Lösungsvorschläge zur Serie 6

Aufgabe 1

a) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da für den Definitionsbereich gelten muss: $y \neq 0$ und $x + \ln(y^2) \geq 0$.

b) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da Nenner für $y = -x$ verschwindet. Die Funktion ist somit z.B. im Punkt $(1, -1)$ nicht definiert.

c) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da der Tangens an den Stellen $\ldots - \frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ nicht definiert ist. Die Funktion f ist somit z.B. im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ nicht definiert.

d) Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da $x^2 + 2y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ nie negativ wird und die Wurzel somit immer definiert ist.

Aufgabe 2

a) Falsch. Die Funktion f ist definiert sobald $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ gilt, während g für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ definiert ist.

b) Falsch. Damit f definiert ist, muss $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$ sein, also $x^2 + y^2 \leq 1$. Für g brauchen wir $x + y \leq 1$. Somit ist z.B. g im Punkt $(2, -2)$ definiert, f aber nicht.

c) Falsch. Damit $f(x, y) = \ln(xy)$ definiert ist, brauchen wir $xy > 0$. Es sind also auch Punkte (x, y) mit $x < 0$ und $y < 0$ erlaubt. Zum Beispiel $(-1 - 1)$ im Definitionsbereich von f, obwohl nicht in der angegebenen Menge enthalten.

d) Falsch. Zum Beispiel ist im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ der Funktionswert $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1 + 1 = 2 \notin [-1, 1]$. Der korrekte Wertebereich von f wäre $[-2, 2]$.

Aufgabe 3

a) Auf der xz-Ebene gilt $y = 0$.

Damit erhalten wir $\varphi(x) = z = f(x, 0) = e^{-2x^2}$.

b) Die Höhenlinie von f zur Höhe c ist die Menge der Punkte (x, y) in der xy-Ebene mit Funktionswert $f(x, y) = c$. Sei also c im Wertebereich von f. Dann ist $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} = c$ genau dann, wenn $cx^2 - x + cy^2 = 0$.

Ist $c = 0$, so wird diese Gleichung von allen (x, y) mit $x = 0$ erfüllt. Die Höhenlinie von f zur Höhe $c = 0$ ist somit die vertikale Gerade $x = 0$ in der xy-Ebene (siehe Abbildung).

Ist $c \neq 0$ können wir auf beiden Seiten der Gleichung durch c dividieren und erhalten $x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0$. Diese Gleichung können wir zu einer Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 = \left(\frac{1}{2|c|}\right)^2$$

umschreiben. Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $\left(\dfrac{1}{2c}, 0\right)$ und Radius $\dfrac{1}{2|c|}$. Die Höhenlinie von f zur Höhe $c \neq 0$ ist somit der Kreis in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $\left(\dfrac{1}{2c}, 0\right)$ und Radius $\dfrac{1}{2|c|}$ (siehe Abbildung).

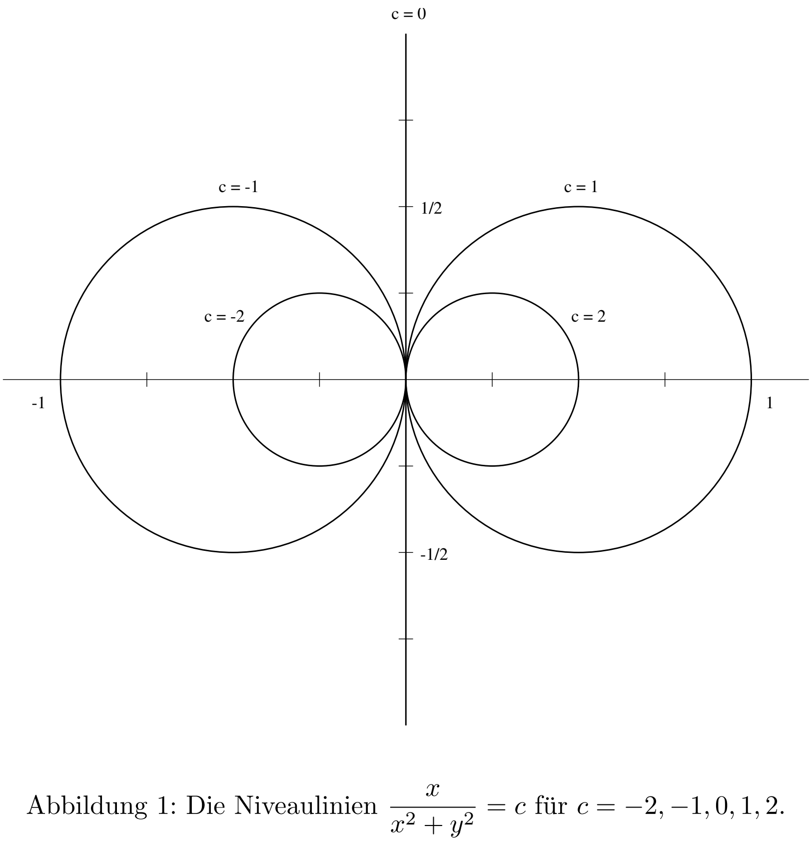

Abbildung 1: Die Niveaulinien $\dfrac{x}{x^2 + y^2} = c$ für $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2xe^{y^2+xy} + x^2ye^{y^2+xy} = (xy+2)xe^{y^2+xy} \\
f_y(x,y) &= x^2(2y+x)e^{y^2+xy}
\end{aligned}
$$

b) Ähnlich wie bei der logarithmischen Ableitung (siehe Kapitel 3 Mathematik I) schreiben wir

$$
g(x,y) = e^{\ln(g(x,y))} = e^{(y+2)\ln(x)}
$$

und können jetzt ganz normal die partiellen Ableitungen bilden

$$
\begin{aligned}
g_x(x,y) &= \frac{y+2}{x}e^{(y+2)\ln(x)} = \frac{y+2}{x}x^{y+2} = (y+2)x^{y+1} \\
g_y(x,y) &= e^{(y+2)\ln(x)}\ln(x) = x^{y+2}\ln(x)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
h_x(x,y) &= 2y^2\sin(xy)\cos(xy) \\
h_y(x,y) &= \sin^2(xy) + 2xy\sin(xy)\cos(xy)
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
k_x(x,y) &= \frac{(2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy))(x^2+y^2) - 2x^3\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2xy^2\cos(xy) - x^2y(x^2+y^2)\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{xy\left(2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy)\right)}{(x^2+y^2)^2} \\
k_y(x,y) &= \frac{-x^3\sin(xy)(x^2+y^2) - 2x^2y\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= -\frac{x^2\left(x\sin(xy)(x^2+y^2) + 2y\cos(xy)\right)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$
f_x(x,y) = -4xe^{-(2x^2+3y^2)} \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -6ye^{-(2x^2+3y^2)}.
$$

Somit folgen für die gesuchten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 4e^{-(2x^2+3y^2)}(4x^2-1) \\
f_{yy}(x,y) &= 6e^{-(2x^2+3y^2)}(6y^2-1) \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 24\,xye^{-(2x^2+3y^2)}.
\end{aligned}
$$