Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Physik
# Lösungen – Serie 4.

FS 2017
Prof. Dr. Thomas Ihn

Abgabe am 20. März 2017 in der Vorlesung

## Aufgabe 4.1. *Fortbewegung bei Menschen und Tieren* *[††]*

Wir wollen herausfinden, wie die Geschwindigkeit $v$ eines sich bewegenden Tiers mit dessen Schrittlänge $s$ zusammenhängt. Zu diesem Zweck messen wir den Zusammenhang zwischen $v$ und $s$ bei einigen Tieren. Die Daten könnten etwa so wie in Abbildung 4.1(a) aussehen. In dieser Aufgabe werden Sie

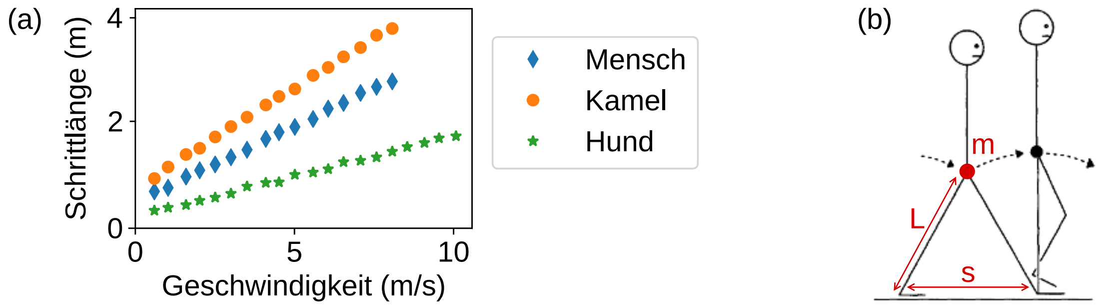


**Abbildung 4.1: (a)** Realistische (aber nicht echte) Daten zur Abhängigkeit der Schrittlänge von der Geschwindigkeit. **(b)** Einfaches Modell eines gehenden Menschen

sehen, wie nützlich die Dimensionsanalyse ist. Wir werden nur durch die Inspektion der beteiligten physikalischen Grössen herausfinden, welche Form ein solches Modell haben kann.

(a) Im ersten Schritt finden wir heraus, welche physikalischen Grössen für das gegebene Problem relevant sind. Als Denkhilfe zeichnen wir die möglichst einfache Skizze eines laufenden Menschen in Abbildung 4.1(b). Intuitiv erwarten wir, dass Tiere mit längeren Beinen grössere Schritte machen. Daher wird die Beinlänge $L$ eine Rolle spielen. Bei jedem Schritt wird der Körper gegen die Schwerkraft ein wenig nach oben angehoben und gegen seine Trägheit in Bewegung gesetzt. Wir vermuten daher, dass die Masse $m$ des Tieres eine Rolle spielt, sowie die Erdbeschleunigung $g$. Damit haben wir zusammen mit der Geschwindigkeit $v$ und der Schrittlänge $s$ fünf relevante Grössen.
Ordnen sie diese Grössen und deren Dimensionen nach dem aus der Vorlesung bekannten Schema in Tabelle 1 und zählen sie auf, wie viele verschiedene Dimensionen auftreten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Grösse 1 | ... | Grösse N | Zahl der Grössen |
| Dimension der Grösse 1 | ... | Dimension der Grösse N | Zahl der verschiedenen Dimensionen |

**Tabelle 1:** Vorbereitung der Dimensionsanalyse.

(b) Wie viele dimensionslosen Grössen brauchen Sie, um eine Gleichung zu Formulieren, die das Model beschreibt?

*Hinweis.* *$\pi$-Theorem von Buckingham*

(c) Schlagen Sie sinnvolle dimensionslose Grössen vor, die sich aus den zwei Grössen $s$, $v$, $L$, $m$ und $g$ zusammensetzen lassen. Behalten Sie dabei im Auge, dass wir schussendlich an der Beziehung $s(v)$ interessiert sind.

(d) Erklären Sie Abbildung 4.2. Begründen sie insbesondere die Wahl der Achsen. Lesen sie eine Gesetzmässigkeit $s(v)$ ab. Sie haben nun ein für fast alle Säugetiere gültiges Modell der Forbewegung aufgebaut!

