Abgabe am 6. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 2.1. *Warmup: Ableiten, Integrieren, Vektorrechnung* [††]

Diese rein mathematische Aufgabe gibt Ihnen die Gelegenheit, sich wieder in die Integral und Differenzialrechnung einzuarbeiten (die Mathematikvorlesung ist ja schon lange her).

(a) Berechnen sie das Integral $\int_0^t f(t')\,dt'$ für

(i) $f(t) = t^2$

(ii) $f(t) = e^{-\frac{t}{T}}$

(iii) $f(t) = \pi$

(b) Berechnen sie die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ für

(i) $f(t) = \frac{t^3}{3}$

(ii) $f(t) = T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

(iii) $f(t) = \pi\, t$

Ist Ihnen etwas aufgefallen?

(c) Summen, Zeitableitungen und Integrale von Vektoren kann man Komponentenweise rechnen, ohne sich viele Gedanken machen zu müssen. Mit den drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c(t)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^{-\frac{t}{T}} \\ \pi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

berechnen Sie

(i) $\vec{a} + \vec{b}$

(ii) $\int_0^t c(t')\,dt'$ (schauen Sie sich nochmals Frage (a) an)

Lösung.

(a) Wir verwenden verschiedene Symbole für die Integrationsvariable damit Sie sich an die Idee gewöhnen, dass es eben (in mathematischer Hinsicht) ein frei wählbares Symbol ist, ohne Bedeutung ausserhalb des Integrals.

(i) $f(t) = t^2$

$$\Rightarrow \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t (\tau)^2 d\tau = \left.\frac{\tau^3}{3}\right|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{t^3}{3} \tag{L.1}$$

(ii) $f(t) = e^{-\frac{t}{T}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^t f(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t e^{-\frac{\tilde{t}}{T}} d\tilde{t} = \left.-Te^{-\frac{\tilde{t}}{T}}\right|_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} &= -Te^{-\frac{t}{T}} - \left(-Te^{-\frac{0}{T}}\right) \\ &= T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \end{aligned} \tag{L.2}$$

(iii) $f(t) = \pi$

$$\Rightarrow \int_0^t f(t')dt' = \int_0^t \pi dt' = \pi t'|_{t'=0}^{t'=t} = \pi t - 0t = \pi t \tag{L.3}$$

(b) (i) $f(t) = \frac{t^3}{3}$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{d\frac{t^3}{3}}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d\left(t^3\right)}{dt} = \frac{1}{3}\,3t^2 = t^2 \tag{L.4}$$

(ii) $f(t) = T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d\left(T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)}{dt} = T\frac{d\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)}{dt} = T\left(\frac{d(1)}{dt} - \frac{d\left(e^{-\frac{t}{T}}\right)}{dt}\right)\\ &= T\left(0 - \left(-\frac{1}{T}\,e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)\\ &= e^{-\frac{t}{T}}\end{aligned} \tag{L.5}$$

(iii) $f(t) = \pi\ t$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{d(\pi t)}{dt} = \pi\frac{dt}{dt} = \pi \tag{L.6}$$

Wir stellen fest, dass wie erwartet der Fundamentalsatz der Analysis gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau = f(t). \tag{L.7}$$

Zum Schluss eine Bemerkung zur Notation: Die Ableitung der Funktion $f(t)$ ausgewertet an einem festen Zeitpunkt t_0, oft geschrieben $\frac{df(t_0)}{dt}$, ist streng genommen $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$ wobei t ein frei wählbares "internes" Symbol ist. Mit dieser sauberen Schreibweise vermeidet man Missverständnisse in komplizierten Rechnungen.

(c) Wir Rechnen komponentenweise, in Teil (ii) können wir die Ergebnisse aus Frage (a) direkt übernehmen.

(i)

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{L.8}$$

(ii)

$$\int_0^t c(t')\,dt' = \int_0^t \begin{pmatrix} (t')^2 \\ e^{-\frac{t'}{T}} \\ \pi \end{pmatrix} dt' \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} \\ T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) \\ \pi\ t \end{pmatrix} \tag{L.9}$$

Aufgabe 2.2. *Beschleunigung eines Pantoffeltierchens* [††]

Ein Pantoffeltierchen, siehe Abbildung 2.1, das sich an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befindet, beginnt zur Zeit $t = 0$ in x-Richtung loszuschwimmen. Die Geschwindigkeit des Einzellers (für $t > 0$) ist gegeben durch

$$v_x(t) = v_S \left(1 - e^{-t/\tau}\right) , \tag{2}$$

mit den Konstanten $v_S \simeq 1\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$ und $\tau \simeq 5\,\mathrm{ms}$.

