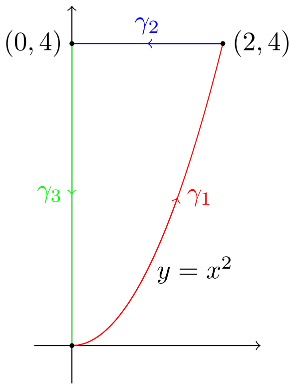
Ferienserie 14

Aufgabe 1

In Aufgabe 2 der Serie 13 haben wir das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

entlang folgender Kurve $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ berechnet, indem wir die Definition des Linienintegrals gebraucht haben. Insbesondere mussten wir das Kurvenintegral in drei einzelne Linienintegrale über die Teilkurven γ_1, γ_2 und γ_3 aufteilen und diese dann zusammen addieren.



Berechnen Sie nun das gleiche Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ indem sie die Formel von Gauss-Green benützen und überzeugen Sie sich davon, dass das gleiche Resultat herauskommt.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

entlang der geradlinigen Verbindung C von $(0,-5)$ nach $(0,5)$.

b) Sei A die Fläche gegeben durch die Halbkreisfläche links der y-Achse mit Mittelpunkt in $(0,0)$ und Radius 5. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) \, dxdy.$$

c) Berechnen Sie $\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entlang dem Halbkreisbogen C' von $(0,5)$ nach $(0,-5)$, der die Fläche A auf der linken Seite begrenzt.

Bemerkung: Das folgt auch ohne weitere Rechnung direkt aus Teilaufgabe a) und b).

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Linienintegrale $\oint_C F \cdot d\vec{r}$ zuerst direkt, dann mit Hilfe der Formel von Gauss-Green als Gebietsintegral. Die Kurve C ist jeweils Rand des Gebiets A und durchläuft diesen in positiver Richtung (d.h. Gegenuhrzeigersinn).

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq x^{\frac{2}{3}}\}$

b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$

c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 y^3 \end{pmatrix}, \quad A =$ Dreieck mit Eckpunkten $(0,0), (1,0), (1,2)$

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ folgender Vektorfelder entlang der angegebenen Kurven C.

a)

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz - \frac{z}{y^2+z^2} \\ xy + \frac{y}{y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Hinweis: Da es sich um ein Linienintegral **im Raum handelt**, kann die Formel von Gauss-Green **nicht** angewendet werden, obwohl die Kurve C geschlossen ist.

b)

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$$

entlang der dreieckigen Kurve C von $(1,0,0)$ nach $(0,1,0)$, dann nach $(0,0,1)$ und wieder zurück nach $(1,0,0)$.

Hinweis: Gleiche Bemerkung wie oben. Das Linienintegral muss direkt ausgerechnet werden. Teilen Sie es dafür in drei einzelne Teilintegrale auf.

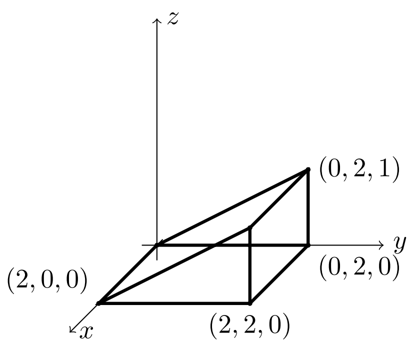
c) Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ aus Aufgabe 2 entlang geradliniger Verbindung C von $(-5,2)$ nach $(5,2)$

Aufgabe 5

Sei das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ gegeben durch

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten folgenden keilförmigen Körper V im Raum der durch die geschlossene Fläche A begrenzt wird.



Der Satz von Gauss besagt, dass für geschlossene Flächen A gilt

$$\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dV.$$

Auf der linken Seite steht das Oberflächenintegral von $\overrightarrow{F}$ über der Fläche A von innen nach aussen orientiert. Auf der rechten Seite steht ein normales Dreifachintegral der Divergenz von $\overrightarrow{F}$ (eine Funktion!!) über dem Volumen V. Zur Erinnerung: Die Divergenz eines Vektorfeldes (im Raum)

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}P(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x,y,z)$.

Mit dem Satz von Gauss kann man das Oberflächenintegral von $\overrightarrow{F}$ über A (also die linke Seite) einfach berechnen, da das Dreifachintegral auf der rechten Seite schnell berechnet ist. Es ist aber eine gute Übung, das Oberflächenintegral auch direkt auszurechnen. Die Parametrisierungen der Flächen sind in diesem Beispiel nicht schwierig.

a) Rechnen Sie das Oberflächenintegral auf der linken Seite direkt aus. Dafür müssen Sie die Fläche A in die 5 Teilflächen aufteilen, die die Seitenflächen von K bilden, und 5 einzelne Oberflächenintegrale ausrechnen. Das gesuchte Oberflächenintegral ist die Summe dieser 5 Oberflächenintegrale.

   Bei der Berechnung muss man an einer Stelle das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen $t_u \times t_v$ der Parametrisierung der Fläche ausrechnen, die man gerade betrachtet. Dieser Vektor steht senkrecht auf der betroffenen Fläche. Sie müssen aber gegebenenfalls das Vorzeichen umkehren, damit der Vektor nach aussen zeigt. Das Oberflächenintegral soll ja von innen nach aussen berechnet werden.

b) Rechnen Sie das Dreifachintegral auf der rechten Seite aus. Sie sollten das gleiche Resultat wie in a) erhalten.

Aufgabe 6

In Aufgabe 4 der Serie 13 haben wir das Oberflächenintegral (auch genannt Fluss) des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

durch die geschlossene Fläche A berechnet, welche durch das abgeschnittene Paraboloid $z = x^2 + y^2$ mit Deckel auf der Höhe $z = 4$ beschrieben wird (von innen nach aussen orientiert). Mit anderen Worten haben wir

$$\oiint\limits_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}$$

mittels der Definition des Oberflächeintegrals von Vektorfeldern ausgerechnet. Dabei mussten wir insbesondere das Oberflächenintegral in zwei Oberflächenintegrale über den "Deckel" und die "Mantelfläche" aufteilen und diese dann zusammen addieren.

Bestimmen Sie nun das gleiche Oberflächenintegral $\oiint\limits_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}$ indem Sie den Satz von Gauss brauchen und überzeugen Sie sich davon, dass das gleiche Resultat herauskommt. Um das Dreifachintegral über dem Volumen zu berechnen, benützen Sie hier am besten Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + \frac{3}{z} \\ x^2 + 3y \\ -y^2 + z \end{pmatrix}$$

über der Oberfläche A gegeben durch den Kegel mit Spitze $S = (0,0,3)$ und Grundkreis $K = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$.
Erinnerung: Volumen Kegel $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Präsenz der Assistenzgruppe

Während der Semesterferien finden die Präsenzstunden in den **letzten zwei Wochen vor Beginn der Prüfungssession** statt:
Montag und Donnerstag von **13 bis 14.30 Uhr** im HG G 32.6.