Serie 13

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme.

a) $y''(x) + 2y(x) = x^2$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$

b) $2y''(x) - y'(x) - 6y(x) = e^{3x}$

c) $y''(x) - y(x) = \frac{1}{2}e^x$

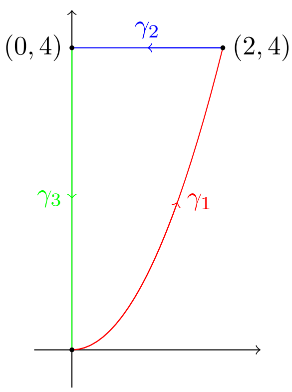
d) $y''(x) + y(x) = \sin(2x)$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = \frac{1}{3}$

Aufgabe 2

Wir wollen das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_C (\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}})\,dt$ des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C berechnen, die sich aus den Wegen γ_1, γ_2 und γ_3 zusammensetzt. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der untenstehenden Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang der Parabel $y = x^2$.



a) Wir müssen als erstes die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t)$ parametrisieren. Zum Beispiel wird die Kurve γ_3 durch den Vektor

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 4$$

beschrieben (Durchlaufrichtung beachten!). Finden Sie Parametrisierungen von γ_1 und γ_2.

Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen.

b) Berechnen Sie folgende Linienintegrale mithilfe der parametrisierten Wege γ_1, γ_2 und γ_3 aus Teilaufgabe a).

i) $I_1 = \displaystyle\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

ii) $I_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

iii) $I_3 = \displaystyle\int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

und daraus als Summe von I_1, I_2 und I_3

$$I = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie das Linienintegral $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ folgender Vektorfelder entlang der angegebenen Kurven C.

a)

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C gegeben durch die Funktion $y = x^3$ auf dem Abschnitt von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$

b)

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C gegeben durch den Einheitskreis in der xy-Ebene im Gegenuhrzeigersinn und gestartet in $(1, 0)$

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe wollen wir den Fluss des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

durch die geschlossene Fläche berechnen, die durch das abgeschnittene Paraboloid $z = x^2 + y^2$ mit Deckel auf der Höhe $z = 4$ beschrieben wird. Der Fluss wird dabei nach Konvention von innen nach aussen gemessen. Sei A die beschriebene Fläche. Gesucht ist also das Oberflächenintegral

$$\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \oiint_A (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N})\, dA.$$

a) Die geschlossene Fläche A setzt sich aus zwei Teilen zusammen, dem Paraboloid als "Mantelfläche" und dem Deckel. Finden Sie zunächst eine Parametrisierung des Deckels durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{r}(u,v)$ und rechnen Sie damit den Fluss des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch den Deckel aus, also das Oberflächenintegral

$$\iint_{\text{Deckel}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}.$$

Hinweis: Der Deckel ist eine Kreisfläche, es bieten sich also Polarkoordinaten für die Parametrisierung des Deckels an.

b) Eine Parametrisierung der "Mantelfläche" kann durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le u \le 2 \text{ und } 0 \le v \le 2\pi$$

gegeben werden. Berechnen Sie damit den Fluss des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch die "Mantelfläche" aus, also das Oberflächenintegral

$$\iint_{\text{Mantelfläche}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}.$$

Hinweis: Beim Vektor $\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v}$ müssen Sie das Vorzeichen umkehren, damit er wie gewünscht von der "Mantelfläche" nach aussen zeigt.

c) Indem Sie Ihre Resultate aus den Teilaufgaben a) und b) kombinieren, können Sie nun das gesuchte Oberflächenintegral angeben

$$\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint_{\text{Deckel}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} \quad + \iint_{\text{Mantelfläche}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 30.05.2017 / Mittwoch, den 31.05.2017 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.

Präsenz der Assistenzgruppe

Zweimal in der Woche beantworten Doktoranden in einer Präsenz Fragen: Montag und Donnerstag von 12 bis 13 Uhr im HG G 32.6.