Abbildung 2.1: Pantoffeltierchen unter dem Mikroskop.

(a) Was ist die intuitive Bedeutung der Konstanten v_S und τ?

(b) Berechnen Sie den Weg, den das Pantoffeltierchen als Funktion der Zeit zurücklegt.

(c) Berechnen und skizzieren Sie die Beschleunigung des Pantoffeltierchens als Funktion der Zeit.

Lösung.

(a) Am Anfang ($t = 0$) befindet das Tierchen in Ruhe, und wir haben tatsächlich $v_x(0) = 0$, weil $e^{-0/\tau} = 1$. Mit zunehmender Zeit t nimmt der Term $e^{-t/\tau}$ ab und nähert sich dem Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} e^{-t/\tau} = 0$. Für grosse Zeiten ist innerhalb unserer Messgenauigkeit $v_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_S \times 1$, und wir beobachten eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_S. Die Konstante v_S beschreibt also die *stationäre Geschwindigkeit*, mit der sich das Pantoffeltierchen typischerweise bewegt.

Die Konstante τ bestimmt die Zeit, nach der das Tierchen einen bestimmten Bruchteil der stationäre Geschwindigkeit erreicht hat. Je grösser τ, desto länger braucht das Tierchen, um eine bestimmte Geschwindigkeit zu erreichen. Zur Zeit $t = \tau$ hat das Tierchen $(1 - 1/e) \approx 63\%$ der Endgeschwindigkeit erreicht. Die konstante τ wird oft *charakteristische Zeit* der Phänomens (hier die Beschleunigung eines Pantoffeltierchen) genannt.

(b) Der Weg ist gegeben als Integral der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t v_\mathrm{S}\left(1 - \mathrm{e}^{-t'/\tau}\right)\mathrm{d}t' = v_\mathrm{S}\int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-t'/\tau}\right)\mathrm{d}t' \\ &= v_\mathrm{S}\left[t' + \tau\mathrm{e}^{-t'/\tau}\right]_{t'=0}^{t'=t} = v_\mathrm{S}\left[t + \tau\mathrm{e}^{-t/\tau} - 0 - \tau\mathrm{e}^{0}\right] \\ &= v_\mathrm{S}t + v_\mathrm{S}\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\ . \end{aligned} \tag{L.10}$$

(c) Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = v_\mathrm{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = \frac{v_\mathrm{S}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\ . \tag{L.11}$$

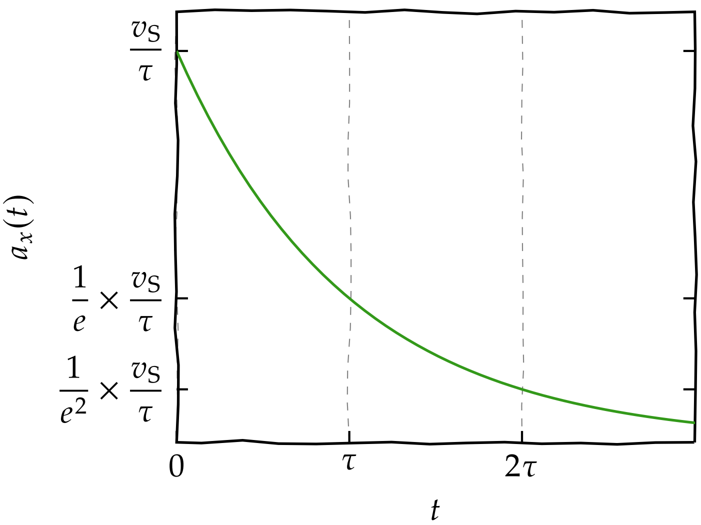

Abbildung 2.2: Beschleunigung des Pantoffeltierchens

Aufgabe 2.3. *Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Zentrifugen* *[††]*

Kein biologisches Labor kommt ohne eine oder mehrere Zentrifugen aus. Grund genug, sich mit den dort auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu beschäftigen und ein Gefühl für deren Grössenordnungen zu bekommen.

Für unsere Berechnungen benutzen wir zwei Beispiele, siehe Abbildung 2.3:

(i) Eine typische Tischzentrifuge mit maximaler Drehzahl von $f_1 = 15\,000\,\mathrm{rpm}$ und Rotorradius von $r_1 = 8.00\,\mathrm{cm}$.

