LaTeX Author Guidelines for ICCV Proceedings

Anonymous ICCV submission

Paper ID ****

Abstract

我们从Weighted Orthogonal Procrustes Problem出发，设计出一个weighted Frobenious norm作为data term，用weighted sparse coding作为regularization term。这个新的模型用alternative updating方式求解，可以证明其对于每个变量都有闭合解，并且收敛到一个stationary point。这个模型用在了真实去噪问题里，对之前咱提出的guided的方法在60张真实噪声图上的去噪效果更好，PSNR提升了1.1dB左右。

1. 模型Introduction

现有一个图像块，假设是8x8($d = 64$)的维度，拉成列向量$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$，那么我们在其周围找$m$个相似块，得到相似块矩阵$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{d \times m}$。我们希望在这个数据里学习到一个正交字典，同时利用稀疏表达这个工具。很自然，我想到了K-SVD这个模型，给定数据矩阵$\mathbf{Y}$,KSVD不断迭代更新，从而得到最适合表达数据的字典和稀疏。但是与KSVD不同的是，我希望我的模型里，字典是正交的并且有闭合解，系数也可以有闭合解。从而，我们想到的模型主体是这样的：

$$\min_{\mathbf{D},\mathbf{C}} \frac{1}{2}\|\mathbf{Y} - \mathbf{DCW}\|_F^2 + \lambda\|\mathbf{C}\|_{1,\mathbf{s}} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{D}^\top\mathbf{D} = \mathbf{I}. \tag{1}$$

或者

$$\min_{\mathbf{D},\mathbf{C}} \frac{1}{2}\|(\mathbf{Y} - \mathbf{DC})\mathbf{W}\|_F^2 + \lambda\|\mathbf{C}\|_{1,\mathbf{s}} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{D}^\top\mathbf{D} = \mathbf{I}. \tag{2}$$

其中$\|\mathbf{C}\|_{1,\mathbf{s}}$表示用的是加权L1范数(对每一行加不同的权值)。这两个模型是类似的解法，但是物理意义稍有不同。我们先对模型进行初始化：

2. 初始化

- 正交字典$\mathbf{D}^{(0)}$由$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{\Sigma}^{(0)}\mathbf{V}^\top$做SVD分解得到;
- 稀疏系数$\mathbf{C}$的行方向上的权值$\mathbf{s}^{(0)} = \text{diag}(\mathbf{\Sigma}^{(0)})$是weighted sparse coding的权重。$\mathbf{C}$每一行的权值不同，意味着正交字典$\mathbf{D}$的每一列对$\mathbf{C}$的重要性不同；
- $\mathbf{W}^{(0)}$是对角矩阵，初始化为恒等矩阵$\mathbf{I}_{m \times m}$(原因是一开始把所有块平等对待，视为受到相同的高斯噪声的影响)。或者初始化为一个对角矩阵，对角线上的每个元素对应于$\mathbf{Y}$的每一列（图像块）上的噪声水平σ，这个噪声水平可以用现有估计高斯噪声水平的方法估计出来);

3. 反复迭代求解D,C直到收敛,更新W

3.1. 反复迭代求解D,C直到收敛

$k = 0, 1, 2, ...$:

a. update $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = \arg\min_{\mathbf{C}} \frac{1}{2}\|(\mathbf{Y} - \mathbf{D}^{(k)}\mathbf{C})\mathbf{W}^{(k)}\|_F^2 + \lambda\|\mathbf{C}\|_{1,\mathbf{s}}. \tag{3}$$

有闭合解，每一列单独求解：

$$\mathbf{c}_i^{(k+1)} = \arg\min_{\mathbf{c}_i} \frac{1}{2}\|(\mathbf{y}_i - \mathbf{D}^{(k)}\mathbf{c}_i)\mathbf{W}_{ii}^{(k)}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{s}^T\mathbf{c}_i\|_1. \tag{4}$$

闭合解为：

$$\mathbf{c}_i^{(k+1)} = \text{sgn}(\mathbf{D}^\top\mathbf{y}) \odot \max(|\mathbf{D}^\top\mathbf{y}| - \frac{\lambda}{(\mathbf{W}_{ii}^{(k)})^2}\mathbf{s}, 0), \tag{5}$$

b. update $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(k+1)} &= \arg\min_{\mathbf{D}} \frac{1}{2}\|(\mathbf{Y}-\mathbf{D}\mathbf{C}^{(k+1)})\mathbf{W}^{(k)}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{D}^\top\mathbf{D}=\mathbf{I}. \end{aligned} \tag{6}$$

闭合解为：

$$\mathbf{D}^{(k+1)}=\mathbf{U}\mathbf{V}^\top \tag{7}$$

其中，$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$由$\mathbf{C}^{(k+1)}(\mathbf{W}^{(k)})^2\mathbf{Y}^\top = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{(k+1)}\mathbf{V}^\top$做SVD分解得到。$(\mathbf{W}^{(k)})^2$是指$\mathbf{W}$的对角线上的元素分别平方后得到的对角矩阵。

c. update $\mathbf{s}$

$\mathbf{s}^{k+1}=\mathbf{\Sigma}^{(k+1)}$

3.2. (3),(6)收敛后，更新$\mathbf{W}$

d. update $\mathbf{W}$

$\mathbf{W}$是对角矩阵，只需要更新迭代对角元即可：

$$\mathbf{W}_{ii}^{new}=\exp(-\lambda_2\|\mathbf{y}_i-\mathbf{D}^{(k+1)}\mathbf{c}_i^{(k+1)}\|_2) \tag{8}$$

λ_2是参数；

或

$$\mathbf{W}_{ii}^{new}=\lambda_2(\sigma_i-\|\mathbf{y}_i-\mathbf{D}^{(k+1)}\mathbf{c}_i^{(k+1)}\|_2) \tag{9}$$

或者其它可能性。

待说明问题：模型(1)或(2)的收敛性，收敛速率等问题，收敛值的上下界等问题。

实际中，我采用模型(2)，没有多次迭代（因为多次迭代速度太慢），权重的设计采用(8)，权重的物理意义，设计与效果值得探讨。

4. 孟老师的模型以及区别

孟老师的模型：

$$\min_{\mathbf{U},\mathbf{V}} \|\mathbf{W}\odot(\mathbf{X}-\mathbf{U}\mathbf{V}^\top)\|_1 \tag{10}$$

孟老师的模型是coordinate-wise的迭代，其不断迭代$\mathbf{U},\mathbf{V}$直到收敛。这个模型应用在Low-Rank Matrix Factorization with Missing Entries这个问题里，$\mathbf{W}$指矩阵的元素是否是missing entry，其元素只有0或1。

区别：

- 权重的设计和迭代方式不同，物理含义不一样。孟老师的模型里的权重主要是指矩阵的元素是否是missing entry，也就是$\mathbf{W}$里只有0或1；
- 模型不同；
- 应用不同；

5. 杨猛的模型以及区别

杨猛的模型：

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}-\mathbf{D}\mathbf{c})\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{c}\|_1<\sigma \tag{11}$$

区别：

- 关于加权，我的方法里，F范数的权重是加在列（sample）上，但是杨猛是加在向量2范的每一行（variable）上；设计出发点不同（我的模型是从weighted orthogonal Procrustes problem里的模型里演化过来的）；权重迭代方式不同；
- 我的模型里，字典是正交的，是通过数据学到的，有闭合解；杨的方法是训练集里的sample直接做字典；
- 我的模型里系数1范的权重是加在每一行上，所以，相当于我的模型里，每行每列的每个元素都带权重；而且系数有闭合解。