

Abgabe am 13. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 3.1. Bewegung der Leber in einem laufendem Hasen

In dem Artikel *Running, breathing and visceral motion in the domestic rabbit [...]* von Rachel S. Simons in *The Journal of Experimental Biology* 202, 563-577 (1999) finden wir Daten zur Bewegung der Leber in laufenden Hasen (siehe Abbildung 3.1). Wir wollen die Kraft berechnen, die dabei auf die Leber wirkt. Hierzu müssen wir eine sinnvolle mathematische Beschreibung dieser Bewegung formulieren.

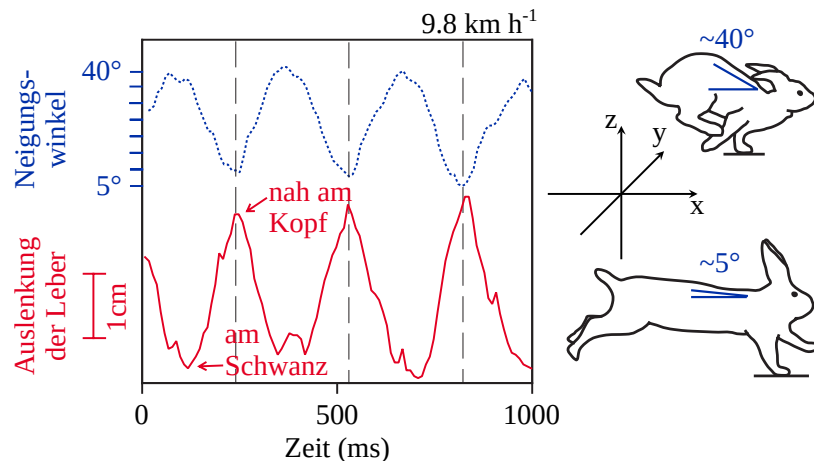


Abbildung 3.1: Auslenkung der Leber und Neigung der Linie entlang der diese Auslenkung erfolgt als Funktion der Zeit. Der Neigungswinkel ist maximal, wenn die Leber am nächsten zum Schwanz liegt.

Wir betrachten einen Hasen, der mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 9.8 \text{ km h}^{-1}$ in x -Richtung läuft und im gleichen Rhythmus atmet¹. Die Lunge verursacht eine periodische Bewegung der Leber entlang einer Linie im Körper des Hasen. Die Neigung dieser Linie relativ zum Boden ändert sich mit der Stellung des Hasen.

- Aus dem Graphen können wir lesen, dass ein Lauf bzw. Atemzyklus etwa 290 ms dauert, mit schätzungsweise 10 ms Genauigkeit. Berechnen Sie die Frequenz f der Lauf- und Atemzyklen.
- Wir behandeln zuerst eine mathematisch einfachere Situation: Unmittelbar nach dem Lauf atmet der Hase mit der gleichen Frequenz f , bewegt sich aber nicht mehr. Somit ist der Winkel θ unter dem sich die Leber bewegt konstant. Wir beschreiben die Bewegung der Leber mit der folgenden Parametrisierung der x - und z -Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta) \\ z(t) &= -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

mit $L = 2.0 \text{ cm}$ und f aus Teilaufgabe (a).

- Vergewissern Sie sich, dass Sie dieses Modell nachvollziehen können und skizzieren Sie $x(t)$, $z(t)$ und die Kurve $(x(t), z(t))$.
- Finden Sie eine Formel für die Gesamtkraft $\vec{F}(t)$, die auf die Leber wirkt. Berechnen Sie die maximale Kraft $|\vec{F}|_{\max}$ (wir betrachten den Betrag) die in einem Bewegungszyklus auftritt.

¹During treadmill exercise, in 11 out of 25 trials (i.e. 44% of the time), rabbits showed a 1:1 correlation between locomotor and breathing frequencies. *Ibid.*

Eine Hasenleber hat eine Masse von $120 \text{ g} \pm 10 \text{ g}$ [D. J. Browse et al, Comparative Hepatology (2003) 2:9].

- (c) Vergleichen sie die maximale Beschleunigung der Hasenleber mit der Beschleunigung der Leber einer Skifahrerin, die im Riesenslalom eine Kurve des Radius $R = 25 \text{ m}$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 70 \text{ km h}^{-1}$ fährt. Vergleichen sie ebenfalls die maximale Kraft. Die Menschliche Leber wiegt 1.3 kg .
- (d*) Wir möchten jetzt die Kräfte im Lauf berechnen. Aufgrund der Daten in Abbildung 3.1 beschreiben die Bewegung der Leber mit der folgenden Parametrisierung der x- und z-Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) + v_0 t \\ z(t) &= -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \end{aligned} \quad (2)$$

mit $L = 2.0 \text{ cm}$, $\theta_0 = 22.5^\circ$, $\theta_1 = 17.5^\circ$, $v_0 = 9.8 \text{ km h}^{-1}$ und f aus Teilaufgabe (a).

- (i) Begründen Sie dieses Modell und erklären sie die Bedeutung einzelner Terme. Müssen wir den Term $v_0 t$ berücksichtigen?
- (ii) Skizzieren Sie $x(t)$, $z(t)$ und die Kurve $(x(t), z(t))$ im Intertialsystem des Hasen. Es ist empfehlenswert einen Plotter zu verwenden (Python, Mathematica, Taschenrechner...).
- (iii) Finden Sie eine Formel für die Gesamtkraft $\vec{F}(t)$, die auf die Leber wirkt. Berechnen sie die maximalen Kraft $|\vec{F}|_{\max}$ die in einem Bewegungszyklus auftritt.

