Schriftliche Prüfung
(120 Minuten)

Bemerkungen:

- Erlaubte Hilfsmittel: 10 hand- oder maschinengeschriebene A4 Seiten (=5 Blätter). Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Die Prüfung besteht aus insgesamt **20 Aufgaben**.
- Markieren Sie Ihre Antworten auf dem beiliegenden **Antwortblatt**.
- Jede Aufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Aufgabe können keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein.
- Für jede Aussage gibt es 1 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird, und 0 Punkte, falls sie falsch oder gar nicht markiert wird.
- Alle Rechnungsergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen gerundet.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den letzten Seiten dieser Prüfung.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!

Viel Erfolg!

Gruppe A

Binomialverteilung und -test

1. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einem Binomialtest stellt sich heraus, dass der Verwerfungsbereich der Teststatistik mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ gleich $K = \{3, ..., 7\}$ ist. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 7$. Die Nullhypothese kann auf dem 10% Signifikanzniveau verworfen werden.

b) Bei einem Binomialtest wird die Nullhypothese auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen. Dann wird die Nullhypothese auf dem 1% Signifikanzniveau sicher nicht verworfen.

c) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.23$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.23$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.54$). Der Zusammenhang von Fehler 1. und 2. Art ist dabei: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art zunimmt, dann nimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) zu.

d) Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.196 . Wenn man den Hypothesentest mit der gleichen Nullhypothese und mit den gleichen Daten nochmals auswerten würde, könnte man die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.07 verwerfen.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Binomialtests geht von 0.407 bis 0.828 . Wenn wir mit den gleichen Daten einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : \pi = 0.2$ auf dem 5% Signifikanzniveau durchführen würden, könnten wir die Nullhypothese verwerfen.

d) In einer Fabrik werden aus der Produktion zufällig 35 Produkte entnommen und kontrolliert. Wir stellen fest, dass 31 Produkte fehlerhaft sind. Damit können wir mit einem 95%-Vertrauensintervall die Fehlerwahrscheinlichkeit eingrenzen. Die Fabrikleitung ist mit der Breite von unserem Vertrauensintervall nicht zufrieden. Die Fabrikleitung möchte nun, dass wir unsere Untersuchung wiederholen, aber am Schluss ein 95%-Vertrauensintervall haben, das nur etwa halb so breit ist wie das ursprüngliche 95%-Vertrauensintervall. Wir brauchen in der neuen Stichprobe in etwa viermal so viele Produkte wie in der ersten Stichprobe.

3. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat manchmal grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest (bei gleichem Signifikanzniveau).

b) Bei einem einseitigen Binomialtest ($H_0 : \pi = 0.7$, $n = 38$, $H_A : \pi > 0.7$) wurden $x = 34$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.007$. Wenn x kleiner wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell grösser (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% besteht aus $\{0, ..., 10\}$ und $\{24, ..., 34\}$. Falls man das Signifikanzniveau grösser macht, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder mehr (aber nicht weniger) Elemente enthalten.

d) Angenommen die beobachtete Teststatistik ist im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese nicht stimmt .

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Macht eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) mit $n = 10$ haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{8, 9, 10\}$. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.4. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.771 .

c) Eine Phase-2 klinische Studie wurde mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) sorgfältig geplant. Folgende Parameter wurden fixiert: Die Erfolgswahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 und das Signifikanzniveau α. Zudem wurde eine konkrete Alternative formuliert (π_A), die mit einer vorgegebenen Macht $(1-\beta)$ detektiert werden soll. Dazu wurde die nötige Stichprobengrösse (n) bestimmt. Kurz bevor die Studie beginnt, wird allerdings bei der Übermittlung der Parameter ein Fehler entdeckt: Die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese π_A ist grösser als ursprünglich geplant. Beurteilen Sie: Es ist sichergestellt, dass die geforderte Macht auch mit den neuen Parametern eingehalten wird.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi < \pi_0$) ist: $\{0, ..., 4\}$. Die Stichprobengrösse ist 28. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird, ist ungefähr 1 .

5. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 15$. Wir möchten mit einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.5 beträgt ($H_0 : \pi = 0.5$). Der Verwerfungsbereich ist gegeben durch $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{12, 13, 14, 15\}$.

b) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 10$. Wir möchten mit einem einseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% prüfen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.3 beträgt ($H_0 : \pi = 0.3$) oder ob die Wahrscheinlichkeit grösser als 0.3 ist. Der Verwerfungsbereich ist dann gegeben durch $\{8, 9, 10\}$.

c) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 20$. Wir möchten mit einem Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 0.01% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.7 geeignet ist ($H_0 : \pi = 0.7$) oder ob ein $\pi < 0.7$ geeigneter ist. Der Test verwirft die Nullhypothese, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ annimmt.

d) Der beobachtete Wert der Teststatistik für den Test aus der vorherigen Teilaufgabe sei $x = 4$. Dann ist der P-Wert gleich $P_{H_0}(X \leq 4)$.

t-Test

6. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen).

a) Für 10 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind: $-9.33, 2.49, 6.51, 12.8, 14.43, -9.59, -8.02, 0.36, 10.35, -5.12$. Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.507.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.1 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty, -1.833] \cup [1.833, \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty, -0.582] \cup [0.582, \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = -2.019$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit den Daten aus Teilaufgabe a) ein 99%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall ist: $[-9.051, 10.027]$.

7. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum Wurzel-n Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir haben das Körpergewicht von 16 zufällig ausgewählten Personen in der Vorlesung bestimmt. Der Hersteller der Waage gibt an, dass jede Einzelmessung eine Standardabweichung von 0.2 kg hat. Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels der 16 Personen ist dann 0.2 kg.

b) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$, wobei $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2_{\overline{X}_n}$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $\mathcal{N}(0,1)$.

c) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann ist $P(X \leq 2)$ grösser als $P(Z \leq 2)$.

d) Bei einem zweiseitigen t-Test mit $n = 20$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 1.729. Der P-Wert ist dann etwa 0.1.

8. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 7$ Beobachtungen von X gemacht: $16.68, 13.21, 6.15, 7.17, 0.34, 3.34, -1.08$. Zudem haben wir $n_2 = 5$ Beobachtungen von Y: $8.4, 5.66, 20.03, 8.61, 15.29$. Beurteilen Sie: Der geschätzte Wert für S^2_{pool} liegt zwischen 39.373 und 39.376.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Tests mit obigen Daten ist -1.523 .

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01 . Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty, -2.964] \cup [2.964, \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 6$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.624$. Der P-Wert ist dann 0.1.

9. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) Eine Telekomunikationsfirma möchte zwei verschiedene WLAN Router auf ihre Reichweite testen. Dazu wählt sie 10 verschiedene Wohnungen aus. In jeder Wohnung wird der durchschnittliche Radius für beide Router berechnet, bei welchem noch 50% der maximalen Signalstärke erhalten ist. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

b) In einer Studie wurde untersucht, ob Autofahrer, welche über die Freisprechanlage am Handy telefonieren, genau so verkehrsgefährdend sind wie Autofahrer, welche bei Handygesprächen die Freisprechanlage nicht benutzen. Dazu wurden 2 Gruppen mit je 20 Personen in einem Autosimulator auf ihre Reaktionszeiten getestet. Eine Gruppe musste während dem Fahren per Handygespräch über die Freisprechanlage verschiedene Aussagen bewerten. Die andere Gruppe musste diese Aussagen per Handygespräch ohne Freisprechanlage bewerten. Es wurden die Reaktionszeiten auf kritische Verkehrssituationen gemessen. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

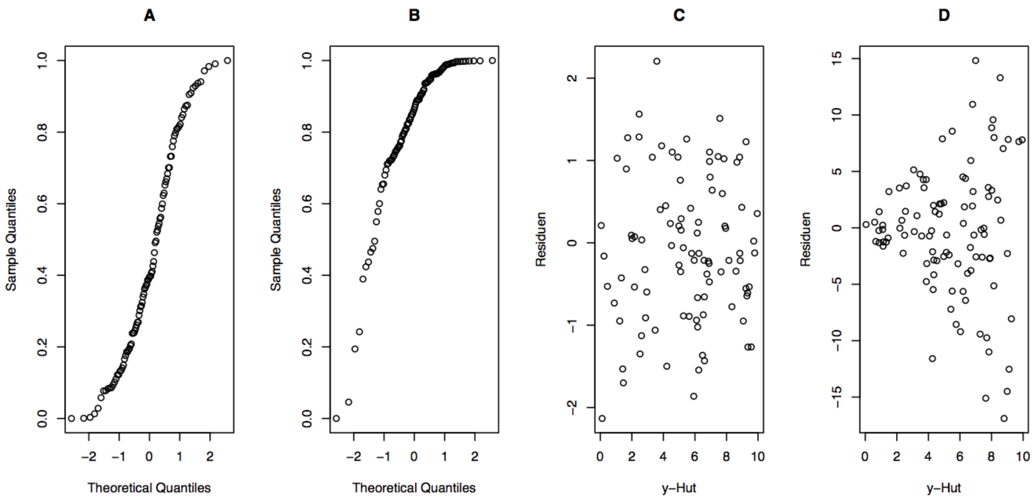
c) Es wurde ein neu entwickeltes Antibiotika gegenüber einem alten Antibiotika an infizierten Ratten getestet. Zwei verschieden grosse Gruppen von Ratten wurden unter ähnlichen Umständen mit dem jeweiligen Antibiotika behandelt und die Bakterienkonzentration wurde nach zwei Tagen gemessen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment sollte der Effekt von Multitasking auf die Lernauffassung untersucht werden. Dazu wurden 30 Studenten dazu aufgefordert zwei kleine Tests durchzuführen. Im ersten Test sollte man die Details von einem Text lernen und man musste gleichzeitig in unregelmässigen Abständen Bilder wegklicken um danach Fragen zu beantworten. Die Studenten konnten sich danach jeweils wieder von der Anstrengung erholen und haben dann den zweiten Test nach dem gleichen Prinzip, aber diesmal ohne Bilder, durchgeführt. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

Gruppe A

Lineare Regression

10. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer Normalverteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

11. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 34 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	1.134	0.264	4.297	0
x	3.856	0.143	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Gemäss der Tabelle ist der Standard-Fehler des geschätzten Achsenabschnitts gleich 4.297.

b) Die Untergrenze des zweiseitigen 95%-Vertrauensintervalls (exakt) für den Achsenabschnitt ist 0.506.

c) Die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ kann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 16.132 stehen.

12. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert 3.856 erhöht.

b) Angenommen Null ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 0.799 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Für $x = 2.402$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 2.459$ vorraus.

d) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 4.227 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 2.229$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.493$ verwendet.

Gruppe A

Gemischte Fragen

13. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit	0.04	0.15	0.13	0.01	0.12	0.09	0.09	0.15	0.14	0.08

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl strikt grösser als 5 ist, ist 0.67 .

b) Die Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu ziehen ist 0.50.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 4 und höchstens 5 ist, ist 0.2 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 6 oder mindestens 10 ist, ist 0.62 .

14. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen und verwenden Sie ausschliesslich den Logarithmus zur Basis e, wo nötig):

a) Angenommen die odds für ein Ereignis sind 0.333 , dann sind die log-odds für das gleiche Ereignis -1.0996 .

b) Angenommen die odds verringern sich für ein gewisses Ereignis, dann erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ereignis.

c) Die Wahrscheinlichkeit mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{3, 2\}$ zu würfeln, ist $\frac{1}{3}$.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1 .

15. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{3, 4, 5, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 2, 1, 3\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.25 .

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 1 .

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 0.655 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0 .

16. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

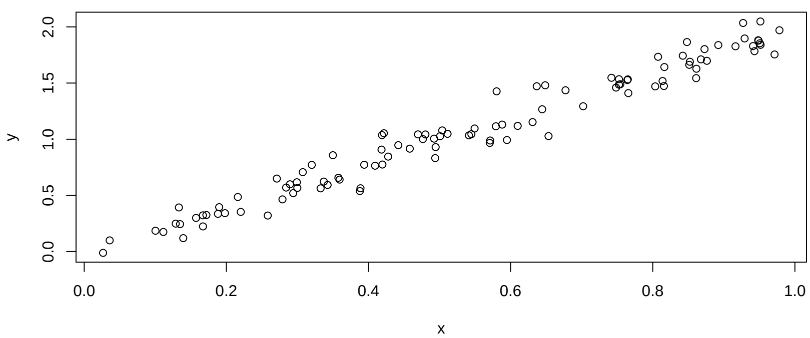
a) Eine Abteilung in der CIA hat 7 Männer und 5 Frauen. Nun soll für einen neuen Fall ein neues Einsatz-Team aus 4 Personen erstellt werden. Damit sich niemand benachteiligt fühlt, soll das Team zufällig erstellt werden. Die Verteilung der Anzahl Frauen in diesem Team lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

b) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

c) Wir werfen eine Münze dreimal und sehen das Ergebnis Kopf-Kopf-Zahl (KKZ). Angenommen, die drei Würfe sind unabhängig von einander und p ist die Wahrscheinlichkeit, dass 'Kopf (K)' geworfen wird. Der Maximum Likelihood Schätzer von p ist 0.744 .

d) Angenommen $X \sim Pois(10)$ und $Y \sim Pois(30)$. Zudem sind X und Y unabhängig. Dann gilt $X + Y \sim Pois(40)$.

17. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung (für manche Kennzahlen, z.B. das Quantil, gibt es verschiedene Varianten). Beurteilen Sie folgende Aussagen.



a) Das arithmetische Mittel ist unter Umständen ein Wert, der in der eigentlichen Stichprobe gar nicht beobachtet wurde.

b) Das arithmetische Mittel kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe werden.

c) Der Median entspricht immer einem Wert, der in der Stichprobe auch vorkommt.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ .

18. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -2.9$ und Varianz $Var(X) = 2$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.4 + 2.4 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -9.36$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -8.5$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 - 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 1.2$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 6.3$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -1.8 - 2.7 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 4.215$.

d) Die Zufallsvariable X hat 40 %-Quantil $q_X = -9.9$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.7 + 1.6 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 40 %-Quantil von Y gleich $q_Y = 26.73$.

