Abgabe am 13. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 3.1. *Bewegung der Leber in einem laufendem Hasen*

In dem Artikel *Running, breathing and visceral motion in the domestic rabbit [...]* von Rachel S. Simons in The Journal of Experimental Biology 202, 563-577 (1999) finden wir Daten zur Bewegung der Leber in laufenden Hasen (siehe Abbildung 3.1). Wir wollen die Kraft berechnen, die dabei auf die Leber wirkt. Hierzu müssen wir eine sinnvolle mathematische Beschreibung dieser Bewegung formulieren.

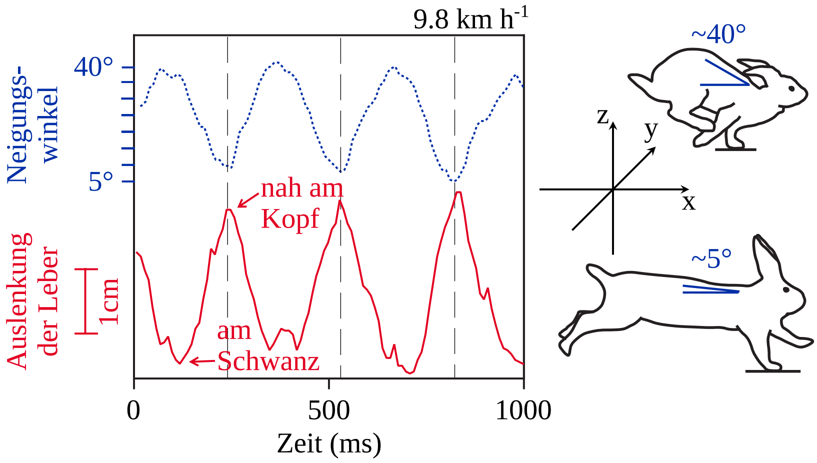

Abbildung 3.1: Auslenkung der Leber und Neigung der Linie entlang der diese Auslenkung erfolgt als funktion der Zeit. Der Neigungswinkel ist maximal wenn die Leber am nächsten zum Schwanz liegt.

Wir betrachten einen Hasen, der mit einer konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 9.8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ in x-Richtung läuft und im gleichen Rhythmus atmet[1]. Die Lunge verursacht eine periodische Bewegung der Leber entlang einer Linie im Körper des Hasen. Die Neigung dieser Linie relativ zum Boden ändert sich mit der Stellung des Hasen.

(a) Aus dem Graphen können wir lesen, dass ein Lauf bzw. Atemzyklus etwa 290 ms dauert, mit schätzungsweise 10 ms Genauigkeit. Berechnen Sie die Frequenz f der Lauf- und Atemzyklen.

(b) Wir behandeln zuerst eine mathematisch einfachere Situation: Unmittelbar nach dem Lauf atmet der Hase mit der gleichen Frequenz f, bewegt sich aber nicht mehr. Somit ist der Winkel θ unter dem sich die Leber bewegt konstant. Wir beschreiben die Bewegung der Leber mit der folgenden Parametrisierung der x- und z-Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= L \times \sin(2\pi f t) \times \cos(\theta) \\ z(t) &= -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin(\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

[1] During treadmill exercise, in 11 out of 25 trials (i.e. 44% of the time), rabbits showed a 1:1 correlation between locomotor and breathing frequencies. *Ibid.*

mit $L = 2.0\,\mathrm{cm}$ und f aus Teilaufgabe (a).

(i) Vergewissern sie sich, dass sie dieses Modell nachvollziehen können und skizzieren Sie $x(t)$, $z(t)$ und die Kurve $(x(t), z(t))$.

(ii) Finden Sie eine Formel für die Gesamtkraft $\vec{F}(t)$, die auf die Leber wirkt. Berechnen sie die maximalen Kraft $|\vec{F}|_{\mathrm{max}}$ (wir betrachten den Betrag) die in einem Bewegungszyklus auftritt. Eine Hasenleber hat eine Masse von $120\,\mathrm{g} \pm 10\,\mathrm{g}$ [D. J. Browse et al, Comparative Hepatology (2003) 2:9].

