Abgabe am 27. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 6.1. *Kunstschwimmen eines Schnabeltiers*

Ein Schnabeltier der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ macht einen Looping im Wasser. Genauer gesagt führt das Tier eine Umdrehung auf einer vertikalen Kreisbahn mit Radius $R = 2\,\mathrm{m}$ und der konstanten Geschwindigkeit $v = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ aus.

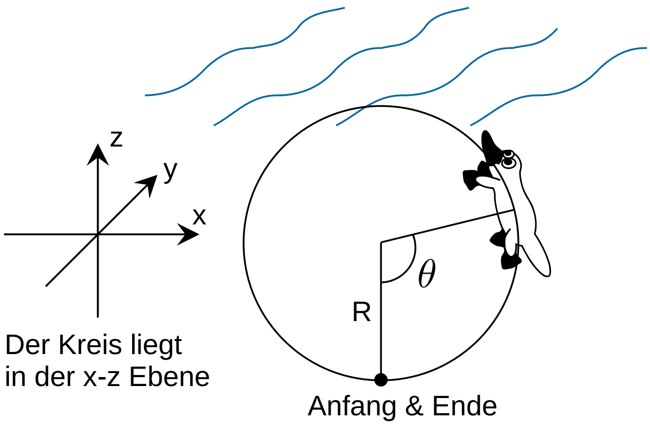

Abbildung 6.1: Vertikale Kreisbewegung des Schnabeltiers unterhalb der Wasseroberfläche. Es ist sinnvoll den Winkel θ als Koordinate für die Beschreibung dieser effektiv eindimensionalen Bewegung zu verwenden.

- Durch die turbulente Strömung entsteht eine **Reibungskraft**

$$\vec{F}_\mathrm{L} = -\gamma|\vec{v}|^2\,\hat{v} \tag{1}$$

  mit dem Reibungskoeffizient $\gamma = 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$. Hier ist $\hat{v}$ der Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit.

- Es wirkt die **Schwerkraft** $\vec{F}_\mathrm{g} = -mg\,\hat{z}$. Hier ist $\hat{z}$ der Einheitsvektor in Richtung der z-Achse.

- Die Dichte des Körpers des Schnabeltiers ist etwas höher als die des Wassers, so dass eine senkrecht nach oben gerichtete **Auftriebskraft**

$$\vec{F}_\mathrm{Auf} = 0.95 \times mg\,\hat{z} \tag{2}$$

  auf das schwimmende Tier wirkt.

- Das Tier übt eine **Antriebskraft** $\vec{F}_\mathrm{An}$ aus.

(a) In Abbildung 6.2 sind zwei Punkte der Bahn rot markiert. Zeichnen Sie an jedem dieser Punkte die vier Kraftvektoren und deren Summe. Zeichnen Sie die Länge der Vektorpfeile ungefähr massstabsgetreu.

Hinweis. Überlegen Sie sich zuerst, welche Gesamtkraft auf das Schnabeltier wirkt.

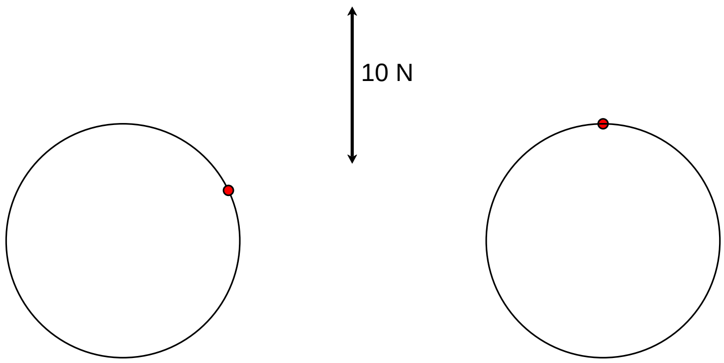

Abbildung 6.2: Skizze zu Teilaufgabe (a). Mit dem gegebenen Massstabsbalken für die Länge der Kraftvektorpfeile haben Sie in dieser Skizze genug Platz für Ihre Zeichnung.

(b) Skizzieren Sie ohne Rechnung den Verlauf der potentiellen und der kinetischen Energie des Schnabeltiers als Funktion des Winkels θ, von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$. Ist das Schnabeltier ein konservatives mechanisches System?

