Musterlösung

Es gibt verschiedene Version der Prüfung. Die Aufgaben sind jeweils in einer anderen Reihenfolge.

Gruppe A

1. a) **Richtig**. Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze (bei einem Binomialtest kann der Verwerfungsbereich oftmals nicht exakt so gewählt werden, dass das Signifikanzniveau erreicht wird) für die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit, die Münze als gefälscht zu bezeichnen obwohl sie fair ist, ist also höchstens 5 %.

b) **Falsch**. Bei gegebenem Signifikanzniveau kann die Macht nur dann berechnet werden, wenn die genaue Verteilung der Teststatistik unter der Alternativhypothese bekannt ist. Das wurde hier aber nicht angegeben, also kann die Macht nicht berechnet werden.

c) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen, der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

d) **Falsch**. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, vergrössert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) zu .

2. a) **Falsch**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeit als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass man $x = 27$ Erfolge oder mehr beobachtet 0.02224.

c) **Richtig**. Die Stichprobengrösse ist in der Aufgabenstellung nicht explizit gegeben, entspricht aber der Obergrenze des "oberen" Verwerfungsbereichs. Also ist $n = 15$. Angenommen, $Y \sim Bin(n = 15, p = 0.85)$ und die Menge $V = \{0, 1\} \cup \{13, 14, 15\}$. Dann ist die Macht gleich $P(Y \in V) = 0.604$.

d) **Falsch**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

3. a) **Richtig**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.2$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 18, p = 0.2)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 3) = 0.729$.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.9$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 33, p = 0.9)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \leq 4) = 0$.

c) **Falsch**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 16, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y < 3) = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative H_A : $p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 13, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 3) = 0.992$.

4. **a)** **Richtig**. Der P-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der P-Wert kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann verworfen werden.

b) **Richtig**. Per Definition des P-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) **Richtig**. Die Gewinnwahrscheinlichkeit p_0 unter der Nullhypothese befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. D.h., dass der entsprechende Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% verwirft. Also muss der P-Wert kleiner gleich dem Signifikanzniveau sein.

d) **Falsch**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mit den Werten $x = 7$ und $n = 33$ ergibt sich eine Untergrenze von 0.073 und eine Obergrenze von 0.352.

5. **a)** **Falsch**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest besteht aus einem "unteren" und einem "oberen" Bereich. Für jeden der beiden Bereiche gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik in dem Bereich liegt, falls die Nullhypothese korrekt ist, ist $\frac{\alpha}{2} = 3.5\%$. Zunächst der "untere" Bereich: Wir suchen den grössten Wert kL, für den gilt: $P(X \leq kL) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kL = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.012 \leq 0.035$ und $P(X \leq 3) = 0.044 > 0.035$. Nun berechnen wir den "oberen" Bereich: Dazu suchen wir den kleinsten Wert kU, für den gilt: $P(X \geq kU) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kU = 12$. Es gilt $P(X \geq 12) = 0.02 \leq 0.035$ und $P(X \geq 11) = 0.053 > 0.035$. Der korrekte Verwerfungsbereich umfasst also die Bereiche $\{0, ..., 2\}$ und $\{12, ..., 20\}$.

b) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 6, p = 0.4)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung $P(X = 1) = 0.186624$. "Extremer" sind alle anderen Ereignisse mit einer kleineren Auftretenswahrscheinlichkeit. Das umfasst die Ereignisse: 0,1,4,5,6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten für all diese Ereignisse zusammenzählt, kommt man auf einen P-Wert von 0.412.

c) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 10, p = 0.5)$. Der P-Wert berechnet sich als $P(X \leq 3) = 0.172$.

d) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 18, p = 0.1)$. Der P-Wert berechnet sich also als $P(X \geq 15) = 0$.

6. **a)** **Falsch**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 8$. Es gilt $P(X \geq 9) = 0.015 \leq 0.07$ und $P(X \geq 8) = 0.057 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.158 > 0.07$.

b) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 7$. Es gilt $P(X \geq 7) = 0.039 \leq 0.05$ und $P(X \geq 6) = 0.118 > 0.05$.

c) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 6$. Es gilt $P(X \geq 6) = 0.025 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.099 > 0.07$.

d) **Falsch**. Wir suchen den grössten Wert k, für den gilt: $P(X \leq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.027 \leq 0.05$ und $P(X \leq 3) = 0.093 > 0.05$.

7. **a)** **True**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.5625$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 8.82683$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X / \sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.5625 \cdot 2.82843}{8.82683} \approx 0.501$.

b) **False**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{7;0.975} \approx 2.365$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.365] \cup [2.365; \infty)$.

c) **True**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **False**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 8$, $\alpha = 0.05$, $\overline{x}_n \approx 1.5625$, $\hat{\sigma}_X \approx 8.82683$ und $t_{7;0.975} = 2.364624$. Damit ergibt sich als 95 %-Vertrauensintervall: $[-5.817; 8.942]$.

8. a) **False**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0,1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0,1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0,1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

b) **True**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Also ist $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.05$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. Deshalb ist $P(Z > 2) \approx 0.0228$. $P(X > 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

c) **True**. Das 95% Vertrauensintervall enthält per Definition alle Werte von μ_0, bei denen der zweiseitige t-Test $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem 5% Niveau nicht verwerfen würde. Für alle Werte ausserhalb des Vertrauensintervalls würde die Nullhypothese verworfen werden. Da die 0 nicht im Vertrauensintervall liegt, würde also die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ verworfen werden.

d) **True**. Der P-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_7$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 0.263$. Der P-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den P-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 0.263)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 7$): $P(T \leq 0.263) \approx 0.6$. Für den P-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.6) \approx 0.8$.

