Musterlösung Übung 7

Aufgabe 1: Kühlschränke

Das Prinzip eines Kühlschrankes ist schematisch in Abbildung 1-1 dargestellt. Überträgt man Wärme von der Region mit der tieferen Temperatur T_k zur Region mit der wärmeren Temperatur T_w, muss zusätzlich Arbeit aufgewendet werden (vgl. Formulierung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik durch Clausius).

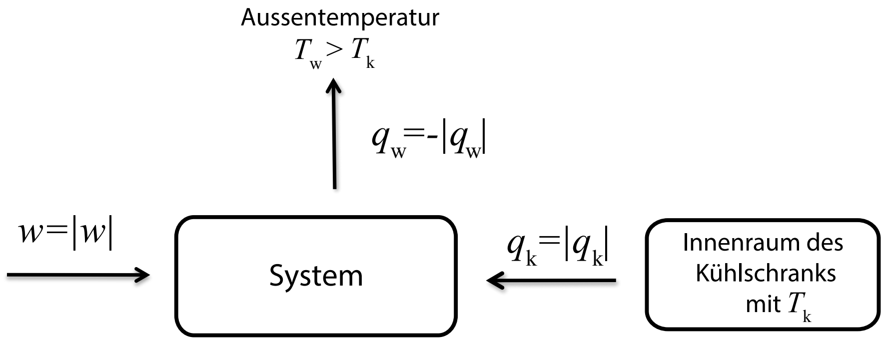

Abbildung 1-1: Schematische Darstellung des Prinzips eines Kühlschrankes. T_k ist die Temperatur der Region mit der tieferen, T_w derjenigen mit der höheren Temperatur. Entsprechend sind q_k resp. q_w die vom System mit der kälteren resp. wärmeren Region ausgetauschten Wärmemengen. w ist die am System geleistete Arbeit. Gemäss der üblichen Vorzeichenkonvention gilt für den Betrieb der Maschine als Kühlschrank: $q_\mathrm{k} > 0$, $q_\mathrm{w} < 0$ und $w > 0$.

a) Da der Kühlschrank reversibel arbeiten soll, gilt:

$$\Delta s = \frac{q_\mathrm{k}}{T_\mathrm{k}} + \frac{q_\mathrm{w}}{T_\mathrm{w}} = 0 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \frac{|q_\mathrm{w}|}{|q_\mathrm{k}|} = \frac{T_\mathrm{w}}{T_\mathrm{k}}. \tag{1.1}$$

Man erhält damit für die Temperatur im Innern:

$$T_\mathrm{k} = T_\mathrm{w}\frac{|q_\mathrm{k}|}{|q_\mathrm{w}|} = 293.15\,\mathrm{K}\,\frac{100\,\mathrm{kJ}}{130\,\mathrm{kJ}} = 225.50\,\mathrm{K}.$$

Es handelt sich also um eine Tiefkühltruhe der Temperatur $T = -47.7°\mathrm{C}$.

b) Die aufzuwendende Arbeit w ergibt sich mit Hilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik und der Energieerhaltung für zyklische Prozesse:

$$w = -(q_\mathrm{w} + q_\mathrm{k}) = |q_\mathrm{w}| - |q_\mathrm{k}|. \tag{1.2}$$

Unter Benutzung von (1.1) kann man schreiben:

$$w = \frac{T_\mathrm{w}}{T_\mathrm{k}}|q_\mathrm{k}| - |q_\mathrm{k}| = |q_\mathrm{k}|\left(\frac{T_\mathrm{w}}{T_\mathrm{k}} - 1\right) = 50\,\mathrm{kJ}\left(\frac{293.15\,\mathrm{K}}{225.50\,\mathrm{K}} - 1\right) = 15.00\,\mathrm{kJ}.$$

c) Eine Möglichkeit, die Effizienz eines Kühlschrankes zu beurteilen, ist den Quotienten zwischen der aus der kühleren Region abgeführten Wärme $|q_\mathrm{k}|$ und der dazu aufzuwendenden Arbeit $|w|$ zu bilden:

$$\eta_\mathrm{K} = \frac{|q_\mathrm{k}|}{|w|}.$$

Dabei ist die Effizienz des Kühlschrankes umso besser, je grösser η_K ist. Mit (1.1) und (1.2) findet man nun

