Serie 9

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Gebiete D, E und F, berechnen Sie jeweils deren Flächeninhalt und allenfalls die angegebenen Integrale.

a) $D = \{(x, y) \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$\iint_D \cos x \, \cos y \; dy\, dx \quad \text{und} \quad \iint_D \sin(x+y) \; dy\, dx \; .$$

b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$\iint_E xy + y \; dy\, dx.$$

c) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq e^2 - 1,\ \ln(1+x) \leq y \leq 2\}$.

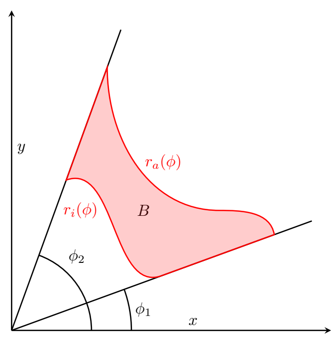
Erinnerung: $\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + C$. Dies folgt durch partielle Integration, indem man $\int \ln(x)\, dx = \int 1 \cdot \ln(x)\, dx$ schreibt und die Funktion 1 integriert und die Funktion $\ln(x)$ ableitet.

Aufgabe 2

Zuerst ein wenig Repetition:

- Ein Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist in Polarkoordinaten gegeben, falls

$$B = \{(r, \phi) \mid \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, r_i(\phi) \leq r \leq r_a(\phi)\}$$



- Seien B ein Gebiet in Polarkoordinaten und $f(x, y)$ stetig. Dann ist das Gebietsintegral

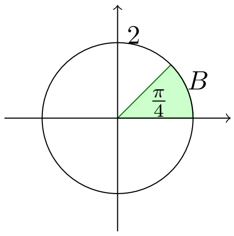
$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi) \underbrace{r}_{!!!} \,dr\,d\phi$$

und der Flächeninhalt $|B| = \displaystyle\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r\,dr\,d\phi$.

a) Betrachten Sie den Ringteil $D \subseteq \mathbb{R}^2$ im 1. Quadranten der xy-Ebene, welcher durch die zwei Achsen $x = 0,\ y = 0$ und zwei Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 9$ begrenzt wird.

Skizzieren Sie D, geben Sie es in Polarkoordinaten an und berechnen Sie damit den Flächeninhalt von D.

b) Seien die Funktion f gegeben durch $f(x, y) = xy$ und B das erste Achtel des Kreises um Null mit Radius 2. Berechnen Sie $\displaystyle\iint_B f dA$.



c) Sei $K = \{(r, \phi) \,|\, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos(\phi)\}$ mit Polarkoordinaten (r, ϕ). Skizzieren Sie K und berechnen Sie den Flächeninhalt.

Hinweis: Es gilt $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

d) Berechnen Sie das Integral der Funktion f mit $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ im Gebiet $A = \big\{(x, y) \,|\, x, y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\big\}$.

Hinweis: Polarkoordinaten

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale.

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cos(yz) dz dy dx$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \sin(x) dz dy dx$

c) Berechnen Sie das Volumen des (zylindrischen) Körpers, dessen Boden durch das Dreieck mit den Ecken $(0, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$ und $(0, 2, 0)$ gegeben ist und dessen „Deckel" Teil der Fläche $z = x^2 y$ ist.

   Benutzen Sie dafür einmal ein Dreifachintegral und einmal ein Doppelintegral.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 02.05.2017 / Mittwoch, den 03.05.2017 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.

Präsenz der Assistenzgruppe

Zweimal in der Woche beantworten Doktoranden in einer Präsenz Fragen: Montag und Donnerstag von 12 bis 13 Uhr im HG G 32.6.