19. Es seien $X_1, ..., X_n \sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

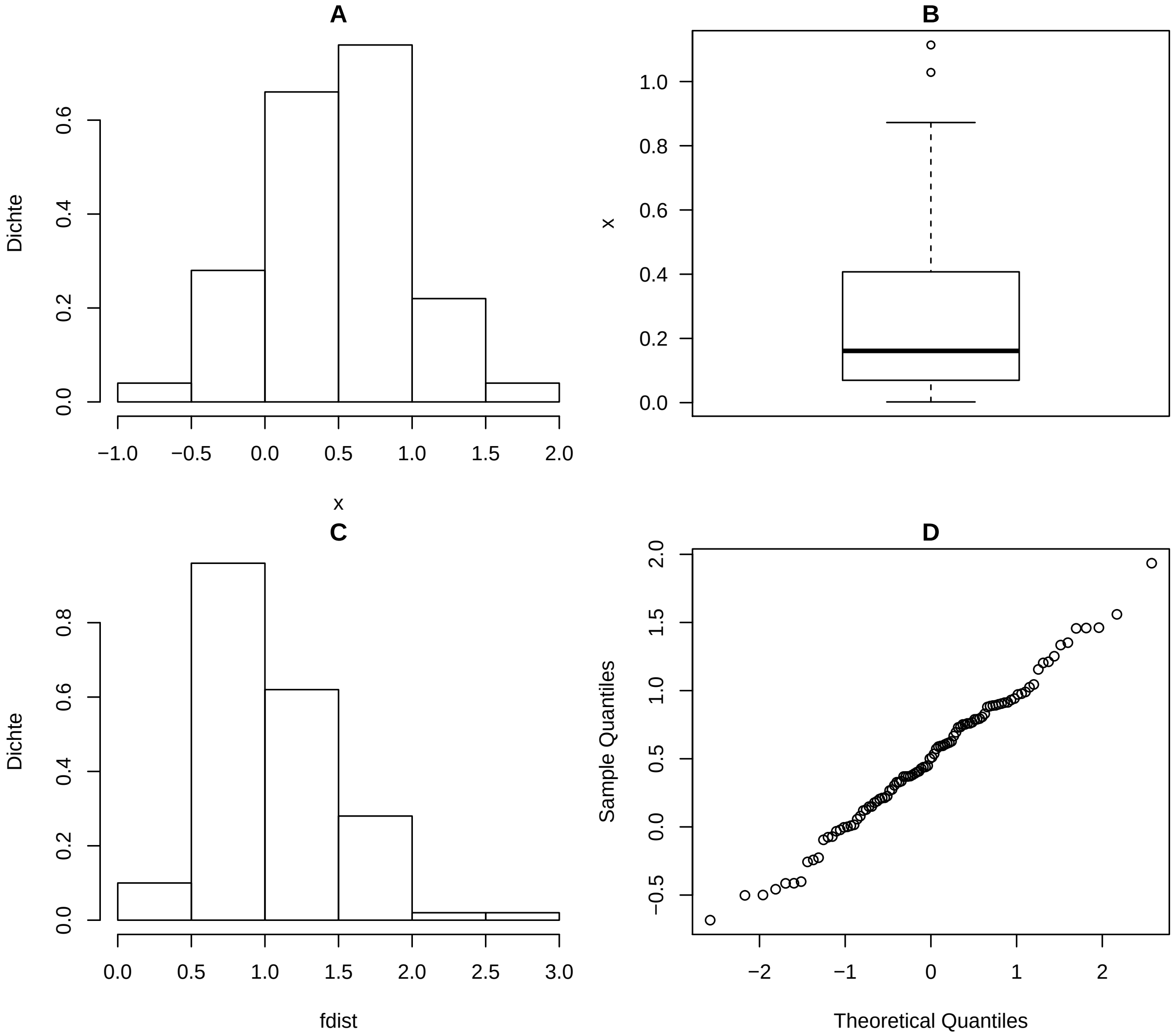
a) Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt immer $E[\overline{X}_n] = E[X_i]$ und $\text{Var}(\overline{X}_n) = \text{Var}(X_i)$.

b) Falls Unabhängigkeit gilt ($X_1, ..., X_n \overset{i.i.d}{\sim} F$), dann sagt der zentrale Grenzwertsatz aus, dass die Summe $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ approximativ normalverteilt ist mit Varianz $n\sigma_F^2$.

c) Laut dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Qualität der Approximation der Verteilung von $\overline{X}_n$ durch die Normalverteilung unabhängig von der Stichprobengrösse n.

d) Die Lebensdauer von normalen Gaskartuschen in Campingkochern kann als unabhängig angenommen werden. Christina möchte einen dreiwöchigen Campingurlaub unternehmen und fragt sich, wie viele Gaskartuschen sie für den Campingkocher mitnehmen sollte. Eine Gaskartusche hält im Schnitt für eine Stunde ($1h$) Brennzeit mit einer Standardabweichung von $0.1h$. Christina nimmt 21 Gaskartuschen mit und möchte damit 20 Stunden kochen können. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie genug Gaskartuschen mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

20. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In Plot **B** ist der Median der Daten kleiner als das arithmetische Mittel.

b) Das Histogramm in Plot **A** und der Normal QQ-Plot in Plot **D** können **nicht** von den selben Daten stammen.

c) Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine grössere Varianz als die Standardnormalverteilung.

d) Die Verteilung in Plot **C** ist rechtsschief.

Gruppe B

t-Test

1. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen).

a) Für 10 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind: $-9.33, 2.49, 6.51, 12.8, 14.43, -9.59, -8.02, 0.36, 10.35, -5.12$. Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.507.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.1 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty, -1.833] \cup [1.833, \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty, -0.582] \cup [0.582, \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = -2.019$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit den Daten aus Teilaufgabe a) ein 99%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall ist: $[-9.051, 10.027]$.

2. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum Wurzel-n Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir haben das Körpergewicht von 16 zufällig ausgewählten Personen in der Vorlesung bestimmt. Der Hersteller der Waage gibt an, dass jede Einzelmessung eine Standardabweichung von 0.2 kg hat. Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels der 16 Personen ist dann 0.2 kg.

b) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$, wobei $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2_{\overline{X}_n}$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $\mathcal{N}(0, 1)$.

c) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dann ist $P(X \leq 2)$ grösser als $P(Z \leq 2)$.

d) Bei einem zweiseitigen t-Test mit $n = 20$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 1.729. Der P-Wert ist dann etwa 0.1.

3. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 7$ Beobachtungen von X gemacht: $16.68, 13.21, 6.15, 7.17, 0.34, 3.34, -1.08$. Zudem haben wir $n_2 = 5$ Beobachtungen von Y: $8.4, 5.66, 20.03, 8.61, 15.29$. Beurteilen Sie: Der geschätzte Wert für S^2_{pool} liegt zwischen 39.373 und 39.376.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Tests mit obigen Daten ist -1.523 .

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01 . Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty, -2.964] \cup [2.964, \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 6$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.624$. Der P-Wert ist dann 0.1.

Gruppe B

4. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) Eine Telekomunikationsfirma möchte zwei verschiedene WLAN Router auf ihre Reichweite testen. Dazu wählt sie 10 verschiedene Wohnungen aus. In jeder Wohnung wird der durchschnittliche Radius für beide Router berechnet, bei welchem noch 50% der maximalen Signalstärke erhalten ist. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

b) In einer Studie wurde untersucht, ob Autofahrer, welche über die Freisprechanlage am Handy telefonieren, genau so verkehrsgefährdend sind wie Autofahrer, welche bei Handygesprächen die Freisprechanlage nicht benutzen. Dazu wurden 2 Gruppen mit je 20 Personen in einem Autosimulator auf ihre Reaktionszeiten getestet. Eine Gruppe musste während dem Fahren per Handygespräch über die Freisprechanlage verschiedene Aussagen bewerten. Die andere Gruppe musste diese Aussagen per Handygespräch ohne Freisprechanlage bewerten. Es wurden die Reaktionszeiten auf kritische Verkehrssituationen gemessen. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