Hinweis. Ohne Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B. SymPy, SageMath, Wolfram Mathematica) lässt sich die Rechnung nur mit extrem viel Willenskraft durchführen.

Lösung.

- (a) Die Periode eines Lauf bzw. Atemzyklus haben wir auf etwa $T = 2.9 \times 10^{-1} \text{ s}$ geschätzt. Damit ist die Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.9 \times 10^{-1} \text{ s}} = 3.4 \text{ s}^{-1} \quad (\text{L.1})$$

- (b) (i) Zuerst erklären wir das Model: Wir betrachten eine harmonische Schwingung entlang einer Linie im Körper des Hasen, mit Amplitude $L = 2.0 \text{ cm}$ (dies entspricht der roten Kurve in Abbildung 3.1). Wenn wir die Auslenkung entlang dieser Linie $s(t)$ nennen, ist die passende Formel

$$s(t) = L \times \sin(2\pi f t). \quad (\text{L.2})$$

Ob wir jetzt $\sin(2\pi f t)$ oder $\cos(2\pi f t)$ verwenden, oder sogar eine allgemeine Phase $\sin(2\pi f t + \phi)$ setzen ist uns hier egal, weil uns die Position der Leber bei $t = 0$ nicht interessiert.

Nun müssen wir berücksichtigen, dass diese Linie unter einem Winkel θ zur x-Achse liegt. Die Projektion von $s(t)$ auf die x- und z-Achse ist (einfache Trigonometrie, siehe Abbildung [wird noch gezeichnet]):

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) \cos(\theta) = L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta) \\ z(t) &= -s(t) \sin(\theta) = -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{L.3})$$

Die Graphen $x(t)$, $z(t)$ und die Kurve $(x(t), z(t))$ sind in Abbildung 3.2 dargestellt, für eine Wahl von θ für die $\cos(\theta) > \sin(\theta)$, z.B. $\theta = 30^\circ$.

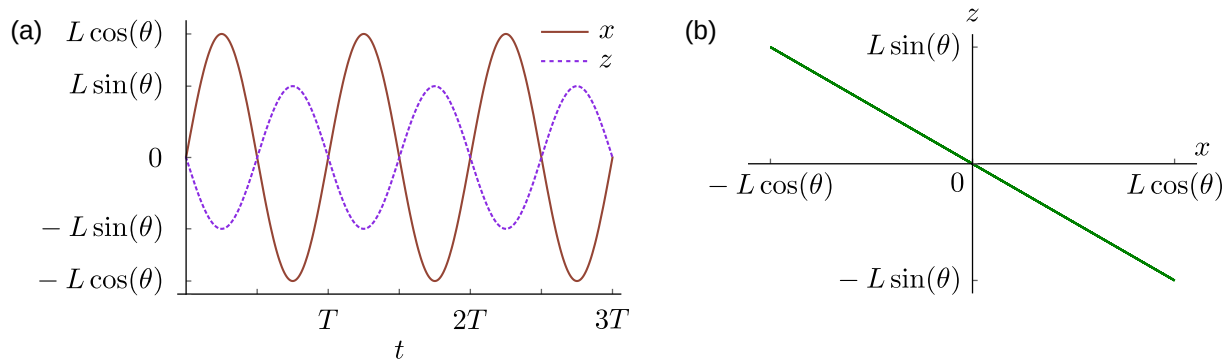


Abbildung 3.2: (a) Graphen der Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$ aus Teilaufgabe (b). (b) Die in der $x - z$ -Ebene von $x(t)$ und $z(t)$ beschriebene Kurve. **Bemerkung:** Während des ersten Zyklus werden die Punkte am Ende der grünen Linie im Graphen (b) zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T/2$ erreicht. Ohne den Graphen (a) anzuschauen kann man dies aber nicht wissen: in dem Graphen (b) kommt die Zeit t nämlich nicht mehr explizit vor.

(ii) Die Gesamtkraft folgt aus dem 2. Gesetz von Newton:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(t) &= m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\
 &= m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta) \\ -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= mL \frac{d^2}{dt^2} \sin(2\pi f t) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= mL \frac{d}{dt} 2\pi f \cos(2\pi f t) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= 2\pi mL f \times 2\pi f (-\sin(2\pi f t)) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= 4\pi^2 mL f^2 \sin(2\pi f t) \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{L.4}$$

Der Betrag der Gesamtkraft ist

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}(t)| &= 4\pi^2 mL f^2 |\sin(2\pi f t)| = \left| \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right| \\
 &= 4\pi^2 mL f^2 \sin(2\pi f t) \underbrace{\sqrt{(-\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2}}_{=1} \\
 &= 4\pi^2 mL f^2 |\sin(2\pi f t)|
 \end{aligned} \tag{L.5}$$

Es ist ja $|\cos(2\pi ft)| \leq 1$ und somit ist die maximale Kraft

$$\begin{aligned} |\vec{F}(t)|_{\max} &= 4\pi^2 m L f^2 \\ &= 4\pi^2 \times 1.2 \times 10^{-1} \text{ kg} \times 2.0 \times 10^{-2} \text{ m} \times (3.4 \text{ s}^{-1})^2 \\ &= 4 \times 1.2 \times 2.0 \times 3.4^2 \times \pi^2 \times 10^{-3} \text{ kg m s}^{-2} \\ &= 1.1 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{L.6})$$

- (c) Der Betrag der Beschleunigung eines sich auf einer Kreisbahn des Radius R mit der Geschwindigkeit v bewegendes Körpers ist $a = v^2/R$. Für $v = 70 \text{ km h}^{-1}$ und $R = 25 \text{ m}$ erhalten wir

$$a_{\text{ski}} = \frac{(70 \text{ km h}^{-1})^2}{25 \text{ m}} = \frac{70^2}{3.6^2 \times 25} \times \frac{\text{m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{m}} = 15 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{L.7})$$

