

Lösungsvorschläge zur Serie 9

Aufgabe 1

- a) D ist ein Rechteck (siehe Abbildung 1) mit Flächeninhalt $\frac{\pi^2}{4}$.

Für das 1. Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_D \cos x \cos y \, dy dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \, dy dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \sin y \Big|_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -1.\end{aligned}$$

Für das zweite Integral über D erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x+y) \, dy dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dy dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(x+\pi/2) + \cos(x)) \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x) + \cos(x)) \, dx \\ &= -\cos(x) + \sin(x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

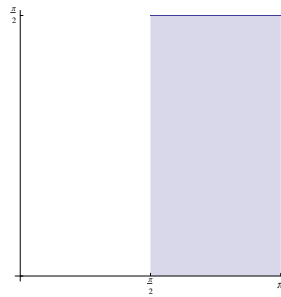


Abbildung 1: Gebiet D

b) Der Flächeninhalt von E (siehe Abbildung 2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\iint_E 1 dA &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} 1 dy dx \\ &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^4 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Für das Integral über E erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_E (xy + y) dy dx &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (xy + y) dy dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{24}x^3 \Big|_0^4 = 4.\end{aligned}$$

c) Der Flächeninhalt von F (siehe Abbildung 2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\iint_F 1 dy dx &= \int_0^{e^2-1} \int_{\ln(1+x)}^2 1 dy dx \\ &= \int_0^{e^2-1} (2 - \ln(1+x)) dx \\ &= 2x - ((1+x)\ln(1+x) - x) \Big|_0^{e^2-1} \\ &= e^2 - 3.\end{aligned}$$

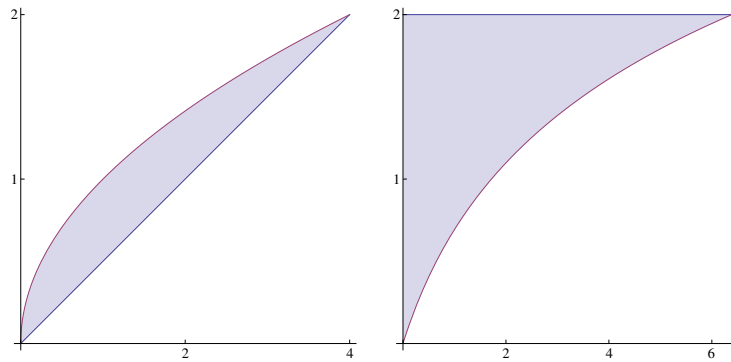


Abbildung 2: Gebiete E und F

Aufgabe 2

- a) Es ist $D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Transformation in Polarkoordinaten mit $x = r \cos(\phi)$ und $y = r \sin(\phi)$ liefert

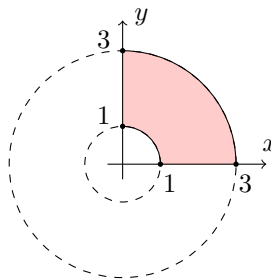
$$\begin{aligned} x, y \geq 0 &\iff r \cos(\phi), r \sin(\phi) \geq 0 \iff \cos(\phi), \sin(\phi) \geq 0 \\ &\iff \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{uns interessieren } \phi \in [0, 2\pi)) \end{aligned}$$

und

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \iff 1 \leq r^2 \cos^2(\phi) + r^2 \sin^2(\phi) \leq 9 \iff 1 \leq r^2 \leq 9$$

wegen $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$. Somit ist

$$D = \left\{ (r, \phi) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 1 \leq r \leq 3 \right\}.$$



Mit der Formel für die Fläche eines Gebietes in Polarkoordinaten folgt

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r \, dr \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 r \, dr \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_1^3 d\phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = 4\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Natürlich können wir die Fläche von D auch direkt mit πr^2 für die Fläche eines Kreises angeben und zwar $\frac{1}{4}(9\pi - \pi) = 2\pi$. Wir sehen, dass die Resultate in der Tat übereinstimmen.

b) Mit Polarkoordinaten lässt sich das Gebiet B direkt beschreiben. Es ist

$$B = \left\{ (r, \phi) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \text{ und } 0 \leq r \leq 2 \right\}.$$

Nun können wir das Gebietsintegral mit der Formel für Gebietsintegrale über Gebiete in Polarkoordinaten berechnen

