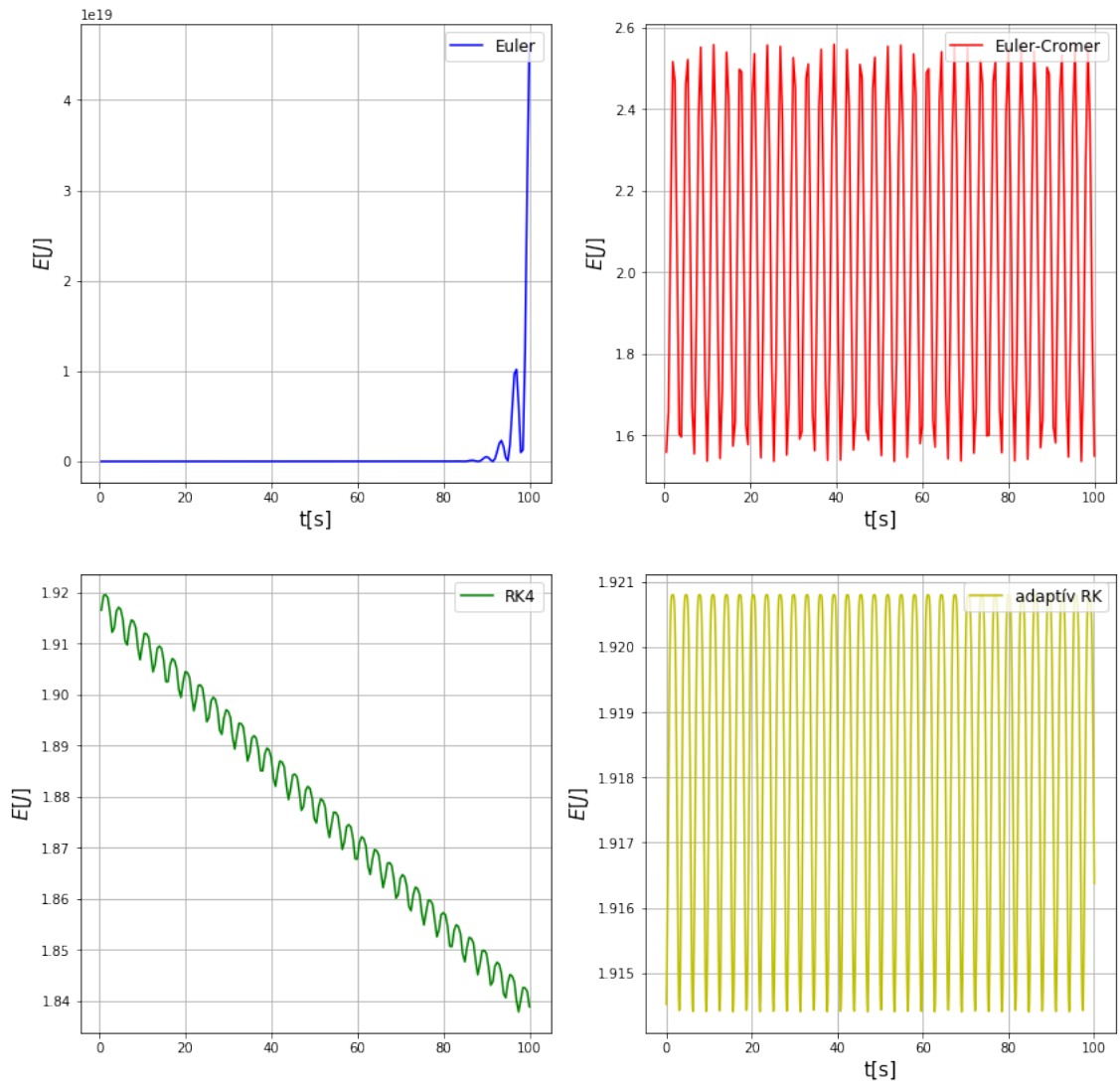
Mivel az Euler-módszer a leginstabilabb metódus, nem meglepő, hogy ez romlik el a leg-  
alacsonyabb lépésközön - 0.01 másodperc nagyságrend esetén az energia már látványosan nem  
marad meg.





