

Serie 2

Aufgabe 1

Untersuchen Sie das Lösungsverhalten der folgenden linearen Gleichungssysteme und bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit sämtliche Lösungen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_2 + 6x_3 &= 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ (!) besitzen folgende homogene lineare Gleichungssysteme nicht-triviale Lösungen?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ hängt noch von einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ab.

- a) Für welche Werte von λ verschwindet die Determinante von A ?
- b) Wann hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$
 - (i) nur die triviale Lösung $x = 0$?
 - (ii) auch nicht-triviale Lösungen? Wie lauten diese?
- c) Wann hat das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = c$ für jedes $c \in \mathbb{R}^3$ genau eine Lösung?
- d) Gegeben seien A oben sowie $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass x_0 für jedes λ eine Lösung von $Ax = b$ ist.
- e*) Sei \tilde{x} eine weitere Lösung des LGS $Ax = b$ oben. Zeigen Sie, dass $\tilde{x} - x_0 = x^{hom}$ eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$ ist.

Allgemein gilt: Jede allfällige Lösung eines inhomogenen LGS $Ax = b$ lässt sich schreiben als Summe einer speziellen Lösung x_0 des inhomogenen LGS $Ax = b$ und einer Lösung x^{hom} des homogenen LGS $Ax = 0$, d.h. $x = x_0 + x^{hom}$.

Vergleiche mit dem Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung einer inhomogenen linearen DGL mittels Partikulärlösung.

- f*) Bestimmen Sie nun mit Hilfe von Teil (b) alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von λ .

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 07.03.2017 / Mittwoch, den 08.03.2017 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.

Präsenz der Assistenzgruppe

Zweimal in der Woche beantworten Assistierende in einer Präsenz Fragen: Montag und Donnerstag von 12 bis 13 Uhr im HG G 32.6.