Und die Kraft die auf ein Organ der Masse $M = 1.3 \text{ kg}$ wirkt ist $F_{\text{ski}} = M a_{\text{ski}} = 1.3 \text{ kg} \times 15 \text{ m s}^{-2} = 20 \text{ N}$. Die Beschleunigung der Hasenleber können wir ausrechnen, in dem wir $|\vec{F}(t)|_{\max}$ (Gleichung L.6) durch die Masse m der Hasenleber dividieren:

$$\begin{aligned} |\vec{a}(t)|_{\max} &= \frac{|\vec{F}(t)|_{\max}}{m} = 4\pi^2 L f^2 \\ &= 4\pi^2 \times 2.0 \times 10^{-2} \text{ m} \times (3.4 \text{ s}^{-1})^2 \\ &= 4 \times 2.0 \times 3.4^2 \times \pi^2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \\ &= 9.1 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \quad (\text{L.8})$$

Die von der Lungenbewegung verursachte Beschleunigung der Leber im Hasen ist also von der gleichen Grössenordnung wie Beschleunigungen die im Riesenslalom auf Welcup-Niveau entstehen. Kräfte skalieren mit der Masse, und sind somit für menschliche Organe höher.

- (d*) (i) Im Vergleich zum Modell in Teilaufgabe (b) haben wir einen Zeitabhängigen Winkel

$$\theta(t) = \theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi ft) \quad (\text{L.9})$$

Dies ist eine sinnvolle Parametrisierung der in Abbildung 3.1 gegebenen Daten für den Neigungswinkel (blaue Linie): eine zwischen 5° und 40° oszillierende Sinusfunktion.

Die Phase des Winkels $\theta(t)$ (d.h. verwenden wir sin oder cos?) darf nicht willkürlich gewählt werden, sondern muss zu unsere Wahl der Phase der Leberauslenkung passen: die Formel muss die Tatsache widerspiegeln, dass die Neigung der Leberbewegung maximal ist, wenn die Leber am nächsten zum Schwanz liegt. Daher schreiben wir $\theta(t) = \theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi ft)$ und nicht etwa $\theta(t) = \theta_0 - \theta_1 \cos(2\pi ft)$.

Der Term $v_0 t$ beschreibt eine konstante Geschwindigkeit, mit der sich der Hase nach vorne bewegt. Wir interessieren uns hier aber für auf die Leber wirkende Kräfte, die in jedem Inertialsystem gleich sind. Wir könnten die

Bewegung der Leber also auch im Inertialsystem des Hasen parametrisieren, in dem dieser Term wegfällt. Hier ist es nur ein kleiner Unterschied, im Allgemeinen spart man sich aber viel Arbeit durch eine sinnvolle Wahl des Bezugssystems.

- (ii) Wir erstellen die Graphen, indem wir numerische Werte für alle parameter festlegen und einen Computerprogram verwenden. Hier wurden die Plots mit Wolfram Mathematica erstellt. Die Achsen beschriften wir mit algebraischen Werten, zum Beispiel zu den Zeiten $t=0, T/4, T/2, 3T/4$. Wir setzen $t = T/4$ in $x(t)$ und $z(t)$ ein und beachten, dass $T \times f = 1$ ist:

$$x\left(\frac{T}{4}\right) = L \times \sin(\pi/2) \times \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(\pi/2)) = L \times \cos(\theta_0 - \theta_1) \quad (\text{L.10})$$

und so weiter. Wir erhalten die Graphen in Abbildung 3.3.

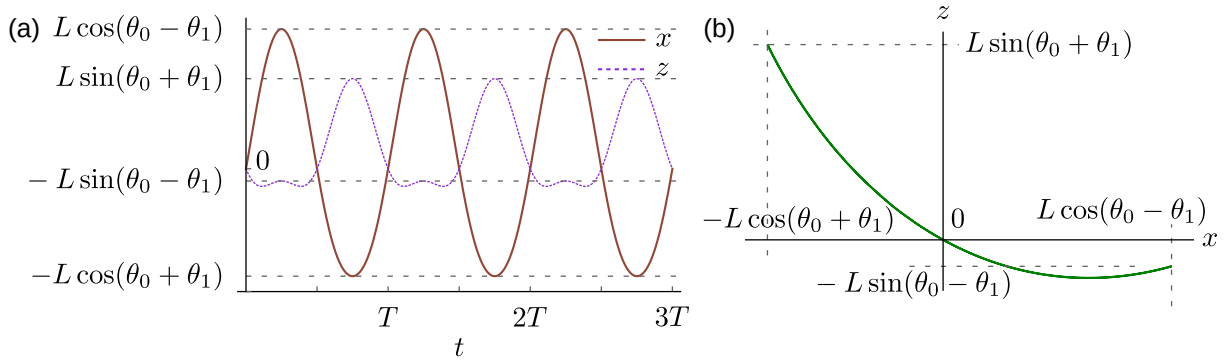


Abbildung 3.3: (a) Graphen der Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$ aus Teilaufgabe (d). (b) Die in der $x - z$ -Ebene von $x(t)$ und $z(t)$ beschriebene Kurve.

- (iii) Die Gesamtkraft folgt ebenfalls aus dem 2. Gesetz von Newton. Die mehrfache Anwendung der Produkt- und Kettenregel führt zu sehr komplexen Formeln, die wir mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms vereinfachen. Am Ende finden wir jedoch ein elegantes Resultat mit einer kleiner Korrektur im Vergleich zum Resultat der Teilaufgabe (c), wo die Rückenbewegung vernachlässigt wurde.

