Lösungsvorschläge zur Serie 5

Aufgabe 1

a) Die Determinante von $C - \lambda E$ berechnen wir zum Beispiel mit Hilfe der Regel von Sarrus und erhalten

$$\det(C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.$$

Um die Nullstellen des obigen Ausdrucks zu berechnen, raten wir zunächst die Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Mit Polynomdivision erhalten wir anschliessend

$$(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 6\lambda - 9,$$

also $\det(C - \lambda E) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 9)$, und mit der Mitternachtsformel somit

$$\lambda_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = 3.$$

Die Matrix C besitzt somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ (letzterer ist ein zweifacher Eigenwert).

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Diese müssen das Gleichungssystem $Cv_1 = \lambda_1 v_1$ erfüllen oder umgeschrieben $(C - \lambda_1 E)v_1 = 0$. Wir betrachten also

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 + Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2t, \\ y = -t, \\ z = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{cases}$$

Die Eigenvektoren von C zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ haben somit die Form $v_1 = t \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. (Zur Erinnerung: Eigenvektoren sind immer ungleich Null!)

Wir bestimmen nun die analog die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$, d.h. wir betrachten das Gleichungssystem $(C - \lambda_2 E)v_2 = 0$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}Z_1]{Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = s + t, \\ y = s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \\ z = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}. \end{cases}$$

Die Eigenvektoren von C zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ haben somit die Form $v_2 = s\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}t+s\\s\\t\end{smallmatrix}\right)$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ wobei t, s nicht gleichzeitig null sein dürfen.

b) Für das charakteristische Polynom erhalten wir (z.B. mit der Regel von Sarrus)

$$\det(B - \lambda E) = -\lambda^3 + 1.$$

Wir sehen, dass $\lambda_1 = 1$ eine (reelle) Nullstelle ist.

Mit Polynomdivision erhalten wir

$$(-\lambda^3 + 1) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 - \lambda - 1.$$

Die Nullstellen der quadratischen Gleichung $-\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ sind

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}},$$

und damit keine reellen Zahlen. Die Matrix B besitzt somit genau einen reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ (und zwei komplexe Eigenwerte).

Um die Eigenvektoren zum reellen Eigenwert λ_1 zu finden, betrachten wir das homogene Gleichungssystem $(B - \lambda_1 E)v_1 = 0$ und erhalten mit Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 6 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+\frac{1}{3}Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 6t, \\ y = 3t, \\ z = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}. \end{cases}$$

Somit ist $v_1 = t\left(\begin{smallmatrix}6\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$ für jedes $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

c) Durch Multiplikation von v mit A sehen wir, dass $Av = 3v$ gilt. Der Vektor v ist also ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 3$. Multiplizieren wir die Gleichung $Av = 3v$ auf beiden Seiten von links mit A^{-1} erhalten wir die Gleichung $A^{-1}Av = A^{-1}3v$ und somit $v = 3A^{-1}v$. Durch Division folgt daraus

$$\frac{1}{3}v = A^{-1}v.$$

Somit ist v auch ein Eigenvektor der inversen Matrix A^{-1} und zwar zum Eigenwert $\frac{1}{3} = \frac{1}{\lambda}$.

Aufgabe 2

a) Wir wenden die Matrix A auf die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren von T sind somit Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ bzw. $\lambda_2 = 2$.

b) Wir kontrollieren $T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c) Mit (b) folgt

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, dass es sich bei D um eine Diagonalmatrix handelt und dass die Einträge auf der Diagonalen genau den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ von A entsprechen.

d) Multiplizieren wir die Gleichung $D = T^{-1}AT$ von links mit T und rechts mit T^{-1} folgt,

$$TDT^{-1} = T(T^{-1}AT)T^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad TDT^{-1} = EAE = A.$$

Es gilt also $A = TDT^{-1}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} A^2 &= (TDT^{-1})(TDT^{-1}) = TD(T^{-1}T)DT^{-1} \\ &= TDEDT^{-1} \\ &= TD^2T^{-1}. \end{aligned}$$

Analog folgt auf die gleiche Art $A^{99} = TD^{99}T^{-1}$.

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation von Diagonalmatrizen berechnen wir D^{99}:

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{99}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{99} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2^{100} & 2 + 2^{100} \\ -1 - 2^{99} & -2 - 2^{99} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Richtig. Ist x ein Eigenvektor von A, so gilt $Ax = \lambda x$ für ein bestimmtes λ und somit $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$. Somit ist x auch ein Eigenvektor von A^2 und zwar zum Eigenwert λ^2.

b) Falsch. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat als einzigen Eigenwert $\lambda = -1$. Es ist aber $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit einzigem Eigenwert $\lambda = 1$.

c) Richtig. Ist x ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, gelten $Ax = \lambda x$ und $Bx = \mu x$ für ein gewisses λ und μ. Damit rechnen wir mit Distributivität der Matrixmultiplikation

$$(A + B)x = Ax + Bx = \lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x.$$

Somit ist x auch ein Eigenvektor der Matrix $A + B$

d) Falsch. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A und von B, aber nicht von der Nullmatrix $A + B$.

e) Falsch. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat doppelten Eigenwert 1.

f) Falsch. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat Determinante 1 und nur den Eigenwert -1.

g) Falsch. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, welches keine reellen Nullstellen besitzt.

h) Richtig. Falls λ ein Eigenwert von A ist, so gilt $\det(A - \lambda E) = 0$. Daraus folgt $\det((A + E) - (\lambda + 1)E) = \det(A - \lambda E) = 0$ und somit ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + E$.