(c) Vergleichen sie die maximale Beschleunigung der Hasenleber mit der Beschleunigung der Leber einer Skifahrerin, die im Riesenslalom eine Kurve des Radius $R = 25\,\mathrm{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ fährt. Vergleichen sie ebenfalls die maximale Kraft. Die Menschliche Leber wiegt $1.3\,\mathrm{kg}$.

(d*) Wir möchten jetzt die Kräfte im Lauf berechnen. Aufgrund der Daten in Abbildung 3.1 beschreiben die Bewegung der Leber mit der folgenden Parametrisierung der x- und z-Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= L \times \sin(2\pi f t) \times \cos\left(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)\right) + v_0 t \\ z(t) &= -L \times \sin(2\pi f t) \times \sin\left(\theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi f t)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

mit $L = 2.0\,\mathrm{cm}$, $\theta_0 = 22.5°$, $\theta_1 = 17.5°$, $v_0 = 9.8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ und f aus Teilaufgabe (a).

(i) Begründen Sie dieses Modell und erklären sie die Bedeutung einzelner Terme. Müssen wir den Term $v_0 t$ berücksichtigen?

(ii) Skizzieren Sie $x(t)$, $z(t)$ und die Kurve $(x(t), z(t))$ im Intertialsystem des Hasen. Es ist empfehlenswert einen Plotter zu verwenden (Python, Mathematica, Taschenrechner...).

(iii) Finden Sie eine Formel für die Gesamtkraft $\vec{F}(t)$, die auf die Leber wirkt. Berechnen sie die maximalen Kraft $|\vec{F}|_{\mathrm{max}}$ die in einem Bewegungszyklus auftritt.

Hinweis. Ohne Hilfe eines Computeralgebrasystems (z.B. SymPy, SageMath, Wolfram Mathematica) lässt sich die Rechnung nur mit extrem viel Willenskraft durchführen.

Aufgabe 3.2. *Forelle bei turbulenter Strömung* *[†††]*

In der Vorlesung haben wir das Beispiel einer schwimmenden Forelle betrachtet (Kapitel 5.1) und ihre Bewegung nach dem Ende der Schwimmbewegung berechnet (Kapitel 5.1.3). In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, wie sich die Situation ändert, wenn die Forelle mit höherer Geschwindigkeit unterwegs ist:

Das Problem dabei ist, dass die Formel für die Bremskraft,

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = -\gamma_{\mathrm{L}} \vec{v}\ , \tag{3}$$

nur für sogenannte *laminare Strömungen* gilt. Das sind Strömungen, bei denen keine Verwirbelungen entstehen, d. h. bei niedrigen Geschwindigkeiten. Bei höheren Geschwindigkeiten findet ein Übergang zu einer *turbulenten Strömung* statt, wo die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, also stärker anwächst:[2]

$$\vec{F}_{\mathrm{T}} = -\gamma_{\mathrm{T}} v^2 \vec{e}_v \ . \tag{4}$$

Dabei ist $\vec{e}_v$ der Richtungsvektor der Geschwindigkeit.

Wir stellen uns nun die Frage: Inwiefern ändert sich dadurch der Abbremsvorgang der Forelle und unsere mathematische Beschreibung?

(i) Bevor wir uns dem Problem richtig zuwenden, wollen wir uns zuerst mit den in Gleichung (4) auftretenden Grössen befassen. Welche Dimension haben $\vec{F}$, γ_{T}, v und $\vec{e}_v$?

(ii) Nun betrachten wir die Situation, wo die Forelle durch ihre Flossenbewegung eine konstante Kraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$ aufbringt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie, welche Kraft die Forelle aufbringen muss, um eine konstante (stationäre) Geschwindigkeit von $v_{\mathrm{S}} \simeq 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in x-Richtung zu erreichen.

