Schriftliche Prüfung
(120 Minuten)

Bemerkungen:

- Erlaubte Hilfsmittel: 10 hand- oder maschinengeschriebene A4 Seiten (=5 Blätter). Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Die Prüfung besteht aus insgesamt **20 Aufgaben**.
- Markieren Sie Ihre Antworten auf dem beiliegenden **Antwortblatt**.
- Jede Aufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Aufgabe können keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein.
- Für jede Aussage gibt es 1 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird, und 0 Punkte, falls sie falsch oder gar nicht markiert wird.
- Alle Rechnungsergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen gerundet.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den letzten Seiten dieser Prüfung.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!

Viel Erfolg!

Gruppe A

Binomialverteilung und -test

1. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir testen mit einem Binomialtest auf dem 5 % Signifikanzniveau, ob eine Münze gefälscht wurde, sodass sie häufiger "Kopf" zeigt ($H_0 : \pi = 0.5$). Die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze als "gefälscht" (H_0 wird verworfen) bezeichnen, wenn sie in Wahrheit "fair" (H_0 ist in Wahrheit richtig) ist, ist höchstens 0.05.

b) Angenommen bei einem Binomialtest ist das Signifikanzniveau 5%. Die Macht ist dann immer 95%.

c) Bei einem Binomialtest kann die Nullhypothese auf dem 8% Signifikanzniveau verworfen werden. Dann kann die Nullhypothese sicher auch auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest, um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.07$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.07$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.21$). Um den Test unseren Bedürfnissen genau anzupassen, überlegen wir, welche Folgen es hat, wenn man das Signifikanzniveau ändert. Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) ab.

2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat nie grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) Bei einem zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p_0 = 0.6$, $n = 34$) wurden $x = 26$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.055$. Wenn x grösser wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell kleiner (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{13, 14, 15\}$. Die Macht für die konkrete Alternative $p_A = 0.85$ ist dann 0.604.

d) Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik liegt im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese stimmt.

3. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{3, ..., 18\}$. Die Stichprobengrösse ist 18. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.2. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.729.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{0, ..., 4\}$ bei einer Stichprobengrösse von 33. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.9. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.235.

c) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) ist: $\{3, ..., 16\}$. Die Stichprobengrösse ist 16. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.282.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) ist: $\{0, ..., 3\}$. Die Stichprobengrösse ist 13. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.992.

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.026. Dann kann die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.05 verworfen werden.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese p_0 befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. Es ist dann möglich, dass der P-Wert für einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ den Wert 0.018 hat.

d) An einer Losbude haben wir bei $n = 33$ Losen $x = 7$ Gewinne gehabt. Mit der Normalapproximation kommen wir auf folgendes 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit: Untergrenze = 0.073, Obergrenze= 0.412.

5. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Casino will einen neuen Spielautomaten mit einem Glücksspiel anschaffen. Der Hersteller gibt an, dass der Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% gewinnt. Die Casino-Leitung möchte diese Behauptung testen und gibt einen zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p = p_0$ wobei $p_0 = 0.35$) auf dem 7% Signifikanzniveau mit 20 zufällig ausgewählten Spielern in Auftrag. Der Verwerfungsbereich besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{18, ..., 20\}$.

b) Bei einer Losbude wird behauptet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit 40% ist. Wir testen diese Behauptung mit einem zweiseitigen Binomialtest ($H_A : p \neq p_0$). Dazu ziehen wir $n = 6$ Lose und beobachten $x = 1$ Gewinn. Dann ist der P-Wert 0.764.

c) Ein Cornflakes-Hersteller behauptet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Spielzeug in der Cornflakes-Schachtel enthalten ist. Wir vermuten, dass Spielzeuge aber seltener anzutreffen sind und testen diese Behauptung mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$). Dazu sammeln wir im Bekanntenkreis Informationen zu $n = 10$ Cornflakes-Schachteln und zählen $x = 3$ Schachteln, die Spielzeuge enthalten. Dann ist der P-Wert der Daten 0.258.

d) Ein neuer Wirkstoff sieht vielversprechend aus und der Finanzchef der Pharma-Firma will prüfen, ob es sich lohnt, das Medikament weiter zu untersuchen. Der Standard-Wirkstoff wirkt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für uns wäre der neue Wirkstoff nur dann interessant, wenn er eine grössere Wirkungswahrscheinlichkeit als der Standardwirkstoff hat. Um das zu untersuchen machen wir einen einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) mit $n = 18$ Probanden und beobachten $x = 15$ Probanden, bei denen der Wirkstoff die gewünschte Wirkung zeigt. Dann ist der P-Wert 0.567.

6. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Von einem neuen Medikament wird erwartet, dass es deutlich besser als das herkömmliche Medikament wirkt. Um diese Vermutung zu unterstützen wird ein einseitiger Binomialtest gemacht. 12 kranke Patienten erhalten das neue Medikament. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl gesunder Patienten am Ende der Studie unter allen Patienten, die das neue Medikament erhalten haben. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.4$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.4$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 9 bis 12 (beide Grenzen eingeschlossen).

b) In den Medien wird behauptet, dass ein neuer Lebensmittelfarbstoff als Nebenwirkung leichte Kopfschmerzen verursachen kann. Der Hersteller behauptet daraufhin, dass diese Nebenwirkungen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30% auftreten. Eine Vereinigung zum Konsumentenschutz vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Nebenwirkung grösser sein könnte und macht einen einseitigen Binomialtest. 12 Probanden bekommen ein Getränk, das mit dem neuen Lebensmittelfarbstoff gefärbt wurde. Nach einer Stunde werden sie gefragt, ob sie Kopfschmerzen haben. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Probanden mit Kopfschmerzen nach einer Stunde. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{7, \ldots, 12\}$.

c) In einer Fabrik werden Schokoladenosterhasen hergestellt. Bei ca. 30% der hergestellten Osterhasen treten bekannterweise kleinere Mängel auf. Die Mängel sind so klein, dass die Osterhasen dennoch verkauft werden können. Allerdings möchte man aus Marketinggründen vermeiden, dass sich die Wahrscheinlichkeit für solche kleinere Mängel erhöht. Nun wurde eine neue Fabrikationsanlage angeschafft. Nach der Einstellung aller Geräte ist der Qualitätsbeauftragte der Firma besorgt: Er vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für kleinere Maengel grösser als 30% ist. Um diese Vermutung zu testen, macht er einen einseitigen Binomialtest. 9 Osterhasen werden zufällig aus der Produktion entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Osterhasen mit kleineren Mängeln in dieser Stichprobe. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 9, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{6, \ldots, 9\}$.