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) + v_0 t \\ -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{L.11})$$

Wir rechnen komponentenweise.

$$\begin{aligned}
& m \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\
&= m \frac{d^2}{dt^2} (L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) + v_0 t) \\
&= mL \frac{d}{dt} [2\pi f \cos(2\pi f t) \times \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \\
&\quad + \sin(2\pi f t) \times (2\pi f) \theta_1 \cos(2\pi f t) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t))] \\
&\quad + m \underbrace{\frac{d}{dt} v_0}_{=0} \\
&\dots
\end{aligned} \tag{L.12}$$

(in der folgenden Zeilen werden Ausdrücke farbkodiert, um die Ableitungsregeln besser nachvollziehen zu können:)

$$\begin{aligned}
&\dots \\
&= 2\pi mL f \frac{d}{dt} \cos(2\pi f t) [\cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \\
&\quad + \theta_1 \sin(2\pi f t) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t))] \\
&= 2\pi mL f \{ -2\pi f \sin(2\pi f t) \times \\
&\quad [\cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) + \theta_1 \sin(2\pi f t) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t))] \\
&\quad + \cos(2\pi f t) \times \\
&\quad [2\pi f \theta_1 \cos(2\pi f t) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \\
&\quad - 2\pi f \theta_1 \cos(2\pi f t) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \\
&\quad \theta_1 \sin(2\pi f t) 2\pi f \theta_1 \cos(2\pi f t) \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t))] \} \\
&\dots
\end{aligned} \tag{L.13}$$

An dieser Stelle suchen wir nach gemeinsamen Faktoren, um die Formel durch Faktorisieren zu vereinfachen. Leider stellen wir fest, dass die Terme in der geschweiften Klammer nur π und f als gemeinsame Faktoren haben. Der nächste Schritt wäre also, Produkte von Winkelfunktionen als Summen zu schreiben, wie z.B. $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$, und danach wieder versuchen, zu Faktorisieren. Dies würde uns mehrere Stunden beschäftigen. Wir greifen also zu einem Computeralgebraprogramm (hier wurde die Funktion FullSimplify von Wolfram Mathematica verwendet) und finden schlussendlich

$$\begin{aligned}
&= -2\pi^2 mL f^2 \times \\
&\quad [\sin(2\pi f t) (\theta_1^2 \cos(4\pi f t) + \theta_1^2 + 2) \cos(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \\
&\quad - \theta_1 (3 \cos(4\pi f t) + 1) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t))]
\end{aligned} \tag{L.14}$$

Die z-komponente berechnen wir ebenfalls computergestützt:

$$\begin{aligned}
& m \frac{d^2}{dt^2} z(t) \\
& = 4\pi^2 m L f^2 \times \\
& \quad \left[\sin(2\pi f t) (\theta_1^2 \cos(2\pi f t)^2 + 1) \sin(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \theta_1 (3 \cos(4\pi f t) + 1) \cos(\theta_0 - \theta_1 \cos(2\pi f t)) \right]
\end{aligned} \tag{L.15}$$

Für die Kraft finden wir (die Schreibweise $x^{\frac{1}{2}}$ statt \sqrt{x} wird bei langen Formeln bevorzugt)

$$\begin{aligned}
|\vec{F}(t)| &= m (\ddot{x}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^2 m L f^2 \left(-\theta_1^4 \cos(12\pi f t) + 2\theta_1^2 (14 - \theta_1^2) \cos(8\pi f t) \right. \\
& \quad \left. (\theta_1^4 + 48\theta_1^2 - 16) \cos(4\pi f t) + 2\theta_1^4 + 52\theta_1^2 + 16 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{L.16}$$

Ab hier ist es nicht mehr sinnvoll, mit einem Computer weiter zu Arbeiten. Um ein Maximum dieser Funktion zu finden, müssten wir mit numerischen Methoden arbeiten. Wir würden zwar richtige Zahlenwerte ausrechnen, die unten stehende kompakte und für alle θ_1 gültige Formel für die maximalen Kraft würden wir aber nicht finden.

Wir sehen erstmals, dass θ_0 in der Formel nicht vorkommt, was der Tatsache entspricht, dass die Kräfte nicht von unserer Wahl der Orientierung der Koordinatenachsen abhängen. Das Maximum dieser Funktion könnten wir zwar durch genaues Hinschauen erkennen, unsere physikalische Intuition ist aber effizienter. Wir erwarten ja, dass die Leber beim Umkehren maximal beschleunigt wird, also zu der Zeit $t = T/4$ (zur Zeit $t = 0$ ist ja die Leber in der Mitte der Linie auf der sie sich bewegt). Es ist $f \times T/4 = 1/4$ und $\cos(3\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

Damit ist die Maximalkraft

$$\begin{aligned}
|\vec{F}(t)|_{\max} &= \left| \vec{F}\left(\frac{T}{4}\right) \right| = m \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^2 m L f^2 \sqrt{\theta_1^4 - \theta_1^4 - 48\theta_1^2 + 16 + 2\theta_1^4 + 52\theta_1^2 + 16} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^2 m L f^2 \sqrt{2\theta_1^4 + 4\theta_1^2 + 32}
\end{aligned} \tag{L.17}$$

Wir sehen dass wir für einen stehenden Hasen ($\theta_1 = 0$) die gleiche maximale

Kraft wie in der Teilaufgabe (c) erhalten:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}(t)|_{\max}^{\theta_1=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^2 m L f^2 \sqrt{32} \\
 &= \sqrt{\frac{16 \times 2}{2}} \pi^2 m L f^2 \\
 &= \sqrt{16} \pi^2 m L f^2 \\
 &= 4 \pi^2 m L f^2
 \end{aligned} \tag{L.18}$$

Wir vergleichen den still stehenden Hasen mit dem laufenden Hasen, bei dem sich die Neigung des Rückens um $\pm\theta_1$ ändert (mit $\theta_1 = 17.5^\circ$).

