Musterlösung

Es gibt verschiedene Version der Prüfung. Die Aufgaben sind jeweils in einer anderen Reihenfolge.

Gruppe A

1. a) **Richtig**. Die Nullhypothese wird genau dann verworfen, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

   b) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

   c) **Falsch**. Wenn man den Fehler 1. Art verkleinert, vergrössert sich der Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn der Fehler 2. Art zunimmt , dann nimmt der Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) ab .

   d) **Richtig**.

2. a) **Falsch**. Der p-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der p-Wert nicht kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann nicht verworfen werden.

   b) **Richtig**. Per Definition des p-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wa. p.

   c) **Richtig**. Per Definition umfasst ein zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit einer Binomialverteilung alle Werte p_0, für die ein zweiseiter Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ nicht verwirft.

   d) **Richtig**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Wenn sich die Produktionsbedingungen nicht ändern, sollte der Term $\frac{x}{n}$ in etwa konstant bleiben. Die Breite des Vertrauensintervalls ist also im Wesentlichen durch den Term $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bestimmt. Wenn wir die Breite des 95%-Vertrauensintervalls halbieren wollen, brauchen wir also vier mal so viele Beobachtungen.

3. a) **Richtig**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

   b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser.

   c) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich umfasst alle 'unplausiblen' Werte, wenn man die Nullhypothese annimmt. Dabei quantifiziert das Signifikanzniveau, was 'unplausibel' genau bedeutet. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, bedeutet das, dass man nur 'sehr unplausible' Werte im Verwerfungsbereich aufnimmt. D.h., der Verwerfungsbereich wird tendenziell kleiner (entsprechend umgekehrt, wenn man das Signifikanzniveau vergrössert).

   d) **Richtig**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

4. a) **Falsch**.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.4$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 10, p = 0.4)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 8) \approx 0.012$.

c) **Richtig**. Wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese grösser als ursprünglich geplant ist, gibt es nun eine grössere Wahrscheinlichkeit eine Beobachtung im Verwerfungsbereich zu beobachten, falls die Alternativhypothese stimmt (beachten Sie, dass bei der Form der Alternativhypothese $H_A : p > p_0$ der Verwerfungsbereich am 'rechten' Ende der Verteilung liegt). D.h., die Macht nimmt tendenziell zu und die geforderte Macht kann mit den neuen Parametern eingehalten werden.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 28, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 4) \approx 1$.

5. a) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest mit Stichprobengrösse n hat die Form $\{0, \dots, c_u\} \cup \{c_o, \dots, n\}$. Wir suchen c_u, so dass $P_{H_0}(X \leq c_u) = \sum_{k=0}^{c_u} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$, und c_o so dass $P_{H_0}(X \geq c_o) = \sum_{k=c_o}^{15} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$.

b) **Falsch**. Unter H_0 gilt, dass $P(X \in \{8, 9, 10\}) = 0.0015903864$, $P(X \in \{6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.0473489874$ und dass $P(X \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.1502683326$. Deswegen ist der Verwerfungsbereich $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

c) **Richtig**. Wir berechnen

$$P_{H_0}(X \in \{0, \dots, 5\}) = P_{H_0}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 0.7^k (1-0.7)^{(20-k)} = 0.00004294002195359172 \leq 0.01\%$$

und

$$P_{H_0}(X \in \{0, \dots, 6\}) = P_{H_0}(X \leq 6) = 0.00026104700705946732 > 0.01\%.$$

Es handelt sich bei der in der Aufgabe gegebenen Menge um den Verwerfungsbereich. Also können wir die Nullhypothese verwerfen, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \dots, 5\}$ annimmt. Da in der Aufgabenstellung nicht direkt nach dem Verwerfungsbereich gefragt wird, könnte man auch die P-Werte aller Werte in der gegebenen Menge berechnen, d.h. $P_{H_0}(X \leq 0), P_{H_0}(X \leq 1) \dots, P_{H_0}(X \leq 5)$ und feststellen, dass sie alle kleiner als das gegeben Signifikanzniveau sind.

d) **Richtig**. Das ist genau die Definition des P-Wert.

6. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.488$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 9.28145$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.488 \cdot 3.16228}{9.28145} \approx 0.507$.

b) **Richtig**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0.95} \approx 1.833$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -1.833] \cup [1.833; \infty]$.

c) **Richtig**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **Falsch**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 10$, $\alpha = 0.01$, $\overline{x}_n \approx 1.488$, $\hat{\sigma}_X \approx 9.28145$ und $t_{9;0.995} = 3.250$ (Wert aus Tabelle). Damit ergibt sich als 99%-Vertrauensintervall: $[-8.051; 11.027]$.