*Hinweis. Vergleichen sie die Achsenbeschriftung mit ihren Antworten zur Teilaufgabe (c). Wären sie ohne Dimensionsanalyse auf die Idee gekommen, ihre Messdaten auf diese Weise darzustellen?*

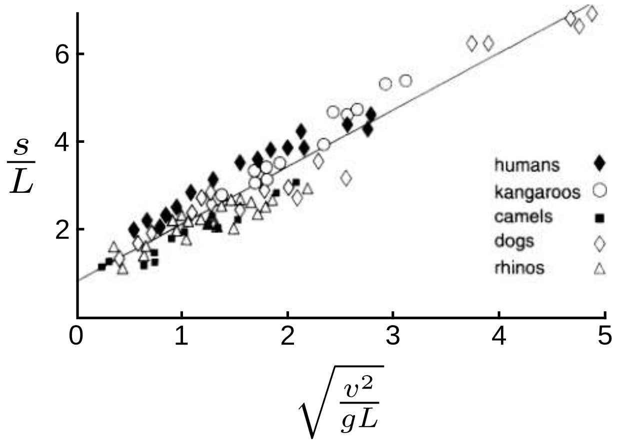


**Abbildung 4.2:** Gemessene Daten zur Fortbewegung verschiedener Tiere.

(e) Sie vermessen ein weiteres Tier und tragen die Daten in Abbildung 4.2 ein. Sie stellen fest, dass die Daten nicht auf der gleichen Linie wie für die anderen Tiere liegen. Was können sie daraus schliessen?

(f) Betrachten Sie nochmals Abbildung 4.1(b). Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, mit der ein Mensch gehen kann. Anders gesagt, ab welcher Geschwindigkeit muss ein Mensch rennen? Zeichnen Sie den enstprechenden Punkt in Abbildung 4.2 ein.

*Hinweis. Nehmen sie an, dass die Masse in der Hüfte konzentriert ist. Diese Bewegt sich auf einer Kreisbahn.*

Die Abbildungen 4.1(b) und 4.2 stammen aus dem Artikel *Walking and Running* von R. Mc Neill Alexander in The Mathematical Gazette **80** 262-266. Die Daten in Abbildung 4.1(a) wurden anhand des Modells, das Sie in Teilaufgabe (d) aufgestellt haben simuliert, mit Annahme einer für das entsprechende Tier typischen Beinlänge und Addition von Rauschen.

**Lösung.**

(a) Die Grössen und deren Dimensionen sind in Tabelle 2 aufgetragen. Es kommen die **drei** Dimensionen Länge (L), Zeit (T) und Masse (M) vor.

| Schrittlänge $s$ | Geschwindigkeit $v$ | Beinlänge $L$ | Körpermasse $m$ | Erdbeschleunigung $g$ | Zahl der Grössen: 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| L | L/T | L | M | L / $T^2$ | Zahl der verschiedenen Dimensionen: 3 |

**Tabelle 2:** Vorbereitung der Dimensionsanalyse.

(b) Nach dem $\pi$-Theorem von Buckingham ist die Anzahl der Dimensionslosen Grössen, auf die sich das Problem reduzieren lässt gleich der **Anzahl der dimensionsbehafteten Grössen** minus die **Anzahl der verschiedenen auftretenden Dimensionen**.
Hier haben wir **fünf** dimensionsbehaftete Grössen, deren Dimensionen aus den **drei** Dimensionen Länge, Zeit und Masse bestehen. Wir können das Problem also mit **zwei** ($5 - 3 = 2$) dimensionslosen Grössen beschreiben.

(c) Wir können das Problem auf zwei Dimensionslose Grössen reduzieren. Es ist also möglich, die Daten aus Abbildung 4.1(a) in einem Graphen darzustellen, dessen Achsen diesen zwei dimensionslosen Grössen entsprechen. Es liegt auf der Hand, die Schrittlänge durch die Beinlänge zu teilen. Wir nennen diese Grösse $\sigma$ (dieser Name ist willkürlich gewählt).

$$\sigma = \frac{s}{L}, \quad [\sigma] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 1 \text{ (dimensionslos)} \tag{L.1}$$

Die Dimensionslose Grösse konstruieren wir ausgehend von der Geschwindigkeit. Um der Dimension *Zeit* loszuwerden können wir die Geschwindigkeit quadrieren und durch $g$ teilen:

$$\left[\frac{v^2}{g}\right] = \frac{\mathrm{L}^2/\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}/\mathrm{T}} = \mathrm{L} \tag{L.2}$$

