

# Lösungsvorschläge zur Ferienserie 14

## Aufgabe 1

Es handelt sich um ein Linienintegral eines Vektorfeldes **in der Ebene** entlang einer **geschlossenen** Kurve. Wenn wir die Komponenten von  $\vec{F}$  durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

beschreiben, dann besagt die Formel von Gauss-Green, dass

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA,$$

wobei  $A$  die durch die Kurve  $C$  eingeschlossene Gebiet ist. Auf der rechten Seite steht ein normales Doppelintegral. In unserem Fall ist

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 2x - 1$$

und  $A$  ist die durch  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  begrenzte Fläche, die man schreiben kann als

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 2x - 1 \, dy dx \\ &= \int_0^2 \left( 2xy - y \Big|_{x^2}^4 \right) dx = \int_0^2 8x - 4 - 2x^3 + x^2 \, dx \\ &= 4x^2 - 4x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Wir haben berechnet

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{8}{3},$$

was mit dem direkt berechneten Resultat in Aufgabe 2 Serie 13 übereinstimmt.

## Aufgabe 2

- a) Eine mögliche Parametrisierung der Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5+t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 10.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -5+t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{10} 0 \, dt = 0.$$

- b) Es gilt  $\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = -1 - 1 = -2$  und somit ist das Doppelintegral

$$\iint_A -2 \, dx \, dy = -2 \cdot \text{Fläche von } A = -2 \cdot \frac{25\pi}{2} = -25\pi.$$

- c) Wenn wir die Kurven  $C$  und  $C'$  aus Teilaufgabe a) und b) zusammenfügen, erhalten wir eine geschlossene Kurve  $\tilde{C}$  welche die Halbkreisfläche  $A$  aus Teilaufgabe b) begrenzt. Mit der Formel von Gauss-Green gilt somit

$$\oint_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA}_{=-25\pi \text{ aus b)}}.$$

Da die Kurve  $\tilde{C}$  aus  $C$  und  $C'$  zusammengesetzt ist, gilt für die linke Seite

$$\oint_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{=0 \text{ aus b)}} + \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Somit schliessen wir direkt

$$\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -25\pi.$$

**Alternativ:** Das Kurvenintegral können wir auch direkt ausrechnen. Eine mögliche Parametrisierung der Kurve  $C'$  ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos(t) \\ 5 \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 5 \sin(t) \\ -5 \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) \\ 5 \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -25.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -25 \, dt = -25\pi.$$

### Aufgabe 3

- a) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve  $C$  in drei Abschnitte  $C = C_1 + C_2 + C_3$  und parametrisieren die Teilkurven einzeln

$$\begin{aligned} C_1 : \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} & \text{mit } 0 \leq t \leq 1 \\ C_2 : \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} & \text{mit } 0 \leq t \leq 1 \\ C_3 : \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} & \text{mit } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \\ C_2 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 1 \\ C_3 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \begin{pmatrix} (1-t)^{\frac{5}{3}} \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}(1-t)^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{5}{3}(1-t)^{\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 0 \, dt = 0 \\ \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 1 \, dt = 1 \\ \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 -\frac{5}{3}(1-t)^{\frac{5}{3}} \, dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{8} (1-t)^{\frac{8}{3}} \Big|_0^1 = -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus.

Mit  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  folgt

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA = \int_0^1 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} (2x - x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{5}{3}} \, dx = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

- b) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve  $C$  in zwei Abschnitte  $C = C_1 + C_2$  und parametrisieren die Teilkurven

einzeln

$$C_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2+t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 4$$

$$C_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 4-t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } -2 \leq t \leq 2.$$

Somit gilt

$$C_1 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} (-2+t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = (-2+t)^2$$

$$C_2 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -4.$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (-2+t^2) dt = \int_0^4 4 - 4t + t^2 dt = \frac{16}{3}$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^2 -4 dt = -16.$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{16}{3} - 16 = -\frac{32}{3}.$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus.

Mit  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  folgt

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} -1 dy dx$$

$$= \int_{-2}^2 x^2 - 4 dx = -\frac{32}{3}.$$

- c) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve  $C$  in drei Abschnitte  $C = C_1 + C_2 + C_3$  und parametrisieren die Teilkurven einzeln

$$C_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2$$

$$C_3 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-2t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$C_1 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

$$C_2 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = t^3$$

$$C_3 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2(1-t)^2 \\ 8(1-t)^5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -2(1-t)^2 - 16(1-t)^5.$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 0 \, dt = 0 \\ \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 t^3 \, dt = 4 \\ \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 -2(1-t)^2 - 16(1-t)^5 \, dt = \frac{2}{3}(1-t)^3 + \frac{8}{3}(1-t)^6 \Big|_0^1 = -\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus.