(ii) Eine Ultrazentrifuge mit maximaler Drehzahl von $f_2 = 100\,000\,\mathrm{rpm}$ und Rotorradius $r_2 = 9.00\,\mathrm{cm}$.

Führen Sie alle folgenden Berechnungen für beide Zentrifugen bei ihren maximalen Drehzahlen durch. Zur Darstellung ihrer Ergebnisse können Sie annehmen, dass die Drehzahlen f_1 und f_2 mit einer Genauigkeit von $10\,\mathrm{rpm}$ gemessen wurden.

(a) Berechnen Sie aus den Drehzahlen die maximalen Winkelgeschwindigkeiten der Zentrifugen. In welche Richtung zeigt der Vektor $\vec{\omega}$, wenn die Rotoren sich in der horizontalen Ebene drehen?

Abbildung 2.3: Beispiele einer Tischzentrifuge (links) und Ultrazentrifuge (rechts).

(b) Berechnen Sie die maximalen Zentripetalbeschleunigung einer Probe die sich in einer Entfernung $r_{1,2}$ zur Rotationsachse befindet. Drücken Sie diese Beschleunigungen in Vielfachen der Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ aus (dieser Wert wird auch als RCF bezeichnet).

(c) Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die Proben in den Zentrifugen? Drücken Sie diese in Stundenkilometern aus und überlegen Sie, warum sich der Rotor einer Ultrazentrifuge im Vakuum befindet.

Lösung. In unseren numerischen Rechnungen erhalten wir die Anzahl signifikanter Stellen, die durch die Messgenauigkeit physikalischer Grössen gegeben ist. In $f_2 = 100000$ haben wir vier signifikante Stellen, da diese Grösse auf 10 rpm genau gemessen wurde. Die Schreibweise $f_2 = 1.000 \times 10^5$ rpm wiederspiegelt diese Genauigkeit. Wenn in einer Rechnung die Grössen $f_2 = 1.000 \times 10^5$ rpm (4 signifikante Stellen), $r_2 = 9.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$ (3 signifikante Stellen) und $30\,\mathrm{s\,min^{-1}}$ (exakt bekannte Konstante) vorkommen, runden wir das Resultat auf 3 signifikante Stellen. Diese Vorgehensweise ist übrigens nicht willkürlich gewählt, sie folgt aus der Annahme, dass sich Fehler linear fortpflanzen.

(a) Zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit ω errinern wir uns, dass eine Drehzahl von $f = 1$ rpm einer Umdrehung pro Minute entspricht, das heisst einem Winkel von 2π pro 60 Sekunden :

$$\omega = \frac{f \times 2\pi}{60\,\mathrm{s\,min^{-1}}} = \frac{f \times \pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}} \tag{L.12}$$

Für die zwei verschiedenen Zentrifugen erhalten wir:

(i) Tischzentrifuge:

$$\begin{aligned}\omega_1 = \frac{f_1 \times \pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}} &= \frac{15\,000\,\mathrm{rpm} \times \pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}} = \frac{1.50 \times 10^4\,\mathrm{rpm} \times \pi}{3 \times 10^1\,\mathrm{s\,min^{-1}}} \\ &= \frac{1.50 \times \pi}{3} \times \frac{10^4}{10^1} \times \frac{\mathrm{rpm\,min}}{\mathrm{s}} \\ &= 1.57 \times 10^3\,\mathrm{s^{-1}}\end{aligned} \tag{L.13}$$

(ii) Ultrazentrifuge:

$$\omega_2 = \frac{f_2 \times \pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}} = \frac{100\,000\,\mathrm{rpm} \times \pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}} = \frac{1.000 \times 10^5\,\mathrm{rpm} \times \pi}{3 \times 10^1\,\mathrm{s\,min^{-1}}}$$
$$= \frac{1.000 \times \pi}{3} \times \frac{10^5}{10^1} \times \frac{\mathrm{rpm\,min}}{\mathrm{s}} \tag{L.14}$$
$$= 1.047 \times 10^4\,\mathrm{s^{-1}}$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ ist parallel zur Drehachse und hat die Richtung, in die sich eine Schraube bewegen würde, die im Umlaufsinn des Objekts gedreht wird. Wenn wir also im Labor vor einer Zentrifuge stehen, und sich diese von oben gesehen im Uhrzeigersinn dreht, dann zeigt $\vec{\omega}$ zum Boden.