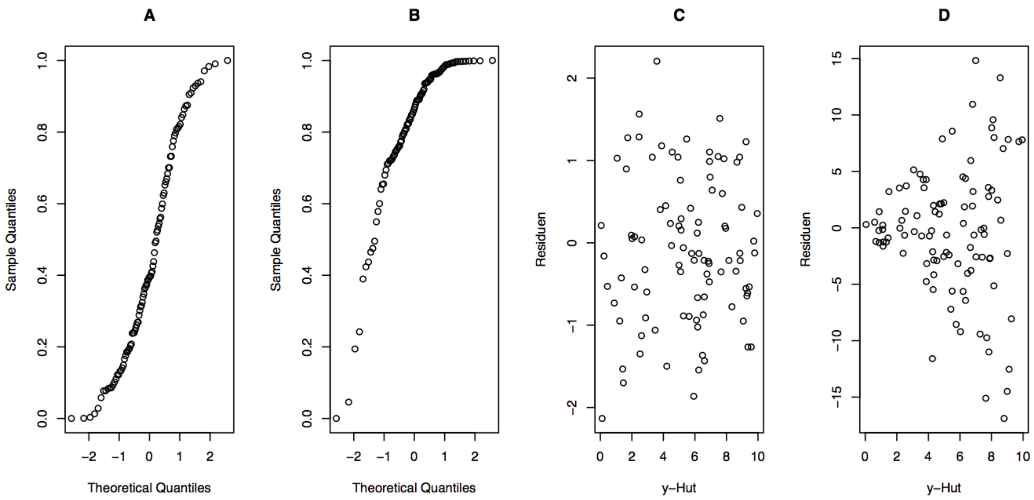
c) Es wurde ein neu entwickeltes Antibiotika gegenüber einem alten Antibiotika an infizierten Ratten getestet. Zwei verschieden grosse Gruppen von Ratten wurden unter ähnlichen Umständen mit dem jeweiligen Antibiotika behandelt und die Bakterienkonzentration wurde nach zwei Tagen gemessen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment sollte der Effekt von Multitasking auf die Lernauffassung untersucht werden. Dazu wurden 30 Studenten dazu aufgefordert zwei kleine Tests durchzuführen. Im ersten Test sollte man die Details von einem Text lernen und man musste gleichzeitig in unregelmässigen Abständen Bilder wegklicken um danach Fragen zu beantworten. Die Studenten konnten sich danach jeweils wieder von der Anstrengung erholen und haben dann den zweiten Test nach dem gleichen Prinzip, aber diesmal ohne Bilder, durchgeführt. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

Gruppe B

Lineare Regression

5. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer Normalverteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

6. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 34 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	1.134	0.264	4.297	0
x	3.856	0.143	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Gemäss der Tabelle ist der Standard-Fehler des geschätzten Achsenabschnitts gleich 4.297.

b) Die Untergrenze des zweiseitigen 95%-Vertrauensintervalls (exakt) für den Achsenabschnitt ist 0.506.

c) Die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ kann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 16.132 stehen.

7. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert 3.856 erhöht.

b) Angenommen Null ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 0.799 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Für $x = 2.402$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 2.459$ vorraus.

d) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 4.227 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 2.229$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.493$ verwendet.

Gruppe B

Gemischte Fragen

8. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit	0.04	0.15	0.13	0.01	0.12	0.09	0.09	0.15	0.14	0.08

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl strikt grösser als 5 ist, ist 0.67 .

b) Die Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu ziehen ist 0.50.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 4 und höchstens 5 ist, ist 0.2 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 6 oder mindestens 10 ist, ist 0.62 .

9. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen und verwenden Sie ausschliesslich den Logarithmus zur Basis e, wo nötig):

a) Angenommen die odds für ein Ereignis sind 0.333 , dann sind die log-odds für das gleiche Ereignis -1.0996 .

b) Angenommen die odds verringern sich für ein gewisses Ereignis, dann erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ereignis.

c) Die Wahrscheinlichkeit mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{3, 2\}$ zu würfeln, ist $\frac{1}{3}$.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1 .

10. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{3, 4, 5, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 2, 1, 3\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.25 .

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 1 .

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 0.655 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0 .

11. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

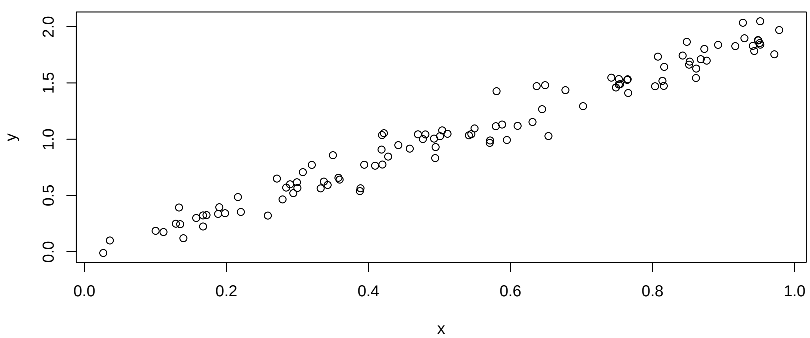
a) Eine Abteilung in der CIA hat 7 Männer und 5 Frauen. Nun soll für einen neuen Fall ein neues Einsatz-Team aus 4 Personen erstellt werden. Damit sich niemand benachteiligt fühlt, soll das Team zufällig erstellt werden. Die Verteilung der Anzahl Frauen in diesem Team lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

b) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

c) Wir werfen eine Münze dreimal und sehen das Ergebnis Kopf-Kopf-Zahl (KKZ). Angenommen, die drei Würfe sind unabhängig von einander und p ist die Wahrscheinlichkeit, dass 'Kopf (K)' geworfen wird. Der Maximum Likelihood Schätzer von p ist 0.744 .

d) Angenommen $X \sim Pois(10)$ und $Y \sim Pois(30)$. Zudem sind X und Y unabhängig. Dann gilt $X + Y \sim Pois(40)$.

12. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung (für manche Kennzahlen, z.B. das Quantil, gibt es verschiedene Varianten). Beurteilen Sie folgende Aussagen.



a) Das arithmetische Mittel ist unter Umständen ein Wert, der in der eigentlichen Stichprobe gar nicht beobachtet wurde.

b) Das arithmetische Mittel kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe werden.

c) Der Median entspricht immer einem Wert, der in der Stichprobe auch vorkommt.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ .

13. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -2.9$ und Varianz $Var(X) = 2$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.4 + 2.4 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -9.36$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -8.5$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 - 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 1.2$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 6.3$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -1.8 - 2.7 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 4.215$.

d) Die Zufallsvariable X hat 40 %-Quantil $q_X = -9.9$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.7 + 1.6 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 40 %-Quantil von Y gleich $q_Y = 26.73$.

