Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2017
Prof. W. Farkas

Lösungsvorschläge zur Serie 3

Aufgabe 1

a) Entwicklung nach der letzten Spalte liefert

$$\det(A_m) = (1-m)\det\begin{pmatrix} 1-m & 1-m \\ 1 & 1-2m \end{pmatrix} = -2m(1-m)^2.$$

Damit ist $\det(A_m) \neq 0$ genau dann, wenn $m \neq 0$ und $m \neq 1$ gilt. Nur in diesen Fällen ist der Rang von A_m maximal (nämlich gleich drei), denn es gilt $\mathrm{Rg}(A_m) = 3$ genau dann wenn $\det(A_m) \neq 0$ und $\mathrm{Rg}(A_m) < 3$ genau dann wenn $\det(A_m) = 0$.

Der Rang in den Fällen, wo $\det(A_m) = 0$ ist, leiten wir mit dem Gauss-Verfahren her. Das Verfahren liefert für $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - Z_1]{Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit } \mathrm{Rg}(A_0) = 2$$

und für $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit } \mathrm{Rg}(A_1) = 1.$$

b) Wir sind im Fall $m \neq 0$ und $m \neq 1$. Das zu betrachtende lineare Gleichungssystem $A_m x = b_m$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & 1-m \\ 1-m & 1-m & 0 \\ 1 & 1-2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Cramersche Regel liefert für die Lösung

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} m & -m & 1-m \\ 1 & 1-m & 0 \\ 1 & 1-2m & 0 \end{pmatrix}}{\det(A_m)} \overset{\text{Sarrus}}{=} \frac{(1-m)(1-2m)-(1-m)^2}{-2m(1-m)^2} = \frac{1}{2(1-m)}$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & m & 1-m \\ 1-m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A_m)} \overset{\text{Sarrus}}{=} \frac{(1-m)^2-(1-m)}{-2m(1-m)^2} = \frac{1}{2(1-m)}$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -m & m \\ 1-m & 1-m & 1 \\ 1 & 1-2m & 1 \end{pmatrix}}{\det(A_m)} \overset{\text{Sarrus}}{=} \ldots = \frac{m(1-m)(1-2m)}{-2m(1-m)^2} = \frac{2m-1}{2(1-m)}.$$

c) Im Fall $m = 0$ haben wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vorliegen. Das Gauss-Verfahren liefert hier

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 - Z_1]{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Von unten nach oben gelöst ergibt das aus der Gleichung $x_2 - x_3 = 1$, dass $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_2 = 1 + t$ ist, und anschliessend aus der ersten Gleichung $x_1 = -t$.

Der Fall $m = 1$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist nicht lösbar, da die zweite Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$ nicht erfüllt werden kann.

Aufgabe 2

a) Wir berechnen

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+4Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2-Z_3]{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) = (E|A^{-1}).$$

Auf der linken Seite haben wir die Matrix A zur Einheitsmatrix umgeformt. Auf der rechten Seite steht jetzt also die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir berechnen

$$(B|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1\leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+6Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}\cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+8Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right).$$

Die inverse Matrix ist also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & 4/3 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{pmatrix}.$$

c) Wir berechnen

$$(C|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot Z_1]{Z_3 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 - 3Z_1]{Z_3 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - 5Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 & 1 & 11/2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{9}\cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1 - \frac{1}{2}Z_3]{Z_2 + \frac{3}{2}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{array}\right).$$

Die inverse Matrix ist also

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Es gibt verschiedene Arten, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit nachzuprüfen (siehe Kapitel 8.4). Nachfolgend findet sich eine Auswahl.

a) Wir betrachten die Vektorgleichung $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$, also

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus den ersten beiden Komponenten folgt $\lambda_3 = -\lambda_1$ und $\lambda_2 = -\lambda_1$. Eingesetzt in die dritte Komponente folgt $-3\lambda_1 = 0$, also $\lambda_1 = 0$ und folglich auch $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Die angegebenen Vektoren sind somit linear unabhängig.

b) Es gilt $c = -3a$. Somit sind die Vektoren linear abhängig und eine Linearkombination haben wir auch schon angegeben.

c) Es gilt

$$(a\ b\ c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - 2Z_1]{Z_4 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix $(a\ b\ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, hat also Rang 2, was kleiner als $n = 3$ ist. Die Vektoren sind deswegen linear abhängig. In der Tat gilt zum Beispiel $4a + b = c$.

d) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da der Nullvektor dabei ist.

e) Es gilt

$$\det(a\ b\ c) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0.$$

Die Determinante der Matrix $(a\ b\ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, ist also ungleich null. Die Vektoren sind deswegen linear unabhängig.

f) Die Anzahl Vektoren (=4) ist grösser als die Dimension des Raumes, aus dem sie stammen (=2). Die Vektoren sind also linear abhängig. In der Tat gilt zum Beispiel gilt $b + d = c$.