(b) Die Zentrifugalbeschleunigung a_Z ist proportional zur Entfernung r von der Rotationsachse und zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω:

$$a_\mathrm{Z} = r\omega^2 \tag{L.15}$$

Der RCF Wert (relative centrifugal force) ergibt sich aus RCF $= a_\mathrm{Z}/g$ und ist einheitslos. Für die zwei Zentrifugen erhalten wir:

(i) Tischzentrifuge:

$$a_{\mathrm{Z},1} = \frac{r_1\, f_1^2 \times \pi^2}{900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}} = \frac{8.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times \left(1.50 \times 10^4\,\mathrm{rpm}\right)^2 \times \pi^2}{900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}$$
$$= \frac{8.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times 2.25 \times 10^8\,\mathrm{rpm^2} \times \pi^2}{9 \times 10^2\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}$$
$$= \frac{8.00 \times 2.25 \times \pi^2}{9} \times \frac{10^{-2} \times 10^8}{10^2} \times \frac{\mathrm{m\,rpm^2\,min^2}}{\mathrm{s^2}} \tag{L.16}$$
$$= 19.7 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$
$$= 1.97 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\mathrm{RCF}_1 = \frac{a_{\mathrm{Z},1}}{g} = \frac{r_1\, f_1^2 \times \pi^2}{g \times 900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}$$
$$= \frac{8.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times 2.25 \times 10^8\,\mathrm{rpm^2} \times \pi^2}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times 9 \times 10^2\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}} \tag{L.17}$$
$$= \frac{8.00 \times 2.25 \times \pi^2}{9.81 \times 9} \times \frac{10^{-2} \times 10^8}{10^2} \times \frac{\mathrm{m\,rpm^2\,min^2\,s^2}}{\mathrm{m\,s^2}}$$
$$= 2.01 \times 10^4$$

(ii) Ultrazentrifuge:

$$
\begin{aligned}
a_{Z,2} = \frac{r_2\, f_2^2 \times \pi^2}{900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}} &= \frac{9.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}\times\left(1.000\times10^{5}\,\mathrm{rpm}\right)^2\times\pi^2}{900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}\\
&= \frac{9.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}\times1.000\times10^{10}\,\mathrm{rpm^2}\times\pi^2}{9\times10^{2}\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}\\
&= \frac{9.00\times1.000\times\pi^2}{9}\times\frac{10^{-2}\times10^{10}}{10^{2}}\times\frac{\mathrm{m\,rpm^2\,min^2}}{\mathrm{s^2}}\\
&= 9.87\times10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-2}}
\end{aligned}
\tag{L.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RCF}_2 = \frac{a_{Z,2}}{g} &= \frac{r_2\, f_2^2\times\pi^2}{g\times900\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}\\
&= \frac{9.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}\times1.000\times10^{10}\,\mathrm{rpm^2}\times\pi^2}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\times9\times10^{2}\,\mathrm{s^2\,min^{-2}}}\\
&= \frac{9.00\times1.000\times\pi^2}{9.81\times9}\times\frac{10^{-2}\times10^{10}}{10^{2}}\times\frac{\mathrm{m\ rpm^2\ min^2\ s^2}}{\mathrm{m\ s^2}}\\
&= 1.01\times10^{6}
\end{aligned}
\tag{L.19}
$$

(c) Die Geschwindigkeit mit der sich Proben entlang der Kreisbahn bewegen ist $v = r\omega$. Für die zwei Zentrifugen haben wir also:

(i) Tischzentrifuge:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= r_1\omega_1\\
&= \frac{r_1\, f_1\times\pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}}\\
&= \frac{8.00\times10^{-2}\,\mathrm{m}\times1.50\times10^{4}\,\mathrm{rpm}\times\pi}{3\times10^{1}\,\mathrm{s\,min^{-1}}}\times\frac{3.6\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\\
&= \frac{8.00\times1.50\times3.6\times\pi}{3}\times\frac{10^{-2}\times10^{4}}{10^{1}}\times\frac{\mathrm{m\,rpm\,km\,min\,s}}{\mathrm{s\,m\,h}}\\
&= 4.52\times10^{2}\,\mathrm{km\,h^{-1}}
\end{aligned}
\tag{L.20}
$$

