MAT100 — Matematiske metoder 1

Obligatorisk innlevering 1

Christian Stigen
UiS, 6. oktober, 2015

Oppgave 1a

(1) Med $i^2 = -1$ får vi $(1+i)(1+6i) = 1 + 6i + i - 6 = \underline{\underline{-5 + 7i}}$

(2) Utvider brøken med $x_2 - iy_2 = 6 + 2i$ slik at nevner blir $x_2^2 + y_2^2 = 40$,

$$\frac{(2+3i)(6+2i)}{40} = \frac{12 + 4i + 18i - 6}{40} = \frac{6 + 22i}{40} = \underline{\underline{\frac{3}{20} + \frac{11}{20}i}}$$

Oppgave 1b

Vi bruker $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\theta = \arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ for å finne $z = re^{i\theta}$.

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} \approx 4.24 \text{ og } \theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ gir } \underline{\underline{3 + 3i = 4.24e^{i\frac{\pi}{4}}}}$$

$$r = \sqrt{3 + 1} = 2 \text{ og } \theta = \tan^{-1} -1/\sqrt{3} = -30^\circ \approx -0.52 \text{ gir } \underline{\underline{\sqrt{3} - i = 2e^{-0.52i}}}$$

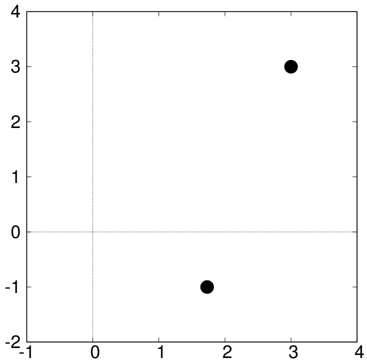
Se figur 1a på neste side for plott av punktene i det komplekse planet.

Oppgave 1c

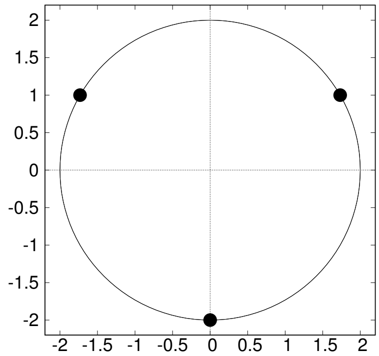
For $z = 8i$ har vi $r = |z| = 8$, $\sqrt[3]{r} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$ og Arg $z = \theta = \frac{\pi}{2}$ ($\tan^{-1} n \to \frac{\pi}{2}$ når $n \to \infty$). Røttene under er plottet i figur 1b på neste side.

$$\sqrt[3]{8i} = 2\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) \text{ for } k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \text{ gir } w_0 = 1.732 + 1i$$
$$k = 1 \text{ gir } w_1 = -1.732 + 1i$$
$$k = 2 \text{ gir } w_2 = -2i$$



(a) Oppgave 1b



(b) Oppgave 1c

Oppgave 2a

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \text{ gir } \underline{\underline{z = 2 \text{ og } z = -1}}$$

Oppgave 2b

$$3iz^2 - 2z + 2i = 0 \text{ gir } z = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6i} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3i} = \frac{i \pm i\sqrt{7}}{-3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})i}}$$

Oppgave 2c

$$-z^2 + 2z - 3 = 0 \text{ gir } z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2i^2}}{-2} = \underline{\underline{1 \mp i\sqrt{2}}}$$

Oppgave 2d

$$\begin{aligned}
(z^2 + 2i\sqrt{2}z - 2) + (z^2 - 2i\sqrt{2}z - 2) - 2z &= 0 \\
2z^2 - 2z - 2 &= 0 \\
z^2 - z - 1 &= 0 \\
\text{Ved oppgave 2a er da } \underline{\underline{z = 2 \text{ og } z = -1}}&.
\end{aligned}$$

Oppgave 2e

$$z^2 - z + 1 = 0$$
$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}}$$

Oppgave 3a

Vi kan skrive
$$f(x) = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$
Vi kan ikke kansellere $x - 3$, fordi i $x_0 = 3$ får vi $\frac{0}{0}$. Men setter vi $g(x) = x^2 - 3^2$ og $h(x) = x - 3$ ser vi at g og h er begge kontinuerlige i og har null som grenseverdi i x_0. Dermed har vi ved l'Hôpital at
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$
gitt at $h'(x) \neq 0$ for alle $x \neq x_0$.

Vi har $g'(x) = 2x$ og $h'(x) = 1$. Dermed er *grenseverdien*, som aldri omfatter punktet $x_0 = 3$, i $f(3)$ lik 6. For at funksjonen skal bli kontinuerlig for alle x må vi sette $f(3) \equiv 6$.

Oppgave 3b

Vi skriver
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2}$$
Ved samme argument som i oppgave 3a har vi at $g(2) \equiv 7$.

Oppgave 3c

Med bakgrunn i oppgavene 3a og 3b setter vi krav om at
$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = \lim_{x \to 3} 2ax$$

Vi kan dermed ta grenseverdien av de deriverte,

$$\lim_{x \to x_0 = 3} 2x = \lim_{x \to 3} 2a$$

For at dette skal gjelde i $x_0 = 3$ må vi ha at

$$2a = 2x_0$$
$$\text{Svar: } a = 3$$

Oppgave 4

At det finnes minst én x slik at $\cos x = x$ er det samme som å si at det finnes et *fikspunkt* for $\cos x$.

Vi vet at $-1 \leq \cos x \leq 1$ og at $\cos 0 = 1$ og $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Samtidig har vi for $f(x) = x$ at $f(0) = 0 < \cos 0$ og $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > \cos \frac{\pi}{2}$. Med andre ord *må* disse to grafene krysse hverandre, fordi de begge er *kontinuerlige* (som betyr at ingen kan ha diskontinuerlige «hopp» slik at punktene ikke sammenfaller), og fordi de starter og stopper på motsatte y-punkter fra 0 til $\frac{\pi}{2}$.

Det betyr at mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$ så *må* det finnes et punkt x slik at $\cos x = x$.

Oppgave 5

Ikke utført.

Oppgave 6a

Vi løser dette ved å kansellere $x + 2$. Dette kan vi gjøre fordi x vil aldri være eksakt lik 2:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} x + 2 = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 6b

Her har vi ingen singulariteter for $x > 0$, så da kan vi utvide brøken med $\frac{1}{x^5}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 2x^2 + 12}{3x^5 + 18x^4 + 10x^2 + 18} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^5}}{3 + \frac{18}{x} + \frac{10}{x^3} + \frac{18}{x^5}}$$

For alle $x > 0$ vil $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, dermed får vi

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Men hva med $x = 0$? Siden $x \to \infty$ så snakker vi om en *énsidet* grenseverdi, dermed kan vi forenkle ved å si at vi undersøker grensen fra og med første $x > 0$.

Oppgave 6c

Igjen, vi skriver $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ og kansellerer $x - 1$, fordi x vil nærme seg 1 men aldri bli eksakt lik. Da unngår vi null i nevneren.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x - 3 = \underline{\underline{-2}}$$