Abgabe am 3. April 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 6.1. *Kunstschwimmen eines Schnabeltiers*

Ein Schnabeltier der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ macht einen Looping im Wasser. Genauer gesagt führt das Tier eine Umdrehung auf einer vertikalen Kreisbahn mit Radius $R = 2\,\mathrm{m}$ und der konstanten Geschwindigkeit $v = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ aus.

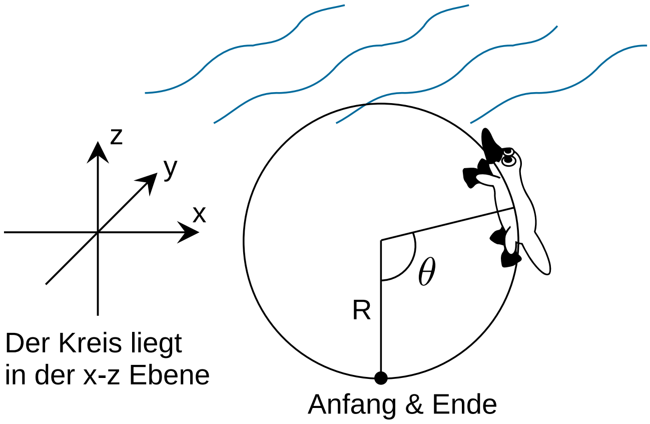

Abbildung 6.1: Vertikale Kreisbewegung des Schnabeltiers unterhalb der Wasseroberfläche. Es ist sinnvoll den Winkel θ als Koordinate für die Beschreibung dieser effektiv eindimensionalen Bewegung zu verwenden.

- Durch die turbulente Strömung entsteht eine **Reibungskraft**

$$\vec{F}_\mathrm{L} = -\gamma |\vec{v}|^2\, \hat{v} \tag{1}$$

mit dem Reibungskoeffizient $\gamma = 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$. Hier ist $\hat{v}$ der Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit.

- Es wirkt die **Schwerkraft** $\vec{F}_\mathrm{g} = -mg\,\hat{z}$. Hier ist $\hat{z}$ der Einheitsvektor in Richtung der z-Achse.
- Die Dichte des Körpers des Schnabeltiers ist etwas höher als die des Wassers, so dass eine senkrecht nach oben gerichtete **Auftriebskraft**

$$\vec{F}_\mathrm{Auf} = 0.95 \times mg\,\hat{z} \tag{2}$$

auf das schwimmende Tier wirkt.

- Das Tier übt eine **Antriebskraft** $\vec{F}_\mathrm{An}$ aus.

(a) In Abbildung 6.2 sind zwei Punkte der Bahn rot markiert. Zeichnen Sie an jedem dieser Punkte die vier Kraftvektoren und deren Summe. Zeichnen Sie die Länge der Vektorpfeile ungefähr massstabsgetreu.

Hinweis. Überlegen Sie sich zuerst, welche Gesamtkraft auf das Schnabeltier wirkt.

(b) Skizzieren Sie ohne Rechnung den Verlauf der potentiellen und der kinetischen Energie des Schnabeltiers als Funktion des Winkels θ, von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$. Ist das Schnabeltier ein konservatives mechanisches System?

(c) Berechnen Sie die Bremsarbeit, die das Wasser an dem Tier im Laufe eines Loopings verrichtet. Ist die Reibungskraft konservativ?

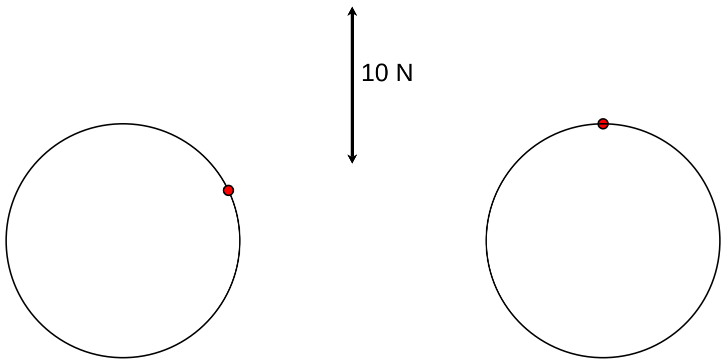

Abbildung 6.2: Skizze zu Teilaufgabe (a). Mit dem gegebenen Massstabsbalken für die Länge der Kraftvektorpfeile haben Sie in dieser Skizze genug Platz für Ihre Zeichnung.

