Lösungsvorschläge zur Serie 10

Aufgabe 1

Wir wenden das Lagrangesche Multiplikatorverfahren an. Die Nebenbedingung ist $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Hilfsfunktion ist somit

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y) = \frac{x + 2}{y + 2} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung und setzen sie gleich Null

$$\begin{aligned} F_x(x, y, \lambda) &= \frac{1}{y + 2} + 2\lambda x = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) &= -\frac{x + 2}{(y + 2)^2} + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Zuerst versuchen wir, λ zu eliminieren. Die 1. Gleichung kann nicht erfüllt werden, falls $x = 0$ ist. Also können wir $x \neq 0$ annehmen und die 1. Gleichung nach λ auflösen. Wir erhalten

$$\lambda = -\frac{1}{2x(y + 2)}.$$

Dieses λ setzen wir in die 2. Gleichung ein und finden

$$-\frac{x + 2}{(y + 2)^2} - \frac{y}{x(y + 2)} = 0.$$

Wir bringen die Brüche auf der linken Seite auf einen gemeinsamen Nenner und bekommen

$$\frac{(x + 2)x + y(y + 2)}{x(y + 2)^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{(x + 2)x + y(y + 2)}_{x^2+y^2+2x+2y} = 0.$$

Aus der 3. Gleichung vom Beginn wissen wir $x^2 + y^2 = 1$. Das setzen wir hier ein und finden

$$1 + 2x + 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -x - \frac{1}{2}.$$

Wir sind fast am Ende. Setzen wir dieses y in die 3. Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ein, erhalten wir nach Auflösen mit der Mitternachtsformel

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4} \qquad \text{oder} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4}.$$

Daraus folgt

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \qquad \text{oder} \qquad y_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

wegen $y = -x - \frac{1}{2}$.

Die Extrema von f unter der Nebenbedingung ϕ befinden sich somit in den Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$. Durch Einsetzen sieht man $f(x_1, y_1) \approx 2.215$ und $f(x_2, y_2) \approx 0.451$. Das heisst, unter der Nebenbedingung ϕ ist bei P_1 das Maximum und bei P_2 das Minimum der Funktion f.

Aufgabe 2

Es handelt sich hier um eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingung. Wir suchen die Extrema (hier das Minimum) der Funktion f, welche den Abstand eines Punktes P in $\mathbb{R}^3$ vom Nullpunkt beschreibt. Die Nebenbedingung ϕ, die erfüllt sein muss, besagt, dass der Punkt P auf der Ebene E liegen muss.

Der Abstand eines Punktes $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vom Ursprung $(0, 0, 0)$ ist $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die Nebenbedingung, die P erfüllen muss, ist $\phi(x, y, z) = x + y + 2z - 6 = 0$ (Ebenengleichung). Die Hilfsfunktion ist also

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(x + y + 2z - 6).$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung und setzen sie gleich Null

$$\begin{aligned}
F_x(x, y, z, \lambda) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = 0 \\
F_y(x, y, z, \lambda) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = 0 \\
F_z(x, y, z, \lambda) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda = 0 \\
F_\lambda(x, y, z, \lambda) &= x + y + 2z - 6 = 0.
\end{aligned}$$

Zuerst versuchen wir, λ zu eliminieren. Die 1. Gleichung nach λ aufgelöst ergibt

$$\lambda = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

was wir in die 2. und 3. Gleichung einsetzen. Wir erhalten

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \text{und} \qquad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Daraus folgt direkt $y = x$ und $z = 2x$. Dieses y und z setzen wir in die 4. Gleichung ein und bekommen

$$x + y + 2z - 6 = 6x - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1.$$

Folglich ist auch $y = 1$ und $z = 2$. Das gesuchte Extremum ist demnach der Punkt $(1, 1, 2)$. Dieser besitzt den Abstand $f(1, 1, 2) = \sqrt{6}$ vom Ursprung.