9. a) **True**. Mit den gegebenen Daten lässt sich die gepoolte Varianz wie folgt berechnen: $S_{pool}^2 = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_2-1)\hat{\sigma}_y^2}{n_1+n_2-2} \approx 62.761$.

b) **True**. Aus a) haben wir $S_{pool}^2 = 62.761$ (oder 62.76109 ungerundet). Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{pool} \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx 0.939$.

c) **True**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15;0.995} \approx 2.947$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 16$. Angenommen $T \sim t_{16}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 16$): $t_{0.995} = 2.921$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.921$ der P-Wert $p = 2 \cdot 0.005 = 0.01$.

10. a) **True**. Zu jeder Blutplättchenmenge vor dem Rauchen gehört die Blutplättchenmenge der selben Person nach dem Rauchen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

b) **True**. Ungleiche Anzahl in den Gruppen. Zu einem Blutdruck aus der Behandlungsgruppe gehört kein eindeutig bestimmter Wert aus der Kontrollgruppe. Es handelt sich also um ungepaarte Stichproben.

c) **True**. Obwohl die beiden Gruppen gleich gross sind, handelt es sich um ungepaarte Stichproben: Zur Eisenmessung einer Fe^{2+}-Maus gehört keine eindeutig bestimmte Messung einer Fe^{3+}-Maus.

d) **True**. Am gleichen Ort wird mit beiden Geräten gemessen, d.h., jeder Messung mit dem einen Gerät lässt sich genau eine Messung mit dem anderen Gerät zuordnen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

11. a) **False**. Der t-Wert fuer den geschätzten Achsenabschnitt (Quotient aus Schätzer und Standard-Fehler) ist 0.334.

b) **False**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das approximative 95%-Vertrauensintervall ist $c = 2$. Also ergibt sich für die Obergrenze der Wert 1.37.

c) **False**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 10.035.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade der t-Verteilung berechnet sich aus der Anzahl Datenpunkte (n) minus die Anzahl geschätzter Koeffizienten (hier 2 Stück: β_0 und β_1), also $df = n - 2 = 21 - 2 = 19$.

12. a) **False**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.151.

b) **True**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 1.315 \cdot x$. Wenn man $x = 2.409$ einsetzt, erhält man $y = 3.364$.

c) **False**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 3.775 \cdot x$. Wenn man $y = 1.239$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.276$.

d) **False**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alles Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

13. a) **True**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) **False**. Die Daten füer diesen QQ-Plot stammen von einer bimodalen Verteilung.

c) **False**. Man kann nicht alle Modellannahmen anhand des Tukey-Anscombe Plots überprüfen. Der Plot zeigt ausserdem, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

d) **True**. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

14. a) **True**. Es kann nur eine der beiden Zahlen (aber nicht beide gleichzeitig) eintreten. Die beiden Ereignisse sind also disjunkt (d.h., haben keine Schnittmenge). Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge beider Ereignisse ist also die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten. Die Einzelwahrscheinlichkeiten kann man aus der Tabelle ablesen: Die Zahl 8 wird mit der Wa. 0.08 gezogen. Die Zahl 10 wird mit der Wa. 0.12 gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das ursprüngliche Ereignis ist die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also 0.2 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

b) **False**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.77 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

c) **True**. Am einfachsten arbeitet man hier mit dem Gegenereignis (die gezogene Zahl ist 6). Die Lösung ist dann 1 minus die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl 6 ist, ist gemäss Tabelle 0.07 . Die Wahrscheinlich für das ursprüngliche Ereignis ist daher 0.93 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) **True**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.46 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

15. a) **False**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten odds ist also 0.667 .

b) **False**. Auf Grund der Definitionen von Wahrscheinlichkeit, odds und logodds ergibt sich: $P(A^c) = 1 - P(A)$, $odds(A^c) = \frac{1}{odds(A)}$ und $logodds(A^c) = -logodds(A)$.

c) **True**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 1,3,4 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 3 Zahlen, also gibt es 3 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also 0.5 . Gemäss den Definitionen sind die odds daher 1 und die log-odds 0 .

d) **False**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

16. a) **False**. Gesucht ist $P(A \cap B)$. Die Menge $A \cap B$ umfasst die Elemente (1). Mit dem Laplace-Modell ist die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstig/möglich) also $\frac{1}{6} \approx 0.167$.

b) **True**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.75$.

c) **True**. Gesucht ist $P(B|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{0.5}{0.667} = 0.75$. Daher ist $P(B|A^c) = 0.75$.

d) **False**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(B^c|A^c) = 0.25$.

17. a) **False**. Die Summe von zwei unabhängigen (!) Poissonverteilungen ist poissonverteilt. Falls man die Unabhängigkeitsannahme weglässt, stimmt die Aussage nicht mehr.

b) **False**. Jeder Gewinn zwischen 1 und 100 ist gleich wahrscheinlich. Also ist die uniforme Verteilung angebracht.

c) **False**. Die Situation entspricht einer Losbude, bei der Sie 80 Lose kaufen, wobei jedes Los unabhängig von den übrigen Versuchen mit Wa. 0.0009 gewinnt. Bei sehr kleinen Gewinnwahrscheinlichkeiten ist die Binomialverteilung praktisch identisch mit einer Poissonverteiung mit entsprechendem Erwartugnswert. Also lässt sich die gegebene Situation entweder mit einer Binomialverteilung oder mit einer Poissonverteilung gut beschreiben.

d) **False**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

18. a) **True**. Falls es extreme Ausreisser gibt, kann dies vorkommen.

b) **Falsch**. Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert verteilt.

c) **True**. Falls es keinen linearen Zusammenhang gibt, ist die Korrelation mit Sicherheit null.

d) **True**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist negativ . Also ist auch die Korrelation negativ .