6. ábra. Négy különböző módszerrel végrehajtott matematikai inga szimuláció fázistérbeli görbéi  $0.5$ -ös lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

Az ábrákon látható, hogy az adaptív Runge-Kutta nem változott - ez várható is volt, hiszen annak pont az a lényege, hogy a bemeneti lépéshossz és a pontosság együttes függvényében változhat az adatok bizonytalansága. Az Euler-Cromer és a negyedrendű Runge-Kutta módszer között hasonlatosság fedezhető fel abban a tekintetben, hogy mindkettő ezen lépéshossz-nagyságrendben kezd el torzulásokat mutatni az analitikus megoldáshoz képest (amit most kiválóan szemléltet az adaptív Runge-Kutta ábrája). Míg azonban a negyedrendű Runge-Kutta esetében azt láthatjuk, hogy az energia lineárisan csökken, addig az Euler-Cromer esetén ugyanúgy csökken, de egyben oszcillál is.

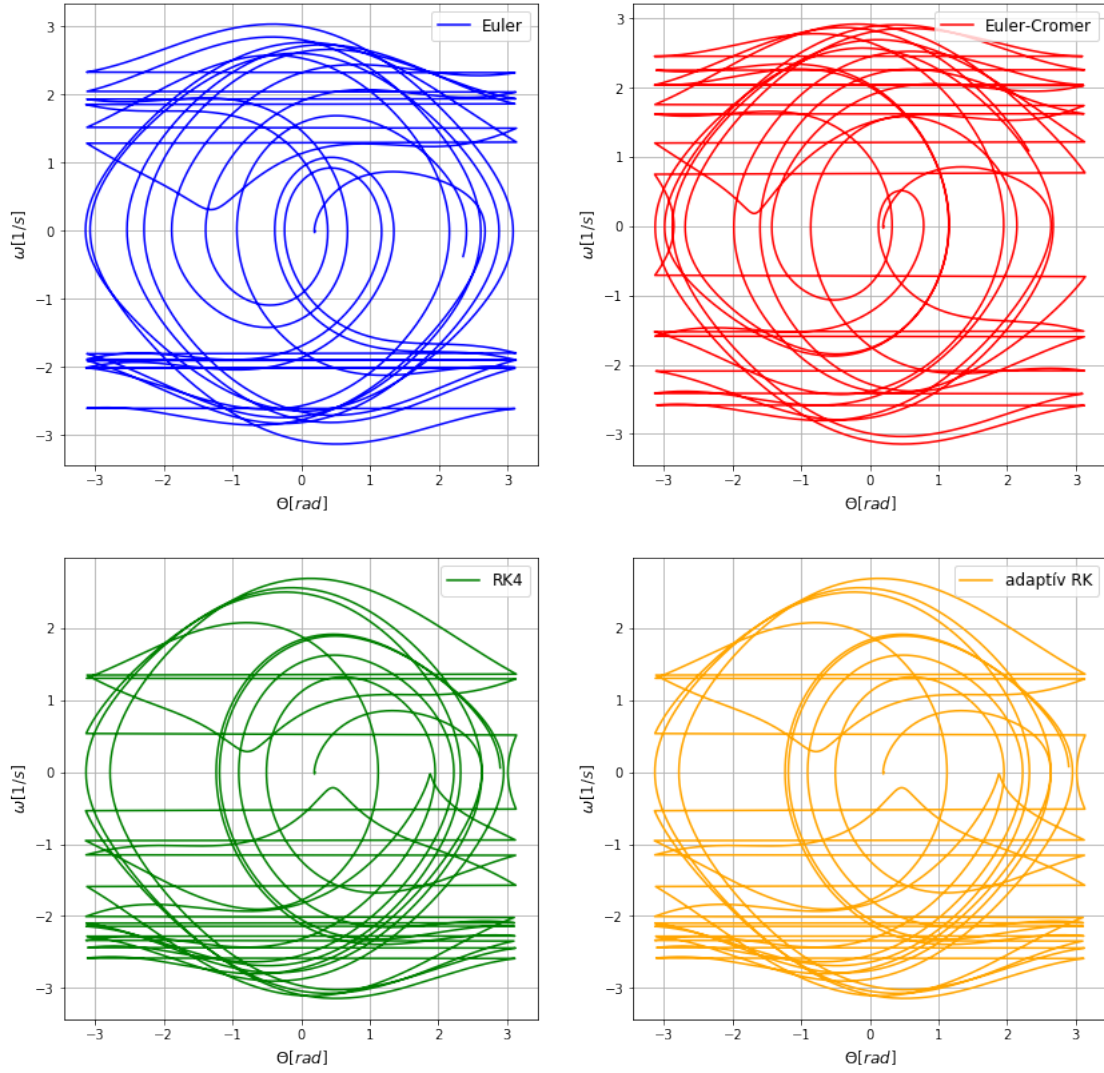


