Lösungsvorschläge zur Serie 7

Aufgabe 1

a) Wegen $x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \iff z = 4 - x^2 - y^2$ definieren wir eine Funktion g mit $g(x, y) = z = 4 - x^2 - y^2$.

Die zu untersuchende Fläche betrachten wir als Graph von g über der xy-Ebene. Es gilt $g(1, 2) = -1$. Also liegt $(1, 2, -1)$ auf der Fläche.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = g(x, y)$ im Punkt $(1, 2, -1)$ ist gegeben durch

$$z = g(1, 2) + g_x(1, 2)(x - 1) + g_y(1, 2)(y - 2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -2x, \quad g_x(1, 2) = -2 \\ g_y(x, y) &= -2y, \quad g_y(1, 2) = -4. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene wird also durch

$$z = -1 - 2(x - 1) - 4(y - 2) = 9 - 2x - 4y$$

beschrieben, d.h. die gesuchte Tangentialebene ist die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 9 - 2x - 4y\}.$$

b) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ ist gegeben durch

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}, & f_x(1, 1) &= 0, \\ f_y(x, y) &= \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2}, & f_y(1, 1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene ist damit gegeben durch

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 1 - \tfrac{1}{2}y\}.$$

Aufgabe 2

a) Nach der Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern ist

$$F_r(r,\phi) \quad = \quad f_x(x,y)\cdot x_r(r,\phi) + f_y(x,y)\cdot y_r(r,\phi).$$

Es gilt

$$f_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}.$$

Zusätzlich gilt $x_r(r,\phi) = \cos(\phi)$ und $y_r(r,\phi) = \sin(\phi)$. Setzen wir alles in $F_r(r,\phi)$ ein, folgt mit $\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$ dass

$$\begin{aligned}
F_r(r,\phi) &= \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\cdot\cos(\phi) + \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}\cdot\sin(\phi)\\
&= \frac{r^2(\sin(\phi)^2-\cos(\phi)^2)}{r^4}\cdot\cos(\phi) + \frac{-2r^2\cos(\phi)\sin(\phi)}{r^4}\cdot\sin(\phi)\\
&= \frac{-\cos(\phi)^3-\sin(\phi)^2\cos(\phi)}{r^2}\\
&= -\frac{-\cos(\phi)(\cos(\phi)^2+\sin(\phi)^2)}{r^2}\\
&= -\frac{\cos(\phi)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Art folgt aus der Formel

$$F_\phi(r,\phi) \quad = \quad f_x(x,y)\cdot x_\phi(r,\phi) + f_y(x,y)\cdot y_\phi(r,\phi),$$

mit $x_\phi(r,\phi) = -r\sin(\phi)$ und $y_\phi(r,\phi) = r\cos(\phi)$, dass

$$\begin{aligned}
F_\phi(r,\phi) &= \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\cdot(-r\sin(\phi)) + \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}\cdot r\cos(\phi)\\
&= \frac{r^2(\sin(\phi)^2-\cos(\phi)^2)}{r^4}\cdot(-r\sin(\phi)) + \frac{-2r^2\cos(\phi)\sin(\phi)}{r^4}\cdot r\cos(\phi)\\
&= \frac{-\sin(\phi)^3-\cos(\phi)^2\sin(\phi)}{r}\\
&= -\frac{-\sin(\phi)(\sin(\phi)^2+\cos(\phi)^2)}{r}\\
&= -\frac{\sin(\phi)}{r}.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Aufgabe setzen wir die Parametergleichungen $x(r,\phi) = r\cos(\phi)$ und $y(r,\phi) = r\sin(\phi)$ in die Funktionsgleichung von $F(r,\phi)$ ein

$$F(r,\phi) = f(x(r,\phi),y(r,\phi)) = \frac{r\cos(\phi)}{r^2\cos(\phi)^2+r^2\sin(\phi)^2} = \frac{\cos(\phi)}{r}.$$

So können wir die partiellen Ableitungen F_r und F_ϕ direkt ausrechnen

$$F_r(r,\phi) = -\frac{\cos(\phi)}{r^2} \qquad F_\phi(r,\phi) = -\frac{\sin(\phi)}{r}.$$

Wir sehen, dass die Funktionen mit den Funktionen, die wir durch Anwendung der Kettenregel erhalten haben, übereinstimmen.

b) Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} F_s(s,t) &= f_x(x,y)\cdot x_s(s,t) + f_y(x,y)\cdot y_s(s,t) \\ &= (2xy+y^2)\cdot 1 + (x^2+2xy)\cdot 1 \\ &= 4xy + x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Dies können wir wieder als eine Funktion $g(x,y)$ auffassen, also $F_s(s,t) = g(x(s,t), y(s,t))$ und mit Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} F_{ss}(s,t) &= g_x(x,y)\cdot x_s(s,t) + g_y(x,y))\cdot y_s(s,t) \\ &= (4y+2x)\cdot 1 + (4x+2y)\cdot 1 \\ &= 6x + 6y = 6(s+t) + 6(s-t) \\ &= 12s. \end{aligned}$$

Aus $F_s(s,t) = g(x(s,t), y(s,t))$ folgt auch analog

$$\begin{aligned} F_{st}(s,t) &= g_x(x,y)\cdot x_t(s,t) + g_y(x,y)\cdot y_t(s,t) \\ &= (4y+2x)\cdot 1 + (4x+2y)\cdot(-1) \\ &= 2y - 2x = 2(s-t) - 2(s+t) \\ &= -4t. \end{aligned}$$

Für $F_{tt}(s,t)$ berechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} F_t(s,t) &= f_x(x,y)\cdot x_t(s,t) + f_y(x,y)\cdot y_t(s,t) \\ &= (2xy+y^2)\cdot 1 + (x^2+2xy)\cdot(-1) \\ &= y^2 - x^2 \end{aligned}$$

und fassen dies als eine Funktion $h(x,y)$ auf. So erhalten wir aus $F_t(s,t) = h(x(s,t), y(s,t))$ wie oben

$$\begin{aligned} F_{tt}(s,t) &= h_x(x,y)\cdot x_t(s,t) + h_y(x,y)\cdot y_t(s,t) \\ &= (-2x)\cdot 1 + (2y)\cdot(-1) = -2(s+t) - 2(s-t) \\ &= -4s. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Durch Einsetzen von $y = -x-1$ in die Gleichung $F(x,y) = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$3x^2 + x = x(3x+1) = 0$$

mit Lösungen $x = 0$ und $x = -\frac{1}{3}$. Die Schnittpunkte sind somit $(x_1, y_1) = (0, -1)$ und $(x_2, y_2) = (-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3})$.

b) Aus Aufgabe 3a) wissen wir, dass der Punkt $(0,-1)$ auf der Kurve gegeben durch $F(x,y) = 0$ liegt. Wir bestimmen die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x_0, y_0) = (0,-1)$ mit Impliziter Differentiation:

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0 - 3y_0}{-2y_0 - 3x_0} = -\frac{3}{2}.$$

Die Gleichung der Tangente ist also die Gleichung einer Geraden mit Steigung $-\frac{2}{3}$, die durch den Punkt $(0, -1)$ geht

$$y(x) = -\frac{3}{2}x - 1.$$

Aufgabe 4

a) Es gilt für die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$

$$f_x(x, y) = 3y - 3x^2 \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 3x - 3y^2.$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind somit

$$\begin{aligned} 3y - 3x^2 &= 0 \\ 3x - 3y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir die 1. Gleichung in die 2. ein, folgt $0 = x - x^4 = x(1 - x^3)$ mit den zwei Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. In die erste Gleichung eingesetzt ergibt sich $y = 0$ und $y = 1$. Die kritischen Punkte sind also $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Mit $f_{xx} = -6x$, $f_{xy} = 3$ und $f_{yy} = -6y$ erhalten wir

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 36xy - 9.$$

Wir setzen die kritischen Punkte in $D(x, y)$ ein und bekommen

$$\Delta(0, 0) = -9 < 0$$

und somit ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt. Weiter folgt

$$\Delta(1, 1) = 27 > 0.$$

Nun gilt $f_{xx}(1, 1) = -6$ und damit ist $(1, 1)$ ist ein relatives Maximum.

b) Es gilt für die partiellen Ableitungen von $g(x, y)$

$$g_x(x, y) = 3x^2 + 4xy \quad \text{und} \quad g_y(x, y) = 2x^2 + 6y.$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind somit

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy &= 0 \\ 2x^2 + 6y &= 0. \end{aligned}$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 3x^2 &= -4xy \\ x^2 &= -3y. \end{aligned}$$

Setzen wir die 2. Gleichung in die 1. ein, folgt $9y = 4xy$. Entweder ist $y = 0$, und dann folgt $x = 0$ aus der zweiten Gleichung, oder $y \neq 0$, und dann ist $9 = 4x$, also $x = \frac{9}{4}$. Daraus folgt wiederum mit der zweiten Gleichung $y = -\frac{27}{16}$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{9}{4}, -\frac{27}{16})$.