7. a) **Falsch**. Das arithmetische Mittel von n unabhängigen, gleichverteilten Messungen ist zuverlässiger als eine Einzelmessung. Genauer gesagt: Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels ist um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als die einer Einzelmessung. In diesem Beispiel ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels also $\frac{0.2}{\sqrt{16}} = 0.05$.

b) **Richtig**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0,1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0,1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0,1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

c) **Falsch**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. $P(Z \leq 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

d) **Richtig**. Der p-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_{19}$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 1.729$. Der p-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den p-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 1.729)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 19$): $P(T \leq 1.729) \approx 0.95$. Für den p-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.95) \approx 0.1$.

8. a) **Richtig**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen für die beiden Gruppen berechnen: $\hat{\sigma}_x \approx 6.51411$ und $\hat{\sigma}_y \approx 5.89798$. Daraus lässt sich die gepoolte Varianz berechnen: $S^2_{pool} = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_2-1)\hat{\sigma}_y^2}{n_1+n_2-2} \approx 39.375$.

b) **Falsch**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen berechnen: $\overline{x} = 6.54429$, $\overline{y} = 11.598$, $S^2_{pool} = 39.375$. Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{pool}\cdot\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx -1.375$.

c) **Falsch**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{10;0.995} \approx 3.169$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -3.169] \cup [3.169; \infty]$.

d) **Falsch**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 14$. Angenommen $T \sim t_{14}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 14$): $t_{0.99} = 2.624$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.624$ der p-Wert $p = 2 \cdot 0.01 = 0.02$.

9. a) **Falsch**. Man misst die beiden Router jeweils im gleichen Haus unter den gleichen Bedingungen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) **Richtig**. Verschiedene Personen haben an beiden Experimenten mit oder ohne Freisprechanlage mitgemacht. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) **Falsch**. Die Ratten haben nicht je 2 Medikamente erhalten, sondern entweder Antibiotika 1 oder Antibiotika 2. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) **Falsch**. Jede Person macht beide Teste.

10. a) **Falsch**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Uniformen Verteilung.

b) **Richtig**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Linksschiefen Verteilung.

c) **Richtig**. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) **Richtig**. Der Plot zeigt , dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

11. a) **Falsch**. Der Standard-Fehler des Schätzwertes ist 0.264 .

b) **Falsch**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das exakte 95%-Vertrauensintervall ist c das 97.5%-Quantil der t-Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden und muss in der Tabelle der t-Verteilung nachgeschaut werden. Mit der Tabelle erhält man $c = 2.037$. Also ergibt sich für die Untergrenze der Wert 0.596.

c) **Richtig**. Der p-Wert für den (zweiseitigen) Test $H_0 : \beta_0 = 0$ ist 0 (s. erste Zeile und letzte Spalte in der Tabelle). Dieser Wert ist kleiner als 0.05. Daher kann die Nullhypothese verworfen werden.

d) **Falsch**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 26.886.

12. a) **Richtig**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.856.

b) **Falsch**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alle Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

c) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 0.799 \cdot x$. Wenn man $x = 2.402$ einsetzt, erhält man $y = 3.053$.

d) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 4.227 \cdot x$. Wenn man $y = 2.229$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.259$.

13. a) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.55 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

b) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.48 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

c) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.13 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) **Richtig**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.62 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

14. a) **Richtig**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten log-odds ist also -1.0996 .

b) **Falsch**. Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds sind monoton verknüpft. D.h., wenn sich eine der drei Grössen erhöht, erhöhen sich auch die anderen beiden Grössen. Wenn sich eine der drei Grössen erniedrigt, erniedrigen sich auch die anderen beiden Grössen.

c) **Richtig**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 3,2 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 2 Zahlen, also gibt es 2 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also $\frac{1}{3}$. Gemäss den Definitionen sind die odds daher 0.5 und die log-odds -0.693 .

d) **Falsch**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

15. a) **Richtig**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 0.75$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.25$.

b) **Richtig**. Gesucht ist $P(A|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $P(A^c|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0$.

16. a) **Falsch**. Die Situation entspricht dem zufälligen Ziehen von Bällen aus einer Urne: Wir haben $7+5=12$ Bälle, 5 davon sind markiert. Nun ziehen wir zufällig und ohne Zurücklegen 4 Bälle und sind daran interessiert, wie viele markierte Bälle wir gezogen haben. Diese Verteilung entspricht genau der Hypergeometrischen Verteilung.

b) **Falsch**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

c) **Falsch**. Weil die Würfe unabhängig sind, gilt $P(KKZ) = P(K)P(K)P(Z) = p^2(1-p) = p^2 - p^3$. Um das Maximum zu bestimmen, leiten wir nach p ab und setzen die Ableitung gleich null: $\frac{d}{dp}P(KKZ) = 2p - 3p^2 = p(2-3p) = 0$. Der Ausdruck wird null, wenn $p = 0$ oder wenn $p = \frac{2}{3}$. Die Lösung $p = 0$ scheidet aus, weil wir dann niemals "Kopf" beobachten würden, es aber zweimal beobachtet wurde. Also muss die Lösung $p = \frac{2}{3}$ sein. (Übrigens: In diesem Fall ist das maximieren von $\log(P(KKZ))$ ein klein wenig komplizierter als das maximieren von $P(KKZ)$; weil beide Wege zum gleichen Ergebnis führen, habe ich mich der Einfachheit halber entschieden in dieser Aufgabe $P(KKZ)$ zu maximieren).

d) **Richtig**. Die Summe von zwei unabhängigen Poissonverteilungen ist wieder eine Poissonverteilung wobei sich die Parameter addieren.

17. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Es kann sein, dass dieser Wert keiner Beobachtung in der Stichprobe entspricht.

b) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Dieser Wert kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe sein.

c) **Falsch**. Angenommen die Stichprobengrösse ist n. Der Median ist das $\alpha = 50\%$-Quantil. Gemäss der Formel aus unserer Vorlesung (Kap. 3.4.1) ist der Median eine Zahl aus der Stichprobe, wenn $\alpha \cdot n$ keine ganze Zahl ist. Falls $\alpha \cdot n$ jedoch eine ganze Zahl ist, dann ist der Median ein Mittelwert aus zwei Beobachtungen aus der Stichprobe.

d) **Falsch**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist positiv . Also ist auch die Korrelation positiv .

18. a) **Richtig**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -2.4$ und $b = 2.4$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -2.4 + 2.4 \cdot (-2.9) \approx -9.36$.

b) **Falsch**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = -1$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 1 \cdot 0.8 \approx 0.8$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)}$ mit $b = -2.7$ und $\sigma_X \approx 0.894427$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 2.7 \cdot 0.894427 \approx 2.415$.

d) **Falsch**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -2.7$ und $b = 1.6$. Daraus ergibt sich $q_Y = -2.7 + 1.6 \cdot (-9.9) \approx -18.54$.

19. a) **Falsch**.

b) **Richtig**. $S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma_F^2)$

c) **Falsch**. Für grosse Stichprobengrössen n wird die Approximation besser.

d) **Richtig**. Definiere die Zeit, solange die $i-$te Gaskartusche noch Gas enthält, in Stunden als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 1h$ und die Varianz $Var[S_i] = 0.1^2$. Die Gesamtbrenndauer von $n = 21$ Gaskartuschen kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{21} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 1, n \cdot 0.1^2) = \mathcal{N}(21, 0.21)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 20h) &= P\left(\frac{S-21}{\sqrt{0.21}} > \frac{20-21}{\sqrt{0.21}}\right) \\ &= P(Z > -2.1822) = P(Z \leq 2.1822) \\ &\approx 0.985 > 0.95. \end{aligned}$$

20. **a)** **Richtig**. Aus dem Boxplot lässt sich erkennen, dass die Verteilung rechtsschief ist. Das arithmetische Mittel ist daher grösser als der Median.

b) **Falsch**. Die Plots können von den selben Daten stammen. Ein Anhaltspunkt hierfür ist, dass die extremen Intervalle des Histograms in Plot A mit den grössten und kleinsten Datenpunkten in Plot D vereinbar sind.

c) **Falsch**. Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine kleinere Varianz als die Standardnormalverteilung, wie anhand der Steigung zu sehen ist.

d) **Richtig**. Der Median ist kleiner als der Erwartungswert.

Gruppe B

1. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.488$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 9.28145$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.488 \cdot 3.16228}{9.28145} \approx 0.507$.

b) **Richtig**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0.95} \approx 1.833$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -1.833] \cup [1.833; \infty]$.

c) **Richtig**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **Falsch**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 10$, $\alpha = 0.01$, $\overline{x}_n \approx 1.488$, $\hat{\sigma}_X \approx 9.28145$ und $t_{9;0.995} = 3.250$ (Wert aus Tabelle). Damit ergibt sich als 99%-Vertrauensintervall: $[-8.051; 11.027]$.

2. a) **Falsch**. Das arithmetische Mittel von n unabhängigen, gleichverteilten Messungen ist zuverlässiger als eine Einzelmessung. Genauer gesagt: Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels ist um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als die einer Einzelmessung. In diesem Beispiel ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels also $\frac{0.2}{\sqrt{16}} = 0.05$.

b) **Richtig**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0,1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0,1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0,1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

c) **Falsch**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. $P(Z \leq 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

d) **Richtig**. Der p-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_{19}$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 1.729$. Der p-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den p-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 1.729)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 19$): $P(T \leq 1.729) \approx 0.95$. Für den p-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.95) \approx 0.1$.

3. a) **Richtig**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen für die beiden Gruppen berechnen: $\hat{\sigma}_x \approx 6.51411$ und $\hat{\sigma}_y \approx 5.89798$. Daraus lässt sich die gepoolte Varianz berechnen: $S^2_{pool} = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_2-1)\hat{\sigma}_y^2}{n_1+n_2-2} \approx 39.375$.

b) **Falsch**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen berechnen: $\overline{x} = 6.54429$, $\overline{y} = 11.598$, $S^2_{pool} = 39.375$. Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{pool} \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx -1.375$.

c) **Falsch**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{10;0.995} \approx 3.169$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -3.169] \cup [3.169; \infty]$.

d) **Falsch**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 14$. Angenommen $T \sim t_{14}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 14$): $t_{0.99} = 2.624$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.624$ der p-Wert $p = 2 \cdot 0.01 = 0.02$.