19. a) **True**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -4.5$ und $b = 1$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -4.5 + 1 \cdot (-4.2) \approx -8.7$.

b) **True**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = 3.9$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 15.21 \cdot 1 \approx 15.21$.

c) **False**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)} = |b| \cdot \sqrt{Var(X)}$ mit $b = -4.9$ und $\sigma_X \approx 0.774597$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 4.9 \cdot 0.774597 \approx 3.796$.

d) **True**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -3.6$ und $b = 0.8$. Daraus ergibt sich $q_Y = -3.6 + 0.8 \cdot (-3.7) \approx -6.56$.

20. a) **False**. Wurzel-n-Gesetz: "Für doppelte Genauigkeit braucht man viermal so viele Daten."

b) **False**. Es gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i)$.

c) **True**. $T \sim N(n\pi_0, n\pi_0(1 - \pi_0))$

d) **False**. Definiere die Zeit, solange das $i-$te Stück Traubenzucker noch Energie gibt in Minuten als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 10$ und die Varianz $Var[S_i] = 5^2$. Die "Verpflegungsdauer" von $n = 28$ Traubenzuckerstücken kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{28} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 10, n \cdot 5^2) = \mathcal{N}(280, 700)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 240) &= P\left(\frac{S - 280}{\sqrt{700}} > \frac{240 - 280}{\sqrt{700}}\right) \\ &= P(Z > -1.511858) = P(Z \leq 1.511858) \\ &\approx 0.934715 < 0.95. \end{aligned}$$

Gruppe B

1. a) **True**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.5625$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 8.82683$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.5625 \cdot 2.82843}{8.82683} \approx 0.501$.

b) **False**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{7;0.975} \approx 2.365$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.365] \cup [2.365; \infty)$.

c) **True**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **False**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 8$, $\alpha = 0.05$, $\overline{x}_n \approx 1.5625$, $\hat{\sigma}_X \approx 8.82683$ und $t_{7;0.975} = 2.364624$. Damit ergibt sich als 95 %-Vertrauensintervall: $[-5.817; 8.942]$.

2. a) **False**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0,1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0,1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0,1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

b) **True**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Also ist $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.05$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. Deshalb ist $P(Z > 2) \approx 0.0228$. $P(X > 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

c) **True**. Das 95% Vertrauensintervall enthält per Definition alle Werte von μ_0, bei denen der zweiseitige t-Test $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem 5% Niveau nicht verwerfen würde. Für alle Werte ausserhalb des Vertrauensintervalls würde die Nullhypothese verworfen werden. Da die 0 nicht im Vertrauensintervall liegt, würde also die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ verworfen werden.

d) **True**. Der P-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_7$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 0.263$. Der P-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den P-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 0.263)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 7$): $P(T \leq 0.263) \approx 0.6$. Für den P-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.6) \approx 0.8$.

3. a) **True**. Mit den gegebenen Daten lässt sich die gepoolte Varianz wie folgt berechnen: $S^2_{pool} = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}^2_x + (n_2-1)\hat{\sigma}^2_y}{n_1+n_2-2} \approx 62.761$.

b) **True**. Aus a) haben wir $S^2_{pool} = 62.761$ (oder 62.76109 ungerundet). Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{pool} \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx 0.939$.

c) **True**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15;0.995} \approx 2.947$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 16$. Angenommen $T \sim t_{16}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 16$): $t_{0.995} = 2.921$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.921$ der P-Wert $p = 2 \cdot 0.005 = 0.01$.

4. a) **True**. Zu jeder Blutplättchenmenge vor dem Rauchen gehört die Blutplättchenmenge der selben Person nach dem Rauchen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

b) **True**. Ungleiche Anzahl in den Gruppen. Zu einem Blutdruck aus der Behandlungsgruppe gehört kein eindeutig bestimmter Wert aus der Kontrollgruppe. Es handelt sich also um ungepaarte Stichproben.

c) **True**. Obwohl die beiden Gruppen gleich gross sind, handelt es sich um ungepaarte Stichproben: Zur Eisenmessung einer Fe^{2+}-Maus gehört keine eindeutig bestimmte Messung einer Fe^{3+}-Maus.

d) **True**. Am gleichen Ort wird mit beiden Geräten gemessen, d.h., jeder Messung mit dem einen Gerät lässt sich genau eine Messung mit dem anderen Gerät zuordnen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

5. a) **False**. Der t-Wert fuer den geschätzten Achsenabschnitt (Quotient aus Schätzer und Standard-Fehler) ist 0.334.

b) **False**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das approximative 95%-Vertrauensintervall ist $c = 2$. Also ergibt sich für die Obergrenze der Wert 1.37.

c) **False**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 10.035.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade der t-Verteilung berechnet sich aus der Anzahl Datenpunkte (n) minus die Anzahl geschätzter Koeffizienten (hier 2 Stück: β_0 und β_1), also $df = n - 2 = 21 - 2 = 19$.

6. a) **False**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.151.

b) **True**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 1.315 \cdot x$. Wenn man $x = 2.409$ einsetzt, erhält man $y = 3.364$.

c) **False**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 3.775 \cdot x$. Wenn man $y = 1.239$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.276$.

d) **False**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alles Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

7. a) **True**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) **False**. Die Daten füer diesen QQ-Plot stammen von einer bimodalen Verteilung.

c) **False**. Man kann nicht alle Modellannahmen anhand des Tukey-Anscombe Plots überprüfen. Der Plot zeigt ausserdem, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

d) **True**. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

8. a) **True**. Es kann nur eine der beiden Zahlen (aber nicht beide gleichzeitig) eintreten. Die beiden Ereignisse sind also disjunkt (d.h., haben keine Schnittmenge). Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge beider Ereignisse ist also die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten. Die Einzelwahrscheinlichkeiten kann man aus der Tabelle ablesen: Die Zahl 8 wird mit der Wa. 0.08 gezogen. Die Zahl 10 wird mit der Wa. 0.12 gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das ursprüngliche Ereignis ist die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also 0.2 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

b) **False**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.77 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

c) **True**. Am einfachsten arbeitet man hier mit dem Gegenereignis (die gezogene Zahl ist 6). Die Lösung ist dann 1 minus die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl 6 ist, ist gemäss Tabelle 0.07 . Die Wahrscheinlich für das ursprüngliche Ereignis ist daher 0.93 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) **True**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.46 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

