Lösungsvorschläge zur Serie 1

Aufgabe 1

a) A ist regulär, falls $\det(A) \neq 0$ ist. Mit zum Beispiel der Regel von Sarrus folgt $\det(A) = 8 + 0 + \lambda - 0 - 0 = 8 + \lambda$. Die Matrix A ist somit regulär sofern $\lambda \neq -8$ gilt.

b) Sei also $\lambda \neq -8$. Dann ist A regulär und besitzt somit eine inverse Matrix A^{-1}. Diese kann mit der Formel aus der Vorlesung (Kapitel 8.3) berechnet werden (später werden wir eine oftmals schnellere Methode kennenlernen, Kapitel 8.4). Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ist, mit D_{ij} der $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\det(A)$, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $\det(A)$ entsteht.

Zum Beispiel ist

$$D_{11} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 2 \qquad \text{und somit} \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$D_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\lambda \qquad \text{und somit} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-\lambda) = \lambda.$$

Die anderen Einträge werden ähnlich berechnet und man erhält

$$A_{31} = -2\lambda \quad A_{12} = -2 \quad A_{22} = 4 \quad A_{32} = \lambda \quad A_{13} = 1 \quad A_{23} = -2 \quad A_{33} = 4.$$

Aus Aufgabe 1a) wissen wir $\det(A) = \lambda + 8$. Alles einsetzen liefert für die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{8+\lambda} \begin{pmatrix} 4 & \lambda & -2\lambda \\ -2 & 4 & \lambda \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8+\lambda} & \frac{\lambda}{8+\lambda} & -\frac{2\lambda}{8+\lambda} \\ -\frac{2}{8+\lambda} & \frac{4}{8+\lambda} & \frac{\lambda}{8+\lambda} \\ \frac{1}{8+\lambda} & -\frac{2}{8+\lambda} & \frac{4}{8+\lambda} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Das Produkt AB muss gleich der Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & 0 & -1 - x_2 \\ -3x_1 + 3 & 1 & 2 + 2x_2 \\ x_1 - 1 & 0 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

Also muss $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ sein. (Zur Kontrolle kann man testen, dass in der Tat auch das Produkt BA die Einheitsmatrix E ergibt.)

Aufgabe 3

Wir bestimmen den Rang mithilfe elementarer Umformungen. Dazu bringen wir die Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Trapezform. Der Rang der Matrix entspricht dann der Anzahl nicht-verschwindenden Zeilen in der Trapezform.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - 3Z_1]{Z_3 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Links haben wir jetzt eine Matrix in Trapezform mit zwei nicht-verschwindenden Zeilen. Somit ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + 4Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathrm{Rang}(B) = 3$ (insbesondere ist also die Matrix B regulär, da eine (3,3)-Matrix mit Rang 3).

c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 2 & 1 & 3\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{18}{5} \\ 0 & 1 & 2 - \lambda & \lambda - \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 + \frac{1}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 2 - \frac{2}{3}\lambda & \lambda - 3 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda = 3$ gilt, dann verschwindet die letzte Zeile der Matrix rechts und der Rang von C ist somit gleich $\mathrm{Rg}(C) = 2$. Falls $\lambda \neq 3$ gilt, dann ist der Rang der Matrix C gleich $\mathrm{Rg}(C) = 3$.

Aufgabe 4

Als erstes schreiben wir die angegebenen Gleichungssysteme in der Matrixform $(A|c)$. Im Gauss-Verfahren bringt man dann das lineares Gleichungssystem $(A|c)$ durch elementare Zeilenumformungen in ein äquivalentes Gleichungssystem $(A^*|c^*)$ in Trapezform, welches man dann sukzessiv von unten nach oben löst.

a)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+7Z_1} \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 26 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Im (gestaffelten) System rechts steht in der letzten Zeile $-26y = 26$ und somit folgt $y = -1$. Anschliessend ist die erste Zeile $-x - 5y = -x + 5 = 3$ und es folgt $x = 2$.

b)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2-Z_1]{Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*).$$

Daraus folgt zuerst $z = 0$ aus der letzten Zeile und daraus $y = -3$ aus der mittleren und schliesslich $x = 3$ aus der ersten Zeile.

c) Wir tauschen zuerst die ersten beiden Zeilen und erhalten

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Die letzte Zeile rechts $0z = 0$ ist für jedes $z \in \mathbb{R}$ erfüllt. Das heisst, die Unbekannte z darf ein frei wählbarer Parameter $t \in \mathbb{R}$ sein. Dann folgt aus der mittleren Zeile $4y + 2z = 4y + 2t = 0$, dass $y = -\frac{1}{2}t$ ist, und aus der ersten Zeile folgt $x = 2 - \frac{1}{2}t$.

d)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2+2Z_1]{Z_3-3Z_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Ähnlich folgt hier: $w = t \in \mathbb{R}$, $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$, $y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}t$, $x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t$.