Wir müssen also noch durch die Beinlänge teilen um eine dimensionslose Variable zu erhalten. Wir nennen sie $F$, weil sie Zufälligerweise der aus der Schiffbautechnik bekannter Froude-Zahl entspricht:

$$F = \frac{v^2}{gL} \qquad [F] = \frac{\mathrm{L}^2/\mathrm{T}^2}{\mathrm{L} \times \mathrm{L}/\mathrm{T}} = 1 \tag{L.3}$$

Die Körpermasse ist die einzige Grösse, in der die Dimension Masse auftritt. Sie lässt sich also nicht in eine dimensionslose Grösse einbauen. Streichen wir die Masse aus Tabelle 2, ändert sich die Aussage des Theorem von Buckingham nicht: das Problem lässt sich weiterhin auf zwei dimensionslose Grössen reduzieren. Entweder haben wir eine oder mehrere weiterere relevante Grössen übersehen, oder die Masse ist nicht relevant. Das letztere trifft zu, wie man leicht einsehen kann: die Fallgeschwindigkeit im freien Fall eines Objekts hängt nicht von dessen Masse ab, und wir haben Gehen als einen Fall auf einer Kreisbahn um den Fuss modelliert.

Bei diesem einfachen Problem gibt es keine andere Kombinationen der Problemvariablen und -parameter die zu dimensionslosen Grössen führen: alle andere Möglichkeiten sind Varianten von $\sigma$ und $F$ (Potenzen, Inverse dieser Grössen usw.).

(d) Wir stellen fest, dass die Achsen des Graphen in Abbildung 4.2 mit $\sigma$ und $\sqrt{F}$ beschriftet sind. Es sind die zwei dimensionslose Grössen, die das Problem vollständig beschreiben, falls wir bei der Dimensionsanalyse tatsächlich alle relevanten Grössen berücksichtigt haben. Wir sehen dass die Datenpunkte für alle Tiere auf der gleichen Linie liegen. Die Funktion $\sigma\sqrt(F)$ ist für das Problem universell, unsere Dimensionsanalyse ist vollständig. Wir lesen ab, dass $sigma$ eine affine Funktion von $\sqrt{F}$ ist, das heisst

$$\sigma(\sqrt{F}) = a \times F + b \tag{L.4}$$

Die Koeffizienten $a$ und $b$ können wir Abschätzen indem wir die Koordinaten zweier Punkten ablesen. Hier war es vor allem wichtig, die Beziehung $\sigma(\sqrt{F}) = a \times F + b$ zu erkennen. Für eien sehr grobe Abschätzung könne wir behaupten, dass die Punkte $(1, 2)$ und $(4, 6)$ auf der Geraden liegen. Dies ergibt $a = 4/3$ und $b = 2/3$. In der Praxis wäre der vollständigen Datensatz vorhanden, und Sie würden z.B. eine lineare Regression durchführen.

Um eine Funktion $s(v)$ zu erhalten lösen wir Gleichung L.4 nach $s$ auf:

$$\begin{aligned}
\sigma &= a \times F + b \\
\frac{s}{L} &= a \times \sqrt{\frac{v^2}{gL}} + b \\
s &= a \times L\sqrt{\frac{v^2}{gL}} + b \times L \\
s &= a \times v \times \sqrt{\frac{L}{g}} + b \times L
\end{aligned} \tag{L.5}$$

Wir haben das Problem vollständig gelöst durch geschickte Darstellung unserer Messwerte.

(e) Wir vermessen ein Tier, und stellen fest, dass die Beziehung $\sigma(\sqrt{F})$ nicht erfüllt ist. Diese wurde unter der Annahme, dass nur die Parameter $v$, $s$, $L$ und $g$ relevant sind hergeleitet. Der Schluss ist, dass diese Annahme nicht stimmt. Also ist ein weiterer Parameter relevant. Ein Beispiel wäre ein Mensch, der beim Laufen

