Lösungsvorschläge zur Serie 13

Aufgabe 1

a) Um eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung $y''(x)+ay'(x)+by(x) = g(x)$ mit konstanten Koeffizienten zu lösen, lösen wir zunächst die dazugehörige homogene DGL. In diesem Fall also $y''(x)+2y(x) = 0$. Diese DGL besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2 = 0$ mit nicht-reellen Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{2}$. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL $y''(x)+2y(x) = 0$ gegeben durch

$$y_0(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x) \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die (allgemeine) Lösung der inhomogenen DGL lässt sich dann schreiben als Summe der allgemeinen Lösung $y_0(x)$ der homogenen DGL und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL, also $y(x) = y_0(x)+y_p(x)$. Um $y_p(x)$ zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da es sich bei der Störfunktion $g(x)$ um ein Polynom 2. Grades handelt und in unserer DGL $y''(x)+ay'(x)+by(x) = g(x)$ der Koeffizient $b \neq 0$ ist (siehe Folie 55, Kapitel 11).

Mit unserem Ansatz gilt $y_p''(x) = 2A$ und somit eingesetzt in die inhomogene DGL

$$y''(x) + 2y(x) = 2A + 2(Ax^2 + Bx + C) \stackrel{!}{=} g(x) = x^2.$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten folgt $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ und $C = -\frac{1}{2}$. Somit ist eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

und die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Nun können wir die spezielle Lösung der inhomogenen DGL finden, die wir suchen. Mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ folgt $C_2 = \frac{1}{2}$ und $C_1 = 0$. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

b) Wir verfahren wie in Teilaufgabe a). Die homogene DGL lautet $2y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$ oder auch umgeschrieben

$$y''(x) - \frac{1}{2}y'(x) - 3y(x) = 0$$

und besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 3 = 0$ mit reellen Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL gegeben durch

$$y_h(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL zu finden, machen wir dieses Mal den Ansatz $y_p(x) = Ae^{3x}$, da es sich bei der Störfunktion um $g(x) = e^{3x}$ handelt und 3 nicht eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist (siehe Folie 56, Kapitel 11).

Mit unserem Ansatz gilt $y_p'(x) = 3Ae^{3x}$ und $y_p''(x) = 9Ae^{3x}$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$2y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 18Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} \overset{!}{=} g(x) = e^{3x}.$$

Es folgt $A = \frac{1}{9}$ und somit ist eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = \frac{1}{9}e^{3x}.$$

Die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Wir verfahren wie oben. Die homogene DGL lautet $y''(x) - y(x) = 0$ und besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0$ mit reellen Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm 1$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL gegeben durch

$$y_h(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL, machen wir dieses Mal den Ansatz $y_p(x) = Axe^x$, da es sich bei der Störfunktion um $g(x) = \frac{1}{2}e^x$ handelt und 1 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist (siehe Folie 56, Kapitel 11).

Mit unserem Ansatz gilt $y_p''(x) = 2Ae^x + Axe^x$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$y''(x) - y(x) = 2Ae^x + Axe^x - Axe^x \overset{!}{=} g(x) = \frac{1}{2}e^x.$$

Es folgt $A = \frac{1}{4}$ und somit ist eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = \frac{1}{4}xe^x.$$

Die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Wir verfahren wie oben. Die homogene DGL lautet $y''(x) + y(x) = 0$ und besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ mit nicht-reellen Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm i$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL gegeben durch

$$y_0(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL, machen wir dieses Mal den Ansatz $y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, da es sich bei der Störfunktion um $g(x) = \sin(2x)$ handelt und $2i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist (siehe Folie 57, Kapitel 11).

Mit unserem Ansatz gilt $y_p''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$y''(x) + y(x) = -3A\sin(2x) - 3B\cos(2x) \stackrel{!}{=} g(x) = \sin(2x).$$

Vergleich der Koeffizienten liefert $B = 0$ und $A = -\frac{1}{3}$ und somit ist eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x).$$

Die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \frac{1}{3}\sin(2x) \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den gegebenen Bedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = \frac{1}{3}$ folgt für die gesuchte spezielle Lösung $C_2 = 0$ und $C_1 = 1$, also

$$y(x) = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

Aufgabe 2

a) Mögliche Parametrisierungen der Wege γ_1 und γ_2 sind

$$\gamma_1: \qquad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 2$$

$$\gamma_2: \qquad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 2.$$

b) i) Wir rechnen $I_1 = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ aus und gehen dabei wie in der Vorlesung vor.