14. Es seien $X_1, ..., X_n \sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

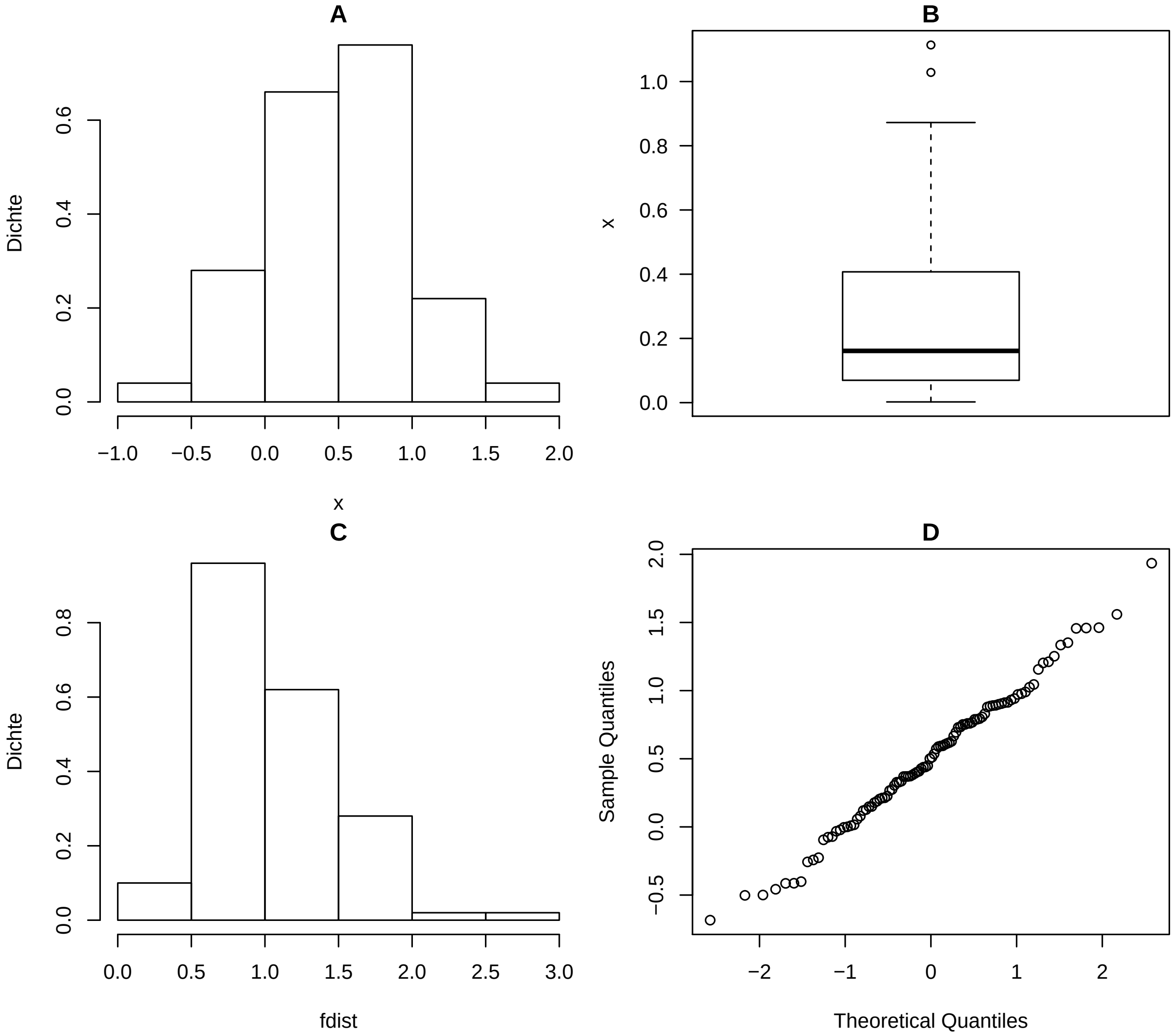
a) Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt immer $E[\overline{X}_n] = E[X_i]$ und $\text{Var}(\overline{X}_n) = \text{Var}(X_i)$.

b) Falls Unabhängigkeit gilt ($X_1, ..., X_n \overset{i.i.d}{\sim} F$), dann sagt der zentrale Grenzwertsatz aus, dass die Summe $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ approximativ normalverteilt ist mit Varianz $n\sigma_F^2$.

c) Laut dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Qualität der Approximation der Verteilung von $\overline{X}_n$ durch die Normalverteilung unabhängig von der Stichprobengrösse n.

d) Die Lebensdauer von normalen Gaskartuschen in Campingkochern kann als unabhängig angenommen werden. Christina möchte einen dreiwöchigen Campingurlaub unternehmen und fragt sich, wie viele Gaskartuschen sie für den Campingkocher mitnehmen sollte. Eine Gaskartusche hält im Schnitt für eine Stunde ($1h$) Brennzeit mit einer Standardabweichung von $0.1h$. Christina nimmt 21 Gaskartuschen mit und möchte damit 20 Stunden kochen können. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie genug Gaskartuschen mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

15. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In Plot **B** ist der Median der Daten kleiner als das arithmetische Mittel.

b) Das Histogramm in Plot **A** und der Normal QQ-Plot in Plot **D** können **nicht** von den selben Daten stammen.

c) Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine grössere Varianz als die Standardnormalverteilung.

d) Die Verteilung in Plot **C** ist rechtsschief.

Gruppe B

Binomialverteilung und -test

16. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einem Binomialtest stellt sich heraus, dass der Verwerfungsbereich der Teststatistik mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ gleich $K = \{3, ..., 7\}$ ist. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 7$. Die Nullhypothese kann auf dem 10% Signifikanzniveau verworfen werden.

b) Bei einem Binomialtest wird die Nullhypothese auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen. Dann wird die Nullhypothese auf dem 1% Signifikanzniveau sicher nicht verworfen.

c) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.23$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.23$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.54$). Der Zusammenhang von Fehler 1. und 2. Art ist dabei: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art zunimmt, dann nimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) zu.

d) Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

17. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.196 . Wenn man den Hypothesentest mit der gleichen Nullhypothese und mit den gleichen Daten nochmals auswerten würde, könnte man die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.07 verwerfen.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Binomialtests geht von 0.407 bis 0.828 . Wenn wir mit den gleichen Daten einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : \pi = 0.2$ auf dem 5% Signifikanzniveau durchführen würden, könnten wir die Nullhypothese verwerfen.

d) In einer Fabrik werden aus der Produktion zufällig 35 Produkte entnommen und kontrolliert. Wir stellen fest, dass 31 Produkte fehlerhaft sind. Damit können wir mit einem 95%-Vertrauensintervall die Fehlerwahrscheinlichkeit eingrenzen. Die Fabrikleitung ist mit der Breite von unserem Vertrauensintervall nicht zufrieden. Die Fabrikleitung möchte nun, dass wir unsere Untersuchung wiederholen, aber am Schluss ein 95%-Vertrauensintervall haben, das nur etwa halb so breit ist wie das ursprüngliche 95%-Vertrauensintervall. Wir brauchen in der neuen Stichprobe in etwa viermal so viele Produkte wie in der ersten Stichprobe.

Gruppe B

18. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat manchmal grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest (bei gleichem Signifikanzniveau).

b) Bei einem einseitigen Binomialtest ($H_0 : \pi = 0.7$, $n = 38$, $H_A : \pi > 0.7$) wurden $x = 34$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.007$. Wenn x kleiner wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell grösser (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% besteht aus $\{0, ..., 10\}$ und $\{24, ..., 34\}$. Falls man das Signifikanzniveau grösser macht, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder mehr (aber nicht weniger) Elemente enthalten.

d) Angenommen die beobachtete Teststatistik ist im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese nicht stimmt .

19. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Macht eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) mit $n = 10$ haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{8, 9, 10\}$. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.4. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.771 .

c) Eine Phase-2 klinische Studie wurde mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) sorgfältig geplant. Folgende Parameter wurden fixiert: Die Erfolgswahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 und das Signifikanzniveau α. Zudem wurde eine konkrete Alternative formuliert (π_A), die mit einer vorgegebenen Macht ($1-\beta$) detektiert werden soll. Dazu wurde die nötige Stichprobengrösse (n) bestimmt. Kurz bevor die Studie beginnt, wird allerdings bei der Übermittlung der Parameter ein Fehler entdeckt: Die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese π_A ist grösser als ursprünglich geplant. Beurteilen Sie: Es ist sichergestellt, dass die geforderte Macht auch mit den neuen Parametern eingehalten wird.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi < \pi_0$) ist: $\{0, ..., 4\}$. Die Stichprobengrösse ist 28. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird, ist ungefähr 1 .

20. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 15$. Wir möchten mit einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.5 beträgt ($H_0 : \pi = 0.5$). Der Verwerfungsbereich ist gegeben durch $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{12, 13, 14, 15\}$.

b) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 10$. Wir möchten mit einem einseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% prüfen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.3 beträgt ($H_0 : \pi = 0.3$) oder ob die Wahrscheinlichkeit grösser als 0.3 ist. Der Verwerfungsbereich ist dann gegeben durch $\{8, 9, 10\}$.

c) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 20$. Wir möchten mit einem Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 0.01% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.7 geeignet ist ($H_0 : \pi = 0.7$) oder ob ein $\pi < 0.7$ geeigneter ist. Der Test verwirft die Nullhypothese, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ annimmt.

d) Der beobachtete Wert der Teststatistik für den Test aus der vorherigen Teilaufgabe sei $x = 4$. Dann ist der P-Wert gleich $P_{H_0}(X \leq 4)$.

Gruppe C

Gemischte Fragen

1. Ein Computer zieht zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen jede einzelne Zahl gezogen wird:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit	0.04	0.15	0.13	0.01	0.12	0.09	0.09	0.15	0.14	0.08

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl strikt grösser als 5 ist, ist 0.67 .

b) Die Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu ziehen ist 0.50.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl mindestens 4 und höchstens 5 ist, ist 0.2 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl höchstens 6 oder mindestens 10 ist, ist 0.62 .

2. Im Folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zum Thema Wahrscheinlichkeit, odds und log-odds. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen und verwenden Sie ausschliesslich den Logarithmus zur Basis e, wo nötig):

a) Angenommen die odds für ein Ereignis sind 0.333 , dann sind die log-odds für das gleiche Ereignis -1.0996 .

b) Angenommen die odds verringern sich für ein gewisses Ereignis, dann erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ereignis.

c) Die Wahrscheinlichkeit mit einem fairen, sechsseitigen Würfel eine Zahl in der Menge $\{3, 2\}$ zu würfeln, ist $\frac{1}{3}$.

d) Angenommen das Ereignis A ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis A^c. Dann sind die log-odds für das Ereignis A kleiner als -1 .

3. Ein fairer, sechsseitiger Würfel wird einmal geworfen. Das Ereignis A tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{3, 4, 5, 1, 2\}$ gewürfelt wird. Das Ereignis B tritt ein, wenn eine Zahl in der Menge $\{6, 2, 1, 3\}$ gewürfelt wird. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist eingetreten" ist 0.25 .

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 1 .

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt gegeben "B ist nicht eingetreten" ist 0.655 .

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht eintritt gegeben "A ist nicht eingetreten" ist 0 .

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

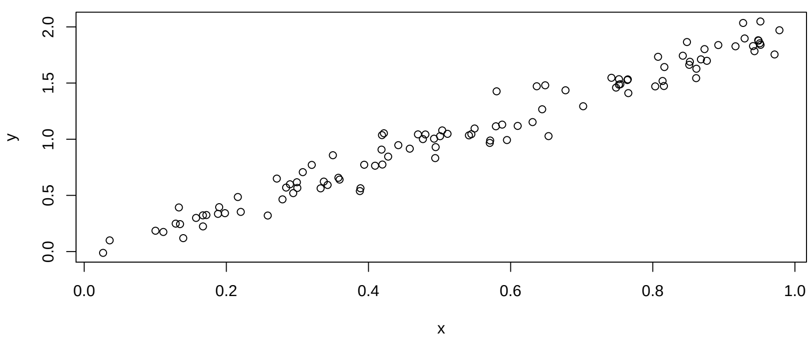
a) Eine Abteilung in der CIA hat 7 Männer und 5 Frauen. Nun soll für einen neuen Fall ein neues Einsatz-Team aus 4 Personen erstellt werden. Damit sich niemand benachteiligt fühlt, soll das Team zufällig erstellt werden. Die Verteilung der Anzahl Frauen in diesem Team lässt sich gut mit einer Poissonverteilung beschreiben.

b) Bei einer Telefonzentrale treffen pro Stunde im Mittel 20 Anrufe ein. Die Verteilung der Anzahl Anrufe pro Stunde lässt sich gut mit einer hypergeometrischen Verteilung beschreiben.

c) Wir werfen eine Münze dreimal und sehen das Ergebnis Kopf-Kopf-Zahl (KKZ). Angenommen, die drei Würfe sind unabhängig von einander und p ist die Wahrscheinlichkeit, dass 'Kopf (K)' geworfen wird. Der Maximum Likelihood Schätzer von p ist 0.744 .

d) Angenommen $X \sim Pois(10)$ und $Y \sim Pois(30)$. Zudem sind X und Y unabhängig. Dann gilt $X + Y \sim Pois(40)$.

5. Im Folgenden kommen unterschiedliche Aufgaben zu Kennzahlen. Verwenden Sie dabei immer die Formeln aus der Vorlesung (für manche Kennzahlen, z.B. das Quantil, gibt es verschiedene Varianten). Beurteilen Sie folgende Aussagen.



a) Das arithmetische Mittel ist unter Umständen ein Wert, der in der eigentlichen Stichprobe gar nicht beobachtet wurde.

b) Das arithmetische Mittel kann nie grösser als der grösste Wert in der Stichprobe werden.

c) Der Median entspricht immer einem Wert, der in der Stichprobe auch vorkommt.

d) Betrachten Sie das Streudiagramm. Die empirische Korrelation zwischen x und y gemäss diesem Streudiagramm ist negativ .

6. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zu Funktionen von Zufallsvariablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen. (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -2.9$ und Varianz $Var(X) = 2$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.4+2.4 \cdot X$ berechnet. Dann ist $E(Y) = -9.36$.

b) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = -8.5$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -4.5 - 1 \cdot X$ berechnet. Dann ist $Var(Y) = 1.2$.

c) Die Zufallsvariable X hat Erwartungswert $E(X) = 6.3$ und Varianz $Var(X) = 0.8$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -1.8 - 2.7 \cdot X$ berechnet. Dann ist $\sigma_Y = 4.215$.

d) Die Zufallsvariable X hat 40 %-Quantil $q_X = -9.9$. Nun wird die Zufallsvariable $Y = -2.7+1.6 \cdot X$ berechnet. Dann ist das 40 %-Quantil von Y gleich $q_Y = 26.73$.

7. Es seien $X_1, ..., X_n \sim F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt immer $E[\overline{X}_n] = E[X_i]$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}(X_i)$.