Mit  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  folgt

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left. \frac{1}{2}xy^4 - xy \right|_0^{2x} dx = \int_0^1 (8x^5 - 2x^2) \, dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

a) Die Parametrisierung ist schon gegeben

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Somit gilt eingesetzt in das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) \\ -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

- b) Sei  $C_1$  der erste Abschnitt, also die Kurve von  $(1, 0, 0)$  nach  $(0, 1, 0)$ . Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -t.$$

Das Kurvenintegral entlang  $C_1$  ist also

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 t \, dt = -\frac{1}{2}.$$

Sei  $C_2$  der zweite Abschnitt, also die Kurve von  $(0, 1, 0)$  nach  $(0, 0, 1)$ . Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0.$$

Das Kurvenintegral entlang  $C_2$  ist also

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Sei  $C_3$  der dritte Abschnitt, also die Kurve von  $(0, 0, 1)$  zurück nach  $(1, 0, 0)$ . Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ t(1-t) \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -t^2.$$

Das Kurvenintegral entlang  $C_3$  ist also

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 -t^2 \, dt = -\frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

c) Eine mögliche Parametrisierung der Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 + 10t \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 - 10t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -20.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 20 \, dt = 20.$$

## Aufgabe 5

a) Wir nennen die 5 Teilflächen  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ .

i) Sei  $A_1$  der Boden  $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 2, 0), (0, 2, 0)$ . Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq 2.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $t_u \times t_v$  steht zwar senkrecht auf dem Boden  $A_1$ , zeigt aber in den Körper  $V$  hinein. Somit rechnen wir mit  $-t_u \times t_v$  weiter. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 0.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^2 0 \, du \, dv = 0.$$

ii) Sei  $A_2$  das vordere Dreieck  $(2, 0, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 1)$ . Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq \frac{u}{2}.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $t_u \times t_v$  steht senkrecht auf  $A_2$  und zeigt auch nach aussen. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot (t_u \times t_v) = 2.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}} 2 \, dv du = 2.$$

- iii) Sei  $A_3$  das hintere Dreieck  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 1)$ . Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq \frac{u}{2}.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $t_u \times t_v$  steht senkrecht auf dem Dreieck  $A_3$ , zeigt aber in den Körper  $V$  hinein. Somit rechnen wir mit  $-t_u \times t_v$  weiter. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 0.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}} 0 \, dv du = 0.$$

- iv) Sei  $A_4$  die senkrechte Seitenfläche  $(0, 2, 0)$ ,  $(2, 2, 0)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(0, 2, 1)$ . Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq 1.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Der Vektor  $t_u \times t_v$  steht senkrecht auf der Fläche  $A_4$ , zeigt aber in den Körper  $V$  hinein. Somit rechnen wir mit  $-t_u \times t_v$  weiter. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ 2v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 2.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_4} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^1 2 \, dv du = 4.$$

- v) Sei  $A_5$  die schräge Deckfläche  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(0, 2, 1)$ . Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{v}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq 2.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $t_u \times t_v$  steht senkrecht auf der Fläche  $A_5$  und zeigt auch effektiv vom Körper  $V$  nach aussen. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} \cdot (t_u \times t_v) = \frac{v}{2}.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_5} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^2 \frac{v}{2} \, dv du = 2.$$

Insgesamt finden wir

$$\oiint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 + 2 + 0 + 4 + 2 = 8.$$

- b) Die Divergenz von  $\vec{F}$  ist in unserem Fall

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Wir müssen für das Dreifachintegral also die Funktion 4 über dem Volumen  $V$  integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV &= 4 \iiint_V dV \\ &= 4 \cdot \text{Volumen des Körpers} \\ &= 4 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 8. \end{aligned}$$

Das Resultat stimmt in der Tat mit dem Resultat in a) überein.

## Aufgabe 6

Es handelt sich um ein Oberflächenintegral eines Vektorfeldes (im Raum) über einer **geschlossenen** Fläche von innen nach aussen orientiert. Es kann somit der Satz von Gauss verwendet werden. In unserem Fall ist die Divergenz

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 1 - 2z = 2 - 2z.$$

Der Körper  $K$  lässt sich am einfachsten durch Zylinderkoordinaten beschreiben

$$\{(r, \phi, z) \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq \sqrt{z}\}.$$

Wir erhalten (beachten, dass in Zylinderkoordinaten aus  $dV$  ein  $r \, dr \, d\phi \, dz$  wird !!)

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} (2 - 2z) r \, dr \, dz \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (2 - 2z) \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} dz \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (1 - z) z \, dz \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^4 d\phi = -\frac{40}{3} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{80}{3} \pi, \end{aligned}$$

was mit dem direkt berechneten Resultat in Aufgabe 4 Serie 13 übereinstimmt.

## Aufgabe 7

Die Fläche  $A$  (Kegel) ist geschlossen. Wir können also den Satz von Gauss anwenden. In diesem Fall ist die Divergenz

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2 + 3 + 1 = 6.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV \\ &= 6 \iiint_V dV = 6 \cdot \text{Volumen des Kegels} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 9 \cdot 3 = 54\pi \end{aligned}$$