# Musterlösung Übung 2

## Aufgabe 1: Zustandsfunktionen

a) Die ideale Gasgleichung lautet $V = nRT/p$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{T,p} \mathrm{d}n + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{n,T} \mathrm{d}p \\ &= \frac{RT}{p}\mathrm{d}n + \frac{nR}{p}\mathrm{d}T - \frac{nRT}{p^2}\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{1.1}$$

b) Da d$V$ ein totales Differential ist, ist jedes beliebige Kreisintegral davon gleich Null. Wir verwenden die Regeln auf Seite 23 im Skript. Nach dem Satz von Schwarz:

$$\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p}\right]_{n,T} = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{n,T}\right]_{n,p}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p}\right]_{n,T} = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{nR}{p}\right)\right]_{n,T} = \frac{-nR}{p^2} \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{n,T}\right]_{n,p} = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right)\right]_{n,p} = \frac{-nR}{p^2}$$

Das Differential $\mathrm{d}w = -p\mathrm{d}V = -p\mathrm{d}V + 0\mathrm{d}p$ ist nach dem Satz von Schwarz kein totales Differential ($\frac{\partial p}{\partial p} = 1 \neq \frac{\partial 0}{\partial V}$). Deswegen ist das Integral $\oint -p\mathrm{d}V$ wegabhängig und nicht notwendigerweise gleich Null.

## Aufgabe 2: Thermischen Ausdehnung und Kompressibilität

a) Starten wir mit der Definition von $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_{p,n}(V) \tag{2.1}$$

und substituieren anschliessend $V = \frac{nRT}{p}$

$$= \frac{p}{nRT}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_{p,n}\left(\frac{nRT}{p}\right) = \frac{p}{nRT}\left(\frac{nR}{p}\right) \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{T} \tag{2.3}$$

und ebenso für $\kappa_T$:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_{p,n}(V) \tag{2.4}$$

$$= -\frac{p}{nRT}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_{p,n}\left(\frac{nRT}{p}\right) = -\frac{p}{nRT}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{p} \tag{2.6}$$

b) Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist unabhängig vom Druck und der Kompressibilitätskoeffizient ist unabhängig von der Temperatur. Wenn die Temperatur eines Gases steigt, wird die Änderung des Volumens, welche von einer spezifischen Temperaturänderung resultiert, kleiner. Somit würde ein Temperaturanstieg von 1K eines Gases bei $T = T_1$ zu einer Volumenänderung führen, welche (*ungefähr) zweimal so gross ist wie dasselbe Volumen bei $T = 2T_1$, ungeachtet vom Druck. (*diese Annäherung ist gültig bei $\Delta T \ll T$)

## Aufgabe 3: Zustandgsleichung des idealen Gases

Nach der Gleichung des idealen Gases $pV = nRT$. Da beide Volumina geschlossen sind, bleibt $n_1$ sowie $n_2$ konstant. Das Gesamtvolumen bleibt konstant, deswegen gilt $V_{\text{total}} = V_1 + V_2 = V_1^{\text{e}} + V_2^{\text{e}}$. Am Ende ist die Umgebungstemperatur (und deswegen die Gleichgewichtstemperatur jedes Gases) verdoppelt: $T^{\text{e}} = 2T$. Somit gilt $p_1^{\text{e}} V_1^{\text{e}} = 2p_1V_1$ und $p_2^{\text{e}} V_2^{\text{e}} = 2p_2V_2$. Die Wand muss auch in der Gleichgewichtsposition sein, deswegen gilt $p_1^{\text{e}} = p_2^{\text{e}}$. Daraus folgt:

a)

$$\frac{p_1^{\text{e}} V_1^{\text{e}}}{p_2^{\text{e}} V_2^{\text{e}}} = \frac{V_1^{\text{e}}}{V_2^{\text{e}}} = \frac{2p_1V_1}{2p_2V_2} = \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{n_1RT}{n_2RT} = \frac{n_1}{n_2} \tag{3.1}$$

Beachten Sie, dass das Volumenverhältnis auch bei einer anderen Temperaturänderung gleich wäre. Aus dieser Gleichung und aus der Beziehung $V_1 + V_2 = V_1^{\text{e}} + V_2^{\text{e}}$ folgt

$$V_1^{\text{e}} = V_{\text{total}} - V_2^{\text{e}} = V_{\text{total}} - V_1^{\text{e}} \cdot \frac{n_2}{n_1} \tag{3.2}$$

$$V_1^{\text{e}} = \frac{V_{\text{total}}}{1 + \frac{n_2}{n_1}} = V_{\text{total}} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2} \tag{3.3}$$

gleichfalls

$$V_2^{\text{e}} = V_{\text{total}} \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2}. \tag{3.4}$$

b)

$$p_1^{\text{e}} = p_2^{\text{e}} = \frac{n_1RT^{\text{e}}}{V_1^{\text{e}}} = \frac{(n_1 + n_2)RT^{\text{e}}}{V_{\text{total}}} \tag{3.5}$$

Man sieht, dass der Enddruck die Endtemperatur $T^{\text{e}}$ als Faktor enthält. Das heisst, dass wenn sich die Temperatur anders ändert, erhält man einen anderen Gleichgewichtsdruck, aber die selben Endvolumina $V_1^{\text{e}}$ und $V_2^{\text{e}}$.