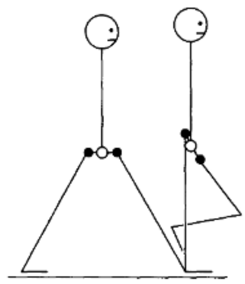

**Abbildung 4.3:** **(a)** Laufstil, bei dem die vertikale Bewegung des Schwerpunktes minimiert wird.

durch eine starke Bewegung der Hüfte seinen Schwerpunkt auf einer konstanten Höhe hält, wie in Abbildung 4.3 dargestellt. Diese Technik wird in der Sportart Racewalking verwendet. Wir müssten hier eine oder mehrere für die Hüftenbewegung relevante Grössen identifizieren, und die Dimensionsanalyse von vorne

Anfangen. Der Punkt bei $\sqrt{\frac{v^2}{Lg}} = 1$ und dem ensprechendem Wert von $s/L$ ist in Abbildung 4.4 eingezeichnet.

(f) Die Hüfte beschreibt eine Kreisbahn um den Fuss, wobei der Radius gleich der Beinlänge $L$ ist. Der Beschleunigungsvektor zeigt zum Fuss hin, und hat die Länge $v^2/L$. Die Beschleunigung kann nicht höher als die Erdbeschleunigung $g$ sein, den die einzige nach unten gerichtete Kraft, die der Mensch spürt die Schwerkraft ist.

$$v^2/L < g \Rightarrow \frac{v^2}{Lg} < 1 \tag{L.6}$$

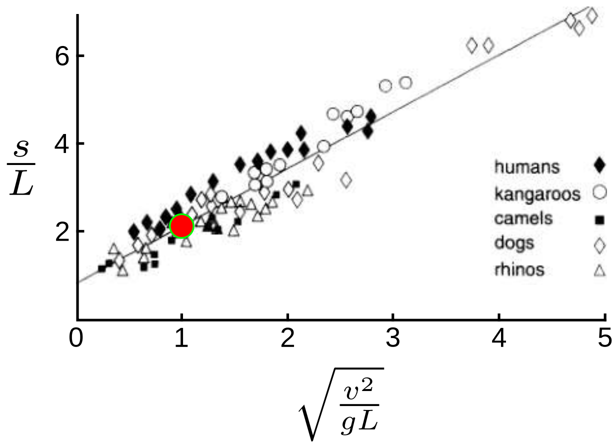


**Abbildung 4.4:** Der Punkt bei $\sqrt{\frac{v^2}{Lg}} = 1$ und dem ensprechendem Wert von $s/L$ ist in roter Farbe eingezeichnet.

Dieses Resultat gilt übrigens nicht nur für Menschen. Wir erwarten, das jedes Tier das die Beziehung $\sigma(F)$ erfüllt, bei dem Wert $\sqrt{\frac{v^2}{Lg}} = 1$ ins Rennen übergeht.

## Aufgabe 4.2. *Chronobiologie* *[††]*

Das Gebiet der Chronobiologie untersucht zeitliche Muster in biologischen Systemen. Viele dieser Vorgänge können näherungsweise durch **harmonische Oszillationen** beschrieben werden. Sie haben z. B. die periodischen Konzentrationsschwankungen der Cycline im Zellzyklus kennengelernt, ein bekanntes Beispiel aus der Biotechnologie ist der 'Repressilator'.

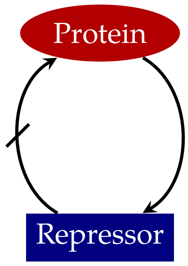


**Abbildung 4.5:** Vereinfachter *feedback-loop* eines Proteins über seinen Repressor.

Wir wollen in dieser Aufgabe eine Situation betrachten, in der ein Protein die Transkription und Translation seines eigenen Repressors anregt, siehe Abbildung 4.5.[1] Wir bezeichnen die Konzentration des Proteins als $c_{\mathrm{P}}$ und jene des Repressors als $c_{\mathrm{R}}$.

(a) Beschreiben Sie, wie diese Kopplung des Proteins an seinen eigenen Repressor zu einer oszillierenden Konzentration führen kann.

Im Gleichgewicht kompensieren sich Synthese und Abbau des Proteins und des Repressors bei den Konzentrationen $c^0_{\mathrm{P}}$ bzw. $c^0_{\mathrm{R}}$. Weichen die Konzentrationen leicht von diesem Gleichgewichtszustand ab, $c_{\mathrm{P,R}} = c^0_{\mathrm{P,R}} + \delta c_{\mathrm{P,R}}$, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta c_{\mathrm{P}})}{\mathrm{d}t} = -A \times \delta c_{\mathrm{R}} \,, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\delta c_{\mathrm{R}})}{\mathrm{d}t} = B \times \delta c_{\mathrm{P}} \,. \tag{1b}$$

Dabei sind $A > 0$ und $B > 0$ positive Konstanten.