Aufgabe 3

Eine Skizze zeigt, dass sich die Gerade und die Parabel bei $x = -2$ und bei $x = 1$ schneiden und dass die gesuchte Fläche gleich der Fläche unter der Geraden minus die Fläche unter der Parabel in diesem Intervall $[-2, 1]$ ist. Damit ist die gesuchte Fläche

$$\begin{aligned}
|A| &= \int_{-2}^{1} g(x)\,dx - \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} 2 - x\,dx - \int_{-2}^{1} x^2\,dx \\
&= \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} - \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{1} \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Den Körper K können wir am einfachsten mit Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) beschreiben. Ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich mittels Zylinderkoordinaten durch (r, ϕ, z) beschreiben für bestimmte $r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$. Und zwar ist der Körper K in Zylinderkoordinaten

$$K = \{(r, \phi, z) \,|\, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \sqrt{r} \leq z \leq \sqrt{a}\}.$$

Das Volumen des Trichters K ist somit mit der Formel aus der Vorlesung für Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_K 1\,dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{a}} 1 \cdot r\,dz\,dr\,d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(zr \Big|_{z=\sqrt{r}}^{z=\sqrt{a}} \right) dr\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a (r\sqrt{a} - r^{3/2})\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{a}}{2} r^2 - \frac{2}{5} r^{5/2} \Big|_{r=0}^{r=a} \right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{10} a^{5/2}\,d\phi = \frac{1}{10} a^{5/2} \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \\
&= \frac{\pi}{5} a^{5/2}.
\end{aligned}$$

(b) Wegen der Rotationssymmetrie (um die z-Achse) von V muss für die x- und y-Koordinate des Schwerpunktes gelten $x_S = y_S = 0$. Die Schwerpunktkoordinate z_S bestimmt man mit der Formel aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{V}\iiint_K zr\; dz\, dr\, d\phi \\ &= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{a}} zr\, dz\, dr\, d\phi \\ &= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}(a-r)r\, dr\, d\phi \\ &= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3}{4}-\frac{a^3}{6}\right) d\phi \\ &= \frac{5}{\pi a^{5/2}}\cdot\frac{\pi a^3}{6} \\ &= \frac{5\sqrt{a}}{6}. \end{aligned}$$

Es folgt für den Schwerpunkt $S = \left(0, 0, \frac{5\sqrt{a}}{6}\right)$.

Aufgabe 5

a) Als erstes ersetzen wir y' durch $\frac{dy}{dx}$ und trennen die Variablen x, y auf verschiedene Seiten der Gleichung

$$y'(x) = -xy(x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = -xy \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{y}\,dy = -x\,dx.$$

Als zweites integrieren wir auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung und fassen die zwei Integrationskonstanten zu einer zusammen

$$\frac{1}{y}\,dy = -x\,dx \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx \quad\Longrightarrow\quad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit } C\in\mathbb{R}.$$

Als letztes müssen wir die erhaltene Gleichung nach y auflösen

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad &\Longrightarrow \quad |y| = e^{-\frac{1}{2}x^2+C} = e^C e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\Longrightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } \tilde{C}\in\mathbb{R} \text{ neuer Konstante.} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -xy(x)$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $\tilde{C}\in\mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = \tilde{C} = 3$ folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{1}{x}+C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = \frac{1}{x} + C \quad &\Longrightarrow \quad |y| = e^{\frac{1}{x}+C} = e^C e^{\frac{1}{x}} \\ &\Longrightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{\frac{1}{x}} = \tilde{C} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{mit } \tilde{C} \text{ neuer Konstante.} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2}$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{\frac{1}{x}}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung $y(1) = \tilde{C}e = e$ (und somit $\tilde{C} = 1$) folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

c) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y(x)y'(x) = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y\,dy = e^{2x}\,dx.$$

Daraus folgt

$$y\,dy = e^{2x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int y\,dy = \int e^{2x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x}+C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad &\Longrightarrow \quad y^2 = e^{2x} + 2C \\ &\Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{e^{2x} + 2C} = \pm\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}} \quad \text{mit } \tilde{C} \text{ neuer Konstante.} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y(x)y'(x) = e^{2x}$ ist also $y(x) = \sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ mit $\tilde{C}$ Konstante oder $y(x) = -\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ mit $\tilde{C}$ Konstante. Mit der Bedingung $y(0) = -1$ folgt, dass wir die Lösung mit dem Minuszeichen wählen müssen und $\tilde{C} = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\sqrt{e^{2x}} = -e^x.$$