Abgabe am 27. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 5.1. *Verschiedene Kräfte in Salz* [†]

Die Entfernung zwischen den K^+- und Cl^--Ionen in KCl beträgt $d \simeq 2.8\,\text{Å}$. Berechnen und vergleichen Sie

(a) die elektrostatische Anziehung zwischen einem Kalium- und einem Chloridion,

(b) deren gegenseitige gravitative Anziehung und

(c) die Erdanziehung auf jedes der beiden verschiedenen Ionen.

Hinweis. Die Massen betragen $m_K = 39.1\,\text{Da}$ *und* $m_{Cl} = 35.5\,\text{Da}$.

Lösung.

(a) Die elektrostatische Anziehungskraft ist

$$F_E = \frac{|q_K q_{Cl}|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \tag{L.1}$$

wobei $|q_K q_{Cl}| = |e|^2$ und somit

$$\begin{aligned} F_E &= \frac{(1.602\times10^{-19}\,\text{C})^2}{4\pi\times8.854\times10^{-12}\,\text{C}^2\,\text{N}^{-1}\,\text{m}^{-2}\times(2.8\times10^{-10}\,\text{m})^2} \\ &= \frac{1.602^2}{4\pi\times8.854\times2.8^2}\times10^{-6}\times\frac{\text{C}^2}{\text{C}^2\,\text{N}^{-1}\,\text{m}^{-2}\,\text{m}^2} \\ &= 2.9\times10^{-9}\,\text{N} \end{aligned} \tag{L.2}$$

(b) Die Gravitationskraft zwischen zwei Massen $m_K = 39.1\,\text{Da}$ und $m_{Cl} = 35.5\,\text{Da}$ mit Abstand $d = 2.8\,\text{Å}$ beträgt

$$\begin{aligned} F_G &= G\frac{m_K m_{Cl}}{d^2} \\ &= 6.674\times10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}\times\frac{39.1\times1.66\times10^{-27}\,\text{kg}\times35.5\times1.66\times10^{-27}\,\text{kg}}{\left(2.8\times10^{-10}\,\text{m}^2\right)} \\ &= \frac{6.674\times39.1\times1.66\times35.5\times1.66}{2.8^2}\times10^{-45}\times\frac{\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}\,\text{kg}\,\text{kg}}{\text{m}^2} \\ &= 3.3\times10^{-42}\,\text{N}. \end{aligned} \tag{L.3}$$

(c) Die Erdanziehung auf jedes der beiden verschiedenen Ionen ist $F_E = mg$:

$$\begin{aligned} F_{E,K} &= m_K g = 39.1\times1.66\times10^{-27}\,\text{kg}\times9.81\,\text{m/s}^2 = 6.37\times10^{-25}\,\text{N} \\ F_{E,Cl} &= m_{Cl} g = 35.5\times1.66\times10^{-27}\,\text{kg}\times9.81\,\text{m/s}^2 = 5.78\times10^{-25}\,\text{N}. \end{aligned} \tag{L.4}$$

Die gravitationellen Kräfte zwischen den Ionen sind um viele Grössenordnungen kleiner als die elektrostatische Anziehungskraft.

Aufgabe 5.2. *Schwingung einer Spinne an ihrem Faden* [††]

Spinnenseide ist ein Material mit erstaunlichen Eigenschaften: So ist Spinnenseide bei gleichem Querschnitt ähnlich stabil wie Stahl, bei etwa einem Viertel der Dichte und sie kann auf das Dreifache ihrer Länge gedehnt werden ohne zu reissen. Unter anderem wegen dieser Eigenschaften ist Spinnenseide schon seit einigen Jahren Gegenstand intensiver biotechnologischer Forschung.

In dieser Aufgabe wollen wir jedoch untersuchen, wie sich ein Spinnfaden in seiner ursprünglichen Funktion verhält. Dazu betrachten wir eine weibliche Gartenkreuzspinne ($m_S = 0.5\,\mathrm{g}$), die an einem $\ell_0 = 2.00\,\mathrm{m}$ langen Sicherungsfaden[1] senkrecht nach unten hängt, siehe Abbildung 5.1.

Der Spinnfaden hat einen Durchmesser von $d_F = 5\,\mu\mathrm{m}$, eine Dichte von $\rho_F = 1.3 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ und einen Elastizitätsmodul von $E = 10\,\mathrm{GPa}$.