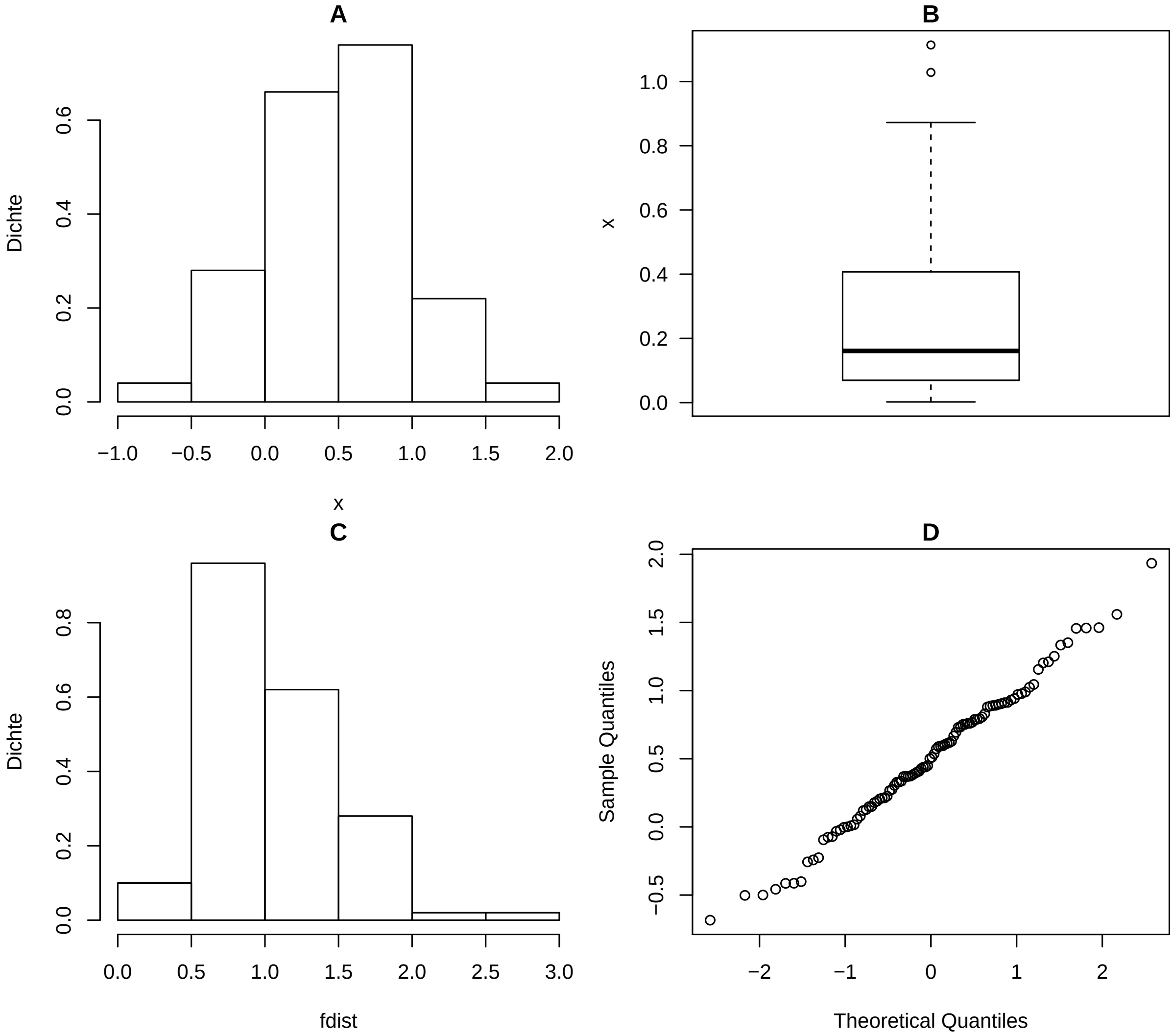
b) Falls Unabhängigkeit gilt ($X_1, ..., X_n \overset{i.i.d}{\sim} F$), dann sagt der zentrale Grenzwertsatz aus, dass die Summe $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ approximativ normalverteilt ist mit Varianz $n\sigma_F^2$.

c) Laut dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Qualität der Approximation der Verteilung von $\overline{X}_n$ durch die Normalverteilung unabhängig von der Stichprobengrösse n.

d) Die Lebensdauer von normalen Gaskartuschen in Campingkochern kann als unabhängig angenommen werden. Christina möchte einen dreiwöchigen Campingurlaub unternehmen und fragt sich, wie viele Gaskartuschen sie für den Campingkocher mitnehmen sollte. Eine Gaskartusche hält im Schnitt für eine Stunde ($1h$) Brennzeit mit einer Standardabweichung von $0.1h$. Christina nimmt 21 Gaskartuschen mit und möchte damit 20 Stunden kochen können. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie genug Gaskartuschen mitgenommen hat, ist grösser als 95%.

Gruppe C

8. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) In Plot **B** ist der Median der Daten kleiner als das arithmetische Mittel.

b) Das Histogramm in Plot **A** und der Normal QQ-Plot in Plot **D** können **nicht** von den selben Daten stammen.

c) Die Daten im Normal QQ-Plot in Plot **D** haben eine grössere Varianz als die Standardnormalverteilung.

d) Die Verteilung in Plot **C** ist rechtsschief.

Gruppe C

Binomialverteilung und -test

9. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einem Binomialtest stellt sich heraus, dass der Verwerfungsbereich der Teststatistik mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ gleich $K = \{3, ..., 7\}$ ist. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 7$. Die Nullhypothese kann auf dem 10% Signifikanzniveau verworfen werden.

b) Bei einem Binomialtest wird die Nullhypothese auf dem 5% Signifikanzniveau verworfen. Dann wird die Nullhypothese auf dem 1% Signifikanzniveau sicher nicht verworfen.

c) Angenommen wir verwenden einen einseitigen Binomialtest um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu prüfen. Wir haben die Nullhypothese ($H_0 : \pi = 0.23$) und die Alternative ($H_A : \pi > 0.23$) formuliert. Insbesondere interessieren wir uns für die Macht und den Fehler 2. Art für eine konkrete Alternativhypothese ($\pi = 0.54$). Der Zusammenhang von Fehler 1. und 2. Art ist dabei: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art zunimmt, dann nimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (bei konstanter Stichprobengrösse) zu.

d) Das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

10. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist 0.196 . Wenn man den Hypothesentest mit der gleichen Nullhypothese und mit den gleichen Daten nochmals auswerten würde, könnte man die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 0.07 verwerfen.

b) Angenommen der P-Wert bei einem zweiseitigen Binomialtest ist p. Das bedeutet: Falls die Nullhypothese stimmt, hat die Beobachtung oder ein extremerer Wert (im Sinne der Alternative) die Wahrscheinlichkeit p.

c) Angenommen das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Binomialtests geht von 0.407 bis 0.828 . Wenn wir mit den gleichen Daten einen zweiseitigen Binomialtest mit der Nullhypothese $H_0 : \pi = 0.2$ auf dem 5% Signifikanzniveau durchführen würden, könnten wir die Nullhypothese verwerfen.

d) In einer Fabrik werden aus der Produktion zufällig 35 Produkte entnommen und kontrolliert. Wir stellen fest, dass 31 Produkte fehlerhaft sind. Damit können wir mit einem 95%-Vertrauensintervall die Fehlerwahrscheinlichkeit eingrenzen. Die Fabrikleitung ist mit der Breite von unserem Vertrauensintervall nicht zufrieden. Die Fabrikleitung möchte nun, dass wir unsere Untersuchung wiederholen, aber am Schluss ein 95%-Vertrauensintervall haben, das nur etwa halb so breit ist wie das ursprüngliche 95%-Vertrauensintervall. Wir brauchen in der neuen Stichprobe in etwa viermal so viele Produkte wie in der ersten Stichprobe.

11. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der einseitige Binomialtest hat manchmal grössere Macht als der zweiseitige Binomialtest (bei gleichem Signifikanzniveau).

b) Bei einem einseitigen Binomialtest ($H_0 : \pi = 0.7$, $n = 38$, $H_A : \pi > 0.7$) wurden $x = 34$ Erfolge beobachtet mit einem P-Wert von $p = 0.007$. Wenn x kleiner wäre, dann wäre der P-Wert tendenziell grösser (oder gleich).