Mit $g_{xx} = 6x + 4y$, $g_{xy} = 4x$ und $g_{yy} = 6$ erhalten wir

$$\Delta(x,y) = g_{xx}(x,y)g_{yy}(x,y) - g_{xy}^2(x,y) = 36x + 24y - 16x^2.$$

Wir setzen die kritischen Punkte in $D(x,y)$ ein und bekommen

$$\Delta(0,0) = 0.$$

Mit unseren Kriterien kommen wir nicht weiter, da weder $\Delta < 0$ und somit Sattelpunkt noch $\Delta > 0$ und somit relatives Maximum/Minimum. Wir können uns aber überlegen, dass die Funktion g im kritischen Punkt $(0,0)$ den Wert $g(0,0) = 0$ besitzt und in der Nähe des kritischen Punktes sowohl Werte kleiner als 0 als auch grsser als 0 annimmt. Denn z.B. gilt für Punkte der Form $(x,0)$, dass $g(x,0) = x^3$. Der kritische Punkt $(0,0)$ kann also kein relatives Maximum oder Minimum von g sein. Somit muss $(0,0)$ ein Sattelpunkt sein.

Für den zweiten kritischen Punkt gilt

$$\Delta\left(\frac{9}{4}, -\frac{27}{16}\right) = -\frac{81}{2} < 0$$

und somit ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

c) Wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$h_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - 16x \quad \text{und} \quad h_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} - 8y.$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind somit

$$\begin{aligned} 2x(e^{x^2+y^2} - 8) &= 0 \\ 2y(e^{x^2+y^2} - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung folgt, dass entweder $x = 0$ oder $e^{x^2+y^2} - 8 = 0$.

- Falls $x = 0$, dann folgt aus der zweiten Gleichung $2y(e^{y^2} - 4) = 0$ und somit ist $y = 0$ oder $e^{y^2} - 4 = 0$, das heisst $y^2 = \ln 4 = 2\ln 2$ also $y = \pm\sqrt{2\ln 2}$.
  Die kritischen Punkte sind somit $(0,0)$ und $(0, \pm\sqrt{2\ln 2})$.
- Betrachten wir jetzt den zweiten Fall $e^{x^2+y^2} - 8 = 0$. Die zweite Gleichung ist erfüllt falls $y = 0$ oder $e^{x^2+y^2} - 4 = 0$. Letzteres kann aber in diesem Fall gar nie erfüllt werden, denn $e^{x^2+y^2} = 8$. Es bleibt also nur die Möglichkeit $y = 0$ übrig und die erste Gleichung wird zu $e^{x^2} - 8 = 0$. Daraus folgt ähnlich wie oben $x = \pm\sqrt{3\ln 2}$.
  Die kritischen Punkte sind somit $(\pm\sqrt{3\ln 2}, 0)$.

Damit haben wir alle kritischen Punkte gefunden: $(x, y) = (0, 0)$ oder $(x, y) = (0, \pm\sqrt{2 \ln 2})$ oder $(x, y) = (\pm\sqrt{3 \ln 2}, 0)$.

Wir kontrollieren jetzt die kritischen Punkte. Es gilt

$$\begin{aligned}
h_{xx}(x, y) &= 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2) - 16 \\
h_{xy}(x, y) &= 4xye^{x^2+y^2} \\
h_{yy}(x, y) &= 2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2) - 8
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\Delta(x, y) &= h_{xx}(x, y)h_{yy}(x, y) - h_{xy}^2(x, y) \\
&= \left(2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2) - 16\right)\left(2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2) - 8\right) - 16x^2y^2e^{2x^2+2y^2},
\end{aligned}$$

und in den kritischen Punkten

$$\begin{aligned}
\Delta(0, 0) &= (-14) \cdot (-6) > 0, \quad h_{xx}(0, 0) = -14 < 0 \\
\Delta(0, \pm\sqrt{2 \ln 2}) &= (-8) \cdot (32 \ln 2) < 0 \\
\Delta(\pm\sqrt{3 \ln 2}, 0) &= (96 \ln(2)) \cdot (8) > 0, \ h_{xx}(\pm\sqrt{3 \ln 2}, 0) = 96 \ln(2) > 0.
\end{aligned}$$

Daraus schliessen wir, dass $(0, 0)$ eine relative Maximalstelle ist, dass $(0, \pm\sqrt{2 \ln 2})$ zwei Sattelpunkte und dass $(\pm\sqrt{3 \ln 2}, 0)$ zwei relative Minima sind.