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}(t)|_{\max}^{\theta_1=0} &= 4 \pi^2 m L f^2 \\
 &= 4 \pi^2 \times 1.2 \times 10^{-1} \text{ kg} \times 2.0 \times 10^{-2} \text{ m} \times (3.4 \text{ s}^{-1})^2 \\
 &= 4 \times 1.2 \times 2.0 \times 3.4^2 \times \pi^2 \times 10^{-3} \text{ kg m s}^{-2} \\
 &= 1.0953 \text{ N} \\
 &= 1.1 \text{ N} \quad (\text{innerhalb unserer Messgenauigkeit})
 \end{aligned} \tag{L.19}$$

Im Fall $\theta_1 = 17.5^\circ$ müssen wir beachten, dass die Einheit eines Winkels Radian ist:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}(t)|_{\max}^{\theta_1=17^\circ} &= 4 \pi^2 m L f^2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^2 \times 1.2 \times 10^{-1} \text{ kg} \times 2.0 \times 10^{-2} \text{ m} \times (3.4 \text{ s}^{-1})^2 \\
 &\quad \times \sqrt{2 \frac{17.5^\circ \times \pi^4}{180^\circ} + 4 \frac{17.5^\circ \times \pi^2}{180^\circ} + 32} \\
 &= 1.1452 \text{ N} \\
 &= 1.1 \text{ N} \quad (\text{innerhalb unserer Messgenauigkeit})
 \end{aligned} \tag{L.20}$$

Wir sehen, dass die zusätzliche Bewegung des Rückens nur wenig an der maximalen Kraft ändert. Der Unterschied liegt sogar unterhalb der in der Aufgabenstellung angenommenen Messgenauigkeit. Die Lösung des Problems unter Vernachlässigung der Rückenbewegung (Teilaufgabe (c)) war also eine gute Näherung: die Lunge übt den grössten Teil der Kräfte aus, die auf die Leber wirken. Andersrum müssten wir genauer Messen, wenn wir den Einfluss der Körperbewegung auf die Kräfte im Inneren des Körpers aussagekräftig untersuchen möchten.

Aufgabe 3.2. Forelle bei turbulenter Strömung

[+++]

In der Vorlesung haben wir das Beispiel einer schwimmenden Forelle betrachtet (Kapitel 5.1) und ihre Bewegung nach dem Ende der Schwimmbewegung berechnet (Kapitel 5.1.3). In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, wie sich die Situation ändert, wenn die Forelle mit höherer Geschwindigkeit unterwegs ist:

Das Problem dabei ist, dass die Formel für die Bremskraft,

$$\vec{F}_L = -\gamma_L \vec{v} , \quad (3)$$

nur für sogenannte *laminare Strömungen* gilt. Das sind Strömungen, bei denen keine Verwirbelungen entstehen, d. h. bei niedrigen Geschwindigkeiten. Bei höheren Geschwindigkeiten findet ein Übergang zu einer *turbulenten Strömung* statt, wo die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, also stärker anwächst:²

$$\vec{F}_T = -\gamma_T v^2 \vec{e}_v . \quad (4)$$

Dabei ist \vec{e}_v der Richtungsvektor der Geschwindigkeit.

Wir stellen uns nun die Frage: Inwiefern ändert sich dadurch der Abbremsvorgang der Forelle und unsere mathematische Beschreibung?

- (i) Bevor wir uns dem Problem richtig zuwenden, wollen wir uns zuerst mit den in Gleichung (4) auftretenden Größen befassen. Welche Dimension haben \vec{F} , γ_T , v und \vec{e}_v ?
- (ii) Nun betrachten wir die Situation, wo die Forelle durch ihre Flossenbewegung eine konstante Kraft \vec{F}_F aufbringt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie, welche Kraft die Forelle aufbringen muss, um eine konstante (stationäre) Geschwindigkeit von $v_S \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}$ in x -Richtung zu erreichen.

Hinweis. Nehmen Sie dazu an, dass die Konstante durch $\gamma \equiv \gamma_T \approx 5.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ gegeben und die Masse der Forelle $m \approx 1.0 \text{ kg}$ ist.

- (iii) Nun wollen wir, wie in Kapitel 5.1.3 im Skript, berechnen, was passiert, wenn die Forelle mit der konstanten Geschwindigkeit v_S unterwegs ist und zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich ihre Flossenbewegung stoppt. Wir folgen dazu den verschiedenen in der Vorlesung diskutierten Schritten und unterteilen das Problem so in überschaubare Teile:

1. Schritt: Was erwarten Sie intuitiv?

2. Schritt: Formulieren Sie mathematisch die Anfangsbedingung und die Bewegungsgleichung.

3. Schritt: In mehreren Teilschritten lösen wir nun die aufgestellte Bewegungsgleichung:

- (a) **Reduktion auf weniger als drei Raumrichtungen:** Begründen Sie, warum wir das Problem auf eine Raumrichtung reduzieren können und schreiben Sie Anfangsbedingung und Bewegungsgleichung entsprechend um.
- (b) **Skalen:** Bilden Sie aus den Konstanten m und γ eine charakteristische Längenskala ℓ . Benutzen Sie diese zusammen mit der Geschwindigkeitsskala v_S um eine charakteristische Zeitskala τ zu finden.
- (c) **Dimensionslose Bewegungsgleichung:** Welche dimensionsbehafteten Größen treten in der Bewegungsgleichung auf und welche Dimensionen haben diese jeweils? Begründen Sie mit Hilfe des π -Theorems von Buckingham, warum wir die Bewegungsgleichung so umschreiben können, dass nur noch zwei dimensionslose Größen ξ und η vorkommen und führen Sie diese Vereinfachung durch.