Gruppe B

4. a) **Falsch**. Man misst die beiden Router jeweils im gleichen Haus unter den gleichen Bedingungen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) **Richtig**. Verschiedene Personen haben an beiden Experimenten mit oder ohne Freisprechanlage mitgemacht. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) **Falsch**. Die Ratten haben nicht je 2 Medikamente erhalten, sondern entweder Antibiotika 1 oder Antibiotika 2. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) **Falsch**. Jede Person macht beide Teste.

5. a) **Falsch**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Uniformen Verteilung.

b) **Richtig**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Linksschiefen Verteilung.

c) **Richtig**. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) **Richtig**. Der Plot zeigt , dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

6. a) **Falsch**. Der Standard-Fehler des Schätzwertes ist 0.264 .

b) **Falsch**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das exakte 95%-Vertrauensintervall ist c das 97.5%-Quantil der t-Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden und muss in der Tabelle der t-Verteilung nachgeschaut werden. Mit der Tabelle erhält man $c = 2.037$. Also ergibt sich für die Untergrenze der Wert 0.596.

c) **Richtig**. Der p-Wert für den (zweiseitigen) Test $H_0 : \beta_0 = 0$ ist 0 (s. erste Zeile und letzte Spalte in der Tabelle). Dieser Wert ist kleiner als 0.05. Daher kann die Nullhypothese verworfen werden.

d) **Falsch**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 26.886.

7. a) **Richtig**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.856.

b) **Falsch**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alle Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

c) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 0.799 \cdot x$. Wenn man $x = 2.402$ einsetzt, erhält man $y = 3.053$.

d) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 4.227 \cdot x$. Wenn man $y = 2.229$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.259$.

8. a) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.55 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

b) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.48 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

c) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.13 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) **Richtig**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.62 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

9. a) **Richtig**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten log-odds ist also -1.0996 .

b) **Falsch**. Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds sind monoton verknüpft. D.h., wenn sich eine der drei Grössen erhöht, erhöhen sich auch die anderen beiden Grössen. Wenn sich eine der drei Grössen erniedrigt, erniedrigen sich auch die anderen beiden Grössen.

c) **Richtig**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 3,2 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 2 Zahlen, also gibt es 2 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also $\frac{1}{3}$. Gemäss den Definitionen sind die odds daher 0.5 und die log-odds -0.693 .

d) **Falsch**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

10. a) **Richtig**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 0.75$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.25$.

b) **Richtig**. Gesucht ist $P(A|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $P(A^c|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0$.

11. a) **Falsch**. Die Situation entspricht dem zufälligen Ziehen von Bällen aus einer Urne: Wir haben $7+5 = 12$ Bälle, 5 davon sind markiert. Nun ziehen wir zufällig und ohne Zurücklegen 4 Bälle und sind daran interessiert, wie viele markierte Bälle wir gezogen haben. Diese Verteilung entspricht genau der Hypergeometrischen Verteilung.

b) **Falsch**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

c) **Falsch**. Weil die Würfe unabhängig sind, gilt $P(KKZ) = P(K)P(K)P(Z) = p^2(1-p) = p^2 - p^3$. Um das Maximum zu bestimmen, leiten wir nach p ab und setzen die Ableitung gleich null: $\frac{d}{dp}P(KKZ) = 2p - 3p^2 = p(2-3p) = 0$. Der Ausdruck wird null, wenn $p = 0$ oder wenn $p = \frac{2}{3}$. Die Lösung $p = 0$ scheidet aus, weil wir dann niemals "Kopf" beobachten würden, es aber zweimal beobachtet wurde. Also muss die Lösung $p = \frac{2}{3}$ sein. (Übrigens: In diesem Fall ist das maximieren von $\log(P(KKZ))$ ein klein wenig komplizierter als das maximieren von $P(KKZ)$; weil beide Wege zum gleichen Ergebnis führen, habe ich mich der Einfachheit halber entschieden in dieser Aufgabe $P(KKZ)$ zu maximieren).

d) **Richtig**. Die Summe von zwei unabhängigen Poissonverteilungen ist wieder eine Poissonverteilung wobei sich die Parameter addieren.

12. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Es kann sein, dass dieser Wert keiner Beobachtung in der Stichprobe entspricht.

b) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Dieser Wert kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe sein.

c) **Falsch**. Angenommen die Stichprobengrösse ist n. Der Median ist das $\alpha = 50\%$-Quantil. Gemäss der Formel aus unserer Vorlesung (Kap. 3.4.1) ist der Median eine Zahl aus der Stichprobe, wenn $\alpha \cdot n$ keine ganze Zahl ist. Falls $\alpha \cdot n$ jedoch eine ganze Zahl ist, dann ist der Median ein Mittelwert aus zwei Beobachtungen aus der Stichprobe.

d) **Falsch**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist positiv . Also ist auch die Korrelation positiv .

13. a) **Richtig**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -2.4$ und $b = 2.4$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -2.4 + 2.4 \cdot (-2.9) \approx -9.36$.

b) **Falsch**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = -1$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 1 \cdot 0.8 \approx 0.8$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)}$ mit $b = -2.7$ und $\sigma_X \approx 0.894427$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 2.7 \cdot 0.894427 \approx 2.415$.

d) **Falsch**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -2.7$ und $b = 1.6$. Daraus ergibt sich $q_Y = -2.7 + 1.6 \cdot (-9.9) \approx -18.54$.

14. a) **Falsch**.

b) **Richtig**. $S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma_F^2)$

c) **Falsch**. Für grosse Stichprobengrössen n wird die Approximation besser.

d) **Richtig**. Definiere die Zeit, solange die $i-$te Gaskartusche noch Gas enthält, in Stunden als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 1h$ und die Varianz $Var[S_i] = 0.1^2$. Die Gesamtbrenndauer von $n = 21$ Gaskartuschen kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{21} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 1, n \cdot 0.1^2) = \mathcal{N}(21, 0.21)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 20h) &= P\left(\frac{S-21}{\sqrt{0.21}} > \frac{20-21}{\sqrt{0.21}}\right) \\ &= P(Z > -2.1822) = P(Z \leq 2.1822) \\ &\approx 0.985 > 0.95. \end{aligned}$$

15. a) **Richtig**. Aus dem Boxplot lässt sich erkennen, dass die Verteilung rechtsschief ist. Das arithmetische Mittel ist daher grösser als der Median.

b) **Falsch**. Die Plots können von den selben Daten stammen. Ein Anhaltspunkt hierfür ist, dass die extremen Intervalle des Histograms in Plot A mit den grössten und kleinsten Datenpunkten in Plot D vereinbar sind.

c) **Falsch**. Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine kleinere Varianz als die Standardnormalverteilung, wie anhand der Steigung zu sehen ist.

d) **Richtig**. Der Median ist kleiner als der Erwartungswert.

16. a) **Richtig**. Die Nullhypothese wird genau dann verworfen, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

b) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

c) **Falsch**. Wenn man den Fehler 1. Art verkleinert, vergrössert sich der Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn der Fehler 2. Art zunimmt , dann nimmt der Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) ab .

d) **Richtig**.

Gruppe B

17. a) **Falsch**. Der p-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der p-Wert nicht kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann nicht verworfen werden.

b) **Richtig**. Per Definition des p-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wa. p.

c) **Richtig**. Per Definition umfasst ein zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit einer Binomialverteilung alle Werte p_0, für die ein zweiseiter Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ nicht verwirft.

d) **Richtig**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Wenn sich die Produktionsbedingungen nicht ändern, sollte der Term $\frac{x}{n}$ in etwa konstant bleiben. Die Breite des Vertrauensintervalls ist also im Wesentlichen durch den Term $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bestimmt. Wenn wir die Breite des 95%-Vertrauensintervalls halbieren wollen, brauchen wir also vier mal so viele Beobachtungen.

18. a) **Richtig**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser.

c) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich umfasst alle 'unplausiblen' Werte, wenn man die Nullhypothese annimmt. Dabei quantifiziert das Signifikanzniveau, was 'unplausibel' genau bedeutet. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, bedeutet das, dass man nur 'sehr unplausible' Werte im Verwerfungsbereich aufnimmt. D.h., der Verwerfungsbereich wird tendenziell kleiner (entsprechend umgekehrt, wenn man das Signifikanzniveau vergrössert).

d) **Richtig**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

19. a) **Falsch**.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.4$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 10, p = 0.4)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 8) \approx 0.012$.

c) **Richtig**. Wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese grösser als ursprünglich geplant ist, gibt es nun eine grössere Wahrscheinlichkeit eine Beobachtung im Verwerfungsbereich zu beobachten, falls die Alternativhypothese stimmt (beachten Sie, dass bei der Form der Alternativhypothese $H_A : p > p_0$ der Verwerfungsbereich am 'rechten' Ende der Verteilung liegt). D.h., die Macht nimmt tendenziell zu und die geforderte Macht kann mit den neuen Parametern eingehalten werden.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 28, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 4) \approx 1$.

