Serie 5

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

nur einen einzigen reellen Eigenwert besitzt und berechnen Sie die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kontrollieren Sie, dass der Vektor v ein Eigenvektor von A ist. Zeigen Sie anschliessend, dass der Vektor auch ein Eigenvektor der inversen Matrix A^{-1} sein muss (geht auch ohne Ausrechnen von A^{-1}). Welcher Eigenwert von A^{-1} gehört zu diesem Eigenvektor?

Bemerkung: Dies gilt allgemein, Eigenvektoren einer invertierbaren Matrix sind automatisch Eigenvektoren der inversen Matrix und umgekehrt. Was mit den dazugehörigen Eigenwerten passiert, sehen Sie in der Aufgabe.

Aufgabe 2

Seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von T Eigenvektoren von A sind.

b) Zeigen Sie, dass $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie $D = T^{-1}AT$. Was stellen Sie fest?

d) Lösen Sie $D = T^{-1}AT$ nach A auf und berechnen Sie damit $A^2 = A \cdot A$. Was sieht die Matrix A^{99} aus?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2.

b) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2.

c) Ist x ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, dann ist x ein Eigenvektor der Matrix $A + B$.

d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

e) Jede 2×2-Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.

f) Jede Matrix mit positiver Determinante hat mindestens einen positiven Eigenwert.

g) Jede quadratische Matrix mit reellen Einträgen hat reelle Eigenwerte.

h) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Hinweis: Drei Aussagen sind richtig, fünf sind falsch. Bei falschen Aussagen reicht ein Gegenbeispiel als Begründung.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 28.03.2017 / Mittwoch, den 29.03.2017 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.

Präsenz der Assistenzgruppe

Zweimal in der Woche beantworten Doktoranden in einer Präsenz Fragen: Montag und Donnerstag von 12 bis 13 Uhr im HG G 32.6.