d) Eine Marketingfirma will ein neues provokatives Plakat veröffentlichen. Allerdings gibt es innerhalb der Firma Bedenken, dass ein grosser Anteil der Bevölkerung das Plakat als "zu provokativ" einstufen könnte. Akzeptabel wäre maximal ein Anteil von 45% in der Gesamtbevölkerung, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. In einer kleinen Pilotstudie soll nun mit einem einseitigen Binomialtest geprüft werden, ob der Anteil der provozierten Personen in der Bevölkerung kleiner als 45% ist. Dazu werden zufällig 13 Personen ausgewählt und über das geplante Plakat befragt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl befragter Personen, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 13, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.45$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi < 0.45$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 0 bis 3 (beide Grenzen eingeschlossen).

t-Test

7. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Für 8 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind:

$$6.35, -8.93, 8.74, 6.58, 3.75, 8.63, -15.17, 2.55.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.501.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.05 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty; -1.703] \cup [1.703; \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty; -1.325] \cup [1.325; \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 2.293$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit obigen Daten ein 95%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das 95%-Vertrauensintervall ist: $[-4.834; 9.737]$.

8. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum $\sqrt{n}$-Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $N(\mu, 1)$.

b) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim N(0, 1)$. Dann ist $P(X > 2)$ grösser als $P(Z > 2)$.

c) Angenommen das (zweiseitige) 95%-Vertrauensintervall bei einem t-Test ist $[0.081; 1.177]$. Der t-Test würde die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq 0$ verwerfen.

d) Angenommen bei einem (zweiseitigen) t-Test mit $n = 8$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 0.263 . Der P-Wert ist dann etwa 0.8.

9. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 10$ Beobachtungen von X gemacht. Die dazugehörigen Kennzahlen sind

$$\hat{\sigma}_x = 8.108, \ \overline{x} = 7.778.$$

Zudem haben wir $n_2 = 7$ Beobachtungen von Y mit folgenden Kennzahlen

$$\hat{\sigma}_y = 7.635, \ \overline{y} = 4.114.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) S^2_{pool} wird mit obigen Daten geschätzt als 62.761.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.939.

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 8$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.921$. Der P-Wert ist dann 0.01.

10. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) In einem Experiment sollte der Effekt von Zigarettenrauchen auf Blutplättchen-anhäufungen untersucht werden. Dazu wurden 11 Probanden vor und nach dem Rauchen einer Zigarette Blutproben entnommen, und es wurde gemessen, wie stark sich die Blutplättchen anhäuften. Es interessiert, ob sich Blutplättchen durch das Rauchen vermehrt anhäufen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Beeinflusst der Kalziumgehalt in der Nahrung den systolischen Blutdruck? Zur Überprüfung dieser Frage wurde einer Versuchsgruppe von 10 Männern während 12 Wochen ein Kalziumzusatz verabreicht. Einer Kontrollgruppe von 11 Männern gab man ein Placebopräparat. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) In einem Experiment wurde untersucht, ob Mäuse zwei Formen von Eisen (Fe^{2+} und Fe^{3+}) unterschiedlich gut aufnehmen. Dazu wurden 36 Mäuse zufällig in zwei Gruppen zu je 18 unterteilt und die eine Gruppe mit Fe^{2+} und die andere mit Fe^{3+} gefüttert. Da das Eisen radioaktiv markiert war, konnte sowohl die Anfangskonzentration wie auch die Konzentration einige Zeit später gemessen werden. Daraus wurde für jede Maus der Anteil des aufgenommenen Eisens berechnet. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment messen zwei Tiefen-Messgeräte die Tiefe einer Gesteinsschicht an 9 verschiedenen Orten. Beide Geräte messen an jedem der 9 Orte je einen Wert. Es wird vermutet, dass Gerät B systematisch grössere Werte als Gerät A misst. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

Lineare Regression

11. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 21 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	0.196	0.587	0.334	0.742
x	3.151	0.314	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Gemäss der Tabelle ist der t-Wert des geschätzten y-Achsenabschnitts gleich 0.742.

b) Die Obergrenze des 95%-Vertrauensintervalls (approximativ) für den y-Achsenabschnitt ist 0.88.

c) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 14.036 stehen.

d) Die t-values in der Tabelle beziehen sich auf die t-Verteilung mit 19 Freiheitsgraden.

12. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

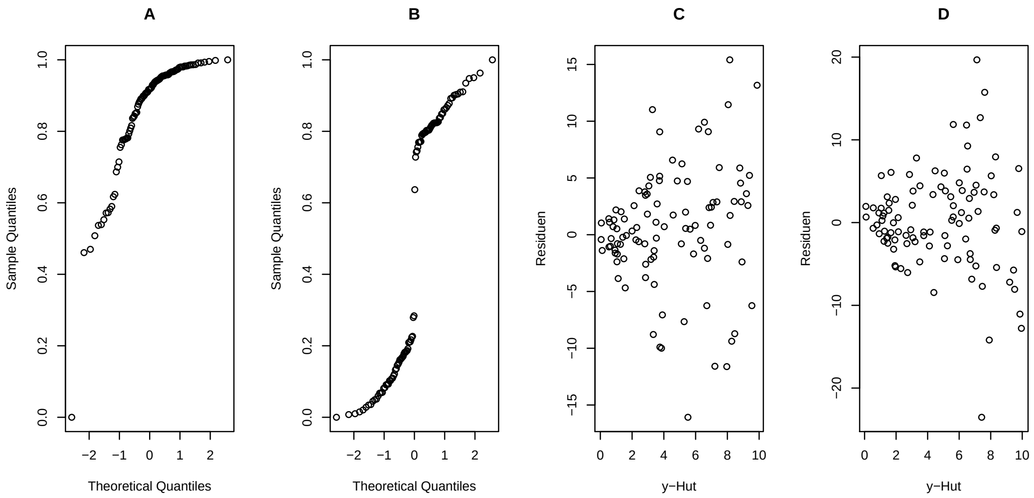
a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert -2.331 erhöht.

b) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 1.315 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Für $x = 2.409$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 3.364$ vorraus.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 3.775 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 1.239$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.456$ verwendet.

d) Angenommen 0 ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

13. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer rechtsschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt, dass alle Modellannahmen erfüllt sind.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

Gruppe A

Gemischte Fragen

14. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, ..., 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wa.	0.03	0.08	0.02	0.2	0.11	0.07	0.16	0.08	0.13	0.12

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 8 oder eine 10 gezogen wird, ist 0.2.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 3 und höchstens 9 ist, ist 0.88.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl verschieden von 6 ist, ist 0.93.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 3 oder mindestens 8 ist, ist 0.46.

15. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist 0.4, dann sind die odds für das gleiche Ereignis 0.541.

b) Folgender Zusammenhang gilt ohne weitere Annahmen für alle Ereignisse A: $P(A^c) = -odds(A)$.

c) Die log-odds mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{1, 3, 4\}$ zu würfeln, sind 0.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1.

16. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{1, 5\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 3, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintreten ist 0.628.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.75.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.75.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.793.

Gruppe A

17. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

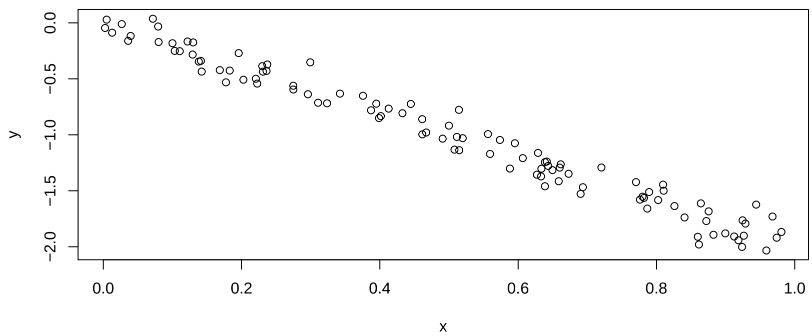
a) Angenommen $X_1 \sim \text{Poisson}(3)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(5)$. Dann gilt für $Y = X_1 + X_2$ die Verteilung $Y \sim \text{Poisson}(8)$, falls X_1 und X_2 disjunkt sind.

b) Ein Glücksrad besteht aus 100 gleich grossen Sektoren und ist mit den Zahlen 1 bis 100 beschriftet. Man gewinnt einen Betrag, der so gross ist wie die Zahl, bei der der Zeiger am Rand des Glücksrades zum Stehen kommt. Die Verteilung des Gewinns mit einmal Drehen lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr ein Meteorit einschlägt, der das Äquivalent von 1 Megatonne TNT an Energie freisetzt, ist ca. 0.0009. Angenommen Sie leben 80 Jahre. Die Verteilung der Anzahl Einschläge, die Sie erleben werden, lässt sich gut mit einer uniformen Verteilung beschreiben.

d) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

18. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung. Beurteilen Sie folgende Aussagen:



a) Das arithmetische Mittel einer Stichprobe kann in bestimmen Fällen grösser als das 90%-Quantil der Stichprobe sein.

b) Bei einer Normalverteilung ist der Median nicht immer gleich dem Erwartungswert.

c) Angenommen wir haben zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y. Falls es keinen linearen Zusammenhang zwischen X und Y gibt, dann ist die Korrelation zwischen X und Y mit Sicherheit null.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ.

19. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -4.2$ und Varianz $Var(X) = 2.5$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 + 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -8.7$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -1.3$ und Varianz $Var(X) = 1$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 1 + 3.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 15.21$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 1.5$ und Varianz $Var(X) = 0.6$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 0.5 - 4.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 14.406$.

d) Die Zufallsvariable X hat 95 %-Quantil $q_X = -3.7$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -3.6 + 0.8 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 95 %-Quantil von Y gleich $q_Y = -6.56$.

20. Es seien $X_1, ..., X_n$ $i.i.d.$ $\sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Aus dem Gesetz der grossen Zahlen folgt, dass man für doppelte Genauigkeit des arithmetischen Mittels dreimal so viele Daten braucht.

b) Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n^2 \,\mathrm{Var}(X_i)$.

c) Angenommen bei einem Binomialtest ist die Anzahl der Versuche n gross und die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 ist nicht sehr klein. Dann kann die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese durch eine Normalverteilung approximiert werden, weil der Zentrale Grenzwertsatz gilt.

d) Andreas rennt seinen ersten Marathon und nimmt zur Verpflegung Traubenzucker mit. Ein Stück Traubenzucker gibt ihm im Schnitt Energie für 10 Minuten mit einer Standardabweichung von 5 Minuten. Er nimmt 28 Stücke Traubenzucker mit und möchte sich damit für eine Gesamtdauer von 4 Stunden verpflegen können. Der Energiegehalt der Traubenzuckerstücke kann als unabhängig angenommen werden und die Verteilung des Energiegehalts ist identisch. Die Wahrscheinlichkeit, dass Andreas genügend Traubenzuckerstücke mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

Gruppe B

t-Test

1. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Für 8 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind:

$$6.35, -8.93, 8.74, 6.58, 3.75, 8.63, -15.17, 2.55.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.501.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.05 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty; -1.703] \cup [1.703; \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty; -1.325] \cup [1.325; \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 2.293$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit obigen Daten ein 95%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das 95%-Vertrauensintervall ist: $[-4.834; 9.737]$.

2. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum $\sqrt{n}$-Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $N(\mu, 1)$.

b) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim N(0,1)$. Dann ist $P(X > 2)$ grösser als $P(Z > 2)$.

c) Angenommen das (zweiseitige) 95%-Vertrauensintervall bei einem t-Test ist $[0.081; 1.177]$. Der t-Test würde die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq 0$ verwerfen.

d) Angenommen bei einem (zweiseitigen) t-Test mit $n = 8$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 0.263 . Der P-Wert ist dann etwa 0.8.

3. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 10$ Beobachtungen von X gemacht. Die dazugehörigen Kennzahlen sind

$$\hat{\sigma}_x = 8.108,\ \overline{x} = 7.778.$$

Zudem haben wir $n_2 = 7$ Beobachtungen von Y mit folgenden Kennzahlen

$$\hat{\sigma}_y = 7.635,\ \overline{y} = 4.114.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) S^2_{pool} wird mit obigen Daten geschätzt als 62.761.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.939.

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 8$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.921$. Der P-Wert ist dann 0.01.