Hinweis. Nehmen Sie dazu an, dass die Konstante durch $\gamma \equiv \gamma_{\mathrm{T}} \simeq 5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ *gegeben und die Masse der Forelle* $m \simeq 1.0\,\mathrm{kg}$ *ist.*

(iii) Nun wollen wir, wie in Kapitel 5.1.3 im Skript, berechnen, was passiert, wenn die Forelle mit der konstanten Geschwindigkeit v_{S} unterwegs ist und zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich ihre Flossenbewegung stoppt. Wir folgen dazu den verschiedenen in der Vorlesung diskutierten Schritten und unterteilen das Problem so in überschaubare Teile:

1. Schritt: Was erwarten Sie intuitiv?

2. Schritt: Formulieren Sie mathematisch die Anfangsbedingung und die Bewegungsgleichung.

3. Schritt: In mehreren Teilschritten lösen wir nun die aufgestellte Bewegungsgleichung:

   (a) **Reduktion auf weniger als drei Raumrichtungen:** Begründen Sie, warum wir das Problem auf eine Raumrichtung reduzieren können und schreiben Sie Anfangsbedingung und Bewegungsgleichung entsprechend um.

   (b) **Skalen:** Bilden Sie aus den Konstanten m und γ eine charakteristische Längenskala ℓ. Benutzen Sie diese zusammen mit der Geschwindigkeitsskala v_{S} um eine charakteristische Zeitskalen τ zu finden.

   (c) **Dimensionslose Bewegungsgleichung:** Welche dimensionsbehafteten Grössen treten in der Bewegungsgleichung auf und welche Dimensio-

[2] Im Laufe der Evolution haben sich die Körperformen und Oberflächen von Fischen (und anderen im Wasser lebenden Tieren wie Delfinen und Pinguinen) so entwickelt, dass dieser Übergang zu einer turbulenten Strömung erst bei relativ hohen Geschwindigkeiten auftritt, siehe z. B. H. Oertel und S. Ruck, *Bioströmungsmechanik: Grundlagen, Methoden und Phänomene*, Vieweg+Teubner Verlag. Für eine Forelle tritt der Übergang bei Geschwindigkeiten von etwa $0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ auf.

nen haben diese jeweils? Begründen Sie mit Hilfe des π-Theorems von Buckingham, warum wir die Bewegungsgleichung so umschreiben können, dass nur noch zwei dimensionslose Grössen ξ und η vorkommen und führen Sie diese Vereinfachung durch.

Hinweis. Definieren Sie dazu eine dimensionslose 'Geschwindigkeit' ξ und eine dimensionslose 'Zeit' η und setzen Sie diese in die Bewegungsgleichung ein. Die dimensionslose Bewegungsgleichung ist

$$\xi(\eta = 0) = 1 \,, \tag{5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\eta} = -\xi^2 \,. \tag{5b}$$

(d) **Lösung der Differentialgleichung:** Finden Sie eine mathematische Funktion, die die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis. Eine solche Differentialgleichung 1. Ordnung können wir z. B. mittels einer ***Separation der Variablen*** *lösen. Dazu stellen wir Gleichung (5b) so um, dass alle Terme mit ξ auf der linken und alle Terme mit η auf der rechten Seite sind. Danach integrieren wir von $\xi' = \xi(\eta = 0)$ bis $\xi' = \xi(\eta)$ bzw. von $\eta' = 0$ bis $\eta' = \eta$.*

Alternativ können Sie auch den 'geratenen' Ansatz $\xi(\eta) = -n(\eta + A)^n$ in die Differentialgleichung einsetzen und die Konstanten n und A bestimmen.

(e) **Lösung des ursprünglichen Problems:** Setzen Sie nun wieder die ursprünglichen physikalischen Grössen ein und skizzieren Sie die Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit.

Nun können wir die gefundene Lösung genauer betrachten und daraus einige Schlussfolgerungen ziehen.

(iv) Skizzieren Sie die Geschwindigkeit der Forelle als Funktion der Zeit.

(v) Welche Beschleunigung wirkt auf die Forelle zum Zeitpunkt an dem sie ihre Flossenbewegung stoppt?

(vi*) Berechnen Sie den Weg der Forelle als Funktion der Zeit. Welchen Weg legt sie im Grenzwert $t \to \infty$ zurück? Wie können wir dies mit unseren Ergebnissen aus der Vorlesung vereinbaren?

Hinweis. Das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + a} = \ln(x + a) \tag{6}$$

könnte nützlich sein.