Gruppe B

9. a) **False**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten odds ist also 0.667 .

b) **False**. Auf Grund der Definitionen von Wahrscheinlichkeit, odds und logodds ergibt sich: $P(A^c) = 1 - P(A)$, $odds(A^c) = \frac{1}{odds(A)}$ und $logodds(A^c) = -logodds(A)$.

c) **True**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 1,3,4 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 3 Zahlen, also gibt es 3 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also 0.5 . Gemäss den Definitionen sind die odds daher 1 und die log-odds 0 .

d) **False**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

10. a) **False**. Gesucht ist $P(A \cap B)$. Die Menge $A \cap B$ umfasst die Elemente (1). Mit dem Laplace-Modell ist die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstig/möglich) also $\frac{1}{6} \approx 0.167$.

b) **True**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.75$.

c) **True**. Gesucht ist $P(B|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{0.5}{0.667} = 0.75$. Daher ist $P(B|A^c) = 0.75$.

d) **False**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(B^c|A^c) = 0.25$.

11. a) **False**. Die Summe von zwei unabhängigen (!) Poissonverteilungen ist poissonverteilt. Falls man die Unabhängigkeitsannahme weglässt, stimmt die Aussage nicht mehr.

b) **False**. Jeder Gewinn zwischen 1 und 100 ist gleich wahrscheinlich. Also ist die uniforme Verteilung angebracht.

c) **False**. Die Situation entspricht einer Losbude, bei der Sie 80 Lose kaufen, wobei jedes Los unabhängig von den übrigen Versuchen mit Wa. 0.0009 gewinnt. Bei sehr kleinen Gewinnwahrscheinlichkeiten ist die Binomialverteilung praktisch identisch mit einer Poissonverteiung mit entsprechendem Erwartugnswert. Also lässt sich die gegebene Situation entweder mit einer Binomialverteilung oder mit einer Poissonverteilung gut beschreiben.

d) **False**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

12. a) **True**. Falls es extreme Ausreisser gibt, kann dies vorkommen.

b) **Falsch**. Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert verteilt.

c) **True**. Falls es keinen linearen Zusammenhang gibt, ist die Korrelation mit Sicherheit null.

d) **True**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist negativ . Also ist auch die Korrelation negativ .

13. a) **True**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -4.5$ und $b = 1$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -4.5 + 1 \cdot (-4.2) \approx -8.7$.

b) **True**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = 3.9$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 15.21 \cdot 1 \approx 15.21$.

c) **False**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)} = |b| \cdot \sqrt{Var(X)}$ mit $b = -4.9$ und $\sigma_X \approx 0.774597$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 4.9 \cdot 0.774597 \approx 3.796$.

d) **True**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -3.6$ und $b = 0.8$. Daraus ergibt sich $q_Y = -3.6 + 0.8 \cdot (-3.7) \approx -6.56$.

14. a) **False**. Wurzel-n-Gesetz: "Für doppelte Genauigkeit braucht man viermal so viele Daten."

b) **False**. Es gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i)$.

c) **True**. $T \sim N(n\pi_0, n\pi_0(1-\pi_0))$

d) **False**. Definiere die Zeit, solange das $i-$te Stück Traubenzucker noch Energie gibt in Minuten als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 10$ und die Varianz $Var[S_i] = 5^2$. Die "Verpflegungsdauer" von $n = 28$ Traubenzuckerstücken kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{28} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 10, n \cdot 5^2) = \mathcal{N}(280, 700)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 240) &= P\left(\frac{S-280}{\sqrt{700}} > \frac{240-280}{\sqrt{700}}\right) \\ &= P(Z > -1.511858) = P(Z \leq 1.511858) \\ &\approx 0.934715 < 0.95. \end{aligned}$$

15. a) **Richtig**. Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze (bei einem Binomialtest kann der Verwerfungsbereich oftmals nicht exakt so gewählt werden, dass das Signifikanzniveau erreicht wird) für die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit, die Münze als gefälscht zu bezeichnen obwohl sie fair ist, ist also höchstens 5 %.

b) **Falsch**. Bei gegebenem Signifikanzniveau kann die Macht nur dann berechnet werden, wenn die genaue Verteilung der Teststatistik unter der Alternativhypothese bekannt ist. Das wurde hier aber nicht angegeben, also kann die Macht nicht berechnet werden.

c) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen, der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

d) **Falsch**. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, vergrössert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) zu .

16. a) **Falsch**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeit als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass man $x = 27$ Erfolge oder mehr beobachtet 0.02224.

c) **Richtig**. Die Stichprobengrösse ist in der Aufgabenstellung nicht explizit gegeben, entspricht aber der Obergrenze des "oberen" Verwerfungsbereichs. Also ist $n = 15$. Angenommen, $Y \sim Bin(n = 15, p = 0.85)$ und die Menge $V = \{0, 1\} \cup \{13, 14, 15\}$. Dann ist die Macht gleich $P(Y \in V) = 0.604$.

d) **Falsch**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

17. a) **Richtig**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.2$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 18, p = 0.2)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 3) = 0.729$.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.9$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 33, p = 0.9)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \leq 4) = 0$.

c) **Falsch**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 16, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y < 3) = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 13, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 3) = 0.992$.

18. a) **Richtig**. Der P-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der P-Wert kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann verworfen werden.

b) **Richtig**. Per Definition des P-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) **Richtig**. Die Gewinnwahrscheinlichkeit p_0 unter der Nullhypothese befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. D.h., dass der entsprechende Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% verwirft. Also muss der P-Wert kleiner gleich dem Signifikanzniveau sein.

d) **Falsch**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mit den Werten $x = 7$ und $n = 33$ ergibt sich eine Untergrenze von 0.073 und eine Obergrenze von 0.352.

