MAT100 — Matematiske metoder 1

Obligatorisk innlevering 3

Christian Stigen
UiS, 30. oktober, 2015

Oppgave 1a

Da $\ln x' = \frac{1}{x}$ ikke inneholder $\ln x$ prøver vi oss med produktregelen,

$$(x \ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Dette er én mer enn vi er ute etter, men vi vet at $\int 1\, dx = x$, dermed prøver vi

$$(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Altså får vi

$$\int \ln x\, dx = \underline{\underline{x \ln x - x + C}}$$

Oppgave 1b

Vi prøver

$$\left(xe^{2x}\right)' = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

For å eliminere leddet e^{2x} er det nok å trekke fra $\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)' = 2xe^{2x}$$

Dette er det dobbelte av det vi er ute etter, dermed kan vi multiplisere hele uttrykket med en halv, og får

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + C = \underline{\underline{\frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C}}$$

Oppgave 1c

Vi vet at $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Dermed kan vi bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln x \\
f(x) &= x^2 + 1 \\
h(x) &= g(f(x)) = \ln\left(x^2+1\right) \\
h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x
\end{aligned}$$

Dette gir direkte

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \underline{\underline{\ln\left(x^2+1\right) + C}}$$

Oppgave 1d

Vi vet at $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dermed kan vi prøve å bruke kjerneregelen igjen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sqrt{x} \\
f(x) &= e^x + 1 \\
h(x) &= g(f(x)) = \sqrt{e^x+1} \\
h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x+1}} \cdot e^x
\end{aligned}$$

Dette er halvparten av det vi er ute etter, dermed kan vi skrive

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \underline{\underline{2\sqrt{e^x+1} + C}}$$

Oppgave 1e

Vi vet at $(x^4)' = 4x^3$. Vi bruker kjerneregelen med $\frac{1}{4}$ som kansellering av faktoren fire:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{4}x^4 \\
f(x) &= \sin x \\
h(x) &= g(f(x)) = \frac{1}{4}(\sin x)^4 = \frac{1}{4}\sin^4 x \\
h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \sin^3 x \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Altså er

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sin^4 x + C}}$$

Oppgave 1f

Vi skriver om

$$\frac{x+8}{x^3+4x} = \frac{x+8}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+4} + 8\frac{1}{x}\frac{1}{x^2+4} \tag{1}$$

Fra før vet vi at $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{x^2+1}$. Dersom vi bruker kjerneregelen med $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = \tan^{-1}x$ og $h(x) = g(f(x)) = \tan^{-1}\frac{x}{2}$ så får vi

$$\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x^2+4}$$

Dermed ser vi at

$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C \tag{2}$$

Videre vet vi at

$$(2\ln x)' = \frac{2}{x} \tag{3}$$

$$(\ln x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1} \text{ fra oppgave 1c} \tag{4}$$

Ved å ta $(\ln x^2+4)' = \frac{2x}{x^2+4}$ så kan vi kombinere disse to til å få siste ledd på høyresiden i likning 1 over.

$$\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+4} = \frac{2(x^4+4)}{x(x^2+4)} - \frac{2x^2}{x(x^2+4)} = \frac{(2x^2+8)-2x^2}{x(x^2+4)} = \frac{8}{x(x^2+4)} \tag{5}$$

Venstresiden i likning 5 over er triviell å integrere — vi bruker likningene 2, 3 og 4 (med kjernen x^2+4) over, og får til slutt

$$\int \frac{x+8}{x^3+4x}\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \ln(x^2+4) - 2\ln x + C}}$$

Oppgave 1g

Vi prøver oss litt frem med derivasjon.

$$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$$
$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Ved å summere uttrykkene over så kanselleres $e^x \sin x$. Det gir oss imidlertid $2e^x \cos x$, derfor prøver vi å derivere summen multiplisert med en halv:

$$\left(\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x + e^x \cos x\right)' = e^x \cos x$$

Dermed får vi

$$\int e^x \cos x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C}}$$

Oppgave 2a

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 2 &= 0 \\ \frac{x}{2} &= \ln 2 \\ x &= \underline{\underline{2\ln 2}} \end{aligned}$$

Oppgave 2b

Funksjonen øker eksponensielt mot høyre, men har en asymptote mot venstre. Vi tar

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right) = 0 - 2 = \underline{\underline{-2}}$$

Dette fordi $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ går mot null når $x \to \infty$.