(b) Erklären Sie die Bedeutung dieser Gleichungen in Worten.

(c) Welche Dimension haben $A$ und $B$?

(d) Leiten Sie eine harmonische Schwingungsgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2(\delta c_{\mathrm{P}})}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \times \delta c_{\mathrm{P}} \tag{2}$$

aus den Gleichungen (1) her.

*Hinweis. Leiten Sie dafür Gleichung* (L.16a) *nach $t$ ab und setzen Sie Gleichung* (L.16b) *ein.*

(e) Wir nehmen an, dass $A = B$ gilt. Berechnen Sie diese Konstante $A$, wenn die beobachtete Periode einer Schwingung $T \simeq 1\,\mathrm{h}$ beträgt.

*Hinweis. Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Zusammenhänge für $\omega$, $f$ und $T$ für harmonische Schwingungen.*

(f) Skizzieren Sie die Konzentrationen $c_{\mathrm{P}}$ und $c_{\mathrm{R}}$ als Funktion der Zeit, wenn diese leicht von den Gleichgewichtswerten abweichen.

[1] Tatsächlich ist dies eine relativ starke Vereinfachung. So sind bei der Regulation der Expression von Cyclinen zahlreiche Pathways, Transkriptionsfaktoren und Proteinkomplexe beteiligt.

Wir haben gesehen, dass wir unsere Resultate von Schwingungen in mechanischen Systemen auch auf biologische Prozesse anwenden können. Tatsächlich kann die hier vorgestellte Beschreibung von Proteinkonzentrationen auch auf andere Vorgänge, z. B. die Räuber–Beute-Beziehungen, übertragen werden.

(g*) Stellen Sie eine Analogie zwischen den Protein-Konzentrationen und den Populationen von Räubern und Beute auf. Beschreiben Sie diese Zusammenhänge mathematisch ähnlich wie in den Gleichungen (1).[2]

**Lösung.** *Wir verwenden hier bewusst eine vereinfachte Sprache und verwenden naive Begriffe wie Synthese und Abbau. Die Biologie kennt genauere Begriffe wie Translation, Transkription, Expression usw.*

(a) Wir betrachten ein Protein, und dessen Repressor (also ein anderes Protein was die Synthese des ersten unterdrückt, im Weiteren immer Repressor genannt). Hier ist die situation Speziell, weil die Synthese des Repressors durch das Vorhandensein des Proteins angeregt ist.

1. Wenn die Menge des Proteins steigt, steigt die Rate mit der das Repressor synthetisiert wird.
2. Je mehr Repressor vorhanden ist, desto schneller wird das Protein abgebaut.
3. Wenn die Konzentration des Repressors hoch genug steigt, wird das Protein schneller abgebaut als es synthetisiert wird. Dann gibt es wieder weniger von dem Protein, und damit wird auch weniger Repressor synthetisiert.
4. Sinkt die Konzentration des Proteins tief genug, so wird das Repressor schneller abgebaut als es erzeugt wird.
5. Somit gibt es nach einer Weile so wenig Repressor, dass das Protein wieder schneller synthetisiert als aufgebaut wird. Die Konzentration des Proteins steigt. Wir sind wieder in der Anfangssituation.

Wir haben hier einen periodischen Zyklus beschrieben, in dem die Proteinkonzentration abwechselnd steigt und sinkt. Dies ist eine Oszillation.

(b) **Gleichung L.16a:** Die Zeitliche Änderung der Abweichung des Konzentration des Proteins von ihrem Gleichgewichtswert ist Proportional zu der Abweichung der Konzentration des Repressors, und zwar mit einer negativer Proportionalitätskonstante. Dies entspricht tatsächlich dem Biologischen Prozess, den die Gleichung Modellieren soll: Je höher die Konzentration des Repressors, desto schneller wird das Protein Abgebaut. Falls die Konzentration des Repressors unterhalb ihres Gleichgewichtwertes liegt, so erhöht sich die Konzentration des Proteins.

