Lösung 2

Musterlösung zum Übungsblatt 2 vom 26.2.2017

1 Differentialgleichungen

Zeigen Sie durch einsetzen, dass die gegebenen Funktionen Lösungen der jeweiligen DGL sind

1. Zu überprüfen ist die Lösung

$$y(x) = 2x^4 + x^3$$

für die DGL

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x} \cdot y(x) - 4x^3 - x^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^4 + x^3\right) = 8x^3 + 3x^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \left(8x^3 + 3x^2\right) - \frac{2}{x}\left(2x^4 + x^3\right) - 4x^3 - x^2 = 0 \tag{2}$$

2. Zu überprüfen ist die Lösung

$$y(x) \quad = \quad k \cdot (\tfrac{1}{7})^x,\ k \in \mathbb{R}$$

für die DGL

$$\ln(7) \cdot y(x) + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &= k \cdot (\tfrac{1}{7})^x,\ k \in \mathbb{R} \\ &= k \cdot e^{-x \cdot \ln(7)},\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -k \cdot \ln(7) \cdot e^{-x \cdot \ln(7)} \tag{3}$$

$$\Rightarrow -k \cdot \ln(7) \cdot e^{-x \cdot \ln(7)} + \ln(7) \cdot k \cdot e^{-x \cdot \ln(7)} = 0 \tag{4}$$

3. Zu überprüfen ist die Lösung

$$N(x,t) = \frac{Z_0}{2A(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

für das 2. Fick'sche Gesetz

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) \quad \left[\text{wobei } \ \mathrm{K} = \frac{Z_0}{2A(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}}\right] && (5)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{K}\left(t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)\right) && (6)\\
&= \mathrm{K}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + t^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^2}{4D}\left(-\frac{1}{t^2}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)\right) && (7)\\
&= \underline{\mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4Dt^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}\right)} && (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)\right) && (9)\\
&= \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{2Dt}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) && (10)\\
&= \mathrm{K}\left(-\frac{1}{2Dt}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{x}{2Dt}\left(\frac{-x}{2Dt}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) && (11)\\
&= \underline{\mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2t^2}\right)} && (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} &= \mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4Dt^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}\right) - D\cdot\frac{Z_0}{2A(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2t^2}\right)\\
&= \mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4Dt^2\cdot t^{\frac{1}{2}}} - D\cdot\left(-\frac{1}{2Dt\cdot t^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{4D^2\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot t^2}\right)\right)\\
&= \mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4Dt^2\cdot t^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2t\cdot t^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{4D\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot t^2}\right)\\
&\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{K}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\cdot(0) = 0}}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung: alle Moleküle sind bei x = 0
Randbedingung: unendliche Diffusion (keine Grössenbeschränkung im System).
Dies sind keine in der Natur gefundenen Bedingungen, aber sie bieten manchmal eine gute Annäherung mit einer viel einfacheren Lösung. Genauere Lösung werden in Übungsblatt 3 besprochen.

Lösen Sie die folgenden DGL unter den angegebenen Randbedingungen

4. $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - ay(x)^2 = 0$; $y(0) = 1$ durch Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - ay(x)^2 = 0 \tag{13}$$
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = ay(x)^2 \tag{14}$$
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{y(x)^2} = a \cdot \mathrm{d}x \tag{15}$$

Nun wird über beide Seiten integriert - einmal über x, einmal über $y(x)$. Somit erhält man

$$\int \frac{1}{y(x)^2}\mathrm{d}y(x) = a\int \mathrm{d}x \tag{16}$$
$$-\frac{1}{y(x)} + c_1 = ax + c_2 \tag{17}$$
$$\frac{1}{y(x)} = -ax + c \tag{18}$$

wobei in der letzten Zeile $c = c_1 - c_2$ gesetzt wurde und c_1, c_2 Integrationskonstanten sind. Aufgelöst nach $y(x)$ ergibt sich

$$y(x) = -\frac{1}{ax + c}\ . \tag{19}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ bekommt man für c :

$$y(0) = -\frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1 \tag{20}$$

und somit ergibt sich die Lösung der DGL zu

$$y(x) = -\frac{1}{ax - 1} = \frac{1}{1 - ax} \tag{21}$$

5. $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k \cdot x(t) = 0$; $x(0) = x_0$
Auch diese DGL wird wieder durch Trennung der Variablen gelöst. Dazu formt man die Gleichung um:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k \cdot x(t) = 0 \tag{22}$$
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -k\mathrm{d}t \tag{23}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist der logarithmus naturalis, d.h. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$. Somit erhält man:

$$\ln|x(t)| + C_1 = -k \cdot t + C_2\ . \tag{24}$$

Mit $C = C_1 + C_2$ sowie der Beziehung $e^{\ln|x(t)|} = |x(t)|$ ergibt sich

$$e^{\ln|x(t)|} = e^{-k\cdot t+C} \tag{25}$$

$$x(t) = e^C e^{-k\cdot t} \tag{26}$$

$$= Ae^{-k\cdot t}\,, \tag{27}$$

wobei die Konstante $A = e^C$ eingeführt wurde. Mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ findet man