(d) Berechnen Sie die im Laufe eines Loopings von der Schwerkraft geleistete Arbeit. Ist die Schwerkraft konservativ?

(e) Berechnen Sie die im Laufe eines Loopings von dem Schnabeltier geleistete Arbeit. Ist die Antriebskraft konservativ?

Hinweis. Müssen sie in Teilaufgabe (e) viel rechnen? Tipp: die Auftriebskraft ist konservativ.

Zugegebenerweise ist das Schnabeltier hier recht schnell. Wir haben Zahlenwerte so gewählt, dass sich Vektorenpfeile bequem masstabsgetreu zeichnen lassen.

Lösung.

(a) Es wirken die Schwerkraft, die Reibungskraft und die Antriebskraft. Die Schwerkraft und die Reibungskraft kennen wir. Die Antriebskraft folgt aus der Bedingung, dass sich das Tier mit konstanter Geschwindigkeit im Kreis bewegt. Die Gesamtkraft muss nämlich gleich der Zentripetalkraft $\vec{F}_z$ sein, die zur Mitte der Bahn zeigt mit dem Betrag

$$\begin{aligned} |\vec{F}_z| &= m\frac{v^2}{R} \\ &= 1\,\mathrm{kg} \times \frac{\left(2\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2}{2\,\mathrm{m}} \\ &= \frac{4}{2}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,m^{-1}} \\ &= 2\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{L.1}$$

Die Schwerkraft zeigt vertikal nach unten mit

$$|\vec{F}_g| = mg = 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.8\,\mathrm{N}. \tag{L.2}$$

Die Auftriebskraft zeigt vertikal nach oben mit

$$|\vec{F}_g| = 0.95 \times mg = 0.95 \times 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.3\,\mathrm{N}. \tag{L.3}$$

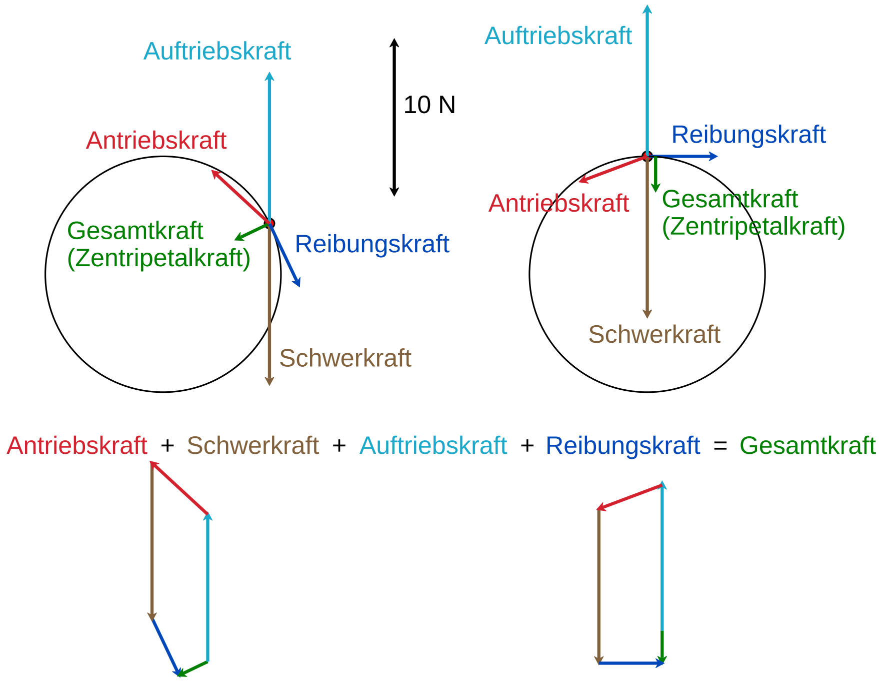

Abbildung 6.3: Masstabsgetreue Skizze der Schwerkraft, der Reibungskraft und der Antriebskraft. Wir haben die Antriebskraft graphisch konstruiert, so dass die Summe aller Kräfte gleich der Zentripetalkraft ist.