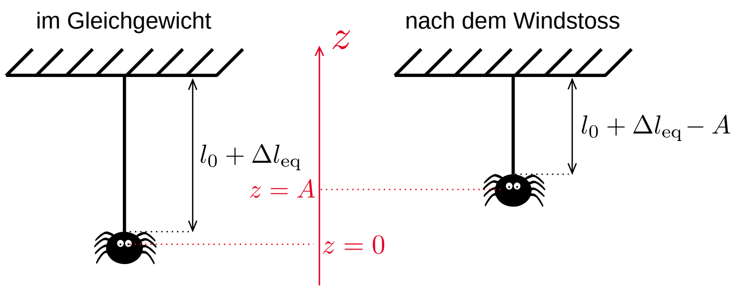

Abbildung 5.1: Skizze der Spinne im Gleichgewicht und nach dem Windstoss. Das Problem ist Eindimensional, wir nehmen an dass die Spinne vertikal gestossen Wurde.

(a) Zeigen Sie durch eine grobe Abschätzung, dass die Masse des Spinnfadens im Vergleich zur Spinne vernachlässigt werden kann.

(b) Berechnen Sie die Federkonstante k des Spinnfadens.

Hinweis. Fangen Sie am besten an mit $\sigma = E\epsilon$. Was sind in unserem Fall σ und ϵ? Falls Sie lieber mit einer anderen aus der Vorlesung bekannten Gleichung arbeiten möchten überlegen sie sich ganz genau, ob sie verstehen, was diese beschreibt.

(c) Um welche Länge $\Delta\ell_{eq}$ wird der Spinnfaden durch das Gewicht der Spinne in der Gleichgewichtslage gedehnt?

In der Gleichgewichtslage wird die Gewichtskraft der Spinne gerade durch den Spinnfaden kompensiert. Was passiert, wenn die Spinne plötzlich durch einen Windstoss leicht senkrecht nach oben um eine Höhe A gehoben wird?

(d) Wir definieren den Ursprung der z-Achse, so dass die Spinne in ihrer Gleichgewichtslage bei z=0 liegt. Welche Gesamtkraft $F(z)$ wirkt auf die Spinne wenn sie sich auf der Höhe z befindet?

(e) Zeigen Sie, dass man die Bewegungsgleichung in der Form $a(z) = -\omega^2 z$ schreiben kann.

(f) Berechnen Sie die Periode der Schwingung der Spinne.

[1] Tatsächlich können Spinnen mit unterschiedlichen Drüsen viele verschiedene Arten von Spinnenseide produzieren.

Lösung.

(a) Wir kennen die Dichte ρ des Spinnfadens und kennen alle nötige Grössen, um dessen Volumen V_F zu berechnen. Die Masse m_F des Spinnfadens ergibt sich also aus

$$\begin{aligned} m_\mathrm{F} = \rho_\mathrm{F} V_\mathrm{F} = \rho_\mathrm{F} \ell_0 \pi \left(\frac{d_\mathrm{F}}{2}\right)^2 \\ &= 1.3 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 2.00\,\mathrm{m} \times \pi \times \left(\frac{5\times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 \\ &= 1.3 \times 2.00 \times \frac{25}{4} \times \pi \times \times 10^{-3} \times 10^{-12}\,\mathrm{kg\,m^{-3}\,m\,m^2} \\ &= 5 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}. \end{aligned} \tag{L.5}$$

Beachten Sie, dass wir nur eine signifikante Stelle angeben, weil wir den Durchmesser des dünnen Faden nur auf ein μm genau gemessen haben und somit mit nur einer signifikanter Stelle kennen.
Die Masse des Fadens ist also vier Grössenordnungen kleiner als die Masse $m_\mathrm{S} = 5 \times 10^{-4}$ kg der Spinne und somit vernachlässigbar.

(b) Wir suchen die Federkonstante k, d.h. die Proportionalitätskonstante zwischen der Federkraft F_F und einer beliebigen Längenänderung $\Delta\ell$ der Feder:

$$F_\mathrm{F} = k\,\Delta\ell \;\Rightarrow\; k = \frac{F_\mathrm{F}}{\Delta\ell}, \tag{L.6}$$

wobei wir die Richtung bzgl. der z-Achse berücksichtigt haben. Aus der Vorlesung kennen wir das Hooksche Gesetz für makroskopische Körper

$$\sigma = E\epsilon. \tag{L.7}$$

Der Parameter ϵ is die relative Dehnung, also in unserem Fall

$$\epsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}. \tag{L.8}$$

Desweiteren ist σ die Kraft pro Fläche senkrecht zur Zugrichtung, hier also pro Querschnittsfläche des Fadens. Wir haben also

$$\sigma = \frac{F_\mathrm{F}}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4F_\mathrm{F}}{\pi d^2}. \tag{L.9}$$