**Gleichung L.16b:** Die Zeitliche Änderung der Abweichung des Konzentration

[2] Die genauen Zusammenhänge sind als Lotka–Volterra-Gleichungen bekannt und wesentlich komplizierter. Für den Fall, dass die Populationen nur wenig von den Gleichgewichtspopulationen abweichen, ist jedoch die hier beschriebene vereinfachte Darstellung ausreichend.

des Repressors von ihrem Gleichgewichtswert ist Proportional zu der Abweichung der Konzentration des Proteins mit einem positiver Proportionalitätskonstante. Dies entspricht auch dem Biologischen Prozess, den beschreiben wollen: Die Synthese des Repressors wird von dem Protein angeregt.

(c) Wir stellen eine Gleichung für die Dimensionen auf:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}(\delta c_\mathrm{P})}{\mathrm{d}t}\right] &= [-A \times \delta c_\mathrm{R}] \\
\frac{[d\delta c_\mathrm{P}]}{[dt]} &= [A][\delta c_\mathrm{R}] \\
\frac{[\delta c_\mathrm{P}]}{[t]} &= [A][\delta c_\mathrm{R}] \\
\frac{\text{Konzentration}}{\mathrm{T}} &= [A] \times \text{Konzentration} \\
\frac{1}{\mathrm{T}} &= [A]
\end{aligned} \tag{L.7}$$

Die Dimensionen Konzentration kürzen sich. Infinitisemiale Elemente haben die gleiche Dimension wie die entsprechende Grösse (z.B. $[dt]$=$[t]$=T, eine Zeit).

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}(\delta c_\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right] &= [B \times \delta c_\mathrm{P}] \\
\frac{[d\delta c_\mathrm{R}]}{[dt]} &= [B][\delta c_\mathrm{P}] \\
\frac{[\delta c_\mathrm{R}]}{[t]} &= [B][\delta c_\mathrm{P}] \\
\frac{\text{Konzentration}}{\mathrm{T}} &= [A] \times \text{Konzentration} \\
\frac{1}{\mathrm{T}} &= [B]
\end{aligned} \tag{L.8}$$

Die Konstanten $A$ und $B$ haben also die Dimension einer inversen Zeit, d.h. einer Frequenz.

(d) Hier Arbeiten wir nach dem gleichen Prinzip, das Ihnen aus dem Lösen linearer Gleichungssysteme bekannt ist. Wir haben ein System **zweier** linearer Differentialgleichungen mit **zwei** Unbekannten, nämlich die Funktionen $\delta c_\mathrm{P}$ und $\delta c_\mathrm{R}$. Dieses System ist also lösbar. Wir Kombinieren es zu einer Gleichung für eine Variable. Hierzu setzen wir eine der Gleichungen in die andere ein. Zusätzlich zur Möglichkeit, beide Seiten einer Gleichung mit einem Faktor zu multiplizieren, können wir Differentialgleichungen ableiten oder integrieren.

Wir wollen den Ausdruck $\frac{\mathrm{d}(\delta c_\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}$ in Gleichung L.16b mit einem Ausdruck, der von

$c_P$ abhängt substituieren. Wir leiten hierzu Gleichung L.16a nach t ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathrm{d}(\delta c_P)}{\mathrm{d}t}\right] &= \frac{d}{dt}\left[-A \times \delta c_R\right] \\ \frac{\mathrm{d}^2(\delta c_P)}{\mathrm{d}t^2} &= -A \times \frac{\mathrm{d}(\delta c_R)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}(\delta c_R)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}^2(\delta c_P)}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned} \tag{L.9}$$

Dies setzen wir in Gleichung L.16b ein:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}^2(\delta c_P)}{\mathrm{d}t^2} &= B \times \delta c_P \\ \frac{\mathrm{d}^2(\delta c_P)}{\mathrm{d}t^2} &= -AB \times \delta c_P \end{aligned} \tag{L.10}$$

Dies ist die aus der Vorlesung bekannte Gleichung des harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega^2 = AB$.