Die Reibungskraft ist tangential und zeigt entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, ihr Betrag ist

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\mathrm{L}}| = \gamma \vec{v}^2 &= 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}} \times \left(2\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 \\ &= 1 \times 4\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,m^2\,s^{-2}} \\ &= 4\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{L.4}$$

Das Tier möchte im Kreis schwimmen, es passt also die Antriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{An}}$ so an, dass

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{F}_{\mathrm{Auf}} + \vec{F}_{\mathrm{L}} + \vec{F}_{\mathrm{An}} = \vec{F}_{\mathrm{z}} \tag{L.5}$$

gilt. Wir konstruieren die Antriebskraft graphisch nach Gleichung L.5, die entsprechende Konstruktion sehen sie in dem unteren Teil von Abbildung 6.3.

(b) Die Bewegungsenergie ist konstant, weil der Betrag der Geschwindigkeit des Schnabeltiers konstant ist. Die potentielle Energie hängt von der Höhe ab, diese ist eine Winkelfunktion des Winkels θ. Wir zeichnen also eine Funktion, die bei $\theta = \pi$ maximal ist und "wie ein Sinus" aussieht. Man kann sich auch leicht überlegen dass die Höhe als Funktion des Winkels $h(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$ ist. Beide Skizzen sind in Abbildung 6.4 zu sehen. Die Gesamtenergie $E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}}$ des Schnabeltiers ist nicht konstant. Wir haben es hier mit einem nichtkonservativen System zu tun, es findet Energieaustausch mit der Umgebung statt. Dieser erfolgt über Reibung und Antrieb.

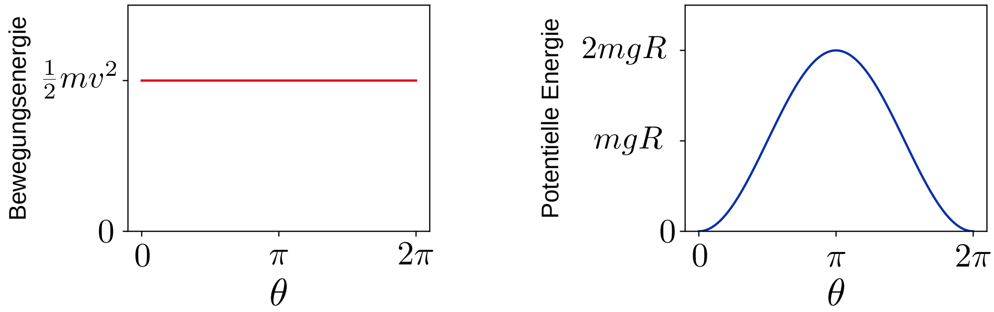

Abbildung 6.4: Verlauf der Bewegungsenergie und der potentiellen Energie des Schnabeltiers.

(c) Wir berechnen die Bremsarbeit nach der Formel

$$W_{\text{Wasser}} = \int_{\text{Looping}} \vec{F}_{\text{L}} \cdot d\vec{l} \tag{L.6}$$

Wir verwenden Polarkoordinaten: die Integrationsvariable ist der Winkel θ und das Differential $d\vec{l}$ zeigt tangential zur Bahn in Bewegungsrichtung und hat den Betrag $|d\vec{l}| = Rd\theta$ Die Reibungskraft ist genau entgegengesetzt, somit haben wir an jedem Punkt der Bahn

$$\vec{F}_{\text{L}} \cdot d\vec{l} = -|\vec{F}_{\text{L}}||d\vec{l}| = -\gamma v^2 R d\theta \tag{L.7}$$

und wir finden die Arbeit

$$\begin{aligned} W_{\text{Wasser}} &= \int_0^{2\pi} -\gamma v^2 R d\theta \\ &= -R\gamma v^2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2\pi R \gamma v^2 \end{aligned} \tag{L.8}$$

was gleich Kraft mal Weg ist, wie wir im Fall einer konstanten Kraft erwarten. Die Arbeit durch Reibung ist auf diesem geschlossenem Weg nicht null, somit ist die Reibungskraft nicht konservativ. Das negative Vorzeichen dieser Arbeit bedeutet, dass das Schnabeltier Energie verliert.