Gruppe B

4. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) In einem Experiment sollte der Effekt von Zigarettenrauchen auf Blutplättchenanhäufungen untersucht werden. Dazu wurden 11 Probanden vor und nach dem Rauchen einer Zigarette Blutproben entnommen, und es wurde gemessen, wie stark sich die Blutplättchen anhäuften. Es interessiert, ob sich Blutplättchen durch das Rauchen vermehrt anhäufen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Beeinflusst der Kalziumgehalt in der Nahrung den systolischen Blutdruck? Zur Überprüfung dieser Frage wurde einer Versuchsgruppe von 10 Männern während 12 Wochen ein Kalziumzusatz verabreicht. Einer Kontrollgruppe von 11 Männern gab man ein Placebopräparat. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) In einem Experiment wurde untersucht, ob Mäuse zwei Formen von Eisen (Fe^{2+} und Fe^{3+}) unterschiedlich gut aufnehmen. Dazu wurden 36 Mäuse zufällig in zwei Gruppen zu je 18 unterteilt und die eine Gruppe mit Fe^{2+} und die andere mit Fe^{3+} gefüttert. Da das Eisen radioaktiv markiert war, konnte sowohl die Anfangskonzentration wie auch die Konzentration einige Zeit später gemessen werden. Daraus wurde für jede Maus der Anteil des aufgenommenen Eisens berechnet. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment messen zwei Tiefen-Messgeräte die Tiefe einer Gesteinsschicht an 9 verschiedenen Orten. Beide Geräte messen an jedem der 9 Orte je einen Wert. Es wird vermutet, dass Gerät B systematisch grössere Werte als Gerät A misst. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

Gruppe B

Lineare Regression

5. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 21 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	0.196	0.587	0.334	0.742
x	3.151	0.314	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Gemäss der Tabelle ist der t-Wert des geschätzten y-Achsenabschnitts gleich 0.742.

b) Die Obergrenze des 95%-Vertrauensintervalls (approximativ) für den y-Achsenabschnitt ist 0.88.

c) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 14.036 stehen.

d) Die t-values in der Tabelle beziehen sich auf die t-Verteilung mit 19 Freiheitsgraden.

6. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

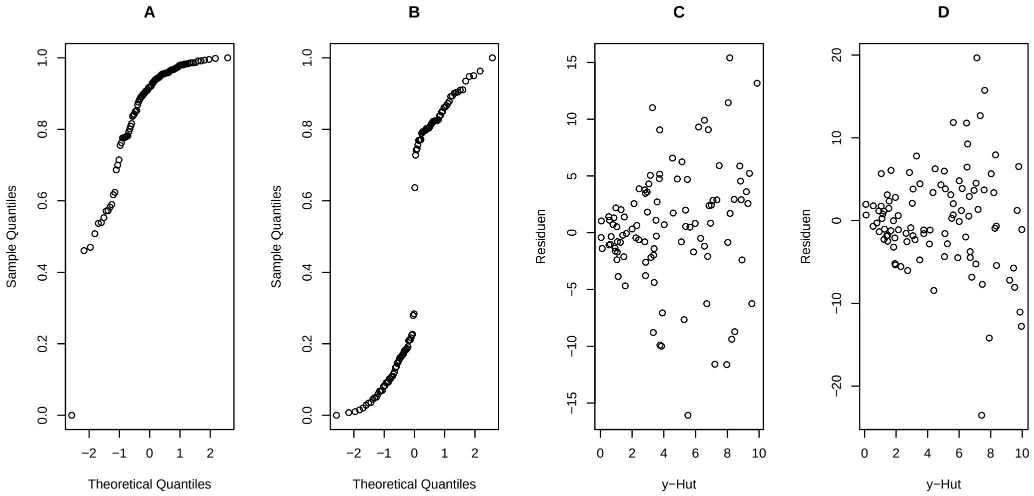
a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert -2.331 erhöht.

b) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 1.315 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Für $x = 2.409$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 3.364$ vorraus.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 3.775 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 1.239$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.456$ verwendet.

d) Angenommen 0 ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

7. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer rechtsschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt, dass alle Modellannahmen erfüllt sind.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

Gruppe B

Gemischte Fragen

8. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, ..., 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wa.	0.03	0.08	0.02	0.2	0.11	0.07	0.16	0.08	0.13	0.12

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 8 oder eine 10 gezogen wird, ist 0.2.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 3 und höchstens 9 ist, ist 0.88.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl verschieden von 6 ist, ist 0.93.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 3 oder mindestens 8 ist, ist 0.46.

9. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist 0.4, dann sind die odds für das gleiche Ereignis 0.541.

b) Folgender Zusammenhang gilt ohne weitere Annahmen für alle Ereignisse A: $P(A^c) = -odds(A)$.

c) Die log-odds mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{1, 3, 4\}$ zu würfeln, sind 0.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1.

10. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{1, 5\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 3, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintreten ist 0.628.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.75.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.75.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.793.

Gruppe B

11. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

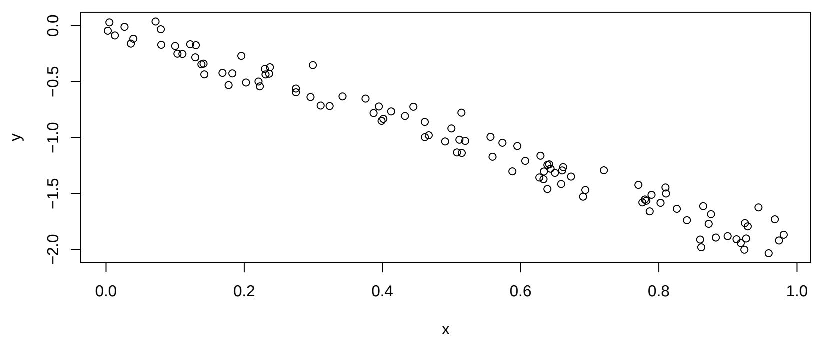
a) Angenommen $X_1 \sim \text{Poisson}(3)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(5)$. Dann gilt für $Y = X_1 + X_2$ die Verteilung $Y \sim \text{Poisson}(8)$, falls X_1 und X_2 disjunkt sind.

b) Ein Glücksrad besteht aus 100 gleich grossen Sektoren und ist mit den Zahlen 1 bis 100 beschriftet. Man gewinnt einen Betrag, der so gross ist wie die Zahl, bei der der Zeiger am Rand des Glücksrades zum Stehen kommt. Die Verteilung des Gewinns mit einmal Drehen lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr ein Meteorit einschlägt, der das Äquivalent von 1 Megatonne TNT an Energie freisetzt, ist ca. 0.0009. Angenommen Sie leben 80 Jahre. Die Verteilung der Anzahl Einschläge, die Sie erleben werden, lässt sich gut mit einer uniformen Verteilung beschreiben.

d) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

12. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung. Beurteilen Sie folgende Aussagen:



a) Das arithmetische Mittel einer Stichprobe kann in bestimmen Fällen grösser als das 90%-Quantil der Stichprobe sein.

b) Bei einer Normalverteilung ist der Median nicht immer gleich dem Erwartungswert.

c) Angenommen wir haben zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y. Falls es keinen linearen Zusammenhang zwischen X und Y gibt, dann ist die Korrelation zwischen X und Y mit Sicherheit null.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ.

Gruppe B

13. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -4.2$ und Varianz $Var(X) = 2.5$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 + 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -8.7$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -1.3$ und Varianz $Var(X) = 1$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 1 + 3.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 15.21$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 1.5$ und Varianz $Var(X) = 0.6$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 0.5 - 4.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 14.406$.

d) Die Zufallsvariable X hat 95 %-Quantil $q_X = -3.7$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -3.6 + 0.8 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 95 %-Quantil von Y gleich $q_Y = -6.56$.