$$x(0) = A \cdot 1 \overset{!}{=} x_0 \tag{28}$$

und die Lösung der DGL ist:

$$x(t) = x_0 e^{-k\cdot t}\,. \tag{29}$$

Die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ erhält man nun durch den Ansatz

$$\frac{1}{2}x_0 \overset{!}{=} x(t_{\frac{1}{2}}) = x_0 e^{-k\cdot t_{\frac{1}{2}}} \tag{30}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k\cdot t_{\frac{1}{2}}} \tag{31}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -k \cdot t_{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

$$-\ln 2 = -k \cdot t_{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

womit sich die Zerfallskonstante durch die Halbwertszeit ersetzen lässt $k = {}^{\ln 2}\!/_{t_{\frac{1}{2}}}$. Die Lösung lässt sich dann schreiben als

$$x(t) = x_0 e^{-t\ln(2)/t_{\frac{1}{2}}} \tag{34}$$

$$= x_0 2^{-t/t_{\frac{1}{2}}}\,. \tag{35}$$

2 Atomradius

Aus der Formel für den Diffusionskoeffizienten kann der Radius der im Prozess involvierten Atome berechnet werden. Wir arbeiten sukzessive die auf dem Aufgabenblatt geforderten Schritte ab.

1. a) Die Gleichung für den Diffusionskoeffizienten (1. Fick'sches Gesetz) wurde im Skript (II.4.4) hergeleitet und lautet

$$D = \frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle \tag{36}$$

   b) Die Formel für den Stossquerschnitt finden wir auf Seite 14 im Skript

$$\sigma = \pi \cdot (r_1 + r_2)^2 \tag{37}$$

   c) Die mittlere freie Weglänge λ als Funktion der σ und der Teilchenkonzentration N wurde im Skript (II.4.3) hergeleitet und lautet:

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} \tag{38}$$

   d) Zuletzt müssen wir noch einen Ausdruck für die mittlere Teilchengeschwindigkeit als Funktion der Masse der Teilchen und der Temperatur finden (Skript S. 19)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{39}$$

2. Da es sich um identische Teilchen handelt, können wir in Gleichung 37 $r_1 = r_2$ setzen. Damit folgt für die Diffusionskonstante

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{3N\sigma} = \frac{\langle v \rangle}{3N4\pi r^2} = \frac{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}{3N4\pi r^2} && (40) \\ \Rightarrow \quad r &= \sqrt{\frac{\sqrt{2kT}}{6N\pi D\sqrt{\pi m}}} && (41) \end{aligned}$$

   Anmerkung : Gleichung 40 entspricht der Formel II.3 auf Seite 18 im Skript.

3. Wir müssen nun noch die Teilchenkonzentration N ($N = \frac{\#}{V}$ mit $\# =$ Anzahl Teilchen) mit den gegebenen Grössen ersetzen. Dazu nehmen wir an, dass es sich bei He um ein ideales Gas handelt. Mit der idealen Gasgleichung $pV = nRT$ folgt:

$$\begin{aligned} pV &= \frac{\#}{N_\mathrm{A}} RT \\ &\Rightarrow \quad p = \frac{\#}{V}\frac{R}{N_\mathrm{A}}T = NkT \\ &\Rightarrow \quad N = \frac{p}{kT} && (42) \end{aligned}$$

   wobei die Relation zwischen der Boltzmann-Konstante und der Gaskonstante $k = \frac{R}{N_\mathrm{A}}$ genutzt wurde.

4. Mit Gleichung 42 können Sie nun die Formel für den Radius (Gl. 41) schreiben

$$r = \sqrt{\frac{kT\sqrt{2kT}}{6p\pi D\sqrt{\pi m}}} \tag{43}$$

Nun muss man nur noch alle Zahlen einsetzen:

$p = 101.3$ KPa $= 101300\,\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$

$k = 1.38 \times 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} = 1.38 \times 10^{-23}\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2\,\text{K}}$

$m_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}}}{N_{\text{A}}} = 6.646 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ (mit $M_{\text{He}} = 4\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$ und $N_{\text{A}} = 6.022 \times 10^{23}\,\frac{1}{\text{mol}}$)

$D_{\text{He}} = 3.78 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Dann erhält man

$$r_{\text{He}} = \left(\frac{1.38 \times 10^{-23} \cdot 298}{6 \cdot 101300 \cdot \pi \cdot 3.78 \cdot 10^{-5}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1.38 \times 10^{-23} \cdot 298}{\pi \cdot 6.646 \times 10^{-27}}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

$$\cdot \left(\frac{\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2\,\text{K}} \cdot \text{K}}{\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2\,\text{K}} \cdot \text{K}}{\text{kg}}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

und damit

$$\begin{aligned} r_{\text{He}} &= \left(5.70 \times 10^{-23} \cdot 628\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^3}} \cdot \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(3.576 \times 10^{-20}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{m}\,\text{s} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

woraus sich ein Radius für das Heliumatom von

$$r_{\text{He}} = 1.89 \times 10^{-10}\text{m} = 0.189\,\text{nm} = 1.89\,\text{Å}$$

ergibt.