19. a) **Falsch**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest besteht aus einem "unteren" und einem "oberen" Bereich. Für jeden der beiden Bereiche gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik in dem Bereich liegt, falls die Nullhypothese korrekt ist, ist $\frac{\alpha}{2} = 3.5\%$. Zunächst der "untere" Bereich: Wir suchen den grössten Wert kL, für den gilt: $P(X \leq kL) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kL = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.012 \leq 0.035$ und $P(X \leq 3) = 0.044 > 0.035$. Nun berechnen wir den "oberen" Bereich: Dazu suchen wir den kleinsten Wert kU, für den gilt: $P(X \geq kU) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kU = 12$. Es gilt $P(X \geq 12) = 0.02 \leq 0.035$ und $P(X \geq 11) = 0.053 > 0.035$. Der korrekte Verwerfungsbereich umfasst also die Bereiche $\{0, ..., 2\}$ und $\{12, ..., 20\}$.

b) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 6, p = 0.4)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung $P(X = 1) = 0.186624$. "Extremer" sind alle anderen Ereignisse mit einer kleineren Auftretenswahrscheinlichkeit. Das umfasst die Ereignisse: 0,1,4,5,6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten für all diese Ereignisse zusammenzählt, kommt man auf einen P-Wert von 0.412.

c) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 10, p = 0.5)$. Der P-Wert berechnet sich als $P(X \leq 3) = 0.172$.

d) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 18, p = 0.1)$. Der P-Wert berechnet sich also als $P(X \geq 15) = 0$.

20. **a)** **Falsch**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 8$. Es gilt $P(X \geq 9) = 0.015 \leq 0.07$ und $P(X \geq 8) = 0.057 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.158 > 0.07$.

b) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 7$. Es gilt $P(X \geq 7) = 0.039 \leq 0.05$ und $P(X \geq 6) = 0.118 > 0.05$.

c) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 6$. Es gilt $P(X \geq 6) = 0.025 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.099 > 0.07$.

d) **Falsch**. Wir suchen den grössten Wert k, für den gilt: $P(X \leq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.027 \leq 0.05$ und $P(X \leq 3) = 0.093 > 0.05$.

Gruppe C

1. a) **True**. Es kann nur eine der beiden Zahlen (aber nicht beide gleichzeitig) eintreten. Die beiden Ereignisse sind also disjunkt (d.h., haben keine Schnittmenge). Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge beider Ereignisse ist also die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten. Die Einzelwahrscheinlichkeiten kann man aus der Tabelle ablesen: Die Zahl 8 wird mit der Wa. 0.08 gezogen. Die Zahl 10 wird mit der Wa. 0.12 gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das ursprüngliche Ereignis ist die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also 0.2 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

   b) **False**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.77 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

   c) **True**. Am einfachsten arbeitet man hier mit dem Gegenereignis (die gezogene Zahl ist 6). Die Lösung ist dann 1 minus die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl 6 ist, ist gemäss Tabelle 0.07 . Die Wahrscheinlich für das ursprüngliche Ereignis ist daher 0.93 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

   d) **True**. Zunächst berechnet man aus welchen Elementarereignissen das gesuchte Ereignis besteht und summiert anschliessend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse (siehe Tabelle). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 0.46 . Beachten Sie, dass das Laplace-Modell hier nicht angewendet werden kann, weil die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

2. a) **False**. Wenn die Wahrscheinlichkeit p ist, dann sind die odds $\frac{p}{1-p}$ und die log-odds $log(odds)$. Durch einfaches Umformen kann man also jede Grösse in jede andere Grösse umrechnen. Die richtige Lösung für die gesuchten odds ist also 0.667 .

   b) **False**. Auf Grund der Definitionen von Wahrscheinlichkeit, odds und logodds ergibt sich: $P(A^c) = 1 - P(A)$, $odds(A^c) = \frac{1}{odds(A)}$ und $logodds(A^c) = -logodds(A)$.

   c) **True**. Bei einem fairen Würfel ist jede Zahl (d.h. jedes Elementarereignis) gleich wahrscheinlich. Daher können wir das Laplace-Modell verwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Zahl in der Menge 1,3,4 gewürfelt wird. Es gibt 6 mögliche Fälle. Die Menge enthält 3 Zahlen, also gibt es 3 günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstige/ Anzahl mögliche) ist also 0.5 . Gemäss den Definitionen sind die odds daher 1 und die log-odds 0 .

   d) **False**. Beachten Sie zunächst, dass $P(A^c) = 1 - P(A)$. Falls $P(A) > P(A^c)$ ist also $P(A) > 1 - P(A)$ und somit sind die $odds(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} > 1$. Per Definition sind dann die $logodds(A) = log(odds(A)) > 0$.

3. a) **False**. Gesucht ist $P(A \cap B)$. Die Menge $A \cap B$ umfasst die Elemente (1). Mit dem Laplace-Modell ist die Wahrscheinlichkeit (Anzahl günstig/möglich) also $\frac{1}{6} \approx 0.167$.

   b) **True**. Gesucht ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.75$.

   c) **True**. Gesucht ist $P(B|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{0.5}{0.667} = 0.75$. Daher ist $P(B|A^c) = 0.75$.

   d) **False**. Gesucht ist $P(B^c|A^c)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet man: $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.167}{0.667} = 0.25$. Daher ist $P(B^c|A^c) = 0.25$.