14. Es seien $X_1, ..., X_n$ $i.i.d.$ $\sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Aus dem Gesetz der grossen Zahlen folgt, dass man für doppelte Genauigkeit des arithmetischen Mittels dreimal so viele Daten braucht.

b) Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n^2 \mathrm{Var}(X_i)$.

c) Angenommen bei einem Binomialtest ist die Anzahl der Versuche n gross und die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 ist nicht sehr klein. Dann kann die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese durch eine Normalverteilung approximiert werden, weil der Zentrale Grenzwertsatz gilt.

d) Andreas rennt seinen ersten Marathon und nimmt zur Verpflegung Traubenzucker mit. Ein Stück Traubenzucker gibt ihm im Schnitt Energie für 10 Minuten mit einer Standardabweichung von 5 Minuten. Er nimmt 28 Stücke Traubenzucker mit und möchte sich damit für eine Gesamtdauer von 4 Stunden verpflegen können. Der Energiegehalt der Traubenzuckerstücke kann als unabhängig angenommen werden und die Verteilung des Energiegehalts ist identisch. Die Wahrscheinlichkeit, dass Andreas genügend Traubenzuckerstücke mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

Gruppe B

Binomialverteilung und -test

15. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir testen mit einem Binomialtest auf dem 5 % Signifikanzniveau, ob eine Münze gefälscht wurde, sodass sie häufiger "Kopf" zeigt ($H_0 : \pi = 0.5$). Die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze als "gefälscht" (H_0 wird verworfen) bezeichnen, wenn sie in Wahrheit "fair" (H_0 ist in Wahrheit richtig) ist, ist höchstens 0.05.

b) Angenommen bei einem Binomialtest ist das Signifikanzniveau 5%. Die Macht ist dann immer 95%.

c) Bei einem Binomialtest kann die Nullhypothese auf dem 8% Signifikanzniveau verworfen werden. Dann kann die Nullhypothese sicher auch auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest, um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.07$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.07$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.21$). Um den Test unseren Bedürfnissen genau anzupassen, überlegen wir, welche Folgen es hat, wenn man das Signifikanzniveau ändert. Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) ab.

16. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat nie grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) Bei einem zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p_0 = 0.6$, $n = 34$) wurden $x = 26$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.055$. Wenn x grösser wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell kleiner (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{13, 14, 15\}$. Die Macht für die konkrete Alternative $p_A = 0.85$ ist dann 0.604.

d) Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik liegt im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese stimmt.

Gruppe B

17. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{3, ..., 18\}$. Die Stichprobengrösse ist 18. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.2. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.729.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{0, ..., 4\}$ bei einer Stichprobengrösse von 33. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.9. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.235.

c) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) ist: $\{3, ..., 16\}$. Die Stichprobengrösse ist 16. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.282.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) ist: $\{0, ..., 3\}$. Die Stichprobengrösse ist 13. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.992.

18. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.026. Dann kann die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.05 verworfen werden.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese p_0 befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. Es ist dann möglich, dass der P-Wert für einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ den Wert 0.018 hat.

d) An einer Losbude haben wir bei $n = 33$ Losen $x = 7$ Gewinne gehabt. Mit der Normalapproximation kommen wir auf folgendes 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit: Untergrenze = 0.073, Obergrenze= 0.412.

Gruppe B

19. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Casino will einen neuen Spielautomaten mit einem Glücksspiel anschaffen. Der Hersteller gibt an, dass der Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% gewinnt. Die Casino-Leitung möchte diese Behauptung testen und gibt einen zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p = p_0$ wobei $p_0 = 0.35$) auf dem 7% Signifikanzniveau mit 20 zufällig ausgewählten Spielern in Auftrag. Der Verwerfungsbereich besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{18, ..., 20\}$.

b) Bei einer Losbude wird behauptet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit 40% ist. Wir testen diese Behauptung mit einem zweiseitigen Binomialtest ($H_A : p \neq p_0$). Dazu ziehen wir $n = 6$ Lose und beobachten $x = 1$ Gewinn. Dann ist der P-Wert 0.764.

c) Ein Cornflakes-Hersteller behauptet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Spielzeug in der Cornflakes-Schachtel enthalten ist. Wir vermuten, dass Spielzeuge aber seltener anzutreffen sind und testen diese Behauptung mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$). Dazu sammeln wir im Bekanntenkreis Informationen zu $n = 10$ Cornflakes-Schachteln und zählen $x = 3$ Schachteln, die Spielzeuge enthalten. Dann ist der P-Wert der Daten 0.258.

d) Ein neuer Wirkstoff sieht vielversprechend aus und der Finanzchef der Pharma-Firma will prüfen, ob es sich lohnt, das Medikament weiter zu untersuchen. Der Standard-Wirkstoff wirkt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für uns wäre der neue Wirkstoff nur dann interessant, wenn er eine grössere Wirkungswahrscheinlichkeit als der Standardwirkstoff hat. Um das zu untersuchen machen wir einen einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) mit $n = 18$ Probanden und beobachten $x = 15$ Probanden, bei denen der Wirkstoff die gewünschte Wirkung zeigt. Dann ist der P-Wert 0.567.

Gruppe B

20. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Von einem neuen Medikament wird erwartet, dass es deutlich besser als das herkömmliche Medikament wirkt. Um diese Vermutung zu unterstützen wird ein einseitiger Binomialtest gemacht. 12 kranke Patienten erhalten das neue Medikament. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl gesunder Patienten am Ende der Studie unter allen Patienten, die das neue Medikament erhalten haben. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.4$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.4$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 9 bis 12 (beide Grenzen eingeschlossen).

b) In den Medien wird behauptet, dass ein neuer Lebensmittelfarbstoff als Nebenwirkung leichte Kopfschmerzen verursachen kann. Der Hersteller behauptet daraufhin, dass diese Nebenwirkungen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30% auftreten. Eine Vereinigung zum Konsumentenschutz vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Nebenwirkung grösser sein könnte und macht einen einseitigen Binomialtest. 12 Probanden bekommen ein Getränk, das mit dem neuen Lebensmittelfarbstoff gefärbt wurde. Nach einer Stunde werden sie gefragt, ob sie Kopfschmerzen haben. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Probanden mit Kopfschmerzen nach einer Stunde. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{7, \ldots, 12\}$.