20. a) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest mit Stichprobengrösse n hat die Form $\{0, \ldots, c_u\} \cup \{c_o, \ldots, n\}$. Wir suchen c_u, so dass $P_{H_0}(X \leq c_u) = \sum_{k=0}^{c_u} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$, und c_o so dass $P_{H_0}(X \geq c_o) = \sum_{k=c_o}^{15} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$.

b) **Falsch**. Unter H_0 gilt, dass $P(X \in \{8, 9, 10\}) = 0.0015903864$, $P(X \in \{6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.0473489874$ und dass $P(X \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.1502683326$. Deswegen ist der Verwerfungsbereich $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

c) **Richtig**. Wir berechnen

$$P_{H_0}(X \in \{0, \ldots, 5\}) = P_{H_0}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 0.7^k (1-0.7)^{(20-k)} = 0.00004294002195359172 \le 0.01\%$$

und

$$P_{H_0}(X \in \{0, \ldots, 6\}) = P_{H_0}(X \le 6) = 0.00026104700705946732 > 0.01\%.$$

Es handelt sich bei der in der Aufgabe gegebenen Menge um den Verwerfungsbereich. Also können wir die Nullhypothese verwerfen, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ annimmt. Da in der Aufgabenstellung nicht direkt nach dem Verwerfungsbereich gefragt wird, könnte man auch die P-Werte aller Werte in der gegebenen Menge berechnen, d.h. $P_{H_0}(X \le 0), P_{H_0}(X \le 1) \ldots, P_{H_0}(X \le 5)$ und feststellen, dass sie alle kleiner als das gegeben Signifikanzniveau sind.

d) **Richtig**. Das ist genau die Definition des P-Wert.

Gruppe C

1. a) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.55 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

b) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.48 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

c) **Falsch**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.13 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) **Richtig**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.62 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

2. a) **Richtig**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten log-odds ist also -1.0996 .

b) **Falsch**. Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds sind monoton verknüpft. D.h., wenn sich eine der drei Grössen erhöht, erhöhen sich auch die anderen beiden Grössen. Wenn sich eine der drei Grössen erniedrigt, erniedrigen sich auch die anderen beiden Grössen.

c) **Richtig**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 3,2 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 2 Zahlen, also gibt es 2 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also $\frac{1}{3}$. Gemäss den Definitionen sind die odds daher 0.5 und die log-odds -0.693 .

d) **Falsch**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

3. a) **Richtig**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 0.75$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.25$.

b) **Richtig**. Gesucht ist $P(A|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $P(A^c|B^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c\cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0$.

4. a) **Falsch**. Die Situation entspricht dem zufälligen Ziehen von Bällen aus einer Urne: Wir haben $7+5 = 12$ Bälle, 5 davon sind markiert. Nun ziehen wir zufällig und ohne Zurücklegen 4 Bälle und sind daran interessiert, wie viele markierte Bälle wir gezogen haben. Diese Verteilung entspricht genau der Hypergeometrischen Verteilung.

b) **Falsch**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

c) **Falsch**. Weil die Würfe unabhängig sind, gilt $P(KKZ) = P(K)P(K)P(Z) = p^2(1-p) = p^2-p^3$. Um das Maximum zu bestimmen, leiten wir nach p ab und setzen die Ableitung gleich null: $\frac{d}{dp}P(KKZ) = 2p - 3p^2 = p(2-3p) = 0$. Der Ausdruck wird null, wenn $p = 0$ oder wenn $p = \frac{2}{3}$. Die Lösung $p = 0$ scheidet aus, weil wir dann niemals "Kopf" beobachten würden, es aber zweimal beobachtet wurde. Also muss die Lösung $p = \frac{2}{3}$ sein. (Übrigens: In diesem Fall ist das maximieren von $\log(P(KKZ))$ ein klein wenig komplizierter als das maximieren von $P(KKZ)$; weil beide Wege zum gleichen Ergebnis führen, habe ich mich der Einfachheit halber entschieden in dieser Aufgabe $P(KKZ)$ zu maximieren).

d) **Richtig**. Die Summe von zwei unabhängigen Poissonverteilungen ist wieder eine Poissonverteilung wobei sich die Parameter addieren.

5. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Es kann sein, dass dieser Wert keiner Beobachtung in der Stichprobe entspricht.

b) **Richtig**. Das arithmetische Mittel ist die gewichtete Summe aller beobachteten Werte. Dieser Wert kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe sein.

c) **Falsch**. Angenommen die Stichprobengrösse ist n. Der Median ist das $\alpha = 50\%$-Quantil. Gemäss der Formel aus unserer Vorlesung (Kap. 3.4.1) ist der Median eine Zahl aus der Stichprobe, wenn $\alpha \cdot n$ keine ganze Zahl ist. Falls $\alpha \cdot n$ jedoch eine ganze Zahl ist, dann ist der Median ein Mittelwert aus zwei Beobachtungen aus der Stichprobe.

d) **Falsch**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist positiv . Also ist auch die Korrelation positiv .