4. a) **False**. Die Summe von zwei unabhängigen (!) Poissonverteilungen ist poissonverteilt. Falls man die Unabhängigkeitsannahme weglässt, stimmt die Aussage nicht mehr.

   b) **False**. Jeder Gewinn zwischen 1 und 100 ist gleich wahrscheinlich. Also ist die uniforme Verteilung angebracht.

   c) **False**. Die Situation entspricht einer Losbude, bei der Sie 80 Lose kaufen, wobei jedes Los unabhängig von den übrigen Versuchen mit Wa. 0.0009 gewinnt. Bei sehr kleinen Gewinnwahrscheinlichkeiten ist die Binomialverteilung praktisch identisch mit einer Poissonverteiung mit entsprechendem Erwartugnswert. Also lässt sich die gegebene Situation entweder mit einer Binomialverteilung oder mit einer Poissonverteilung gut beschreiben.

d) **False**. Die Anzahl Anrufe pro Stunde sind nicht nach oben beschränkt (wie z.B. bei der Binomial- oder der hypergeometrischen Verteilung). Zudem sind die möglichen Anzahlen unterschiedlich wahrscheinlich. Daher bietet sich die Poissonverteilung als Modell an.

5. a) **True**. Falls es extreme Ausreisser gibt, kann dies vorkommen.

b) **Falsch**. Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert verteilt.

c) **True**. Falls es keinen linearen Zusammenhang gibt, ist die Korrelation mit Sicherheit null.

d) **True**. Die Steigung des linearen Zusammenhangs ist negativ . Also ist auch die Korrelation negativ .

6. a) **True**. Gesucht ist $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ mit $a = -4.5$ und $b = 1$. Daraus ergibt sich $E(Y) = -4.5 + 1 \cdot (-4.2) \approx -8.7$.

b) **True**. Gesucht ist $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ mit $b = 3.9$. Daraus ergibt sich $Var(Y) = 15.21 \cdot 1 \approx 15.21$.

c) **False**. Gesucht ist $\sigma_Y = \sqrt{Var(a + b \cdot X)} = \sqrt{b^2 \cdot Var(X)} = |b| \cdot \sqrt{Var(X)}$ mit $b = -4.9$ und $\sigma_X \approx 0.774597$. Daraus ergibt sich $\sigma_Y = 4.9 \cdot 0.774597 \approx 3.796$.

d) **True**. Gesucht ist $q_Y = a + b \cdot q_X$ mit $a = -3.6$ und $b = 0.8$. Daraus ergibt sich $q_Y = -3.6 + 0.8 \cdot (-3.7) \approx -6.56$.

7. a) **False**. Wurzel-n-Gesetz: "Für doppelte Genauigkeit braucht man viermal so viele Daten."

b) **False**. Es gilt immer $E[S_n] = nE[X_i]$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i)$.

c) **True**. $T \sim N(n\pi_0, n\pi_0(1 - \pi_0))$

d) **False**. Definiere die Zeit, solange das $i-$te Stück Traubenzucker noch Energie gibt in Minuten als S_i. Der Erwartungswert ist $E[S_i] = 10$ und die Varianz $Var[S_i] = 5^2$. Die "Verpflegungsdauer" von $n = 28$ Traubenzuckerstücken kann geschrieben werden als

$$S := \sum_{i=1}^{28} S_i.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt approximativ: $S \sim \mathcal{N}(n \cdot 10, n \cdot 5^2) = \mathcal{N}(280, 700)$. Deshalb können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(S > 240) &= P\left(\frac{S - 280}{\sqrt{700}} > \frac{240 - 280}{\sqrt{700}}\right) \\ &= P(Z > -1.511858) = P(Z \leq 1.511858) \\ &\approx 0.934715 < 0.95. \end{aligned}$$

8. a) **Richtig**. Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze (bei einem Binomialtest kann der Verwerfungsbereich oftmals nicht exakt so gewählt werden, dass das Signifikanzniveau erreicht wird) für die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit, die Münze als gefälscht zu bezeichnen obwohl sie fair ist, ist also höchstens 5 %.

b) **Falsch**. Bei gegebenem Signifikanzniveau kann die Macht nur dann berechnet werden, wenn die genaue Verteilung der Teststatistik unter der Alternativhypothese bekannt ist. Das wurde hier aber nicht angegeben, also kann die Macht nicht berechnet werden.

c) **Falsch**. Betrachten wir ein Beispiel. Angenommen, der Verwerfungsbereich auf dem 5% Signifikanzniveau ist $K_{0.05} = \{8, 9, 10\}$ und der Verwerfungsbereich auf dem 1% Signifikanzniveau ist $K_{0.01} = \{9, 10\}$. Angenommen, der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 8$. Dann können wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen, aber nicht auf dem 1% Signifikanzniveau. Wenn der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 10$ ist, dann können wir sowohl auf dem 5% als auch auf dem 1% Signifikanzniveau verwerfen. Daraus ziehen wir folgenden Schluss: Nur weil wir auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen können, heisst das noch lange nicht, dass wir auch auf dem strikteren 1% Signifikanzniveau verwerfen können. Je nach Wert der Teststatistik könnte das zwar tatsächlich so sein, es muss aber nicht so sein.

d) **Falsch**. Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, vergrössert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (und umgekehrt). Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art gerade eins minus die Macht. Die richtige Aussage lautet also: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art abnimmt, dann nimmt die Macht (bei konstanter Stichprobengrösse) zu .

