Lösung 1

Musterlösung zum Übungsblatt 1 vom 19.2.2018

1 Allgemeine Betrachtungen zu Transportprozessen

1.

   a) Wärme fliest schneller vom Fuss (37 °C) auf den Steinboden als beim Holzboden. Die relevante Transportkonstante (Skript S. 7) für das 1. Fick'sche Gesetz ist die materialabhängige Wärmeleitfähigkeit, welche für Stein höher ist als für Holz. Zusätzlich und nicht direkt abhängig von der Diffusion, hat der Steinboden auch eine höhere Wärmekapazität und darum muss mehr Wärme von unserem Fuss in den Steinboden fliessen, um die Temperatur des Steinbodens zu erhöhen. Auch dieser Beitrag führt dazu, dass wir nicht gerne auf Steinboden barfuss gehen.

   b) Die Beobachtung, dass die Entropie eines isolierten Systems im Nichtgleichgewicht nur zunehmen kann erklärt das negative Vorzeichen im 1. Fick'schen Gesetz. Mit anderen Worten, Masse, Wärme, oder Ladungsfluss sind immer gegen den Gradienten der Transportgrösse und das System entwickelt sich in Richtung des thermodynamischen Gleichgewichtes. Der Transportprozess Richtung Gleichgewicht ist also entropiegetrieben.

   c) Der Temperaturgradient $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$ über der Tassenwand ist grösser draussen als im Haus und somit ist der Wärmefluss grösser und der Glühwein wird draussen schneller kalt.

2.

   a) Diffusionskoeffizient

   b) Elektrische Leitfähigkeit

2 Integration

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale

1. Mittels Faktor- und Potenzregel erhält man

$$\int c(2+z^2)z^{n-1}\,\mathrm{d}z = \frac{2c}{n}\cdot z^n + \frac{c}{n+2}\cdot z^{n+2} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Anmerkung : Diese Formel gilt für alle Zahlen ausser $n=0$, $n=-2$, da damit $\int c\cdot z^{-1}\,\mathrm{d}z = c\int \frac{1}{z}\mathrm{d}z = c\cdot\ln z$ ist.

2. Unter Benützung von
$$a^z = e^{\ln a^z} = e^{z \cdot \ln a}$$
erhält man
$$\begin{aligned} \int k a^z \mathrm{d}z &= k \int e^{z \cdot \ln a} \mathrm{d}z = \frac{k}{\ln a} e^{z \cdot \ln a} + C \\ &= \frac{k}{\ln a} \cdot a^z + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Mit $t = ay + b$ folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} t = a \Leftrightarrow \frac{1}{a} \mathrm{d}t = \mathrm{d}y$, und mit der Substitutionsregel
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ay+b} \mathrm{d}y &= \int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{a} \cdot \ln t + C,\ C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \ln |ay + b| + C \end{aligned}$$

4. Zum Lösen dieses Integral verwendet man partielle Integration. Sei $u = \sin(ax)$ und $v' = \sin(ax)$. Dann ist $u' = a \cdot \cos(ax)$ und $v = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax)$. Eingesetzt in
$$\int u(x) \cdot v'(x) \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \mathrm{d}x$$
ergibt das
$$\begin{aligned} \int \sin^2(ax) \mathrm{d}x &= \int \sin(ax) \cdot \sin(ax) \mathrm{d}x \\ &= -\sin(ax) \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos(ax) - \int (-\frac{1}{a} \cos(ax)) \cdot (a \cdot \cos(ax))\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a} \sin(ax) \cdot \cos(ax) + \int \cos^2(ax) \mathrm{d}x \end{aligned}$$
Mit $\cos^2(ax) = 1 - \sin^2(ax)$ folgt
$$\begin{aligned} \int \sin^2(ax) \mathrm{d}x &= -\frac{1}{a} \sin(ax) \cdot \cos(ax) + \int \left(1 - \sin^2(ax)\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a} \sin(ax) \cdot \cos(ax) + \int 1 dx - \int \sin^2(ax) \mathrm{d}x \\ \Rightarrow 2 \int \sin^2(ax) \mathrm{d}x &= -\frac{1}{a} \sin(ax) \cdot \cos(ax) + x + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Einsetzen der Integrationsgrenzen liefert:
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2(ax) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{a} \sin(ax) \cdot \cos(ax) + x \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} \sin(a\pi) \cdot \cos(a\pi) + \pi + \frac{1}{a} \sin(0) \cdot \cos(0) - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi \quad \text{as } a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3 Partielle Ableitungen, Produktregel, Kettenregel

1. Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y) = y \cdot e^{ax} + \frac{x}{y} + y\cos x - y\sin y$ sind

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y &= y \cdot a \cdot e^{ax} + \frac{1}{y} - y \cdot \sin x \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_y &= y \cdot a^2 \cdot e^{ax} - y \cdot \cos x \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_x &= \frac{2x}{y^3} - 2 \cdot \cos y + y \cdot \sin y
\end{aligned}$$

2. Das molare Volumen V_m nach p und T abgeleitet ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V_m}{\partial T}\right)_p &= \frac{R}{p} \\
\left(\frac{\partial V_m}{\partial p}\right)_T &= -\frac{RT}{p^2}
\end{aligned}$$

4 Taylor Reihe

1. Für die Ableitungen des natürlichen Logarithmuses findet man:

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(\ln x)'' &= -\frac{1}{x^2} \\
(\ln x)''' &= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die auf dem Aufgabenblatt gegebene Formel

$$\begin{aligned}
\ln x &\approx \ln(1) + \frac{\frac{1}{1}}{1!}(x-1) + \frac{-\frac{1}{1^2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{2}{1^3}}{3!}(x-1)^3 \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= 0.6931 \\
f_2(2) &= \frac{1}{2} = 0.5 \\
f_3(2) &= \frac{5}{6} \approx 0.833
\end{aligned}$$

Wenn man die Reihe fortsetzen würde, kämen Terme der Form $\pm\frac{1}{k}$ dazu (da die Klammern $(x-1)$ für x=2 immer 1 ergeben). Der ganze Ausdruck konvergiert alternierend gegen die exakten Ausdruck für $\ln 2$.

2. Für die jeweiligen Ableitungen findet man:

$$\begin{aligned} g'(x) &= n'(x) \cdot \cos x - n(x) \cdot \sin x \\ g''(x) &= n''(x) \cdot \cos x - 2n'(x) \cdot \sin x - n(x) \cdot \cos x \\ h'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ h''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Somit erhält man also

$$\begin{aligned} g(x) = n(x) \cdot \cos x &\approx n(0) \cdot \cos(0) + \frac{n'(0) \cdot \cos(0) - n(0) \cdot \sin(0)}{1!}(x-0) \\ &\quad + \frac{n''(0) \cdot \cos(0) - 2n'(0) \cdot \sin(0) - n(0) \cdot \cos(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= n(0) + n'(0) \cdot x + \frac{(n''(0) - n(0))}{2} \cdot x^2 \\ h(x) = \ln(1+x) &\approx \ln(1+0) + \frac{\frac{1}{1+0}}{1!}(x-0) - \frac{\frac{1}{(1+0)^2}}{2!}(x-0)^2 \\ &= x - \frac{x^2}{2!} \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$