7. ábra. Négy különböző módszerrel végrehajtott matematikai inga szimuláció energia-idő grafikonjai 0.5-ös lépéshossz,  $t = 100$ s maximális idő,  $L = 9.8$ m,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2$ N,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

Az ábrákon látható, hogy amelyeket eddig leírtam az energiával kapcsolatban, azok csak részben igazak. További számításba kell venni, hogy a kevés lépés miatt elemibb problémák is fellépnek.

Az analitikus megoldás egy szinuszos rezgőmozgás. Ennek van egy frekvenciája, amely meghatározza a rendszerre jellemző Nqist-frekvenciát a mintavételezés törvény alapján. Úgy gondolom, hogy az energia ezen enyhe oszcillációját ez okozhatja.

A **fizikai inga** esetében a következő eredményeket kaptam:

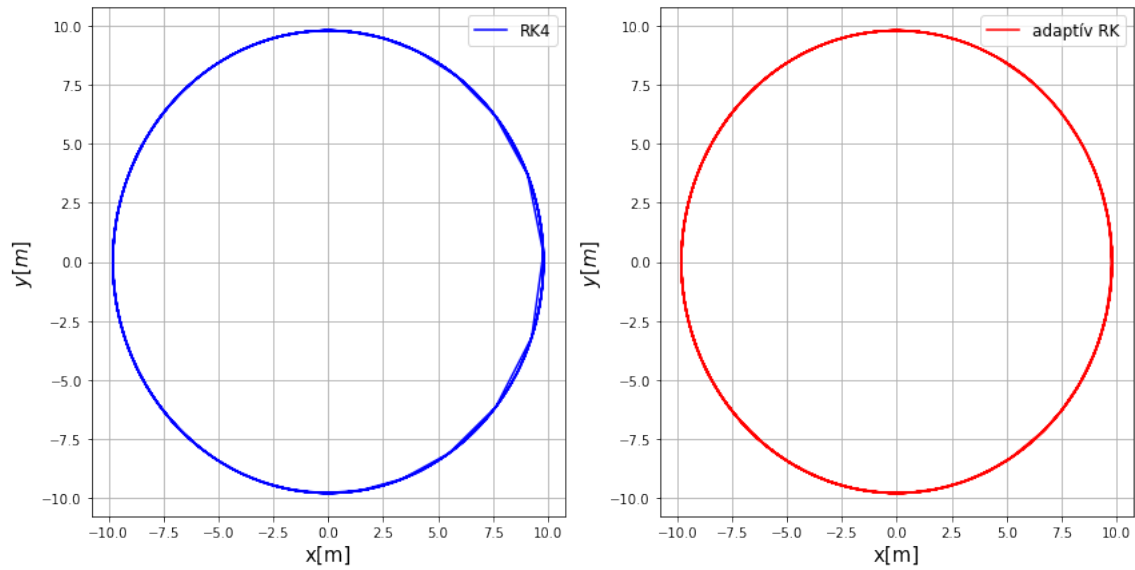


8. ábra. Négy különböző módszerrel végrehajtott fizikai inga szimuláció fázistérbeli görbéi 0.02-es lépéshossz,  $t = 100s$  maximális idő,  $L = 9.8m$ ,  $\Omega_D = \frac{2}{3}\frac{1}{s}$ ,  $F_D = 1.2N$ ,  $q = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = 0.0\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