Hinweis. Definieren Sie dazu eine dimensionslose 'Geschwindigkeit' ξ und eine dimensionslose 'Zeit' η und setzen Sie diese in die Bewegungsgleichung ein. Die dimen-

²Im Laufe der Evolution haben sich die Körperformen und Oberflächen von Fischen (und anderen im Wasser lebenden Tieren wie Delfinen und Pinguinen) so entwickelt, dass dieser Übergang zu einer turbulenten Strömung erst bei relativ hohen Geschwindigkeiten auftritt, siehe z. B. H. Oertel und S. Ruck, *Bioströmungsmechanik: Grundlagen, Methoden und Phänomene*, Vieweg+Teubner Verlag. Für eine Forelle tritt der Übergang bei Geschwindigkeiten von etwa 0.1 m s^{-1} auf.

sionslose Bewegungsgleichung ist

$$\xi(\eta = 0) = 1, \quad (5a)$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\xi^2. \quad (5b)$$

- (d) **Lösung der Differentialgleichung:** Finden Sie eine mathematische Funktion, die die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis. Eine solche Differentialgleichung 1. Ordnung können wir z. B. mittels einer **Separation der Variablen** lösen. Dazu stellen wir Gleichung (5b) so um, dass alle Terme mit ξ auf der linken und alle Terme mit η auf der rechten Seite sind. Danach integrieren wir von $\xi' = \xi(\eta = 0)$ bis $\xi' = \xi(\eta)$ bzw. von $\eta' = 0$ bis $\eta' = \eta$.

Alternativ können Sie auch den 'geratenen' Ansatz $\xi(\eta) = -n(\eta + A)^n$ in die Differentialgleichung einsetzen und die Konstanten n und A bestimmen.

- (e) **Lösung des ursprünglichen Problems:** Setzen Sie nun wieder die ursprünglichen physikalischen Größen ein und skizzieren Sie die Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit.

Nun können wir die gefundene Lösung genauer betrachten und daraus einige Schlussfolgerungen ziehen.

- (iv) Skizzieren Sie die Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit.
- (v) Welche Beschleunigung wirkt auf die Forelle zum Zeitpunkt an dem sie ihre Flossenbewegung stoppt?
- (vi*) Berechnen Sie den Weg der Forelle als Funktion der Zeit. Welchen Weg legt sie im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ zurück? Wie können wir dies mit unseren Ergebnissen aus der Vorlesung vereinbaren?

Hinweis. Das Integral

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) \quad (6)$$

könnte nützlich sein.

Lösung.

- (i) Wir schreiben zuerst die Dimensionen der bekannten Größen auf. \vec{F} ist eine Kraft, hat also die Dimension $\dim \vec{F} = \frac{ML}{T^2}$. Die Geschwindigkeit hat $\dim v = \frac{L}{T}$. Der Richtungsvektor \vec{e}_v ist dimensionslos, $\dim \vec{e}_v = 1$.

Nun können wir aus den bekannten Dimensionen jene für γ_T erschliessen: Auf beiden Seiten der Gleichung muss die gleiche Dimension stehen, das heisst

$$\dim(\vec{F}_T) = \dim(\gamma_T) \times \dim(v)^2 \times \dim(\vec{e}_v). \quad (L.21)$$

Durch Umstellen der Gleichung und Einsetzen der bekannten Dimensionen finden wir

$$\dim(\gamma_T) = \frac{\dim(\vec{F}_T)}{\dim(v)^2} = \frac{\frac{ML}{T^2}}{\frac{L^2}{T^2}} = \frac{M}{L}. \quad (L.22)$$

Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass wir γ_T in der Einheit $[\gamma_T] = \text{kg m}^{-1}$ angeben.

- (ii) Auf die Forelle wirken zwei Kräfte: die Antriebskraft \vec{F}_F und die Reibungskraft $\vec{F}_T = -\gamma_T v^2 \vec{e}_v$. Diese führen gemäss dem zweiten Newtonschen Gesetz zu einer Geschwindigkeitsänderung:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \left[-\gamma_T v^2 \vec{e}_v + \vec{F}_F \right] . \quad (\text{L.23})$$

Bei der stationären Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit nicht, die linke Seite ist also Null. Daraus folgt aber

$$\gamma_T v_S^2 \vec{e}_v = \vec{F}_F \quad (\text{L.24})$$

d. h. einerseits muss die Kraft in x -Richtung wirken und andererseits ist

$$F_F = \gamma_T v_S^2 \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \times (5 \text{ m s}^{-1})^2 = \underline{0.125 \text{ N}} . \quad (\text{L.25})$$

- (iii) Nun diskutieren wir im Detail, was passiert, wenn die Forelle ihre Flossenbewegung stoppt.

