MAT100 — Matematiske metoder 1

Obligatorisk innlevering 2

Christian Stigen
UiS, 9. oktober, 2015

Oppgave 1a

(1) Prøver med $y = e^{rt}$,

$$\begin{aligned} r^2e^{rt} + 5re^{rt} - 6e^{rt} &= 0 \\ e^{rt}(r^2 + 5r - 6) = e^{rt}(r+6)(r-1) &= 0 \end{aligned}$$

som gir $D = b^2 - 4ac = 49$. Med $D > 0$ har vi reelle forskjellige røtter r_1 og r_2, og siden $e^{rt} \neq 0$ er $r_1 = -6$ og $r_2 = 1$. Den generelle løsningen er da

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = \underline{\underline{Ae^{-6} + Be^{t}}}$$

(2) Prøver igjen med $y = e^{rt}$,

$$e^{rt}(r^2 + 6r + 9) = e^{rt}(r+3)^2 = 0$$

Vi ser at vi har sammenfallede røtter ($D = 0$), derfor er én løsning $y_1 = e^{rt}$. Forsøker vi med $y = ue^{rt}$ får vi den generelle løsningen

$$y = (A + Bt)e^{-3t} = \underline{\underline{Ae^{-3t} + Be^{-3t}t}}$$

Oppgave 2

Skjønner ikke hvordan dette skal løses i MAT100, men dette er en *algebraisk, implisitt kurve* og vi kan derfor finne tangenten i et punkt med partielle deriverte.

$$z = y^6 - 2xy + x^6 \;\text{ gir }\; F_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^5 - 2y \;\text{ og }\; F_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^5 - 2x$$

Da er tangenten i et punkt (x_0, y_0) gitt av

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

For $(x_0, y_0) = (1, 1)$,

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0)(x - x_0) &= 4(x - 1) \\ F_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 4(y - 1) \end{aligned}$$

Da er tangenten uttrykt ved

$$\begin{aligned} 4(x - 1) + 4(y - 1) &= 0 \\ 4x + 4y &= 8 \\ \underline{\underline{y = 2 - x}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

(a) Fart er avstand over tid, og ved høyeste punkt er farten null.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = \dot{s} &= -32t + 160 = 0\,\mathrm{m}/\mathrm{s} \\ t &= 160/32 = 5\,\mathrm{s} \\ s &= 5(160 - 16 \cdot 5) = \underline{\underline{400\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

(b) Da dette er lavere enn makshøyden, vil raketten passere denne høyden to ganger, med lik absoluttfart men motsatt fortegn:

$$\begin{aligned} s = 160t - 16t^2 &= 256\,\mathrm{m} \\ -16t^2 + 160t - 256 &= 16(t - 8)(t - 2) = 0 \\ t &= 2\,\mathrm{s} \vee t = 8\,\mathrm{s} \\ \dot{s}(2) = -32 \cdot 2 + 160 \cdot 2 &= \underline{\underline{96\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

(c) Akselerasjon er momentanendring av fart:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \underline{\underline{-32\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}}$$

(d) Ved $t = 5\,\mathrm{s}$ er raketten i toppunktet. Da er den nøyaktig halvveis, dermed treffer den bakken ved $\underline{\underline{t = 10\,\mathrm{s}}}$, og vi ser at $s(0) = s(10) = 0\,\mathrm{m}$.

Oppgave 4

(a) Grenseverdien oppfyller kravene til l'Hôpital, så da bruker vi den og får

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \cos x}{1} = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$$

(b) L'Hôpital gjelder, og vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}}{2x},$$

men vi kan bruke den én gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$$

(c) Utvider med $\frac{1}{x^2}$, og siden $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ vil

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{3 + \frac{5}{x}} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

(d) Summerer brøkene med fellesnevner, og får

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

Vi har $\frac{0}{0}$ og bruker l'Hôpital to ganger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x\cos x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2\cdot 1 - 0 \cdot 0} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 5a

Dette er en separabel differensiallikning.

$$\frac{dT}{dt} = k(T-a) \text{ som gir } \frac{dT}{T-a} = k\ dt$$
$$\int \frac{1}{T-a}\ dT = \int k\ dt$$
$$\ln(T-a) = kt + C_1$$
$$e^{\ln(T-a)} = e^{kt+C_1}$$
$$T-a = e^{C_1}e^{kt} = Ce^{kt}$$
$$T = a + Ce^{kt}$$

For å bestemme konstanten C bruker vi initialbetingelsene.

$$T(0) = 20 + Ce^{k\cdot 0} = 4$$
$$C = 4 - 20 = -16$$
$$T = \underline{\underline{20 - 16e^{kt}}}$$

Oppgave 5b

$$T(5) = 20 - 16e^{5k} = 8$$
$$-16e^{5k} = -12$$
$$e^{5k} = \frac{3}{4}$$
$$5k = \ln\frac{3}{4}$$
$$k = \frac{\ln 3 - \ln 4}{5}$$

Etter 15 minutter er da temperaturen

$$T(15) = 20 - 16e^{15\frac{\ln 3 - \ln 4}{5}} = 20 - 16(e^{\ln 3 - \ln 4})^3$$
$$= 20 - 16\left(\frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 4}}\right)^3 = 20 - 16\left(\frac{3}{4}\right)^3$$
$$= \underline{\underline{\frac{53}{4}\,^\circ\mathrm{C} = 13.25\,^\circ\mathrm{C}}}$$

Oppgave 6

$$f'(x) = 3x^2 + 1 = 5 \text{ for } x \in [0,2]$$
$$x^2 = \frac{4}{3} \text{ gir } \underline{\underline{x = \frac{2}{\sqrt{3}}}} \text{ fordi } x \in [0,2]$$