(d) Die Arbeit der Schwerkraft berechnen wir ebenfalls über das Linienintegral

$$W_{\text{g}} = \int_{\text{Looping}} \vec{F}_{\text{g}} \cdot d\vec{l} \tag{L.9}$$

Hier sind $\vec{F}_{\text{g}}$ und $d\vec{l}$ nicht parallel, sondern bilden den Winkel $\pi/2 + \theta$ (überlegen Sie sich, wie die Gravitations bezüglich der Bewegungsrichtung für $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ orientiert ist). Damit ist

$$\vec{F}_{\text{g}} \cdot d\vec{l} = |\vec{F}_{\text{g}}||d\vec{l}| \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}_{=-\sin(\theta)} = -mgR\sin(\theta)d\theta. \tag{L.10}$$

Die Arbeit der Schwerkraft ist somit

$$\begin{aligned} W_g &= -\int_0^{2\pi} mgR\sin(\theta)d\theta \\ &= -mgR\int_0^{2\pi}\sin(\theta)d\theta \\ &= -mgR\,(-\cos(\theta))|_0^{2\pi} \\ &= -mgR(1-1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{L.11}$$

Die Schwerkraft ist konservativ, weil ihre Arbeit entlang jeder geschlossener Bahn verschwindet.

(e) Die Antriebskraft haben wir bis jetzt nicht explizit berechnet. Wir sparen uns auch hier diese Arbeit und verwenden Gleichung L.5:

$$\vec{F}_{\mathrm{An}} = \vec{F}_{\mathrm{z}} - \vec{F}_{\mathrm{g}} - \vec{F}_{\mathrm{Auf}} - \vec{F}_{\mathrm{L}} \tag{L.12}$$

Die Arbeit durch Antrieb ist also einer Summe uns schon bekannten Termen. Die Zentripetalkraft leistet keine Arbeit, da sie immer senkrecht zur Bewegungsrichtung zeigt. Die Auftriebskraft leistet ebenfalls keine Arbiet, da sie wie im Hinweis angegeben konservativ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{An}} &= \int_{\mathrm{Looping}} \left(\vec{F}_{\mathrm{z}} - \vec{F}_{\mathrm{g}} - \vec{F}_{\mathrm{Auf}} - \vec{F}_{\mathrm{L}}\right)\cdot d\vec{l} \\ &= \underbrace{\int_{\mathrm{Looping}} \vec{F}_{\mathrm{z}}\cdot d\vec{l}}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathrm{Looping}} \vec{F}_{\mathrm{g}}\cdot d\vec{l}}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathrm{Looping}} \vec{F}_{\mathrm{Auf}}\cdot d\vec{l}}_{=0} - \int_{\mathrm{Looping}} \vec{F}_{\mathrm{L}}\cdot d\vec{l} \\ &= -\int_{\mathrm{Looping}} \vec{F}_{\mathrm{L}}\cdot d\vec{l} \\ &= -W_{\mathrm{Wasser}} \end{aligned} \tag{L.13}$$

Das Tier muss so viel Arbeit leisten, wie durch Reibung im Wasser dissipiert wird. Die Antriebskraft ist also auch nicht konservativ.

Bemerkung: Das Tier leistet beim Schwimmen noch zusätzlich Arbeit durch innere Reibung im Körper. Die Antriebsarbeit ist nur ein kleiner Teil der von den Muskeln geleisteter Arbeit, der grösste Teil der mechanischen Energie wird durch Erzeugung von Wärme im Körper verloren.

Aufgabe 6.2. *Leistung eines gehenden Menschen*

Die kinetische Energie und die potentielle Energie eines im Schwerefeld der Erde gehenden Menschen der Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ wurde als Funktion der Zeit gemessen. Die Daten sind in Abbildung 6.5 zu sehen. Sie stammen aus dem Artikel *Biomechanics of Walking and Running: Center of Mass Movements to Muscle Action* von C. T. Farley und D. P. Ferris in Exercise and Sport Sciences Reviews **28** 253-286 (1998).

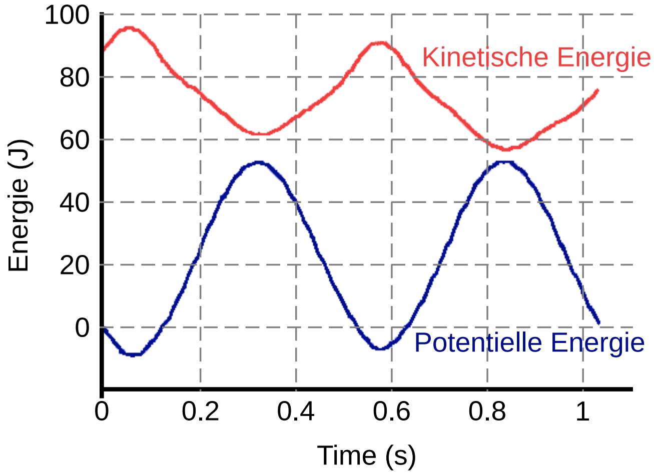

Abbildung 6.5: Kinetische Energie (rot) und potentielle Energie (blau) eines gehenend Menschen.