6. a) **Richtig**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -2.4$ und $b = 2.4$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -2.4 + 2.4 \cdot (-2.9) \approx -9.36$.

b) **Falsch**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = -1$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 1 \cdot 0.8 \approx 0.8$.

c) **Falsch**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)}$ mit $b = -2.7$ und $\sigma_X \approx 0.894427$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 2.7 \cdot 0.894427 \approx 2.415$.

d) **Falsch**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -2.7$ und $b = 1.6$. Daraus ergibt sich $q_Y = -2.7 + 1.6 \cdot (-9.9) \approx -18.54$.

7. a) **Falsch**.

b) **Richtig**. $S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma_F^2)$

c) **Falsch**. Für grosse Stichprobengrössen n wird die Approximation besser.

d) **Richtig**. Definiere die Zeit, solange die $i-$te Gaskartusche noch Gas enthält, in Stunden als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 1h$ und die Varianz $Var[S_i] = 0.1^2$. Die Gesamtbrenndauer von $n = 21$ Gaskartuschen kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{21} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 1, n \cdot 0.1^2) = \mathcal{N}(21, 0.21)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 20h) &= P\left(\frac{S-21}{\sqrt{0.21}} > \frac{20-21}{\sqrt{0.21}}\right) \\ &= P(Z > -2.1822) = P(Z \leq 2.1822) \\ &\approx 0.985 > 0.95. \end{aligned}$$

8. a) **Richtig**. Aus dem Boxplot lässt sich erkennen, dass die Verteilung rechtsschief ist. Das arithmetische Mittel ist daher grösser als der Median.

b) **Falsch**. Die Plots können von den selben Daten stammen. Ein Anhaltspunkt hierfür ist, dass die extremen Intervalle des Histograms in Plot A mit den grössten und kleinsten Datenpunkten in Plot D vereinbar sind.

c) **Falsch**. Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine kleinere Varianz als die Standardnormalverteilung, wie anhand der Steigung zu sehen ist.

d) **Richtig**. Der Median ist kleiner als der Erwartungswert.

9. a) **Richtig**. Die Nullhypothese wird genau dann verworfen, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

b) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

c) **Falsch**. Wenn man den Fehler 1. Art verkleinert, vergrössert sich der Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn der Fehler 2. Art zunimmt , dann nimmt der Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) ab .

d) **Richtig**.

10. a) **Falsch**. Der p-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der p-Wert nicht kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann nicht verworfen werden.

b) **Richtig**. Per Definition des p-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wa. p.

c) **Richtig**. Per Definition umfasst ein zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit einer Binomialverteilung alle Werte p_0, für die ein zweiseiter Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ nicht verwirft.

d) **Richtig**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Wenn sich die Produktionsbedingungen nicht ändern, sollte der Term $\frac{x}{n}$ in etwa konstant bleiben. Die Breite des Vertrauensintervalls ist also im Wesentlichen durch den Term $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bestimmt. Wenn wir die Breite des 95%-Vertrauensintervalls halbieren wollen, brauchen wir also vier mal so viele Beobachtungen.

11. a) **Richtig**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser.

c) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich umfasst alle 'unplausiblen' Werte, wenn man die Nullhypothese annimmt. Dabei quantifiziert das Signifikanzniveau, was 'unplausibel' genau bedeutet. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, bedeutet das, dass man nur 'sehr unplausible' Werte im Verwerfungsbereich aufnimmt. D.h., der Verwerfungsbereich wird tendenziell kleiner (entsprechend umgekehrt, wenn man das Signifikanzniveau vergrössert).

d) **Richtig**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

12. a) **Falsch**.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.4$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 10, p = 0.4)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 8) \approx 0.012$.

c) **Richtig**. Wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese grösser als ursprünglich geplant ist, gibt es nun eine grössere Wahrscheinlichkeit eine Beobachtung im Verwerfungsbereich zu beobachten, falls die Alternativhypothese stimmt (beachten Sie, dass bei der Form der Alternativhypothese $H_A : p > p_0$ der Verwerfungsbereich am 'rechten' Ende der Verteilung liegt). D.h., die Macht nimmt tendenziell zu und die geforderte Macht kann mit den neuen Parametern eingehalten werden.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 28, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 4) \approx 1$.

13. a) **Richtig**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest mit Stichprobengrösse n hat die Form $\{0, \ldots, c_u\} \cup \{c_o, \ldots, n\}$. Wir suchen c_u, so dass $P_{H_0}(X \leq c_u) = \sum_{k=0}^{c_u} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$, und c_o so dass $P_{H_0}(X \geq c_o) = \sum_{k=c_o}^{15} \binom{15}{k} 0.5^k (1-0.5)^{(15-k)} \leq 2.5\% = \alpha/2$.

b) **Falsch**. Unter H_0 gilt, dass $P(X \in \{8, 9, 10\}) = 0.0015903864$, $P(X \in \{6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.0473489874$ und dass $P(X \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}) = 0.1502683326$. Deswegen ist der Verwerfungsbereich $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

c) **Richtig**. Wir berechnen

$$P_{H_0}(X \in \{0, \ldots, 5\}) = P_{H_0}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 0.7^k (1-0.7)^{(20-k)} = 0.00004294002195359172 \leq 0.01\%$$

und

$$P_{H_0}(X \in \{0, \ldots, 6\}) = P_{H_0}(X \leq 6) = 0.00026104700705946732 > 0.01\%.$$