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) dA &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r^2 \cos \phi \sin \phi r dr d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \sin \phi \int_0^2 r^3 dr d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos \phi \sin \phi d\phi \\ &= 4 \left(-\frac{1}{4} \cos(2\phi) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

c) Die Flächeninhalt von K (siehe Abbildung 3) ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r dr d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\phi)} r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{1+\cos(\phi)} \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + 2 \cos(\phi) + \cos^2(\phi)) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos(\phi) + \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \sin(\phi) + \frac{1}{4} \sin(2\phi) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

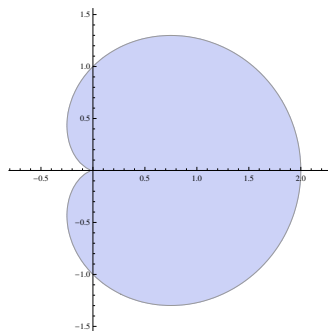


Abbildung 3: Gebiet K

d) Wir rechnen in Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Es gilt

$$\begin{aligned} x, y \geq 0 &\iff r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) \geq 0 \\ &\iff \cos(\varphi), \sin(\varphi) \geq 0 \\ &\iff \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{uns interessieren } \varphi \in [0, 2\pi)) \end{aligned}$$

und

$$x^2 + y^2 \leq 4 \iff r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) \leq 4 \iff r^2 \leq 4 \iff r \leq 2.$$

In Polarkoordinaten ist also

$$A = \left\{ (r, \phi) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq r \leq 2 \right\}.$$

Das gesuchte Integral ist somit

$$\iint_A f \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \, r \, dr \, d\varphi.$$

Die Stammfunktion von $r \sqrt{4-r^2}$ können wir mit der Substitution

$$u = \sqrt{4-r^2} \quad \text{mit} \quad u \, du = -r \, dr$$

finden und zwar

$$\int r \sqrt{4-r^2} \, dr = \int r u \left(-\frac{u}{r} \right) du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3} + C.$$

Das Integral ist somit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^2 \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \varphi = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}.$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=-1}^4 \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cos(yz) \, dz \, dy \, dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=-1}^4 x^2 y \left(\frac{1}{y} \sin(yz) \Big|_{z=0}^{\pi} \right) dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=-1}^4 x^2 \sin(y\pi) \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x^2 \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi y) \Big|_{y=-1}^4 \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 x^2 \left(-\frac{2}{\pi} \right) dx = -\frac{2}{3\pi}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^1 \int_{z=y}^{y^2} yz \sin(x) dz dy dx &= \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^1 y \sin(x) \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_y^{y^2} \right) dy dx \\
&= \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^1 y \sin(x) \frac{1}{2} (y^4 - y^2) dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x) \left(\frac{1}{6} y^6 - \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{y=0}^1 dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{12} \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{24} \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen das Volumen zunächst als Dreifachintegral.

Betrachten wir zuerst die Integrationsgrenzen.

Der Boden liegt in der xy -Ebene, wo $z = 0$ ist. Das heisst für den z -Wert gilt $0 \leq z \leq x^2 y$. In der xy -Ebene wird der Boden von den Punkten $(0, 0)$, $(-2, 0)$ und $(0, 2)$ aufgespannt. Für die Integrationsgrenzen heisst das, dass die x -Werte zwischen -2 und 0 liegen und für die y -Werte $0 \leq y \leq x + 2$ gilt. Das Volumenintegral ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^0 \int_0^{x+2} \int_0^{x^2 y} 1 dz dy dx = \int_{-2}^0 \int_0^{x+2} x^2 y dy dx \\
&= \int_{-2}^0 x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{x+2} \right) dx \\
&= \int_{-2}^0 \frac{1}{2} x^2 (x+2)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^4 + 4x^3 + 4x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} x^5 + x^4 + \frac{4}{3} x^3 \Big|_{-2}^0 \right) = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Das Volumen eines solchen zylindrischen Körpers kann man auch als Doppelintegral der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ auf dem Gebiet aufgespannt durch $(0, 0)$, $(-2, 0)$ und $(0, 2)$ auffassen, es gilt also

$$V = \int_{-2}^0 \int_0^{x+2} x^2 y dy dx.$$

Dies entspricht gerade der obigen Formel im zweiten Schritt und wir erhalten dasselbe Resultat, indem wir wie oben verfahren.