A rendszer az elvárt kaotikus viselkedést mutatja. Bár az ábrák elsőre akár egyformának is tűnhetnek, ha jobban megnézzük őket, akkor láthatjuk, hogy az első három egyáltalán nem az, még ha vannak is hasonló részleteik. A harmadik és a negyedik ábra nagyon hasonlít, talán teljesen meg is egyezik. Ezen eredmények világosan megmutatják, hogy egy kaotikus rendszer kis paraméter-változások esetén is drasztikusan más állapotokba kerülhet - hiszen a matematikai inga esetén láthattuk, hogy az Euler-Cromer módszer és a negyedrendű Runge-Kutta között nem sok különbség van a fázistérbeli trajektóriák esetében.

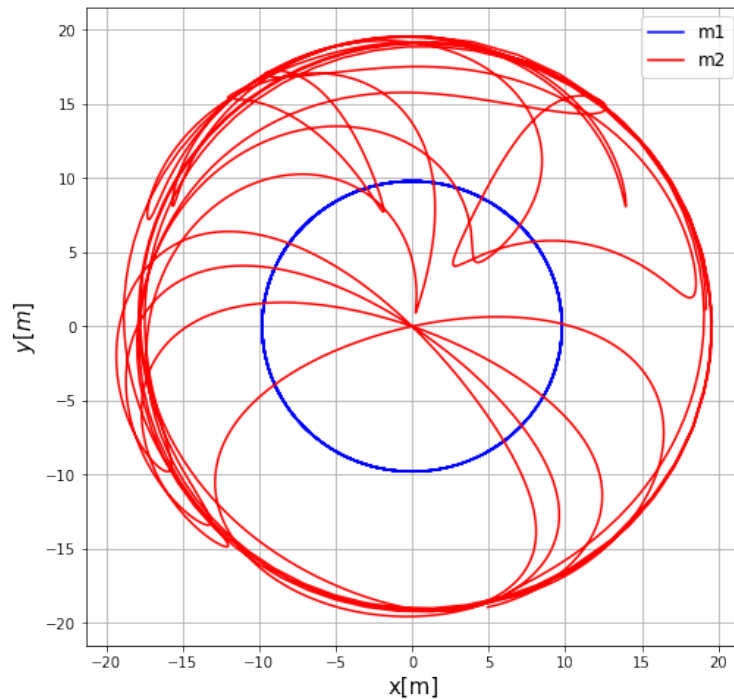
### Harmadik feladat

A kettős inga esetében kipróbáltam a negyedrendű Runge-Kuttát, illetve ugyanezen módszer adaptív lépéshosszú verzióját.