$$\begin{aligned}\eta_\mathrm{K} &= \frac{|q_\mathrm{k}|}{|w|} = \frac{|q_\mathrm{k}|}{|q_\mathrm{w}| - |q_\mathrm{k}|} = \left(\frac{|q_\mathrm{w}| - |q_\mathrm{k}|}{|q_\mathrm{k}|}\right)^{-1} = \left(\frac{|q_\mathrm{w}|}{|q_\mathrm{k}|} - 1\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{T_\mathrm{w}}{T_\mathrm{k}} - 1\right)^{-1} = \frac{T_\mathrm{k}}{T_\mathrm{w} - T_\mathrm{k}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da sinnvollerweise $T_\mathrm{w} > T_\mathrm{k}$ gelten muss, kann η_K Werte im Bereich $0 \leq \eta_\mathrm{K} < \infty$ annehmen. Setzt man die in der Aufgabenstellung gegebenen Zahlenwerte in (1.3) ein, erhält man

$$\begin{aligned}\eta_\mathrm{K}(T_\mathrm{w} = 293.15\,\mathrm{K}, T_\mathrm{k} = 225.50\,\mathrm{K}) &= 3.33 \\ \eta_\mathrm{K}(T_\mathrm{w} = 303.15\,\mathrm{K}, T_\mathrm{k} = 225.50\,\mathrm{K}) &= 2.90.\end{aligned}$$

Man sieht, dass bei einer Erhöhung der Aussentemperatur von 20°C auf 30°C pro geleisteter Arbeit wesentlich weniger Wärme aus dem Innern des Kühlschrankes entfernt wird.

d) Kühlschränke und Wärmepumpen arbeiten im Prinzip identisch, die Anwendung ist jedoch verschieden. Bei Kühlschränken ist man an der Region mit der tieferen Temperatur interessiert. Für einen optimalen Betrieb muss dafür gesorgt werden, dass die Abwärme in der Region mit der höheren Temperatur möglichst effizient weggeführt wird, da sonst die Temperatur dort ansteigt, was zu einer geringeren Effizienz des Kühlschrankes führt (vgl. Teilaufgabe 1c). Bei Wärmepumpen ist man hingegen an der der wärmeren Region zugeführten Wärmemenge interessiert. Dabei sollte man auf eine möglichst stabile Temperatur der kälteren Region (z.B. See im Winter) achten, damit die abgegebene Wärmemenge allein über die von der Wärmepumpe geleistete Arbeit reguliert werden kann.

Aufgabe 2: Das Herz als thermodynamische Maschine

a) Die Formel für die Volumenarbeit ist $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$

b) Annäherung der Fläche innerhalb des Zyklus als Viereck (siehe Abb. 2-1) gibt $w \approx \frac{1}{2}(75 + 50)\,\mathrm{mmHg} \times 75\mathrm{ml} = 62.5\mathrm{mmHg}\frac{10^5\mathrm{Pa}}{760\mathrm{mmHg}} \times 75\mathrm{ml}\frac{1\mathrm{l}}{1000\mathrm{ml}}\frac{1\mathrm{m}^3}{1000\mathrm{l}} = 0.617\mathrm{J}$

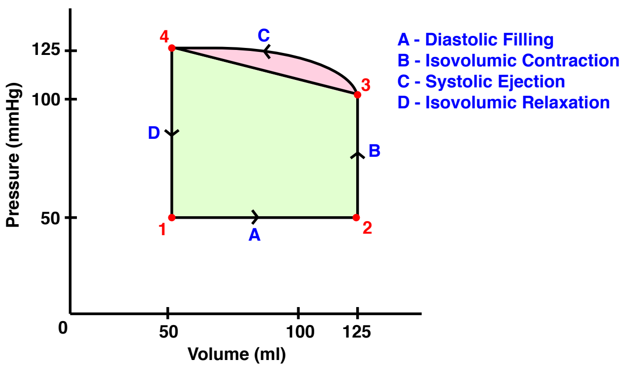

Abbildung 2-1: p-V-Digramm für die linke Herzkammer

c) Leistung des Herzens ist ungefähr die Volumenarbeit pro Zeit (Watt=$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$):
$P = \frac{w}{t} = \frac{0.617\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{schlag}}}{1\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{schlag}}} = 0.617\mathrm{W}$

d) Effizienz $= \frac{P_\mathrm{out}}{P_\mathrm{in}} = 0.617/2 = 0.308 \rightarrow 30.8\%$