(a) Schätzen Sie die Geschwindigkeit und die Höhe der vertikale Bewegung des Menschen ab. Sie Dürfen Werte aus dem Graphen sehr grob ablesen, indem Sie auf 10 J runden.

(b) Können Sie dem Graphen entnehmen, wie viel Energie pro schritt Verloren geht?

Lösung.

(a) Die mittlere Geschwindigkeit erhalten wir aus den Mittelwert der Bewegungsenergie. Dieser liegt bei etwa $\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = 75\,\mathrm{J}$. Wir lösen nach der Geschwindigkeit auf:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle &= \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle \\ \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle &= \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{2 \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle}{m} \end{aligned} \tag{L.14}$$

Der Mittelwert des Quadrats einer Grösse ist zwar nicht gleich dem Quadrat des Mittelwertes: $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \neq \langle v \rangle$. Wir wollen hier aber nur grob Abschätzen:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &\approx \sqrt{\frac{2 \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 75\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{70\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{\frac{15}{7} \times \mathrm{m^2\,s^{-2}}} \\ &= 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{L.15}$$

Aus dem Verlauf der potentiellen Energie können wir ausrechen, um welche Höhe Δh sich der Mensch (genauer: der Schwerpunkt des Menschen) vertikal bewegt. Der maximale Wert der potentiellen Energie ist etwa $E_{\text{pot,max}} = 50\,\text{J}$ und der minimale wert $E_{\text{pot,max}} = -10\,\text{J}$. Wir lösen nach dem entsprechendem Höhenunterschied auf:

$$\begin{aligned}
mg\Delta h &= E_{\text{pot,max}} - E_{\text{pot,min}} \\
\Delta h &= \frac{E_{\text{pot,max}} - E_{\text{pot,min}}}{mg} \\
\Delta h &= \frac{50\,\text{J} - (-10\,\text{J})}{70\,\text{kg} \times 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}} \\
\Delta h &= \frac{60\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{70\,\text{kg} \times 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}} \\
\Delta h &= 9 \times 10^{-2}\,\text{m} \\
\Delta h &= 9\,\text{cm}
\end{aligned} \tag{L.16}$$

(b) Im Laufe eines Schritts ändert sich die potentielle Energie um 60 J, die Bewegungsenergie dafür nur um etwa 30 J. Wir wissen aber nicht, ob diese überschüssige potentielle Energie verloren geht ("dissipiert" wird). Ein Teil davon kann in einer nicht konservativer Form wie Wärme gespeichert werden, dieser ist verloren. Ein Teil kann auch konservativ gespeichert werden, z.B. in einer Schwingung der Arme. Der Anteil dissipierter Energie hängt von der Lauftechnik ab.

Aufgabe 6.3. *Arbeit und Leistung einer Forelle*

Wir betrachten eine bei laminarer Strömung schwimmende Forelle mit der Masse $m \simeq 1\,\text{kg}$. Es wirkt eine Reibungskraft

$$\vec{F}_L = -\gamma\vec{v} \tag{3}$$

mit dem Reibungskoeffizient $\gamma = 5 \times 10^{-2}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}$.

Die Teilaufgaben (a), (b) und (c) können unanbhängig voneinander gelöst werden.

(a) Wie viel Arbeit muss die Forelle leisten, um 1 km weit mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ zu schwimmen? Wie viel Arbeit leistet dabei die Reibungskraft?

(b) Berechnen Sie die Leistung einer Forelle, die mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ schwimmt.

(c) Die Forelle schwimmt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ und stoppt zur Zeit $t = 0$ die Flossenbewegung. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeit der Forelle exponentiell abnimmt:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \qquad \text{mit } \tau = \frac{m}{\gamma} \tag{4}$$

Wie viel Arbeit kann die Reibungskraft höchstens leisten?

(i) Geben sie diese maximal geleistete Arbeit W_{max} ohne Rechnung an.

(ii) Rechnen Sie die maximal geleistete Arbeit nach, indem sie die Leistung $P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ integrieren. Überlegen sie sich zuerst, welche Integrationsgrenzen sie setzen müssen.