1. Schritt: Intuitiv erwarten wir, dass die Forelle über die Zeit langsamer wird, da der Reibungskraft nun keine Antriebskraft mehr entgegengesetzt ist. Im Vergleich zur laminaren Strömung, die wir in der Vorlesung diskutiert haben, wird der Geschwindigkeitsabfall stärker sein, da die Reibungskraft bei höheren Geschwindigkeiten grösser ist.
2. Schritt: Zur Zeit $t = 0$ hat die Forelle die konstante Strömungsgeschwindigkeit in x -Richtung $\vec{v}(t = 0) = (v_S, 0, 0)$; dies ist unsere Anfangsbedingung. Danach wirkt nur noch die Reibungskraft, sodass sich die Gleichung (L.23) vereinfacht zu

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v^2 \vec{e}_v . \quad (\text{L.26})$$

3. Schritt: (a) **Reduktion auf weniger als drei Raumrichtungen:** Sowohl die Anfangsgeschwindigkeit als auch die Kraft zeigen entlang der x -Richtung, also wird sich die gesamte Bewegung entlang dieser abspielen. Wir können Anfangsbedingung und Bewegungsgleichung also vereinfachen zu

$$v_x(t = 0) = v_S , \quad (\text{L.27a})$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v_x^2 . \quad (\text{L.27b})$$

- (b) **Skalen:** Wir wissen bereits, dass $\dim m = \text{M}$ und $\dim \gamma = \text{M/L}$. Daraus finden wir einfach die charakteristische Längenskala

$$\ell = \frac{m}{\gamma} \simeq \frac{1 \text{ kg}}{5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}} = 200 \text{ m} \quad (\text{L.28})$$

mit $\dim \ell = \dim m / \dim \gamma = L$. Zusammen mit der Geschwindigkeit $\dim v_S = L/T$ finden wir

$$\tau = \frac{\ell}{v_S} = \frac{m}{\gamma v_S} \simeq \frac{1 \text{ kg}}{5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \times 5 \text{ m s}^{-1}} = 40 \text{ s} . \quad (\text{L.29})$$

Wir sehen, dass wir andere Skalen finden, als bei der laminaren Strömung, die wir in der Vorlesung diskutiert haben. Dies liegt einfach daran, dass die Konstante γ hier wegen der anderen Formel für die Reibungskraft eine andere Dimension hat.

- (c) **Dimensionslose Bewegungsgleichung:** In den Gleichungen (L.27) treten fünf dimensionsbehaftete Grössen auf:

Grösse	v_x	v_S	t	γ	m
Dimension	L/T	L/T	T	M/L	M

Es spielen die drei Dimensionen L, T und M eine Rolle; gemäss dem π -Theorem von Buckingham können wir die Differentialgleichung also mit zwei dimensionslosen Grössen schreiben.

Wir definieren nun die dimensionslose 'Geschwindigkeit' $\xi = v_x / v_S$ und die dimensionslose 'Zeit' $\eta = t / \tau$. Umgekehrt können wir $v_x = \xi v_S$ und $t = \eta \tau$ in die Gleichungen (L.27) einsetzen:

$$\xi(\eta = 0) v_S = v_S , \quad (\text{L.30a})$$

$$\frac{d(\xi v_S)}{d(\eta \tau)} = -\frac{\gamma}{m} (\xi v_S)^2 . \quad (\text{L.30b})$$

Bei der ersten Gleichung sehen wir direkt, dass sich v_S wegekürzt. Die zweite Gleichung schreiben wir um und finden

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\xi^2 \frac{\tau}{v_S} \frac{\gamma}{m} v_S^2 = -\xi^2 \tau \frac{\gamma v_S}{m} = -\xi^2 \tau \frac{1}{\tau} = -\xi^2 . \quad (\text{L.31})$$

Wir haben unsere Bewegungsgleichung also zurückgeführt auf die Differentialgleichung (5), also

$$\xi(\eta = 0) = 1 , \quad (\text{L.32a})$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\xi^2 . \quad (\text{L.32b})$$

- (d) **Lösung der Differentialgleichung:** Wir folgen dem Hinweis in der Aufgabenstellung und führen eine Separation der Variablen durch. Gleichung (5b) kann umgeschrieben werden zu

$$-\frac{d\xi}{\xi^2} = d\eta . \quad (\text{L.33})$$

Nun können wir hier beide Seiten integrieren und erhalten (wobei wir die Anfangsbedingung $\xi(\eta = 0) = 1$ benutzen)

$$\int_{\xi(\eta=0)}^{\xi(\eta)} -\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \int_0^\eta d\eta' \quad (\text{L.34a})$$

$$\left[\frac{1}{\xi'} \right]_{\xi(\eta=0)}^{\xi(\eta)} = [\eta']_0^\eta \quad (\text{L.34b})$$

$$\frac{1}{\xi(\eta)} - 1 = \eta \quad (\text{L.34c})$$

$$\xi(\eta) = \frac{1}{\eta + 1} . \quad (\text{L.34d})$$

$\xi(\eta) = -n(\eta + A)^n$ in die Gleichungen (L.32) ein. Die erste Gleichung wird zu $-nA^n = 1$, also $A = \sqrt[n]{-1/n}$. Bei der zweiten Gleichung finden wir

$$-n^2(\eta + A)^{n-1} = -n^2(\eta + A)^{2n} . \quad (\text{L.35})$$

Daraus folgt $2n = n - 1$, also $n = -1$ und damit $A = 1$. Die Lösung der Differentialgleichung ist also

$$\xi(\eta) = \frac{1}{\eta + 1} . \quad (\text{L.36})$$

- (e) **Lösung des ursprünglichen Problems:** Um die Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit zu finden, müssen wir wieder unsere ursprünglichen physikalischen Grössen in unsere Lösung (L.36) einsetzen. Damit erhalten wir

$$v_x(t) = v_S \xi(t/\tau) = \frac{v_S}{1 + \frac{t}{\tau}} \quad (\text{L.37})$$

- (iv) In Abbildung 3.4 ist die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit skizziert. Im Vergleich dazu sehen wir auch die im Skript diskutierte Lösung für eine laminare Strömung.