e) Vom ersten Gesetz ($u = w + q$):
$q_{24\text{h}} = u_{24\text{h}} - w_{24\text{h}} = (2\text{W} - 0.617\text{W}) \cdot 86400\text{s} = 119.5\text{kJ}$

f) $q_{24\text{h}} = \Delta_\text{v} H_{\text{H}_2\text{O}} \cdot n_{\text{H}_2\text{O}} \Longrightarrow n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{q_{24\text{h}}}{\Delta_\text{v} H_{\text{H}_2\text{O}} \cdot 18\frac{\text{g}}{\text{mol}}} = \frac{119.5\text{kJ}}{2275\frac{\text{J}}{\text{g}} \cdot 18\frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 2.92\text{mol}$
$2.92\text{mol} \cdot 18\frac{\text{g}}{\text{mol}} \div 1\frac{\text{g}}{\text{ml}} = 52.5\text{ml}$

g) Unter der Annahme, dass Blut die gleiche Wärmekapazität wie Wasser aufweist und dass die Wärme nicht an den restlichen Körper abgefhrt wird:
$q_{24\text{h}} = m \cdot c_p \cdot \Delta T \Longrightarrow T_\text{f} = \frac{q_{24\text{h}}}{m \cdot c_p} + T_\text{i} = \frac{119.5\text{kJ}}{5\text{kg} \cdot 4190\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{kg}}} + 310.15\text{K} = 315.9\text{K}\,(42.9°\text{C})$

h) $C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2 \rightarrow 6\ H_2O + 6\ CO_2$

i) $\Delta_\text{R} H^\circ = 6 \cdot \Delta_\text{f} H^\circ_{\text{H}_2\text{O}} + 6 \cdot \Delta_\text{f} H^\circ_{\text{CO}_2} - 6 \cdot \Delta_\text{f} H^\circ_{\text{O}_2} - \Delta_\text{f} H^\circ_{\text{Glucose}} = -2802.5\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$

j) Zur Berechnung der Reaktionsenthalpie bei einer anderen Temperatur als unter Standardbedingungen muss das in Übung 5 Aufgabe 2 hergeleitete Kirchoff'sche Gesetz verwendet werden: :

$$\frac{\Delta\Delta_\text{R} H}{\Delta T} = \Delta_\text{R} C_p \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\text{R} H_{(310\text{K})} &= \Delta_\text{R} H^\circ + \Delta T \cdot \Delta_\text{R} C_p \\
&= \Delta_\text{R} H^\circ + (310\text{K} - 298\text{K}) \cdot (n_{\text{H}_2\text{O}} C_{p,\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{CO}_2} C_{p,\text{CO}_2} - n_{\text{O}_2} C_{p,\text{O}_2} - n_\text{Glucose} C_{p,\text{Glucose}}) \\
&= -2802.5\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} + 12\text{K}\left(6\text{mol}\cdot 4.190\frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{kg}}\frac{0.018\text{kg}}{\text{mol}} + 6\text{mol}\cdot 0.0384\frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{mol}} - 6\text{mol}\cdot 0.0294\frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{mol}} - 1\text{mol}\cdot 0.2186\frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right) \\
&= -2799.0\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}
\end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned}
\Delta_\text{R} G_{(310\text{K})} &= \Delta_\text{R} H_{(310\text{K})} - T\Delta_\text{R} S_{(310\text{K})} \\
&= \Delta_\text{R} H_{(310\text{K})} - T \sum \nu_i (S_i^\circ + \underbrace{C_p \ln\frac{310}{298}}_{*}) \\
&= -2799.0\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - T\left(6 \cdot 69.9\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} + 6 \cdot 213.6\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} - 6 \cdot 205\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} - 1 \cdot 209.2\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right) \\
&= -2880.2\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}
\end{aligned}$$

Der mit * markierte Term beschreibt eine temperaturabhängige Korrektur für die Standardzustandsentropie. Die Temperaturabhängigkeit ($\Delta S = C_p \ln\frac{T_2}{T_1}$) kann mithilfe von Gleichung 185 im Skript hergeleitet werden. Da ihr Wert jedoch sehr klein ist ($\ln\frac{310}{298} \approx 0.04$), wurde sie für diese Berechnung nicht bercksichtigt.