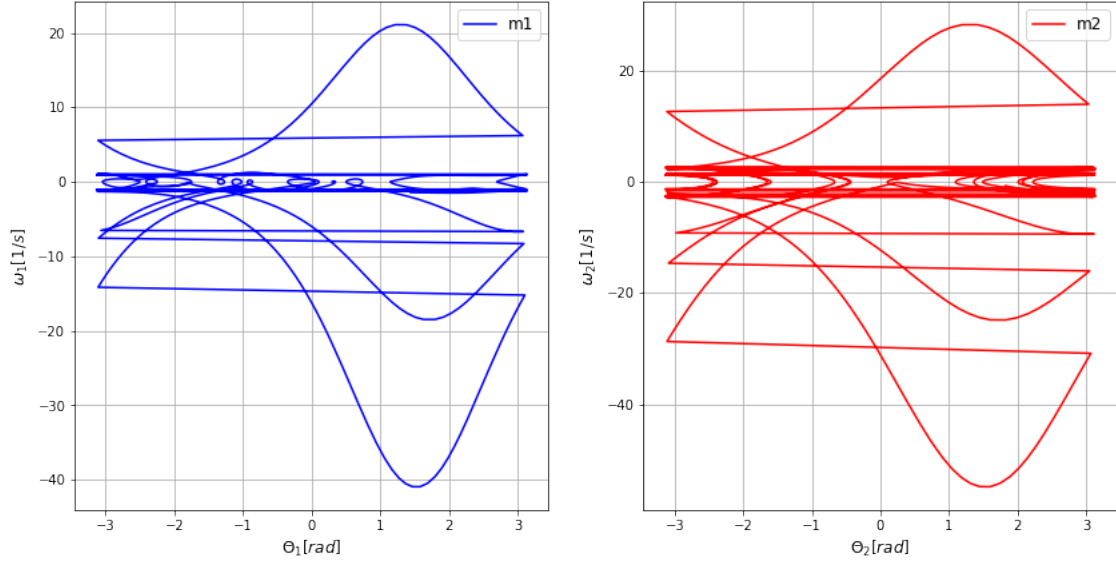
9. ábra. Negyedrendű és adaptív lépéshosszú Runge-Kutta kettős inga szimulációjának eredményei Descartes koordináta rendszerben 0.02-es lépéshossz,  $t = 50s$  maximális idő,  $L_1 = 9.8m, L_2 = 9.8m$ ,  $\theta_{10} = 0.3$ ,  $\omega_{10} = 0.0\frac{1}{s}$ ,  $\theta_{20} = 0.2$ ,  $\omega_{20} = 0.5\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

Látható, hogy a negyedrendű Runge-Kutta hibája még 0.02 s esetében is jelentős, ezért az adaptív módszert fogom alkalmazni.



10. ábra. Adaptív lépéshosszú Runge-Kutta kettős inga szimulációjának eredményei Descartes koordináta rendszerben 0.02-es alap-lépéshossz,  $t = 50s$  maximális idő,  $L_1 = 9.8m, L_2 = 9.8m$ ,  $\theta_{10} = 0.3$ ,  $\omega_{10} = 0.0\frac{1}{s}$ ,  $\theta_{20} = 0.2$ ,  $\omega_{20} = 0.5\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

Szemre úgy tűnik, hogy megfelelően működik a rendszer. Láthatóan több az átbillenés fent mint lent, és a második test valóban úgy mozog, mintha rögzítve lenne a távolsága az elsőhöz.



11. ábra. Adaptív lépéshosszú Runge-Kutta kettős inga szimulációjának eredményei fázistérben 0.02-es alap-lépéshossz,  $t = 50s$  maximális idő,  $L_1 = 9.8m, L_2 = 9.8m$ ,  $\theta_{10} = 0.3$ ,  $\omega_{10} = 0.0\frac{1}{s}$ ,  $\theta_{20} = 0.2$ ,  $\omega_{20} = 0.5\frac{1}{s}$  paraméterek mellett. Az adaptív Runge-Kutta pontossága  $10^{-6}$  volt.

Jelentős hasonlóság van a két test mozgásának fázistérbeli görbéi között, ami nem meglepő, hiszen össze vannak kapcsolva. Ugyanakkor nagyon furcsa az a sűrű csík középen, ez gyanúra ad okot, hogy nem működik megfelelően a program.

## 4. Összefoglalás

A példakód teljes átdolgozása után megvizsgálásra kerültek az ingamozgás különböző közelítései kitérés-idő, szögsebesség-idő, energia-idő, és fázistér ábrákon keresztül. Összehasonlítottuk a különböző numerikus megoldási módszereket a matematikai és a fizikai ingát példának véve, megvizsgáltuk mennyire és milyen módon érzékenyek a lépéshossz-változtatására - az eredmények leginkább fázistérben kerültek szemléltetésre. Mindezeket túl bepillantottunk a kettős inga működésébe, de ez a rész idő hiányában már nem került részletes kidolgozásra, mindenesetre a vizsgált egyetlen példa fázistere aggodalomra ad okot - előfordulhat, hogy a szimuláció hibás.