Wir haben in Teilaufgabe a) die Kurve γ_1 schon durch einen Parameter t ausgedrückt. Nun wollen wir auch das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve γ_1 durch diesen Parameter beschreiben. Das erfolgt durch Einsetzen des Ortsvektors $\overrightarrow{r}(t)$ der Kurve in das Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$

$$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Anschliessend müssen wir den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve γ_1 ableiten und das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ bilden

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = t^2 + 2t^3.$$

Schliesslich integriert man das berechnete Skalarprodukt in den Grenzen des Parameters t und das ist das gesuchte Integral

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (t^2 + 2t^3)\, dt = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}.$$

ii) Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve γ_2 in Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ (2-t)^2 \end{pmatrix}.$$

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve γ_2 ableiten und Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ bilden

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 4 \\ (2-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4.$$

Skalarprodukt in den Grenzen von t integrieren

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 -4\, dt = -8.$$

iii) Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve γ_3 in Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve γ_3 ableiten und Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ bilden

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 4-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Skalarprodukt in den Grenzen von t integrieren

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 0\, dt = 0.$$

Es folgt also

$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{32}{3} - 8 + 0 = \frac{8}{3}.$$

Aufgabe 3

a) Zuerst brauchen wir eine Parametrisierung der Kurve C durch einen Ortsvektor $\vec{r}(t)$. In diesem Fall können wir direkt

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } -2 \leq t \leq 1.$$

wählen. Jetzt können wir wie in Aufgabe 2 das Kurvenintegral ausrechnen.

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C in Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} t + t^3 \\ 2t - t^3 \end{pmatrix}.$$

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C ableiten und Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ bilden

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = t + 7t^3 - 3t^5.$$

Skalarprodukt in den Grenzen von t integrieren

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{1} (t + 7t^3 - 3t^5)\, dt = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^6 \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{15}{4}.$$

b) Zuerst brauchen wir wieder eine Parametrisierung der Kurve C durch einen Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Da es sich um den Einheitskreis handelt mit Startpunkt $(1, 0)$ und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, bietet sich folgende Parametrisierung an

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Jetzt können wir wie in Aufgabe 2 das Kurvenintegral ausrechnen.

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C in Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C ableiten und Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ bilden

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\cos(t)\sin(t) + 1.$$

Skalarprodukt in den Grenzen von t integrieren

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + 1)\, dt = \left(\frac{1}{2}\cos(t)^2 + t \right) \Bigg|_{0}^{2\pi} = 2\pi.$$

Aufgabe 4

a) Der Deckel ist eine Kreisfläche auf der Höhe $z = 4$ mit Radius 2, da auf dieser Höhe für das Paraboloid $4 = z = x^2 + y^2$ gilt. Wir können als Parametrisierung des Deckels also

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le u \le 2 \text{ und } 0 \le v \le 2\pi$$

wählen. Für das Ausrechnen des Oberflächenintegrals gehen wir nun wie in der Vorlesung vor.

Zuerst wird auch das Vektorfeld $\vec{F}$ durch die Parameter u, v beschrieben. Das erfolgt durch Einsetzen des Ortsvektors $\vec{r}(u, v)$ der Fläche in das Vektorfeld $\vec{F}$

$$\vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u\cos(v) - 16 \end{pmatrix}.$$

Anschliessend bildet man die partiellen Ableitungen des Ortsvektors $\vec{r}(u, v)$ nach den Parametern u und v

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet man das Vektorprodukt $\vec{t_u} \times \vec{t_v}$ und danach das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$. In unserem Fall

$$\vec{t_u} \times \vec{t_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos(v)^2 + u\sin(v)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v}) = u^2\cos(v) - 16u.$$

Schliesslich integriert man das berechnete Produkt $\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$ in den Grenzen der Parameter u und v und erhält das gesuchte Integral

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\text{Deckel}} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (u^2\cos(v) - 16u)\, dv\, du \\
&= \int_0^2 (u^2\sin(v) - 16uv)\Big|_0^{2\pi} du \\
&= -32\pi \int_0^2 u\, du \\
&= -64\pi.
\end{aligned}$$

b) Die Parametrisierung der Fläche ist schon gegeben. Wir können somit direkt den Ortsvektor $\vec{r}(u, v)$ der Fläche in das Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen

$$\vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u\cos(v) - u^4 \end{pmatrix}.$$

Dann partielle Ableitungen des Ortsvektors $\overrightarrow{r}(u,v)$ nach den Parametern u und v bilden

$$\overrightarrow{t_u} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{t_v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet man das Vektorprodukt $\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v}$, also

$$\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v} = \begin{pmatrix} -2u^2\cos(v) \\ -2u^2\sin(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

Wie im Hinweis erwähnt, zeigt dieser Vektor auf der "Mantelfläche" nach innen (sieht man durch Einsetzen). Da wir aber den Fluss von innen nach aussen berechnen wollen, drehen wir das Vorzeichen um. Somit berechnen wir anschliessend das Skalarprodukt

$$\overrightarrow{F} \cdot (-\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v}) = 2u^3 - u^2\cos(v) + u^5.$$

Das berechnete Produkt $\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v})$ wird schliesslich in den Grenzen der Parameter u und v integriert

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\text{Mantelfläche}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2u^3 - u^2\cos(v) + u^5)\, dv\, du \\ &= \int_0^2 (2u^3 v - u^2 \sin(v) + u^5 v)\Big|_0^{2\pi}\, du \\ &= 2\pi \int_0^2 (2u^3 + u^5)\, du \\ &= \frac{112}{3}\pi. \end{aligned}$$

c) Der Fluss des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch die geschlossene Fläche A von innen nach aussen ist somit

$$\oiint\limits_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint\limits_{\text{Deckel}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} + \iint\limits_{\text{Mantelfläche}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = -64\pi + \frac{112}{3}\pi = -\frac{80}{3}\pi.$$