l) Unter der Annhame eines Wirkungsgrades von 100% bei der Umwandlung von Glucose in nutzbare Energie, $E_\text{heart} + E_\text{glucose} \overset{!}{=} 0$.
$2\text{W} \cdot 86400\frac{\text{s}}{\text{Tag}} - 2880.2\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \cdot n\frac{\text{mol}}{\text{Tag}} \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{172.8\frac{\text{kJ}}{\text{Tag}}}{-2880.2\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}} = 0.06\frac{\text{mol}}{\text{Tag}} = 10.8\frac{\text{g}}{\text{Tag}}$

Aufgabe 3: Heizen eines Chalets

a) Man betrachte die Wärmepumpe, welche während die Zeit $\text{d}t$ die folgende elektrische Arbeit leistet: $\delta w = P\text{d}t$ (siehe Abbildung 3-1).

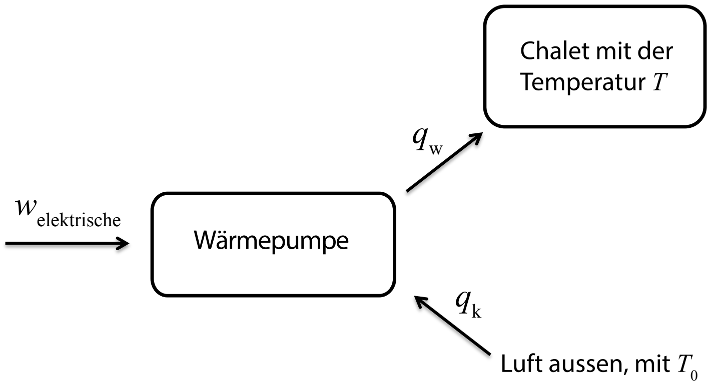

Abbildung 3-1: Eine Wärmepumpe zum Aufheizen des Chalets.

Bei einem geschlossenen Kreisprozess gilt für die innere Energie u der Wärmepumpe:

$$\oint \mathrm{d}u = \delta w + \delta q_{\mathrm{w}} + \delta q_{\mathrm{k}} = 0 \tag{3.1}$$

und der Entropie s:

$$\oint \mathrm{d}s = \frac{\delta q_{\mathrm{k}}}{T_0} + \frac{\delta q_{\mathrm{w}}}{T} = 0 \tag{3.2}$$

Das Symbol δ wird verwendet, um anzuzeigen, dass die Variable wegabhängig ist und nicht als totales Differential ausgedrückt werden kann. Mit die Wärme geliefert aus der System (zum Chalet) gegeben als $\delta q = -c_p \mathrm{d}T$ und die elektrische Arbeit $\delta w = P\mathrm{d}t$ kann man Gleichung (3.1) nun umschreiben zu:

$$P\mathrm{d}t - c_p \mathrm{d}T + \delta q_{\mathrm{k}} \;=\; 0$$

Mit $\delta q_{\mathrm{k}} = -T_0 \frac{\delta q_{\mathrm{w}}}{T}$ aus Gleichung (3.2) und wieder $\delta q_{\mathrm{w}} = -c_p \mathrm{d}T$ folgt:

$$\begin{aligned} P\mathrm{d}t - c_p dT + T_0 \frac{c_p \mathrm{d}T}{T} &= 0 \\ P\mathrm{d}t &= c_p \mathrm{d}T - T_0 \frac{c_p \mathrm{d}T}{T} \\ \mathrm{d}t &= \frac{c_p}{P}\left(\mathrm{d}T - T_0 \frac{\mathrm{d}T}{T}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wenn man nun über die totale Heizdauer Δt integriert, erhält man:

$$\Delta t \;=\; \frac{c_p}{P}\left[(T_1 - T_0) - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] = 3\ \mathrm{h} \tag{3.4}$$

b) Wenn man die Forscher als Heizung betrachten würde, wäre die Heizdauer:

$$\Delta t'' = \frac{c_p (T_2 - T_1)}{10\, P_{\mathrm{m}}} = 26.45\mathrm{h} \tag{3.5}$$

Die Wärme, die pro Forscher produziert wird, ist:

$$q_{\mathrm{m}} = t\,P_{\mathrm{m}} = 12000\,\mathrm{kJ} = 2866\,\mathrm{kcal} \tag{3.6}$$

Damit kann jeder Forscher etwa 955 gram Fondue verspeisen. Man kann also zusammenfassend sagen, dass es sich lohnt eine Heizpumpe zu benutzten, wenn man es schnell warm bekommen möchte.