(c) Berechnen Sie die Bremsarbeit, die das Wasser an dem Tier im Laufe eines Loopings verrichtet. Ist die Reibungskraft konservativ?

(d) Berechnen Sie die im Laufe eines Loopings von der Schwerkraft geleistete Arbeit. Ist die Schwerkraft konservativ?

(e) Berechnen Sie die im Laufe eines Loopings von dem Schnabeltier geleistete Arbeit. Ist die Antriebskraft konservativ?

Hinweis. *Müssen sie in Teilaufgabe (e) viel rechnen? Tipp: die Auftriebskraft ist konservativ.*

Zugegebenerweise ist das Schnabeltier hier recht schnell. Wir haben Zahlenwerte so gewählt, dass sich Vektorenpfeile bequem masstabsgetreu zeichnen lassen.

Aufgabe 6.2. *Leistung eines gehenden Menschen*

Die kinetische Energie und die potentielle Energie eines im Schwerefeld der Erde gehenden Menschen der Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ wurde als Funktion der Zeit gemessen. Die Daten sind in Abbildung 6.3 zu sehen. Sie stammen aus dem Artikel *Biomechanics of Walking and Running: Center of Mass Movements to Muscle Action* von C. T. Farley und D. P. Ferris in Exercise and Sport Sciences Reviews **28** 253-286 (1998).

(a) Schätzen Sie die Geschwindigkeit und die Höhe der vertikale Bewegung des Menschen ab. Sie Dürfen Werte aus dem Graphen sehr grob ablesen, indem Sie auf 10 J runden.

(b) Können Sie dem Graphen entnehmen, wie viel Energie pro schritt Verloren geht?

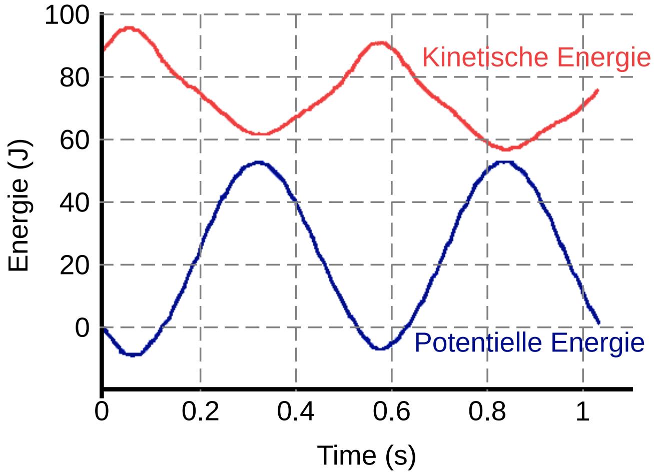

Abbildung 6.3: Kinetische Energie (rot) und potentielle Energie (blau) eines gehenend Menschen.

Aufgabe 6.3. ***Arbeit und Leistung einer Forelle***

Wir betrachten eine bei laminarer Strömung schwimmende Forelle mit der Masse $m \simeq 1\,\text{kg}$. Es wirkt eine Reibungskraft

$$\vec{F}_L = -\gamma \vec{v} \tag{3}$$

mit dem Reibungskoeffizient $\gamma = 5 \times 10^{-2}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}$.

Die Teilaufgaben (a), (b) und (c) können unanbhängig voneinander gelöst werden.

(a) Wie viel Arbeit muss die Forelle leisten, um 1 km weit mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ zu schwimmen? Wie viel Arbeit leistet dabei die Reibungskraft?

(b) Berechnen Sie die Leistung einer Forelle, die mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ schwimmt.

(c) Die Forelle schwimmt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ und stoppt zur Zeit $t = 0$ die Flossenbewegung. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeit der Forelle exponentiell abnimmt:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \qquad \text{mit } \tau = \frac{m}{\gamma} \tag{4}$$

Wie viel Arbeit kann die Reibungskraft höchstens leisten?

(i) Geben sie diese maximal geleistete Arbeit W_{max} ohne Rechnung an.

(ii) Rechnen Sie die maximal geleistete Arbeit nach, indem sie die Leistung $P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ integrieren. Überlegen sie sich zuerst, welche Integrationsgrenzen sie setzen müssen.

(iii) Nehmen Sie an, die Strömung sei turbulent : $\vec{F}_L = -\gamma \vec{v}^2$. Wie ändert sich Ihre Antwort zu der Teilaufgaben (i)?