9. a) **Falsch**. Der einseitige Binomialtest kann zwei Formen der Alternative haben: $H_A : p < p_0$ und $H_A : p > p_0$. Angenommen $H_A : p < p_0$. Dieser einseitige Test wird eine kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für grössere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Nehmen wir nun an, dass $H_A : p > p_0$. Dieser einseitige Test wird eine grössere Erfolgswahrscheinlichkeit als p_0 mit einer grösseren Macht erkennen als der zweiseitige Binomialtest. Für kleinere Erfolgswahrscheinlichkeiten als p_0 hat er aber praktisch keine Macht. Je nach konkreter Alternative ist die Macht des einseitigen Binomialtests also grösser oder kleiner als die Macht des zweiseitigen Binomialtests, daher hat der einseitige Binomialtest manchmal eine grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest.

b) **Richtig**. Die beobachtete Anzahl Erfolge ist relativ gross. Wenn man sie noch grösser macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) kleiner. Wenn man sie allerdings kleiner macht, wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert oder etwas noch extremeres (grosse oder kleine Werte) grösser. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass man $x = 27$ Erfolge oder mehr beobachtet 0.02224.

c) **Richtig**. Die Stichprobengrösse ist in der Aufgabenstellung nicht explizit gegeben, entspricht aber der Obergrenze des "oberen" Verwerfungsbereichs. Also ist $n = 15$. Angenommen, $Y \sim Bin(n = 15, p = 0.85)$ und die Menge $V = \{0, 1\} \cup \{13, 14, 15\}$. Dann ist die Macht gleich $P(Y \in V) = 0.604$.

d) **Falsch**. Wenn die beobachtete Teststatistik im Verwerfungsbereich ist, dann kann die Nullhypothese verworfen werden. Bei dieser Entscheidung irren wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit, die höchstens so gross wie das Signifikanzniveau α ist.

10. a) **Richtig**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.2$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 18, p = 0.2)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \geq 3) = 0.729$.

b) **Falsch**. Gesucht ist die Macht für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.9$. Die Macht ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 33, p = 0.9)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y \leq 4) = 0$.

c) **Falsch**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 16, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y < 3) = 0$.

d) **Richtig**. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art für die konkrete Alternative $H_A : p = 0.6$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht gerade der Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung nicht in den Verwerfungsbereich fällt, falls die konkrete Alternativhypothese wahr ist. Angenommen $Y \sim Bin(n = 13, p = 0.6)$. Dann lässt sich die Macht berechnen als $P(Y > 3) = 0.992$.

11. a) **Richtig**. Der P-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem ein Hypothesentest gerade noch verwerfen würde. In diesem Fall ist der P-Wert kleiner als das geforderte Signifikanzniveau. D.h., der Hypothesentest kann verworfen werden.

b) **Richtig**. Per Definition des P-Werts gilt: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) **Richtig**. Die Gewinnwahrscheinlichkeit p_0 unter der Nullhypothese befindet sich nicht im (zweiseitigen) 95%-Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit. D.h., dass der entsprechende Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% verwirft. Also muss der P-Wert kleiner gleich dem Signifikanzniveau sein.

d) **Falsch**. Mit der Normalapproximation berechnet sich das 95%-Vertrauensintervall gemäss der Formel: $\frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mit den Werten $x = 7$ und $n = 33$ ergibt sich eine Untergrenze von 0.073 und eine Obergrenze von 0.352.

Gruppe C

12. a) **Falsch**. Der Verwerfungsbereich beim zweiseitigen Binomialtest besteht aus einem "unteren" und einem "oberen" Bereich. Für jeden der beiden Bereiche gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik in dem Bereich liegt, falls die Nullhypothese korrekt ist, ist $\frac{\alpha}{2} = 3.5\%$. Zunächst der "untere" Bereich: Wir suchen den grössten Wert kL, für den gilt: $P(X \leq kL) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kL = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.012 \leq 0.035$ und $P(X \leq 3) = 0.044 > 0.035$. Nun berechnen wir den "oberen" Bereich: Dazu suchen wir den kleinsten Wert kU, für den gilt: $P(X \geq kU) \leq 0.035$. Dieser Wert ist $kU = 12$. Es gilt $P(X \geq 12) = 0.02 \leq 0.035$ und $P(X \geq 11) = 0.053 > 0.035$. Der korrekte Verwerfungsbereich umfasst also die Bereiche $\{0, ..., 2\}$ und $\{12, ..., 20\}$.

b) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 6, p = 0.4)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung $P(X = 1) = 0.186624$. "Extremer" sind alle anderen Ereignisse mit einer kleineren Auftretenswahrscheinlichkeit. Das umfasst die Ereignisse: 0,1,4,5,6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten für all diese Ereignisse zusammenzählt, kommt man auf einen P-Wert von 0.412.

c) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 10, p = 0.5)$. Der P-Wert berechnet sich als $P(X \leq 3) = 0.172$.

d) **Falsch**. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder ein noch extremeres (im Sinne der Alternative) Ereignis, falls die Nullhypothese stimmt. Angenommen $X \sim Bin(n = 18, p = 0.1)$. Der P-Wert berechnet sich also als $P(X \geq 15) = 0$.

13. a) **Falsch**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 8$. Es gilt $P(X \geq 9) = 0.015 \leq 0.07$ und $P(X \geq 8) = 0.057 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.158 > 0.07$.

b) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 7$. Es gilt $P(X \geq 7) = 0.039 \leq 0.05$ und $P(X \geq 6) = 0.118 > 0.05$.

c) **Richtig**. Wir suchen den kleinsten Wert k, für den gilt: $P(X \geq k) \leq 0.07$. Dieser Wert ist $k = 6$. Es gilt $P(X \geq 6) = 0.025 \leq 0.07$ und $P(X \geq 7) = 0.099 > 0.07$.

d) **Falsch**. Wir suchen den grössten Wert k, für den gilt: $P(X \leq k) \leq 0.05$. Dieser Wert ist $k = 2$. Es gilt $P(X \leq 2) = 0.027 \leq 0.05$ und $P(X \leq 3) = 0.093 > 0.05$.

14. a) **True**. Das arithmetische Mittel der Daten ist $\overline{x}_n = 1.5625$. Die empirische Standardabweichung der Daten ist $\hat{\sigma}_X = 8.82683$. Damit ergibt sich der Wert der Teststatistik als $t = \frac{\overline{x}_n - 0}{\hat{\sigma}_X/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x}_n \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1.5625 \cdot 2.82843}{8.82683} \approx 0.501$.

b) **False**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{7;0.975} \approx 2.365$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.365] \cup [2.365; \infty)$.

c) **True**. Die Nullhypothese kann genau dann verworfen werden, wenn der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich ist.

d) **False**. Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 8$, $\alpha = 0.05$, $\overline{x}_n \approx 1.5625$, $\hat{\sigma}_X \approx 8.82683$ und $t_{7;0.975} = 2.364624$. Damit ergibt sich als 95 %-Vertrauensintervall: $[-5.817; 8.942]$.