(ii) Ultrazentrifuge:

$$
\begin{aligned}
v_2 &= r_2\omega_2\\
&= \frac{r_2\, f_2\times\pi}{30\,\mathrm{s\,min^{-1}}}\\
&= \frac{9.00\times10^{-2}\,\mathrm{cm}\times1.000\times10^{5}\,\mathrm{rpm}\times\pi}{3\times10^{1}\,\mathrm{s\,min^{-1}}}\times\frac{3.6\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\\
&= \frac{9.00\times1.000\times3.6\times\pi}{3}\times\frac{10^{-2}\times10^{5}}{10^{1}}\times\frac{\mathrm{m\,rpm\,km\,min\,s}}{\mathrm{s\,m\,h}}\\
&= 3.39\times10^{3}\,\mathrm{km\,h^{-1}}
\end{aligned}
\tag{L.21}
$$

Der Rotor einer Ultrazentrifuge befinded sich im Vakuum, weil er sich sonst durch Luftreibung sehr stark erwärmen würde. Der Rotor überschreitet sogar die Schallgeschwindigkeit in Luft, wodurch eine Stosswelle (Überschallknall) in der Zentrifuge entstehen würde.

Aufgabe 2.4. *Verständnisfragen: Transport in einer Zelle* *[††]*

Ein verhältnismässig schweres Mitochondrium wird von einem kleinen und leichten Kinesin gezogen.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt und warum?

- (i) Das Mitochondrium übt eine grössere Kraft auf das Kinesin aus als das Kinesin auf das Mitochondrium.
- (ii) Das Mitochondrium übt eine gleich grosse Kraft auf das Kinesin wie als das Kinesin auf das Mitochondrium.
- (iii) Das Mitochondrium übt eine kleinere Kraft auf das Kinesin aus als das Kinesin auf das Mitochondrium.
- (iv) Nur das Mitochondrium übt eine Kraft auf das Kinesin aus.

(b) Wir betrachten nun die stationäre Bewegung, der Kinesin–Mitochondrium-Komplex bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit. Beantworten Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie korrekt sind oder nicht und warum:

- (i) Auf das Mitochondrium wirkt nur die Reibungskraft durch die umgebende Flüssigkeit.
- (ii) Das erste Newtonsche Gesetz besagt, dass in dieser Situation keine Kräfte wirken.
- (iii) Die Gesamtkraft auf das Kinesin ist Null.
- (iv) Das dritte Newtonsche Gesetz besagt, dass die Reibungskraft auf das Mitochondrium gleich gross ist wie die Kraft mit der es vom Kinesin gezogen wird.

Lösung.

(a) Gemäss dem dritten Newtonschen Gesetz treten Kräfte immer in **gleich grossen** und entgegengesetzten Paaren auf. In diesem Fall bedeutet dies, dass die Kraft, die das Mitochondrium auf das Kinesin ausübt, gleich gross ist wie die, die das Kinesin auf das Mitochondrium ausübt, **(ii)** ist also richtig.

(b)
- (i) ✗ Nein, wäre das der Fall, so müsste das Mitochondrium gemäss dem zweiten Newtonschen Gesetz abbremsen. Tatsächlich besagen das erste und zweite Newtonsche Gesetz, dass im hier beschriebenen Fall einer konstanten Geschwindigkeit die *Gesamtkraft* auf das Mitochondrium Null sein muss, es also eine weitere Kraft geben muss.
- (ii) ✗ Das erste Newtonsche Gesetz besagt, dass die *Gesamtkraft* auf das Kinesin und das Mitochondrium Null sein muss. Das heisst aber nicht, dass gar keine Kräfte wirken können. Tatsächlich wirken in der hier beschriebenen Situation verschiedene Kräfte: eine Reibungskraft auf das Mitochondrium,

eine Kraft zwischen Kinesin und Mitochondrium und eine weitere Kraft zwischen Kinesin und Mikrotubulus.

(iii) ✓ Dies ist die korrekte Schlussfolgerung aus dem ersten Newtonschen Gesetz für eine stationäre Bewegung.

(iv) ✗ Dass die Reibungskraft auf das Mitochondrium gleich gross ist wie die Kraft mit der es vom Kinesin gezogen wird ist eine Bedingung für die stationäre Bewegung wegen des ersten und zweiten Newtonschen Gesetzes. Das dritte Newtonsche Gesetz macht lediglich eine Aussage über die zwischen zwei Teilchen wirkenden Kräfte; in dieser Situation besagt es z. B. dass das Kinesin eine gleich grosse Kraft auf das Mitochondrium ausübt wie umgekehrt.