Wir setzen Gleichungen L.8 und L.9 in das Hooksche Gesetz (L.7) ein und Lösen nach $\frac{F_F}{\Delta\ell}$ auf:

$$\begin{aligned}
\frac{4F_\mathrm{F}}{\pi d^2} &= E\,\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \\
\frac{F_\mathrm{F}}{\Delta\ell} &= \frac{E\pi d^2}{4l_0} \\
k &= \frac{E\pi d^2}{4l_0} \qquad \text{(siehe Gleichung L.6)} \qquad \text{(L.10)} \\
k &= \frac{1\times 10^{10}\,\mathrm{Pa}\times\pi\times\left(5\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2}{4\times 2.00\,\mathrm{m}} \\
k &= \frac{25\pi}{4\times 2.00}\times 10^{-2}\times\frac{\mathrm{Pa\,m^2}}{\mathrm{m}} \\
k &= \frac{25\pi}{4\times 2.00}\times 10^{-2}\times\frac{\mathrm{N\,m^{-2}\,m^2}}{\mathrm{m}} \\
k &= 1\times 10^{-1}\,\mathrm{N\,m^{-1}}. \qquad \text{(L.11)}
\end{aligned}$$

Unser Resultat ist wieder nur auf eine Stelle signifikant, da wir den Durchmesser des Faden *relativ* ungenau gemessen haben.

(c) Im Gleichgewicht ist die Beschleunigung der Spinne $a = 0$, nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist also die summe aller Kräfte die auf die Spinne wirken Null. Wir zählen diese Kräfte auf:

- Die Schwerkraft $F_\mathrm{G} = -m_\mathrm{S}g$ (Beachten sie den Vorzeichen bezüglich der z-Achse)
- Die Federkraft $F_\mathrm{F} = k\Delta\ell_\mathrm{eq}$.

Wir erhalten also die Gleichung

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{G} + F_\mathrm{F} &= 0 \\
-m_\mathrm{S}g + k\Delta\ell_\mathrm{eq} &= 0 \\
\Delta\ell_\mathrm{eq} &= \frac{m_\mathrm{S}g}{k}.
\end{aligned} \qquad \text{(L.12)}$$

Wie immer werden alle zwischenresultate eingesetzt, hier setzen wir der Ausdruck für k (aus L.10):

$$\Delta\ell_\mathrm{eq} = \frac{4m_\mathrm{S}g\ell_0}{E\pi d^2} \qquad \text{(L.13)}$$

Interessanterweise erkennen wir, dass wir eine dimensionslose relative Längenänderung $\Delta\ell_\mathrm{eq}/\ell_0$ angeben können:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\ell_\mathrm{eq}}{\ell_0} &= \frac{4m_\mathrm{S}g}{E\pi d^2} \\
&= \frac{4\times 5\times 10^{-4}\,\mathrm{kg}\times 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{1\times 10^{10}\,\mathrm{Pa}\times\pi\times\left(5\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2} \\
&= \frac{4\times 5\times 9.81}{25\pi}\times 1\times 10^{-2}\times\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N\,m^{-2}\,m^2}} \\
&= 2\times 10^{-2} \qquad \textit{Bemerkung: vor Rundung } 2.498\times 10^{-2}
\end{aligned} \qquad \text{(L.14)}$$

Der Faden wird im Gleichgewicht um 2% seiner Länge gedehnt. Dieses Resultat gilt für jede Fadenlänge ℓ_0.

(d) Wenn sich die Spinne auf der Höhe z befindet, ist die Länge ℓ des Fadens gleich $\ell = \ell_0 + \Delta\ell_{\text{eq}} - A$. Die Gesamtkraft ist die Summe der Gravitationskraft und der Federkraft.

$$\begin{aligned} F(z) &= -m_S g - k\left(\ell_0 - \left(\ell_0 + \Delta\ell_{\text{eq}} - z\right)\right) \\ &= -m_S g - k\left(-\Delta\ell_{\text{eq}} + z\right) \\ &= \underbrace{-m_S g + k\Delta\ell_{\text{eq}}}_{=0} - kz \\ &= -kz \end{aligned} \tag{L.15}$$

wobei wir erkannt haben, dass ein Term im Ausdruck für die Federkraft der Gleichgewichtslage entspricht und sich somit mit der Schwerkraft auf Null summiert.

