# Lösungsvorschläge zur Serie 2

## Aufgabe 1

Als erstes schreiben wir die angegebenen Gleichungssysteme in der Matrixform $(A|c)$. Mit dem Gauss-Verfahren formen wir diese dann in ein äquivalentes Gleichungssystem $(A^*|c^*)$ in Trapezform um. An der Trapezform können wir das Lösungsverhalten untersuchen und anschliessend allenfalls das Gleichungssystem sukzessive von unten nach oben lösen.

a)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-8Z_1]{Z_2+3Z_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & -10 & -18 & 2 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+2Z_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 8 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 3$. Da es sich um ein $(3,4)$-System handelt, existieren also unendlich viele Lösungen mit $4-3=1$ Parametern. Wir wählen $x_4 = t \in \mathbb{R}$ als Parameter und rechnen von unten nach oben

$$x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}t \qquad x_2 = \frac{16}{5} - t \qquad x_1 = \frac{7}{15} - \frac{1}{3}t.$$

b)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_3-5Z_1 \\ Z_4-2Z_1}]{Z_2+2Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3+3Z_2]{Z_4-2Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4-\frac{1}{4}Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A) = 3 \neq \mathrm{Rg}(A|c) = 4$. Das System besitzt also keine Lösungen.

c)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+4Z_2]{Z_1+2Z_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2-21Z_4]{Z_3-34Z_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4-3Z_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -98 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 4$. Da es sich um ein $(4,4)$-System handelt, existiert also genau eine Lösung. Wir rechnen von unten nach oben

$$x_4 = 0 \qquad x_3 = 1 \qquad x_2 = -2 \qquad x_1 = 5.$$

d)

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+2Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 2$. Da es sich um ein $(3,3)$-System handelt, existieren also unendlich viele Lösungen mit $3 - 2 = 1$ Parametern. Wir wählen $x_3 = t \in \mathbb{R}$ als Parameter und rechnen von unten nach oben

$$x_2 = -3t \qquad x_1 = 3t.$$

## Aufgabe 2

Die fraglichen Gleichungssysteme sind homogen und quadratisch. Somit besitzen sie genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der gegebenen Matrix verschwindet (ist die Determinante ungleich null, dann wäre die einzige Lösung die triviale).

a) Hier gilt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 1.$$

Also ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \frac{i}{\sqrt{2}}$ oder $\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2}}$.

b) Die Determinante ist

$$\det\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2+\lambda)(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2+1),$$

wobei wir zweimal nach der ersten Zeile entwickelt haben. Also hat das Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\lambda = \pm 2$ oder $\lambda = \pm i$.

## Aufgabe 3

a) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(2(\lambda-1)+2\cdot 3) + 1\cdot(0\cdot 3 - 1\cdot(\lambda-1)) = 2\lambda^2+3\lambda+1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\det(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

b) (i) Das homogene LGS $Ax = 0$ ist genau dann nur trivial lösbar (da quadratisch), wenn $\det(A) \neq 0$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist.

(ii) Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist. Anwendung des Gauss-Verfahrens liefert im Falle $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_3+\frac{3}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -t, \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{cases}$$

und im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_3+2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t, \\ x_2 = -\frac{4}{3}t, \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{cases}$$

c) Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(A) \neq 0$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ gilt.

d) Wir setzen $x_0$ in das LGS $Ax_0 = b$ ein und prüfen nach, dass effektiv Gleichheit gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

e) Sei $\widetilde{x}$ eine weitere Lösung des inhomogenen LGS. Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{x} - x_0$ eine Lösung des homogenen LGS ist. Dazu müssen wir die Gleichung $A(\tilde{x} - x_0) = 0$ nachprüfen. Wegen der Distributivität der Matrixmultiplikation (siehe Kapitel 8.1 und bemerke, dass Vektoren insbesondere auch Matrizen sind) folgt

$$A(\widetilde{x} - x_0) = A\widetilde{x} - Ax_0 = b - b = 0.$$

Also erfüllt $x^{hom} = \widetilde{x} - x_0$ das homogene LGS.

f) Falls $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$, ist $\det(A) \neq 0$ und die Lösung $x_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ somit eindeutig. Siehe auch (c). Es gibt keine weiteren Lösungen.

In den anderen Fällen können wir den Hinweis auf dem Aufgabenblatt benutzen:
Der Vektor $x_0$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS $Ax = b$. Im Falle $\lambda = -1$ haben die Lösungen des homogenen LGS die Form $t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$, siehe Teil (b). Das heisst die Lösungen des inhomogenen LGS $Ax = b$ haben die Form

$$x = x_0 + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

Analog mit Teil (b) ist für $\lambda = -\frac{1}{2}$ die allgemeine Lösung

$$x = x_0 + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ -4t \\ 3t - 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Alternativ finden wir die Lösungen des jeweiligen inhomogenen LGS auch mit dem Gauss-Verfahren.