(e) Wir haben in der Teilaufgabe (d) gefunden, dass die Kreisfrequenz der Schwingung $\omega^2 = AB$ ist. Unter der Annahme $A = B$ haben wir also $\omega^2 = A^2$, also $\omega = A$ (die Winkelfrequenz ist Positiv). Wir lösen diese Gleichung für A nach der Periode T auf:

$$\begin{aligned} \omega &= A \\ \frac{2\pi}{T} &= A \\ A &= \frac{2\pi}{1\,\mathrm{h}} \\ A &= \frac{2\pi}{3600\,\mathrm{s}} \\ A &= 1.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned} \tag{L.11}$$

(f) Die Abweichung der Proteinkonzentration aus ihrem Gleichgewichtswert $\delta c_P$ ist eine harmonischen Schwingung mit einer Amplitude, die wir z.B. $\Delta c$ nennen :

$$\delta c_P(t) = \Delta c \sin(\omega t)\,. \tag{L.12}$$

Wir haben die Phase willkürlich gewählt. Die gesamte Proteinkonzentration ist also

$$c_P(t) = c_P^0 + \Delta c \sin(\omega t) \tag{L.13}$$

Um einen Audruck für die Abweichung der Repressorkonzentration zu finden verwenen wir Gleichung L.16a:

$$\delta c_R(t) = -\frac{1}{A}\delta c_R(t) = -\frac{1}{A}\omega \Delta c \cos(\omega t) \tag{L.14}$$

Die gesamte Repressorkonzentration ist also

$$c_R(t) = c_R^0 - \Delta c \frac{\omega}{A} \cos(\omega t) \tag{L.15}$$

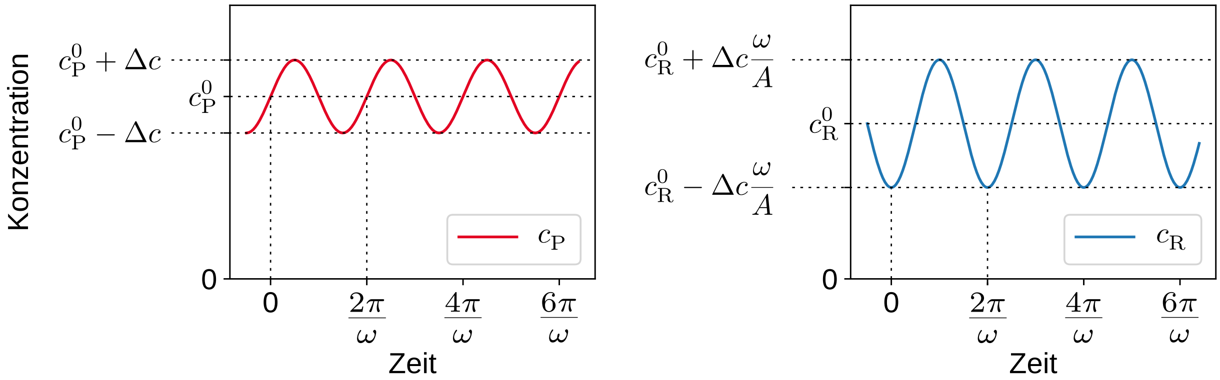


**Abbildung 4.6:** Konzentrationen $c_P(t)$ und $c_R(t)$ als Funktion der Zeit. Beachten Sie vor allem die Phase der Kurven. Die Zahlenwerte aller Parameter wurden willkürlich gewählt. Es wäre auch durchaus möglich, dass die Konzentration des Proteins stärker oszilliert als die des Repressors.

Beim Skizzieren beider Konzentrationen beachten wir, dass alle hier auftretenden Konstanten positiv sind. Die Graphen sind in Abbildung 4.6 zu sehen.

(g) Die Kaninchen vermehren sich mit einer gewissen Rate. Wenn es viele Kaninchen gibt können sich Wölfe schnell vermehren weil sie viel Nahrung zur Verfügung haben. Irgendwann gibt es so viele Wölfe dass sie Kaninchen schneller aufessen als diese geboren werden, dann sinkt die Kaninchenpopulation. Die Wölfe verhungern und sterben ab. Damit können sich Kaninchen wieder erfolgreich vermehren, die Kaninchenpopulation steigt. Ein neuer Zyklus fängt an. Die Gleichungen, die diese zwei gekoppelte Populationen beschreiben haben die gleiche Form wie Gleichungen L.16a und L.16b. Seien $\delta K$ die Abweichung der Zahl der Kaninchen und $\delta W$ die Abweichung der Zahl der Wölfe von deren Gleichgewichtswerten, $A$ und $B$ seien positive Konstanten:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -A \times \delta W \,, \tag{L.16a}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = B \times \delta K \,. \tag{L.16b}$$