

LaTeX Author Guidelines for ICCV Proceedings

Anonymous ICCV submission

Paper ID ****

Abstract

我们从 *Weighted Orthogonal Procrustes Problem* 出发, 设计出一个 *weighted Frobenious norm* 作为 *data term*, 用 *weighted sparse coding* 作为 *regularization term*. 这个新的模型用 *alternative updating* 方式求解, 可以证明其对于每个变量都有闭合解, 并且收敛到一个 *stationary point*. 这个模型用在了真实去噪问题里, 对之前咱提出的 *guided* 的方法在 60 张真实噪声图上的去噪效果更好, *PSNR* 提升了 0.7dB 左右。

1. 模型 Introduction

现有一个图像块, 假设是 $8 \times 8 (d = 64)$ 的维度, 拉成列向量 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, 那么我们在其周围找 m 个相似块, 得到相似块矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{d \times m}$. 我们希望在这个数据里学习到一个正交字典, 同时利用稀疏表达这个工具。很自然, 我想到了 K-SVD 这个模型, 给定数据矩阵 \mathbf{Y} , KSVD 不断迭代更新, 从而得到最适合表达数据的字典和稀疏。但是与 KSVD 不同的是, 我希望我的模型里, 字典是正交的并且有闭合解, 系数也可以有闭合解。从而, 我们想到的模型主体是这样的:

$$\min_{\mathbf{D}, \mathbf{C}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{W}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{C}\|_{1, \mathbf{s}} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{D}^\top \mathbf{D} = \mathbf{I}. \quad (1)$$

或者

$$\min_{\mathbf{D}, \mathbf{C}} \frac{1}{2} \|(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{C})\mathbf{W}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{C}\|_{1, \mathbf{s}} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{D}^\top \mathbf{D} = \mathbf{I}. \quad (2)$$

其中 $\|\mathbf{C}\|_{1, \mathbf{s}}$ 表示用的是加权 L1 范数 (对每一行加不同的权值)。

这两个模型是类似的解法, 但是物理意义稍有不同。我们先对模型进行初始化:

2. 初始化

- 正交字典 $\mathbf{D}^{(0)}$ 由 $\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{\Sigma}^{(0)}\mathbf{V}^\top$ 做 SVD 分解得到;
- 稀疏系数 \mathbf{C} 的行方向上的权值 $\mathbf{s}^{(0)} = \text{diag}(\mathbf{\Sigma}^{(0)})$ 是 *weighted sparse coding* 的权重。 \mathbf{C} 每一行的权值不同, 意味着正交字典 \mathbf{D} 的每一列对 \mathbf{C} 的重要性不同;
- $\mathbf{W}^{(0)}$ 是对角矩阵, 初始化为恒等矩阵 $\mathbf{I}_{m \times m}$ (原因是一开始把所有块平等对待, 视为受到相同的高斯噪声的影响)。或者初始化为一个对角矩阵, 对角线上的每个元素对应于 \mathbf{Y} 的每一列 (图像块) 上的噪声水平 σ , 这个噪声水平可以用现有估计高斯噪声水平的方法估计出来);

3. 反复迭代求解 \mathbf{D}, \mathbf{C} 直到收敛, 更新 \mathbf{W}

3.1. 反复迭代求解 \mathbf{D}, \mathbf{C} 直到收敛

$k = 0, 1, 2, \dots$:

a. update \mathbf{C}

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{C}} \frac{1}{2} \|(\mathbf{Y} - \mathbf{D}^{(k)}\mathbf{C})\mathbf{W}^{(k)}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{C}\|_{1, \mathbf{s}}. \quad (3)$$

有闭合解, 每一列单独求解:

$$\mathbf{c}_i^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{c}_i} \frac{1}{2} \|(\mathbf{y}_i - \mathbf{D}^{(k)}\mathbf{c}_i)\mathbf{W}_{ii}^{(k)}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^T \mathbf{c}_i\|_1. \quad (4)$$

闭合解为:

$$\mathbf{c}_i^{(k+1)} = \text{sgn}(\mathbf{D}^\top \mathbf{y}) \odot \max(|\mathbf{D}^\top \mathbf{y}| - \frac{\lambda}{(\mathbf{W}_{ii}^{(k)})^2} \mathbf{s}, 0), \quad (5)$$

b. update \mathbf{D}

$$\mathbf{D}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \|(\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{C}^{(k+1)})\mathbf{W}^{(k)}\|_F^2 \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{D}^\top \mathbf{D} = \mathbf{I}.$$

闭合解为:

$$\mathbf{D}^{(k+1)} = \mathbf{U}\mathbf{V}^\top \quad (7)$$

其中, \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 由 $\mathbf{C}^{(k+1)}(\mathbf{W}^{(k)})^2\mathbf{Y}^\top = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{(k+1)}\mathbf{V}^\top$ 做SVD分解得到。 $(\mathbf{W}^{(k)})^2$ 是指 \mathbf{W} 的对角线上的元素分别平方后得到的对角矩阵。

c. update \mathbf{s}

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{\Sigma}^{(k+1)}$$

3.2. (3),(6)收敛后, 更新 \mathbf{W}

d. update \mathbf{W}

\mathbf{W} 是对角矩阵, 只需要更新迭代对角元即可:

$$\mathbf{W}_{ii}^{new} = \exp(-\lambda_2 \|\mathbf{y}_i - \mathbf{D}^{(k+1)}\mathbf{c}_i^{(k+1)}\|_2) \quad (8)$$

λ_2 是参数;

或

$$\mathbf{W}_{ii}^{new} = \lambda_2(\sigma_i - \|\mathbf{y}_i - \mathbf{D}^{(k+1)}\mathbf{c}_i^{(k+1)}\|_2) \quad (9)$$

或者其它可能性。

待说明问题: 模型(1)或(2)的收敛性, 收敛速率等问题, 收敛值的上下界等问题。

实际中, 我采用模型(2), 没有多次迭代 (因为多次迭代速度太慢), 权重的设计采用(8), 权重的物理意义, 设计与效果值得探讨。

4. 孟老师的模型以及区别

孟老师的模型:

$$\min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}} \|\mathbf{W} \odot (\mathbf{X} - \mathbf{U}\mathbf{V}^\top)\|_1 \quad (10)$$

孟老师的模型是coordinate-wise的迭代, 其不断迭代 \mathbf{U}, \mathbf{V} 直到收敛。这个模型应用在Low-Rank Matrix Factorization with Missing Entries这个问题里, \mathbf{W} 指矩阵的元素是否是missing entry, 其元素只有0或1。

区别:

- 权重的设计和迭代方式不同, 物理含义不一样。孟老师的模型里的权重主要是指矩阵的元素是否是missing entry, 也就是 \mathbf{W} 里只有0或1;

- 模型不同;

- 应用不同;

5. 杨猛模型以及区别

杨猛模型:

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{c})\|_2^2 \quad \text{s.t. } \|\mathbf{c}\|_1 < \sigma \quad (11)$$

区别:

- 关于加权, 我的方法里, F 范数的权重是加在列 (sample) 上, 但是杨猛是加在向量2范的每一行 (variable) 上; 设计出发点不同 (我的模型是从weighted orthogonal Procrustes problem里的模型里演化过来的); 权重迭代方式不同;
- 我的模型里, 字典是正交的, 是通过数据学到的, 有闭合解; 杨的方法是训练集里的sample直接做字典;
- 我的模型里系数1范的权重是加在每一行上, 所以, 相当于我的模型里, 每行每列的每个元素都带权重; 而且系数有闭合解。