15. a) **False**. Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim N(0, 1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu) \cdot \sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0, 1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $N(0, 1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu) \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das Schätzen der Standardabweichung eingeführt wurde.

b) **True**. Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Also ist $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.05$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man $P(Z \leq 2) \approx 0.9772$. Deshalb ist $P(Z > 2) \approx 0.0228$. $P(X > 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

c) **True**. Das 95% Vertrauensintervall enthält per Definition alle Werte von μ_0, bei denen der zweiseitige t-Test $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem 5% Niveau nicht verwerfen würde. Für alle Werte ausserhalb des Vertrauensintervalls würde die Nullhypothese verworfen werden. Da die 0 nicht im Vertrauensintervall liegt, würde also die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ verworfen werden.

d) **True**. Der P-Wert ist nach Definition die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung oder etwas noch extremeres, falls die Nullhypothese stimmt. Unter der Nullhypothese hat die Teststatistik T die Verteilung $T \sim t_{n-1} = t_7$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 0.263$. Der P-Wert berechnet sich also als $p = P(T \geq t) + P(T \leq -t) = 2 * P(T \geq t)$ (die letzte Umformung stimmt, weil die t-Verteilung symmetrisch um 0 ist). Weiter gilt $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$ (beachten Sie, dass für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt: $P(T \leq t) = P(T < t)$, weil $P(T = t) = 0$). Um den P-Wert zu berechnen, müssen wir also $P(T \leq 0.263)$ berechnen. Aus der Tabelle zur t-Verteilung im Skript findet man (Zeile mit $df = 7$): $P(T \leq 0.263) \approx 0.6$. Für den P-Wert ergibt sich daraus: $p = 2 * P(T \geq t) = 2 * (1 - P * (T \leq t)) = 2 * (1 - 0.6) \approx 0.8$.

16. a) **True**. Mit den gegebenen Daten lässt sich die gepoolte Varianz wie folgt berechnen: $S_{pool}^2 = \frac{(n_1-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_2-1)\hat{\sigma}_y^2}{n_1+n_2-2} \approx 62.761$.

b) **True**. Aus a) haben wir $S_{pool}^2 = 62.761$ (oder 62.76109 ungerundet). Die Teststatistik berechnet sich dann mit: $T = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{S_{pool} \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \approx 0.939$.

c) **True**. Der zweiseitige Verwerfungsbereich hat die Form $(-\infty; -t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$. Mit $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15;0.995} \approx 2.947$ ergibt sich der Verwerfungsbereich: $(-\infty; -2.947] \cup [2.947; \infty)$.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 16$. Angenommen $T \sim t_{16}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 16$): $t_{0.995} = 2.921$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehört zur Teststatistik $t = 2.921$ der P-Wert $p = 2 \cdot 0.005 = 0.01$.

17. a) **True**. Zu jeder Blutplättchenmenge vor dem Rauchen gehört die Blutplättchenmenge der selben Person nach dem Rauchen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

b) **True**. Ungleiche Anzahl in den Gruppen. Zu einem Blutdruck aus der Behandlungsgruppe gehört kein eindeutig bestimmter Wert aus der Kontrollgruppe. Es handelt sich also um ungepaarte Stichproben.

c) **True**. Obwohl die beiden Gruppen gleich gross sind, handelt es sich um ungepaarte Stichproben: Zur Eisenmessung einer Fe^{2+}-Maus gehört keine eindeutig bestimmte Messung einer Fe^{3+}-Maus.

d) **True**. Am gleichen Ort wird mit beiden Geräten gemessen, d.h., jeder Messung mit dem einen Gerät lässt sich genau eine Messung mit dem anderen Gerät zuordnen. Es handelt sich also um gepaarte Stichproben.

18. a) **False**. Der t-Wert fuer den geschätzten Achsenabschnitt (Quotient aus Schätzer und Standard-Fehler) ist 0.334.

b) **False**. Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $Estimate \pm c * Std.Error$. Für das approximative 95%-Vertrauensintervall ist $c = 2$. Also ergibt sich für die Obergrenze der Wert 1.37.

c) **False**. Der t-value ist der Quotient aus Estimate und Std.Error. Der gesuchte Wert ist 10.035.

d) **True**. Die Anzahl Freiheitsgrade der t-Verteilung berechnet sich aus der Anzahl Datenpunkte (n) minus die Anzahl geschätzter Koeffizienten (hier 2 Stück: β_0 und β_1), also $df = n - 2 = 21 - 2 = 19$.

19. a) **False**. Falls man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y gemäss unserem Modell gerade um den Wert der Steigung (β_1). Dieser Wert steht in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Tabelle und beträgt 3.151.

b) **True**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 1.315 \cdot x$. Wenn man $x = 2.409$ einsetzt, erhält man $y = 3.364$.

c) **False**. Mit den obigen Angaben lautet die Modellgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x = 0.196 + 3.775 \cdot x$. Wenn man $y = 1.239$ einsetzt und nach x auflöst, erhält man $x = 0.276$.

d) **False**. Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alles Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.

20. a) **True**. Die Daten für diesen QQ-Plot stammen von einer linksschiefen Verteilung.

b) **False**. Die Daten füer diesen QQ-Plot stammen von einer bimodalen Verteilung.

c) **False**. Man kann nicht alle Modellannahmen anhand des Tukey-Anscombe Plots überprüfen. Der Plot zeigt ausserdem, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

d) **True**. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.