Oppgave 2c

Ikke fullstendig utført. Vi vet at e^x vokser eksponensielt mot høyre. Mot venstre går den mot -2. Den krysser y-aksen i punktet $e^0 - 2 = -1$ og krysser x-aksen i

$2\ln 2$. Ved å regne ut $f(x)$ for noen punkter til høyre for nullpunktet kan vi skissere grafen enkelt.

Oppgave 2d

$$\int_{2\ln 2}^{4} f(x)\,dx$$

Det ubestemte integralet er

$$\int f(x)\,dx = 2e^{\frac{x}{2}} - 2x + C$$

Vi ser bort fra konstanten C som kanselleres.

$$\begin{aligned} g(4) - g(2\ln 2) &= (2e^2 - 8) - (4 - 4\ln 2) \\ &= \underline{\underline{2e^2 - 12 + \ln 2^4}} \end{aligned}$$

Oppgave 3a

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2\sin x \text{ for } x \in \left[-\pi, \frac{5\pi}{3}\right] \\ f'(x) &= 1 + 2\cos x \\ f''(x) &= -2\sin x \end{aligned}$$

Vi ser først på fortegnet til $f''(x)$ for å bestemme om lokale ekstremalpunkter er maskimale eller minimale.

	$-\pi$		0		π		2π	
+		**-**		**+**		**-**		**+**

Punktene er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da $\cos x = -\frac{1}{2}$ for $x = \frac{\pi}{3}$ må også $\cos x = -\frac{1}{2}$ for alle $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dette fordi cosinus-kurven inntar alle verdier mellom -1 og 1 *to ganger* i perioden 2π. Dermed får vi følgende *lokale* ekstremalpunkter (altså, ikke medregnet endepunktene) for $x \in D_f$:

$$\begin{array}{ll} x_0 = -\frac{2\pi}{3} & \text{lokalt } \textit{minimum} \\ x_1 = \frac{2\pi}{3} & \text{lokalt } \textit{maksimum} \\ x_2 = \frac{4\pi}{3} & \text{lokalt } \textit{minimum} \end{array}$$

Oppgave 3b

Hvis vi regner ut $f(x)$ for alle ekstremalpunkter og endepunktene, så ser vi at x_0 er absolutt minimum og $x = \frac{5\pi}{3}$ absolutt maksimum.

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= -\pi + 2\sin\pi = -\pi \\ f(-\frac{2\pi}{3}) &= -\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \quad \text{absolutt minimum} \\ f(\frac{2\pi}{3}) &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \\ f(\frac{4\pi}{3}) &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \\ f(\frac{5\pi}{3}) &= \frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} \quad \text{absolutt maksimum} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Volumet for en kule er $\frac{4}{3}\pi r^3$. Med $[v(t)] = \mathrm{m}^3$ har vi at $v'(t) = 10^{-3}$ og dermed $v(t) = 10^{-3}t + C$. For å forenkle setter vi $v(0) = 0$ slik at $C = 0$. Da har vi

$$v(t) = 10^{-3}t = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Videre vil vi bare bruke reelle tall for radien $r(t)$.

$$r(t) = kt^{\frac{1}{3}} \qquad r'(t) = \frac{1}{3}kt^{-\frac{2}{3}} \qquad k = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}10^{-3}}$$

Når $d = 0.2\,\mathrm{m}$ er $r = \frac{d}{2} = 0.1\,\mathrm{m}$. Tidspunktet t_p for dette er

$$\begin{aligned} r(t_p) &= kt_p^{\frac{1}{3}} = 10^{-1} \\ t_p &= 10^{-3}k^{-3} \end{aligned}$$

Ved dette tidspunktet øker radien med

$$r'(t_p) = \frac{1}{3}k\left(10^{-3}k^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{100}{3}k^3}} \approx 0.796\,\mathrm{cm/s}$$

Oppgave 5

Volumet er gitt ved $V = h\pi r^2 = 250\pi\,\mathrm{cm}^3$. Summen av saltkonsentrasjonene i sylinderen er gitt ved

$$\int_0^h \frac{10}{x+5}\,dx = [10\ln(x+5)]_0^{10}$$
$$= 10(\ln 15 - \ln 5) = 10\ln\frac{15}{5} = 10\ln 3$$

Den totale saltmengden i hele sylinderen er da

$$V \cdot 10\ln 3 = \underline{\underline{2500\pi\ln 3\,\mathrm{mg}}} \approx 8.6\,\mathrm{g}$$