c) In einer Fabrik werden Schokoladenosterhasen hergestellt. Bei ca. 30% der hergestellten Osterhasen treten bekannterweise kleinere Mängel auf. Die Mängel sind so klein, dass die Osterhasen dennoch verkauft werden können. Allerdings möchte man aus Marketinggründen vermeiden, dass sich die Wahrscheinlichkeit für solche kleinere Mängel erhöht. Nun wurde eine neue Fabrikationsanlage angeschafft. Nach der Einstellung aller Geräte ist der Qualitätsbeauftragte der Firma besorgt: Er vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für kleinere Maengel grösser als 30% ist. Um diese Vermutung zu testen, macht er einen einseitigen Binomialtest. 9 Osterhasen werden zufällig aus der Produktion entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Osterhasen mit kleineren Mängeln in dieser Stichprobe. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 9, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{6, \ldots, 9\}$.

d) Eine Marketingfirma will ein neues provokatives Plakat veröffentlichen. Allerdings gibt es innerhalb der Firma Bedenken, dass ein grosser Anteil der Bevölkerung das Plakat als "zu provokativ" einstufen könnte. Akzeptabel wäre maximal ein Anteil von 45% in der Gesamtbevölkerung, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. In einer kleinen Pilotstudie soll nun mit einem einseitigen Binomialtest geprüft werden, ob der Anteil der provozierten Personen in der Bevölkerung kleiner als 45% ist. Dazu werden zufällig 13 Personen ausgewählt und über das geplante Plakat befragt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl befragter Personen, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 13, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.45$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi < 0.45$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 0 bis 3 (beide Grenzen eingeschlossen).

Gruppe C

Gemischte Fragen

1. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, ..., 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wa.	0.03	0.08	0.02	0.2	0.11	0.07	0.16	0.08	0.13	0.12

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 8 oder eine 10 gezogen wird, ist 0.2.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 3 und höchstens 9 ist, ist 0.88.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl verschieden von 6 ist, ist 0.93.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 3 oder mindestens 8 ist, ist 0.46.

2. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist 0.4, dann sind die odds für das gleiche Ereignis 0.541.

b) Folgender Zusammenhang gilt ohne weitere Annahmen für alle Ereignisse A: $P(A^c) = -odds(A)$.

c) Die log-odds mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{1, 3, 4\}$ zu würfeln, sind 0.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1.

3. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{1, 5\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 3, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintreten ist 0.628.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.75.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.75.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0.793.

Gruppe C

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

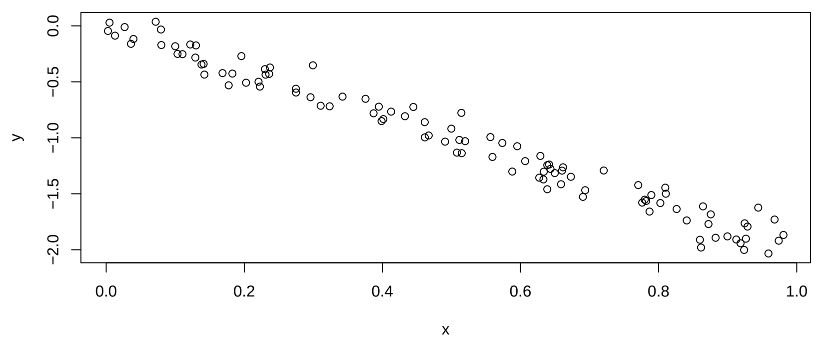
a) Angenommen $X_1 \sim$ Poisson(3) und $X_2 \sim$ Poisson(5). Dann gilt für $Y = X_1 + X_2$ die Verteilung $Y \sim$ Poisson(8), falls X_1 und X_2 disjunkt sind.

b) Ein Glücksrad besteht aus 100 gleich grossen Sektoren und ist mit den Zahlen 1 bis 100 beschriftet. Man gewinnt einen Betrag, der so gross ist wie die Zahl, bei der der Zeiger am Rand des Glücksrades zum Stehen kommt. Die Verteilung des Gewinns mit einmal Drehen lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr ein Meteorit einschlägt, der das Äquivalent von 1 Megatonne TNT an Energie freisetzt, ist ca. 0.0009. Angenommen Sie leben 80 Jahre. Die Verteilung der Anzahl Einschläge, die Sie erleben werden, lässt sich gut mit einer uniformen Verteilung beschreiben.

d) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

5. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung. Beurteilen Sie folgende Aussagen:



a) Das arithmetische Mittel einer Stichprobe kann in bestimmen Fällen grösser als das 90%-Quantil der Stichprobe sein.

b) Bei einer Normalverteilung ist der Median nicht immer gleich dem Erwartungswert.

c) Angenommen wir haben zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y. Falls es keinen linearen Zusammenhang zwischen X und Y gibt, dann ist die Korrelation zwischen X und Y mit Sicherheit null.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ.

Gruppe C

6. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -4.2$ und Varianz $Var(X) = 2.5$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 + 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -8.7$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -1.3$ und Varianz $Var(X) = 1$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 1 + 3.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 15.21$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 1.5$ und Varianz $Var(X) = 0.6$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = 0.5 - 4.9 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 14.406$.

d) Die Zufallsvariable X hat 95 %-Quantil $q_X = -3.7$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -3.6 + 0.8 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 95 %-Quantil von Y gleich $q_Y = -6.56$.

7. Es seien $X_1, ..., X_n$ $i.i.d.$ $\sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Aus dem Gesetz der grossen Zahlen folgt, dass man für doppelte Genauigkeit des arithmetischen Mittels dreimal so viele Daten braucht.

b) Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\operatorname{Var}(S_n) = n^2 \operatorname{Var}(X_i)$.

c) Angenommen bei einem Binomialtest ist die Anzahl der Versuche n gross und die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 ist nicht sehr klein. Dann kann die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese durch eine Normalverteilung approximiert werden, weil der Zentrale Grenzwertsatz gilt.

d) Andreas rennt seinen ersten Marathon und nimmt zur Verpflegung Traubenzucker mit. Ein Stück Traubenzucker gibt ihm im Schnitt Energie für 10 Minuten mit einer Standardabweichung von 5 Minuten. Er nimmt 28 Stücke Traubenzucker mit und möchte sich damit für eine Gesamtdauer von 4 Stunden verpflegen können. Der Energiegehalt der Traubenzuckerstücke kann als unabhängig angenommen werden und die Verteilung des Energiegehalts ist identisch. Die Wahrscheinlichkeit, dass Andreas genügend Traubenzuckerstücke mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

Gruppe C

Binomialverteilung und -test

8. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir testen mit einem Binomialtest auf dem 5 % Signifikanzniveau, ob eine Münze gefälscht wurde, sodass sie häufiger "Kopf" zeigt ($H_0 : \pi = 0.5$). Die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze als "gefälscht" (H_0 wird verworfen) bezeichnen, wenn sie in Wahrheit "fair" (H_0 ist in Wahrheit richtig) ist, ist höchstens 0.05.

b) Angenommen bei einem Binomialtest ist das Signifikanzniveau 5%. Die Macht ist dann immer 95%.

c) Bei einem Binomialtest kann die Nullhypothese auf dem 8% Signifikanzniveau verworfen werden. Dann kann die Nullhypothese sicher auch auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest, um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.07$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.07$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.21$). Um den Test unseren Bedürfnissen genau anzupassen, überlegen wir, welche Folgen es hat, wenn man das Signifikanzniveau ändert. Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) ab.

9. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat nie grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) Bei einem zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p_0 = 0.6, n = 34$) wurden $x = 26$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.055$. Wenn x grösser wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell kleiner (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{13, 14, 15\}$. Die Macht für die konkrete Alternative $p_A = 0.85$ ist dann 0.604.

d) Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik liegt im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese stimmt.

Gruppe C

10. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{3, ..., 18\}$. Die Stichprobengrösse ist 18. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.2. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.729.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{0, ..., 4\}$ bei einer Stichprobengrösse von 33. Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.9. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.235.

c) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) ist: $\{3, ..., 16\}$. Die Stichprobengrösse ist 16. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.282.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$) ist: $\{0, ..., 3\}$. Die Stichprobengrösse ist 13. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird ist 0.992.

11. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.026. Dann kann die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.05 verworfen werden.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen die Gewinnwahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese p_0 befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. Es ist dann möglich, dass der P-Wert für einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ den Wert 0.018 hat.

d) An einer Losbude haben wir bei $n = 33$ Losen $x = 7$ Gewinne gehabt. Mit der Normalapproximation kommen wir auf folgendes 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit: Untergrenze = 0.073, Obergrenze= 0.412.

Gruppe C

12. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Casino will einen neuen Spielautomaten mit einem Glücksspiel anschaffen. Der Hersteller gibt an, dass der Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% gewinnt. Die Casino-Leitung möchte diese Behauptung testen und gibt einen zweiseitigen Binomialtest ($H_0 : p = p_0$ wobei $p_0 = 0.35$) auf dem 7% Signifikanzniveau mit 20 zufällig ausgewählten Spielern in Auftrag. Der Verwerfungsbereich besteht aus $\{0, 1\}$ und $\{18, ..., 20\}$.

b) Bei einer Losbude wird behauptet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit 40% ist. Wir testen diese Behauptung mit einem zweiseitigen Binomialtest ($H_A : p \neq p_0$). Dazu ziehen wir $n = 6$ Lose und beobachten $x = 1$ Gewinn. Dann ist der P-Wert 0.764.

c) Ein Cornflakes-Hersteller behauptet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Spielzeug in der Cornflakes-Schachtel enthalten ist. Wir vermuten, dass Spielzeuge aber seltener anzutreffen sind und testen diese Behauptung mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : p < p_0$). Dazu sammeln wir im Bekanntenkreis Informationen zu $n = 10$ Cornflakes-Schachteln und zählen $x = 3$ Schachteln, die Spielzeuge enthalten. Dann ist der P-Wert der Daten 0.258.

d) Ein neuer Wirkstoff sieht vielversprechend aus und der Finanzchef der Pharma-Firma will prüfen, ob es sich lohnt, das Medikament weiter zu untersuchen. Der Standard-Wirkstoff wirkt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für uns wäre der neue Wirkstoff nur dann interessant, wenn er eine grössere Wirkungswahrscheinlichkeit als der Standardwirkstoff hat. Um das zu untersuchen machen wir einen einseitigen Binomialtest ($H_A : p > p_0$) mit $n = 18$ Probanden und beobachten $x = 15$ Probanden, bei denen der Wirkstoff die gewünschte Wirkung zeigt. Dann ist der P-Wert 0.567.

Gruppe C

13. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Von einem neuen Medikament wird erwartet, dass es deutlich besser als das herkömmliche Medikament wirkt. Um diese Vermutung zu unterstützen wird ein einseitiger Binomialtest gemacht. 12 kranke Patienten erhalten das neue Medikament. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl gesunder Patienten am Ende der Studie unter allen Patienten, die das neue Medikament erhalten haben. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.4$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.4$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 9 bis 12 (beide Grenzen eingeschlossen).

b) In den Medien wird behauptet, dass ein neuer Lebensmittelfarbstoff als Nebenwirkung leichte Kopfschmerzen verursachen kann. Der Hersteller behauptet daraufhin, dass diese Nebenwirkungen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30% auftreten. Eine Vereinigung zum Konsumentenschutz vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Nebenwirkung grösser sein könnte und macht einen einseitigen Binomialtest. 12 Probanden bekommen ein Getränk, das mit dem neuen Lebensmittelfarbstoff gefärbt wurde. Nach einer Stunde werden sie gefragt, ob sie Kopfschmerzen haben. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Probanden mit Kopfschmerzen nach einer Stunde. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 12, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{7, \ldots, 12\}$.

c) In einer Fabrik werden Schokoladenosterhasen hergestellt. Bei ca. 30% der hergestellten Osterhasen treten bekannterweise kleinere Mängel auf. Die Mängel sind so klein, dass die Osterhasen dennoch verkauft werden können. Allerdings möchte man aus Marketinggründen vermeiden, dass sich die Wahrscheinlichkeit für solche kleinere Mängel erhöht. Nun wurde eine neue Fabrikationsanlage angeschafft. Nach der Einstellung aller Geräte ist der Qualitätsbeauftragte der Firma besorgt: Er vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für kleinere Maengel grösser als 30% ist. Um diese Vermutung zu testen, macht er einen einseitigen Binomialtest. 9 Osterhasen werden zufällig aus der Produktion entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl Osterhasen mit kleineren Mängeln in dieser Stichprobe. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 9, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi > 0.3$. Das Signifikanzniveau ist 7%. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $\{6, \ldots, 9\}$.

d) Eine Marketingfirma will ein neues provokatives Plakat veröffentlichen. Allerdings gibt es innerhalb der Firma Bedenken, dass ein grosser Anteil der Bevölkerung das Plakat als "zu provokativ" einstufen könnte. Akzeptabel wäre maximal ein Anteil von 45% in der Gesamtbevölkerung, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. In einer kleinen Pilotstudie soll nun mit einem einseitigen Binomialtest geprüft werden, ob der Anteil der provozierten Personen in der Bevölkerung kleiner als 45% ist. Dazu werden zufällig 13 Personen ausgewählt und über das geplante Plakat befragt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl befragter Personen, die das Plakat als "zu provokativ" einstufen. Wir nehmen an, dass $X \sim Bin(n = 13, \pi)$. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.45$. Die Alternativhypothese ist $H_A : \pi < 0.45$. Das Signifikanzniveau ist 5%. Der Verwerfungsbereich des Tests geht dann von 0 bis 3 (beide Grenzen eingeschlossen).

t-Test

14. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Für 8 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind:

$$6.35, -8.93, 8.74, 6.58, 3.75, 8.63, -15.17, 2.55.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.501.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.05 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty; -1.703] \cup [1.703; \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty; -1.325] \cup [1.325; \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 2.293$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit obigen Daten ein 95%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das 95%-Vertrauensintervall ist: $[-4.834; 9.737]$.

15. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum $\sqrt{n}$-Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $N(\mu, 1)$.

b) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim N(0,1)$. Dann ist $P(X > 2)$ grösser als $P(Z > 2)$.

c) Angenommen das (zweiseitige) 95%-Vertrauensintervall bei einem t-Test ist $[0.081; 1.177]$. Der t-Test würde die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq 0$ verwerfen.

d) Angenommen bei einem (zweiseitigen) t-Test mit $n = 8$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 0.263 . Der P-Wert ist dann etwa 0.8.

16. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 10$ Beobachtungen von X gemacht. Die dazugehörigen Kennzahlen sind

$$\hat{\sigma}_x = 8.108,\ \overline{x} = 7.778.$$

Zudem haben wir $n_2 = 7$ Beobachtungen von Y mit folgenden Kennzahlen

$$\hat{\sigma}_y = 7.635,\ \overline{y} = 4.114.$$

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) S^2_{pool} wird mit obigen Daten geschätzt als 62.761.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.939.

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01. Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 8$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.921$. Der P-Wert ist dann 0.01.

Gruppe C

17. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) In einem Experiment sollte der Effekt von Zigarettenrauchen auf Blutplättchenanhäufungen untersucht werden. Dazu wurden 11 Probanden vor und nach dem Rauchen einer Zigarette Blutproben entnommen, und es wurde gemessen, wie stark sich die Blutplättchen anhäuften. Es interessiert, ob sich Blutplättchen durch das Rauchen vermehrt anhäufen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Beeinflusst der Kalziumgehalt in der Nahrung den systolischen Blutdruck? Zur Überprüfung dieser Frage wurde einer Versuchsgruppe von 10 Männern während 12 Wochen ein Kalziumzusatz verabreicht. Einer Kontrollgruppe von 11 Männern gab man ein Placebopräparat. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) In einem Experiment wurde untersucht, ob Mäuse zwei Formen von Eisen (Fe^{2+} und Fe^{3+}) unterschiedlich gut aufnehmen. Dazu wurden 36 Mäuse zufällig in zwei Gruppen zu je 18 unterteilt und die eine Gruppe mit Fe^{2+} und die andere mit Fe^{3+} gefüttert. Da das Eisen radioaktiv markiert war, konnte sowohl die Anfangskonzentration wie auch die Konzentration einige Zeit später gemessen werden. Daraus wurde für jede Maus der Anteil des aufgenommenen Eisens berechnet. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment messen zwei Tiefen-Messgeräte die Tiefe einer Gesteinsschicht an 9 verschiedenen Orten. Beide Geräte messen an jedem der 9 Orte je einen Wert. Es wird vermutet, dass Gerät B systematisch grössere Werte als Gerät A misst. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

Gruppe C

Lineare Regression

18. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 21 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	0.196	0.587	0.334	0.742
x	3.151	0.314	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Gemäss der Tabelle ist der t-Wert des geschätzten y-Achsenabschnitts gleich 0.742.

b) Die Obergrenze des 95%-Vertrauensintervalls (approximativ) für den y-Achsenabschnitt ist 0.88.

c) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 14.036 stehen.

d) Die t-values in der Tabelle beziehen sich auf die t-Verteilung mit 19 Freiheitsgraden.

19. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert -2.331 erhöht.

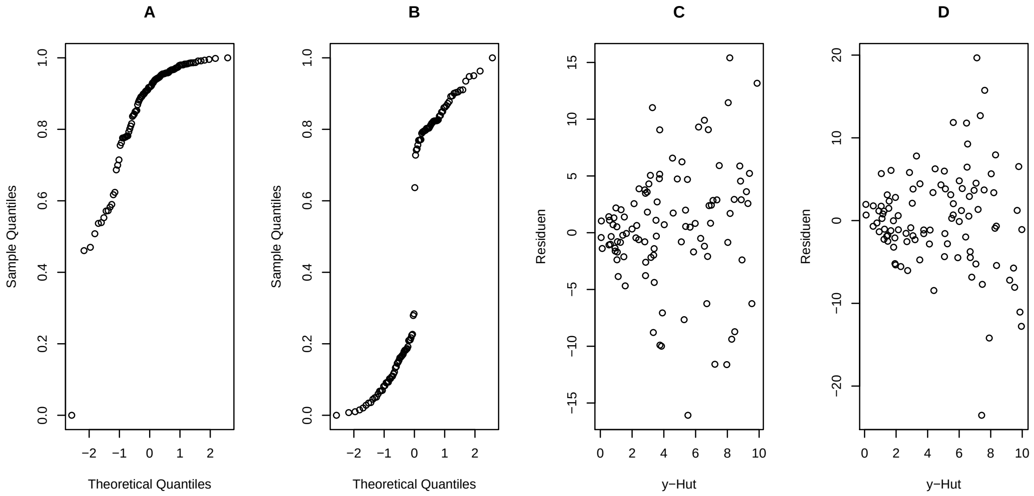
b) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 1.315 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Für $x = 2.409$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 3.364$ vorraus.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 3.775 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (0.196). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 1.239$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.456$ verwendet.

d) Angenommen 0 ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

Gruppe C

20. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



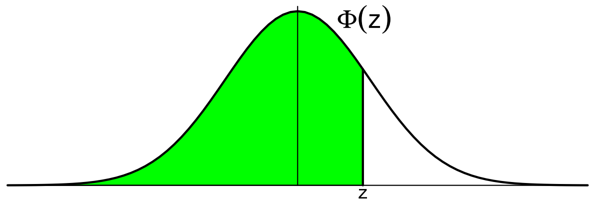
a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer rechtsschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt, dass alle Modellannahmen erfüllt sind.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

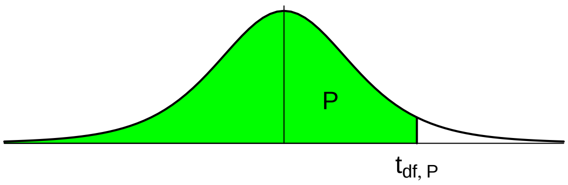
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\,[Z \leq z]\,,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\,[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576