(iii) Nehmen Sie an, die Strömung sei turbulent : $\vec{F}_L = -\gamma\vec{v}^2$. Wie ändert sich Ihre Antwort zu der Teilaufgaben (i)?

Lösung.

(a) Um mit konstanter Geschwindigkeit zu schwimmen muss die Forelle eine Antriebskraft $\vec{F}$ aufbringen, die die Reibungskraft kompensiert:

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{F}_L &= 0 \\ \vec{F} &= \gamma \vec{v} \end{aligned} \tag{L.17}$$

Hier ist die Kraft konstant und zeigt in Bewegungsrichtung. Die Arbeit ist in diesem einfachen Fall das Produkt der Antriebskraft mit dem als Vektor aufgefasstems Weg $\vec{D}$. Hier haben wir $\vec{D} = 1\,\mathrm{km}$, $\vec{v}$ und $\vec{D}$ zeigen in die gleiche Richtung.

$$\begin{aligned} W_{\text{Forelle}} = \vec{F} \cdot \vec{D} = \gamma |\vec{v}| D = \gamma v_0 D \\ &= 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \times 6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 1 \times 10^{3}\,\mathrm{m} \\ &= 5 \times 6 \times 10^{-1}\,\mathrm{kg\,s^{-1}\,m\,s^{-1}\,m} \\ &= 3\,\mathrm{J}. \end{aligned} \tag{L.18}$$

Diese Arbeit ist positiv weil sie die Bewegungsenergie der Forelle erhöht. Durch Reibung leistet das Wasser die Arbeit

$$\begin{aligned} W_{\text{Wasser}} = \vec{F}_{\mathrm{L}} \cdot \vec{D} = -\gamma |\vec{v}| D &= -\gamma v_0 D \\ &= -3\,\mathrm{J}. \end{aligned} \tag{L.19}$$

Die Reibung reduziert die Bewegungsenergie. Insgesamt bleibt die Bewegungsenergie konstant, was wir auch erwarten, da die Forelle mit konstanter Geschwindigkeit schwimmt.

(b) Die Leistung ist das Skalarprodukt der Kraft mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} P_{\text{Forelle}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma \vec{v} \cdot \vec{v} = \gamma |\vec{v}|^2 = \gamma v_0^2 \\ &= 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \times \left(6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 \\ &= 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \times 3.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} \\ &= 5 \times 3.6 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}} \\ &= 1.8 \times 10^{-4}\,\mathrm{J\,s^{-1}} \\ &= 1.8 \times 10^{-4}\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{L.20}$$

Sie haben wahrscheinlich bemerkt, das wir hier eine sehr kleine Leistung gefunden haben. Ein Fisch braucht nur wenig Energie, um sich bei laminarer Strömung fortzubewegen.

(c) (i) Die Arbeit der Reibung ist gleich der Änderung der Bewegungsenergie des Fisches. So kann ihr Betrag nicht höher als die Bewegungsenergie bei der Anfangsgeschwindigkeit sein:

$$W_{\max} = -\frac{1}{2} m v_0^2 \tag{L.21}$$

(ii) Die maximale Arbeit ergibt sich aus der Integration der instantanen Leistung von $t = 0$ bis $t \to \infty$.

$$\begin{aligned} W_{\text{max}} &= \int_0^\infty \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \\ &= \int_0^\infty -\gamma \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \\ &= \int_0^\infty -\gamma |\vec{v}(t)|^2 dt \\ &= \int_0^\infty -\gamma v_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \\ &= -\gamma v_0^2 \left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^\infty \\ &= \gamma v_0^2 \frac{m}{2\gamma} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 (0 - 1) \\ &= -\frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned} \tag{L.22}$$

(iii) Unabhängig von dem Reibungsmechanismus kann höchstens eine Arbeit von $W_{\text{max}} = -\frac{1}{2} m v_0^2$ von der Reibungskraft geleistet werden. Die Antwort auf Teilaufgabe (i) ändert sich nicht.

Bemerkung: Falls wie dieses Resultat wie in Teilaufgabe (ii) nachrechnen wollen, müssen wir beachten, dass unter turbulenter Strömung eine andere Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit als in Gleichung 4 resultiert. Wir müssten ganz von vorne anfangen, d.h. bei der aus dem zweiten Gesetz von Newton folgender Bewegungsgleichung.