Beachten Sie, dass sich die Skalen v_S und τ in den beiden Situationen unterscheiden.

- (v) Die Beschleunigung können wir auf verschiedene Arten berechnen.

- Die einfachste Berechnung benutzt Gleichung (L.25): Dort haben wir gerade die Kraft berechnet, die für eine konstante Geschwindigkeit aufgewendet werden muss. Dies ist aber gerade die Bremskraft, die auf den Fisch wirkt, wenn er die Flossenbewegung stoppt. Um die Beschleunigung zu finden, benötigen wir nur das zweite Newtonsche Gesetz:

$$|a(t = 0)| = \frac{F_F}{m} \simeq \frac{0.125 \text{ N}}{1 \text{ kg}} = 0.125 \text{ m s}^{-2} . \quad (\text{L.38})$$

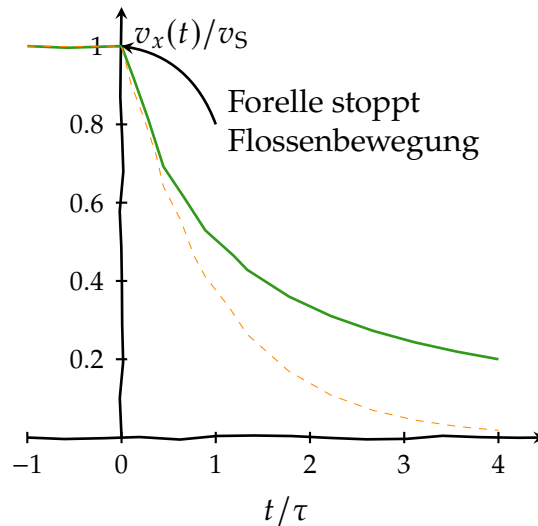


Abbildung 3.4: Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit. Wir vergleichen hier die hier berechnete Lösung (grün) mit jener für die laminare Strömung aus dem Skript (orange).

- Alternativ können wir Gleichung (L.37) benutzen: Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_S}{\tau \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (\text{L.39})$$

Setzen wir hier $t = 0$ ein, so finden wir

$$a_x(t = 0) = -\frac{v_S}{\tau} \simeq -\frac{5 \text{ m s}^{-1}}{40 \text{ s}} = -0.125 \text{ m s}^{-2} . \quad (\text{L.40})$$

- Als dritte Variante können wir die Differentialgleichung (L.26) benutzen und $v_x(t = 0) = v_S$ einsetzen. Damit erhalten wir erneut dieselbe Lösung.

(vi*) Die Position der Forelle erhalten wir als Integral der Geschwindigkeit, wobei wir $x(t = 0) = 0$ festlegen:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t = 0) + \int_0^t v_x(t') dt' \\ &= \int_0^t \frac{v_S}{1 + \frac{t'}{\tau}} dt' \\ &= v_S \tau \int_0^t \frac{dt'}{t' + \tau} \\ &= v_S \tau [\ln(t' + \tau)]_0^t \\ &= v_S \tau [\ln(t + \tau) - \ln(\tau)] \\ &= v_S \tau \ln\left(\frac{t + \tau}{\tau}\right) \\ &= v_S \tau \ln\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) . \end{aligned} \quad (\text{L.41})$$

Hier haben wir das Integral aus dem Hinweis benutzt.

Wir können an dem Ergebnis verschiedene Dinge überprüfen: Setzen wir $t = 0$ ein, so erhalten wir $x(t = 0) = v_S \tau \ln(1) = 0$, wie wir ursprünglich angenommen haben. Berechnen wir die Ableitung, so erhalten wir wieder die Formel für die Geschwindigkeit (L.37). Ausserdem sehen wir, dass die Bedingung erfüllt ist, dass das Argument des Logarithmus dimensionslos ist.

Allerdings stellt uns diese Lösung vor ein Problem: Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$, d. h. die Forelle würde nach unserer Berechnung bis ins Unendliche weitergleiten. Dies ist anders als in der Lösung für die laminare Strömung bei niedrigen Geschwindigkeiten, siehe Abbildung 3.5.

Wir haben bisher jedoch noch nicht berücksichtigt, dass die hier gefundene Lösung nur für höhere Geschwindigkeiten gilt. Unter einer Geschwindigkeit von etwa 0.1 m s^{-1} müssen wir die in der Vorlesung gefundene Lösung benutzen, die beiden also gewissermassen 'zusammenkleben'. Damit erhalten wir dann wieder das Ergebnis, dass die Forelle nur eine endliche Strecke weitergleitet.

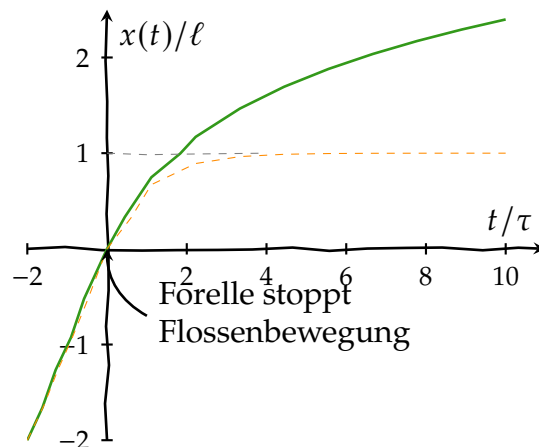


Abbildung 3.5: Distanz der Forelle als Funktion der Zeit. Wir vergleichen die hier berechnete Lösung (grün) mit jener für die laminare Strömung aus dem Skript (orange).