Es handelt sich bei der in der Aufgabe gegebenen Menge um den Verwerfungsbereich. Also können wir die Nullhypothese verwerfen, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ annimmt. Da in der Aufgabenstellung nicht direkt nach dem Verwerfungsbereich gefragt wird, könnte man auch die P-Werte aller Werte in der gegebenen Menge berechnen, d.h. $P_{H_0}(X \leq 0), P_{H_0}(X \leq 1) \ldots, P_{H_0}(X \leq 5)$ und feststellen, dass sie alle kleiner als das gegeben Signifikanzniveau sind.

d) **Richtig**. Das ist genau die Definition des P-Wert.

14. a) **Richtig**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.488$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 9.28145$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X / \sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.488 \cdot 3.16228}{9.28145} \approx 0.507$.

b) **Richtig**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0.95} \approx 1.833$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -1.833] \cup [1.833; \infty]$.

c) **Richtig**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **Falsch**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 10$, $\alpha = 0.01$, $\overline{x}_n \approx 1.488$, $\hat{\sigma}_X \approx 9.28145$ und $t_{9;0.995} = 3.250$ (Wert aus Tabelle). Damit ergibt sich als 99%-Vertrauensintervall: $[-8.051; 11.027]$.

15. a) **Falsch**. Das arithmetische Mittel von n unabhängigen, gleichverteilten Messungen ist zuverlässiger als eine Einzelmessung. Genauer gesagt: Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels ist um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als die einer Einzelmessung. In diesem Beispiel ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels also $\frac{0.2}{\sqrt{16}} = 0.05$.

b) **Richtig**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0,1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0,1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0,1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

c) **Falsch**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. $P(Z \leq 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

d) **Richtig**. Der p-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_{19}$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 1.729$. Der p-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den p-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 1.729)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 19$): $P(T \leq 1.729) \approx 0.95$. Für den p-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.95) \approx 0.1$.

16. a) **Richtig**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen für die beiden Gruppen berechnen: $\hat{\sigma}_x \approx 6.51411$ und $\hat{\sigma}_y \approx 5.89798$. Daraus lässt sich die gepoolte Varianz berechnen: $S^2_{pool} = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}^2_x + (n_2-1)\hat{\sigma}^2_y}{n_1+n_2-2} \approx 39.375$.

b) **Falsch**. Mit den gegebenen Daten können wir folgende Kennzahlen berechnen: $\overline{x} = 6.54429$, $\overline{y} = 11.598$, $S^2_{pool} = 39.375$. Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{pool}\cdot\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx -1.375$.

c) **Falsch**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $[-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{10;0.995} \approx 3.169$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $[-\infty; -3.169] \cup [3.169; \infty]$.

d) **Falsch**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 14$. Angenommen $T \sim t_{14}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 14$): $t_{0.99} = 2.624$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.624$ der p-Wert $p = 2 \cdot 0.01 = 0.02$.

17. a) **Falsch**. Man misst die beiden Router jeweils im gleichen Haus unter den gleichen Bedingungen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) **Richtig**. Verschiedene Personen haben an beiden Experimenten mit oder ohne Freisprechanlage mitgemacht. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

c) **Falsch**. Die Ratten haben nicht je 2 Medikamente erhalten, sondern entweder Antibiotika 1 oder Antibiotika 2. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

d) **Falsch**. Jede Person macht beide Teste.

18. a) **Falsch**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Uniformen Verteilung.

b) **Richtig**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer Linksschiefen Verteilung.

c) **Richtig**. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) **Richtig**. Der Plot zeigt , dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

19. a) **Falsch**. Der Standard-Fehler des Schätzwertes ist 0.264 .

b) **Falsch**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das exakte 95%-Vertrauensintervall ist c das 97.5%-Quantil der t-Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden und muss in der Tabelle der t-Verteilung nachgeschaut werden. Mit der Tabelle erhält man $c = 2.037$. Also ergibt sich für die Untergrenze der Wert 0.596.

c) **Richtig**. Der p-Wert für den (zweiseitigen) Test $H_0 : \beta_0 = 0$ ist 0 (s. erste Zeile und letzte Spalte in der Tabelle). Dieser Wert ist kleiner als 0.05. Daher kann die Nullhypothese verworfen werden.

d) **Falsch**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 26.886.

20. **a)** **Richtig**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.856.

b) **Falsch**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alle Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

c) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 0.799 \cdot x$. Wenn man $x = 2.402$ einsetzt, erhält man $y = 3.053$.

d) **Falsch**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 1.134 + 4.227 \cdot x$. Wenn man $y = 2.229$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.259$.