Übung 2

Ausgabe	26.2.2017
Abgabe	5.3.2017

1 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (DGLs) treten in vielen Bereichen auf, insbesondere in Anwendungen in der Physik, der Chemie, der Biologie und in den Wirtschaftswissenschaften. Im Folgenden sollen einige einfache gewöhnliche DGLs gelöst werden.

Aufgaben

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die gegebenen Funktionen Lösungen der jeweiligen DGL sind

1. $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x} \cdot y(x) - 4x^3 - x^2 \quad = \quad 0 \quad ; \quad y(x) \quad = \quad 2x^4 + x^3$
2. $\ln(7) \cdot y(x) + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \quad 0 \quad ; \quad y(x) \quad = \quad k \cdot 7^{-x},\ k \in \mathbb{R}$
3. $\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} = 0$ (das 2. Fick'sche Gesetz); $N(x,t) = \frac{Z_0}{2A(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$
   Was sind die Anfangs- und Randbedingungen für diese Lösung?
   Sind diese Bedingungen in der Biologie üblich?

Lösen Sie die folgenden DGL unter den angegebenen Randbedingungen

4. $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - ay(x)^2 = 0$; $y(0) = 1$ durch Trennung der Variablen

5. $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k \cdot x(t) = 0$; $x(0) = x_0$ (wobei k die Zerfallskonstante ist)

   Berechnen Sie für diesen Zerfallsprozess die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ (dies ist die Zeit bei der die Hälfte des Anfangswertes zerfallen ist: $x(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x_0$).

2 Atomradius

Aus der Formel für den Diffusionskoeffizienten eines Gases (das nur aus einer Teilchensorte besteht) kann der Radius der darin enthaltenen Atome berechnet werden. Der Diffusionskoeffizient für He bei Standardbedingungen ($T = 298\,\mathrm{K}$ und $p = 101.3\,\mathrm{kPa}$) beträgt $D_{\mathrm{He}} = 3.78 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$. Bestimmen Sie den Atomradius eines He-Atomes

Hinweis :

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Formeln für die folgenden Variablen auf:
   a) den Diffusionskoeffizienten D als Funktion der mittleren freien Weglänge λ
   b) den Stossquerschnitt σ als Funktion der Atomradien
   c) die mittlere freie Weglänge λ als Funktion der σ und der Teilchenkonzentration N
   d) die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\langle v \rangle$ als Funktion der Masse der Teilchen und der Temperatur.
2. Kombinieren Sie die obenstehenden Formeln und lösen sie Sie nach r auf.
3. Geben sie die Konzentration N in Abhängigkeit von p und T an, (Gehen Sie von idealen Verhältnissen aus).
4. Setzen Sie die Formel für N in die unter Punkt 2. hergeleitete Formel für r ein.