Lösungsvorschläge zur Serie 11

Aufgabe 1

Das Gebiet wird durch die Geraden $y = \frac{1}{2}x$ und $y = -\frac{1}{2}x$ begrenzt. Somit ist G geben durch

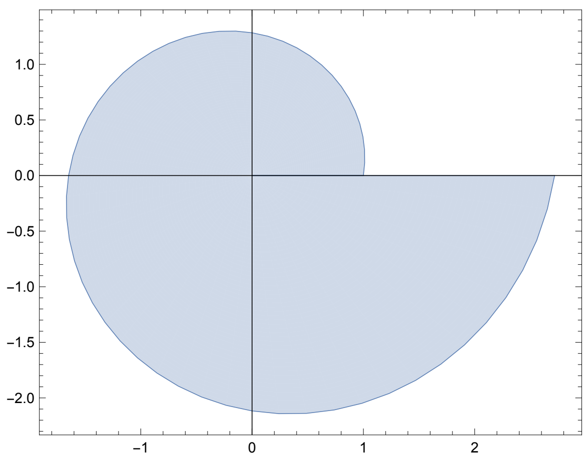
$$G = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \, , -\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_G f(x,y)\, dA &= \int_0^2 \int_{-x/2}^{x/2} (xy + x + y)\, dy dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{-x/2}^{x/2} + xy\Big|_{-x/2}^{x/2} + \frac{1}{2}y^2\Big|_{-x/2}^{x/2} \right) dx \\
&= \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Das Gebiet B sieht wie folgt aus

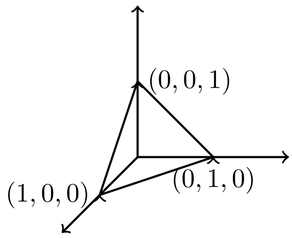


Die Fläche des Gebietes B ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{aligned}
\iint_B 1\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\phi)} 1\cdot r\,dr d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{e^{\phi/2\pi}} r\,dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{e^{\phi/2\pi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\phi/\pi}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2}\pi e^{\phi/\pi}\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(e^2-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zuerst überlegen wir uns, wie der eingeschlossene Körper aussieht. Am einfachsten ist es, sich zu überlegen, wo die Ebene $z = 1-x-y$ die drei Koordinatenachsen schneidet, d.h. welche Punkte der Form $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ und $(0,0,z)$ auf der Ebene $z = 1-x-y$ liegen. Wir finden durch Einsetzen die Schnittpunkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Der Körper K sieht also wie folgt aus:



Somit kann K durch

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1-x\,,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

beschrieben werden. Das Volumen ist also gleich

$$\begin{aligned}
\iiint_K 1\,dV &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx \\
&= \int_0^1 ((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Als erstes ersetzen wir y' durch $\frac{dy}{dx}$ und trennen die Variablen x, y auf verschiedene Seiten der Gleichung

$$y'(x) = -xy(x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = -xy \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{y}\,dy = -x\,dx.$$

Als zweites integrieren wir auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung und fassen die zwei Integrationskonstanten zu einer zusammen

$$\frac{1}{y}\,dy = -x\,dx \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx \quad\Longrightarrow\quad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Als letztes müssen wir die erhaltene Gleichung nach y auflösen

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad &\Longrightarrow\quad |y| = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\Longrightarrow\quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \tilde{C} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } \tilde{C} \in \mathbb{R} \text{ neuer Konstante.} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -xy(x)$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = \tilde{C} = 3$ folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x^2}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \ln(|y|) = \frac{1}{x} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = \frac{1}{x} + C \quad &\Longrightarrow\quad |y| = e^{\frac{1}{x} + C} = e^C e^{\frac{1}{x}} \\ &\Longrightarrow\quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{\frac{1}{x}} = \tilde{C} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{mit } \tilde{C} \in \mathbb{R} \text{ neuer Konstante.} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2}$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{\frac{1}{x}}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung $y(1) = \tilde{C}e = e$ (und somit $\tilde{C} = 1$) folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

c) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y(x)y'(x) = e^{2x} \quad\Longrightarrow\quad y\frac{dy}{dx} = e^{2x} \quad\Longrightarrow\quad y\,dy = e^{2x}\,dx.$$

Daraus folgt

$$y\,dy = e^{2x}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \int y\,dy = \int e^{2x}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad \Longrightarrow \quad y^2 = e^{2x} + 2C$$
$$\Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{e^{2x} + 2C} = \pm\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}} \quad \text{mit } \tilde{C} \in \mathbb{R} \text{ neuer Konstante.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y(x)y'(x) = e^{2x}$ ist also $y(x) = \sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ oder $y(x) = -\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung $y(0) = -1$ folgt, dass wir die Lösung mit dem Minuszeichen wählen müssen und $\tilde{C} = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\sqrt{e^{2x}} = -e^x.$$

Aufgabe 5

a) Zuerst lösen wir die entsprechende homogene Differentialgleichung, d.h. $y'(x) - 2y(x) = 0$. Deren Lösung findet man mit der Methode der Trennung der Variablen und findet (siehe Vorlesung)

$$y(x) = K \exp\left(\int 2\,dx\right) = Ke^{2x} \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{2x},$$

wobei wir die Funktion $K(x)$ noch bestimmen müssen. Diesen Ansatz setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhalten

$$1 = y'(x) - 2y(x) = (K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x}) - 2K(x)e^{2x} = K'(x)e^{2x},$$

das heisst $K'(x)e^{2x} = 1$. Daraus folgt

$$K(x) = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Setzt man dieses $K(x)$ in den gewählten Ansatz ein, so folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{2x} = Ce^{2x} - \frac{1}{2} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

b) Wir verfahren wie in Teilaufgabe a). Die homogene Differentialgleichung ist $y'(x) + y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int 1\,dx\right) = Ke^{-x} \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{-x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$x = y'(x) + y(x) = (K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}) + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^x$ und somit

$$K(x) = \int xe^x \, dx \overset{(*)}{=} xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante,}$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{-x} = Ce^{-x} + x - 1 \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

c) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) - y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(\int 1 \, dx\right) = Ke^x \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$\sin(x) = y'(x) - y(x) = (K'(x)e^x + K(x)e^x) - K(x)e^x = K'(x)e^x.$$

Wir haben also $K'(x) = \sin(x)e^{-x}$ und somit

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x} \, dx.$$

Dieses Integral lösen wir mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \sin(x)e^{-x} \, dx &= -\sin(x)e^{-x} + \int \cos(x)e^{-x} \, dx \\ &= -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x} \, dx, \end{aligned}$$

also

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x} \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich die Konstante $C = \frac{3}{2}$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$