Musterlösung Probetest

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*4 Punkte*)

- Falsch. Das Gleichunssystem
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$
hat keine Lösung.
- Die Matrix mit den drei gegebenen Vektoren als Spalten hat Determinante $\det = 15-3c$. Damit die drei Vektoren linear abh/ängig sind, muss also $c=5$ sein.
- Falsch. Wähle zum Beispiel die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
mit jeweils Determinante 0. Es gilt aber $\det(A+B) = \det(E) = 1$.
- Richtig. Eine invertierbare Matrix hat Determinante $\det \neq 0$. Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte der Matrix ist, kann somit keiner der Eigenwerte Null sein.

b) (*2 Punkte*) Ein homogenes quadratisches Gleichungssystem $Bx=0$ besitzt genau dann nur die triviale Lösung $x=0$, wenn $\det(B) \neq 0$ gilt. Hier haben wir (z.B. mit der Sarrus-Regel)
$$\det(B) = 4(\mu+1) - 2\mu = 2\mu + 4.$$
Es muss also $\mu \neq -2$ gelten.

c) (*2 Punkte*) Das Gaussverfahren liefert
$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+\frac{1}{2}Z_1]{Z_2-\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = (A^*|b^*).$$
Daraus folgt von unten nach oben gelöst $x_3=-1$, $x_2=2$ und $x_1=1$. Die Lösung ist also
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) (*4 Punkte*) Das charakteristische Polynom von C ist
$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2(1-\lambda) + 4 - 2 + 2\lambda - 2(1-\lambda) - 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2). \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind $\lambda = 0$ sowie $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -1.$$

Der grösste Eigenwert von C ist somit $\lambda_2 = 2$. Zu diesem finden wir einen Eigenvektor durch Lösen von $(C - \lambda_2 E)x = (C - 2E)x = 0$, also

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+\frac{3}{4}Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

mit Lösung $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$ und $x_1 = 2t$. Eigenvektoren von C zum Eigenwert 2 haben somit die Form

$$x = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

Ein Eigenvektor wäre bsp. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (*13 Punkte*)

a) (*3 Punkte*) Die gegebene Fläche kann auch als Graph der Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \ln(6)$$

gesehen werden. Der Wert z_0 ist $z_0 = f(1, 2) = \ln(6) - \ln(6) = 0$. Die Gleichung der Tangentialebene ist diejenige and die Funktion f im Punkt $P = (1, 2, 0) = (x_0, y_0, z_0)$. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ f_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung ist

$$\begin{aligned} z &= z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x, y) \cdot (y - y_0) \\ &= \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 2) = \frac{1}{3}(x + 2y - 5). \end{aligned}$$

b) (*4 Punkte*) Die kritischen Punkte bestimmen wir durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 6x + 6y = 0 \\ f_y(x, y) = 6x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{27}{2} = 0 \end{cases}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -y$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen können. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}y^2 - 6y + \frac{27}{2} = 0 \iff y^2 - 12y + 27 = 0.$$

Die Lösungen davon sind $y_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = 6 \pm 3$. Mit der Gleichung $x = -y$ folgen also die kritischen Punte

$$P_1 = (-9, 9) \qquad \text{und} \qquad P_2 = (-3, 3).$$

Siehe nächstes Blatt!

Für den zweiten Teil brauchen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, welche sind

$$f_{xx}(x,y) = 6 \qquad f_{yy}(x,y) = y \qquad f_{xy} = 6.$$

Es ist somit $\Delta = 6y - 36$. Für P_1 ist $\Delta > 0$ und $f_{xx}(-9,9) = 6 > 0$, also ist bei $P_1 = (-9,9)$ ein relatives Minimum. Für P_2 ist $\Delta < 0$, also ist bei $P_2 = (-3,3)$ ein Sattelpunkt.

c) (*3 Punkte*) Der Punkt $(x_0, y_0) = (-2, y_0)$ liegt auf der Kurve, muss also die Bedingung $g(-2, y_0) = 0$ erfüllen. Es ist $g(-2, y_0) = -y_0^2 - 4y_0 = -y_0(4 + y_0)$. Für $g(-2, y_0) = 0$ kommt also nur $y_0 = 0$ oder $y_0 = -4$ in Frage. Da $y_0 < 0$ sein soll, können wir ersteres vergessen. Wir müssen also die Steigung im Punkt $(-2, -4)$ ausrechnen. Das gelingt mit impliziter Differentiation. Die partiellen Ableitungen sind

$$g_x(x,y) = 6x^2 - 8 \qquad g_y(x,y) = -2y - 4.$$

Es folgt für die Steigung

$$y'(-2) = -\frac{f_x(-2,-4)}{f_y -2, -4} = -\frac{16}{4} = -4.$$

d) (*3 Punkte*) Die Gleichung, welche die Kurve beschreibt, können wir auch umschreiben in $f(x,y) = 0$, wobei f die Funktion $f(x,y) = x^3 - 3x^2 - 4 + 4y^2$ ist. Die Kurve besitzt horizontale Tangenten in genau den Punkten, wo die Steigung gleich Null ist. Mit impliziter Differentiation folgt für die Steigung in einem beliebigen Punkt (x,y) auf der Kurve

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y x, y} = -\frac{3x^2 - 6x}{8y} = \frac{3x(2-x)}{8y}.$$

Die Steigung ist also Null falls der Punkt auf der Kurve x-Wert 0 oder 2 besitzt. Die dazu passenden y-Werte finden wir durch einsetzen in die Gleichung, welche die Kurve beschreibt. Ist $x = 0$ so folgt $y = 1$ oder $y = -1$. Ist $x = 2$, so folgt $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$. Die Kurve besitzt also in den vier Punkten

$$P_1 = (0,1) \qquad P_2 = (0,-1) \qquad P_3 = (2,\sqrt{2}) \qquad P_4 = (2,-\sqrt{2})$$

horizontale Tangenten.