(e) Nach dem zweiten Gesetz von Newton ist die Beschleunigung

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{F(z)}{m_S} \\ &= -\frac{k}{m_S} z \end{aligned} \tag{L.16}$$

Wir haben also die Gleichung des Harmonischen Oszillators $\ddot{z} = -\omega^2 z$ mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_S}} \tag{L.17}$$

Die Frequenz eines Harmonischen Oszillators hängt bekanntlich nicht von der Schwingungsamplitude ab. Dass die Grösse A in unseren Resultat nicht auftaucht ist also erwartet.

(f) Die Periode ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m_S}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m_S}{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m_S}{\frac{E\pi d^2}{4l_0}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{4m_S\ell_0}{E\pi d^2}} \\ &= \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m_S \ell_0}{E}} \end{aligned} \tag{L.18}$$

Wir setzen Zahlenwerte ein:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{4}{5\times10^{-6}\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{\pi\times5\times10^{-4}\,\mathrm{kg}\times2.00\,\mathrm{m}}{1\times10^{10}\,\mathrm{Pa}}}\\
&= \frac{4}{5}\times10^{6}\,\mathrm{m}^{-1}\sqrt{5\times2.00\times\pi\times10^{-14}\times\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}}}\\
&= \frac{4}{5}\times10^{6}\,\mathrm{m}^{-1}\sqrt{5\times2.00\times\pi}\times10^{-7}\times\mathrm{m\,s}\\
&= \frac{4\times\sqrt{2.00\times\pi}}{\sqrt{5}}\times10^{-1}\,\mathrm{s}\\
&= 5\times10^{-1}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
\tag{L.19}
$$

Eine Schwingung der Spinne dauert eine halbe Sekunde.

Aufgabe 5.3. *Arbeit von Kinesinen* *[††]*

Wenn Kinesine auf Mikrotubuli entlanglaufen, verbrauchen sie Energie in Form von ATP. Pro Schritt von $\ell = 8\,\mathrm{nm}$ wird ein ATP gespalten, was eine Energie von etwa $E = 8\times10^{-20}\,\mathrm{J}$ freisetzt.

(a) Welche Kraft kann das Kinesin bei einer angenommenen Effizienz von 50 % maximal ausüben?

(b) Wir haben in einer früheren Aufgabe gesehen, dass Kinesine eine Geschwindigkeit von $v = 0.8\,\mathrm{\mu m\,s^{-1}}$ erreichen. Berechnen Sie die mechanische Leistung eines Kinesins.

(c) Vergleichen Sie die Energie eines ATP-Moleküls mit der Bewegungsenergie eines von einem Kinesin transportierten Mitochondriums ($m = 1\,\mathrm{pg}$).

Lösung.

(a) Die Arbeit pro Schritt ist

$$W = F\times\ell \tag{L.20}$$

In unserem Fall ist sie gleich 50 % der Energie, die pro ATP-Molekül frei wird. Lösen wir diese Gleichung nach F auf, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
F = \frac{W}{\ell} &= \frac{E}{2\ell}\\
&= \frac{8\times10^{-20}\,\mathrm{J}}{2\times8\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\\
. &= \frac{8}{2\times8}\times10^{-11}\times\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}\\
&= 5\times10^{-12}\,\mathrm{N}\\
&= 5\,\mathrm{pN}
\end{aligned}
\tag{L.21}
$$

(b) Die Leistung ist gegeben als Arbeit pro Zeit. Die Arbeit pro Schritt ist $W = 0.5\times E = 4\times10^{-20}\,\mathrm{J}$. Die Zeit Δt pro Schritt erhalten wir wiederum aus

$$\Delta t = \frac{\ell}{v} = \frac{8\,\mathrm{nm}}{800\,\mathrm{nm\,s^{-1}}} = 1\times10^{-2}\,\mathrm{s}\,. \tag{L.22}$$

Daraus erhalten wir die mechanische Leistung

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{4 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}}{1 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}} = 4 \times 10^{-18}\,\mathrm{W} = 4\,\mathrm{aW}\ . \tag{L.23}$$

(c) Die Energie eines ATP Moleküls ist

$$E = 8 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}. \tag{L.24}$$

Im Vergleich dazu ist die Bewegungsenergie sehr gering:

$$\begin{aligned} E_\mathrm{b} = \tfrac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg} \times (8 \times 10^{-7}\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 \\ &= \frac{8^2}{2} \times 10^{-29}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} \\ &= 3.2 \times 10^{-28}\,\mathrm{J}. \end{aligned} \tag{L.25}$$