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% besteht aus $\{0, ..., 10\}$ und $\{24, ..., 34\}$. Falls man das Signifikanzniveau grösser macht, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder mehr (aber nicht weniger) Elemente enthalten.

d) Angenommen die beobachtete Teststatistik ist im Verwerfungsbereich (mit Signifikanzniveau α). Dann haben wir (mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens α) nachgewiesen, dass die Nullhypothese nicht stimmt .

12. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Macht eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist.

b) In einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) mit $n = 10$ haben wir den Verwerfungsbereich bestimmt: $\{8, 9, 10\}$. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist in Wahrheit 0.4. Die Wahrscheinlichkeit unter diesen Umständen die Nullhypothese zu verwerfen ist 0.771 .

c) Eine Phase-2 klinische Studie wurde mit einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi > \pi_0$) sorgfältig geplant. Folgende Parameter wurden fixiert: Die Erfolgswahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese π_0 und das Signifikanzniveau α. Zudem wurde eine konkrete Alternative formuliert (π_A), die mit einer vorgegebenen Macht $(1-\beta)$ detektiert werden soll. Dazu wurde die nötige Stichprobengrösse (n) bestimmt. Kurz bevor die Studie beginnt, wird allerdings bei der Übermittlung der Parameter ein Fehler entdeckt: Die Erfolgswahrscheinlichkeit in der konkreten Alternativhypothese π_A ist grösser als ursprünglich geplant. Beurteilen Sie: Es ist sichergestellt, dass die geforderte Macht auch mit den neuen Parametern eingehalten wird.

d) Der Verwerfungsbereich in einem einseitigen Binomialtest ($H_A : \pi < \pi_0$) ist: $\{0, ..., 4\}$. Die Stichprobengrösse ist 28. Angenommen die Erfolgswahrscheinlichkeit ist tatsächlich 0.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dann nicht verworfen wird, ist ungefähr 1 .

Gruppe C

13. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 15$. Wir möchten mit einem zweiseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.5 beträgt ($H_0 : \pi = 0.5$). Der Verwerfungsbereich ist gegeben durch $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{12, 13, 14, 15\}$.

b) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 10$. Wir möchten mit einem einseitigen Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 5% prüfen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.3 beträgt ($H_0 : \pi = 0.3$) oder ob die Wahrscheinlichkeit grösser als 0.3 ist. Der Verwerfungsbereich ist dann gegeben durch $\{8, 9, 10\}$.

c) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 20$. Wir möchten mit einem Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 0.01% testen, ob die Erfolgswahrscheinlichkeit 0.7 geeignet ist ($H_0 : \pi = 0.7$) oder ob ein $\pi < 0.7$ geeigneter ist. Der Test verwirft die Nullhypothese, falls die Teststatistik einen Wert in der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ annimmt.

d) Der beobachtete Wert der Teststatistik für den Test aus der vorherigen Teilaufgabe sei $x = 4$. Dann ist der P-Wert gleich $P_{H_0}(X \leq 4)$.

Gruppe C

t-Test

14. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen).

a) Für 10 Patienten wurde der Blutdruck vor und nach Verabreichung eines neuen blutdrucksenkenden Medikaments gemessen. Die Differenzen der Blutdruckwerte (vorher minus nachher) sind: $-9.33, 2.49, 6.51, 12.8, 14.43, -9.59, -8.02, 0.36, 10.35, -5.12$. Wir wollen nun mit einem t-Test prüfen, ob die Differenz der Blutdruckwerte signifikant von null verschieden sein könnte (zweiseitiger t-Test). Beurteilen Sie: Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 0.507.

b) Angenommen das Signifikanzniveau in obigem Test ist 0.1 . Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen t-Tests ist dann $(-\infty, -1.833] \cup [1.833, \infty)$.

c) Angenommen der Verwerfungsbereich bei einem zweiseitigen Ein-Stichproben t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau ist $(-\infty, -0.582] \cup [0.582, \infty)$ und der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = -2.019$. Die Nullhypothese kann dann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) Wir konstruieren nun mit den Daten aus Teilaufgabe a) ein 99%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Blutdruckdifferenz. Das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall ist: $[-9.051, 10.027]$.

15. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum Wurzel-n Gesetz und zum t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir haben das Körpergewicht von 16 zufällig ausgewählten Personen in der Vorlesung bestimmt. Der Hersteller der Waage gibt an, dass jede Einzelmessung eine Standardabweichung von 0.2 kg hat. Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels der 16 Personen ist dann 0.2 kg.

b) Angenommen das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2_{\overline{X}_n})$, wobei $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2_{\overline{X}_n}$. Die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$ ist dann $\mathcal{N}(0, 1)$.

c) Angenommen $X \sim t_5$ und $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dann ist $P(X \leq 2)$ grösser als $P(Z \leq 2)$.

d) Bei einem zweiseitigen t-Test mit $n = 20$ Beobachtungen ist der Wert der Teststatistik 1.729. Der P-Wert ist dann etwa 0.1.

Gruppe C

16. Im Folgenden kommen verschiedene Fragen zum ungepaarten, zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir wollen prüfen, ob die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y den gleichen Erwartungswert haben (wir nehmen zudem an, dass X und Y gleiche Varianz haben). Dazu haben wir $n_1 = 7$ Beobachtungen von X gemacht: $16.68, 13.21, 6.15, 7.17, 0.34, 3.34, -1.08$. Zudem haben wir $n_2 = 5$ Beobachtungen von Y: $8.4, 5.66, 20.03, 8.61, 15.29$. Beurteilen Sie: Der geschätzte Wert für S^2_{pool} liegt zwischen 39.373 und 39.376.

b) Der Wert der Teststatistik beim zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Tests mit obigen Daten ist -1.523 .

c) Angenommen das Signifikanzniveau im zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit obigen Daten ist 0.01 . Der Verwerfungsbereich des Tests ist dann $(-\infty, -2.964] \cup [2.964, \infty)$.

d) Angenommen bei einem zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test mit $n_1 = 10$ und $n_2 = 6$ Beobachtungen ist der beobachtete Wert der Teststatistik $t = 2.624$. Der P-Wert ist dann 0.1.

Gruppe C

17. Im Folgenden finden Sie mehrere Beispiele für Vergleiche von 2 Stichproben. Beurteilen Sie, ob es sich um gepaarte oder um ungepaarte Stichproben handelt.

a) Eine Telekomunikationsfirma möchte zwei verschiedene WLAN Router auf ihre Reichweite testen. Dazu wählt sie 10 verschiedene Wohnungen aus. In jeder Wohnung wird der durchschnittliche Radius für beide Router berechnet, bei welchem noch 50% der maximalen Signalstärke erhalten ist. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

b) In einer Studie wurde untersucht, ob Autofahrer, welche über die Freisprechanlage am Handy telefonieren, genau so verkehrsgefährdend sind wie Autofahrer, welche bei Handygesprächen die Freisprechanlage nicht benutzen. Dazu wurden 2 Gruppen mit je 20 Personen in einem Autosimulator auf ihre Reaktionszeiten getestet. Eine Gruppe musste während dem Fahren per Handygespräch über die Freisprechanlage verschiedene Aussagen bewerten. Die andere Gruppe musste diese Aussagen per Handygespräch ohne Freisprechanlage bewerten. Es wurden die Reaktionszeiten auf kritische Verkehrssituationen gemessen. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

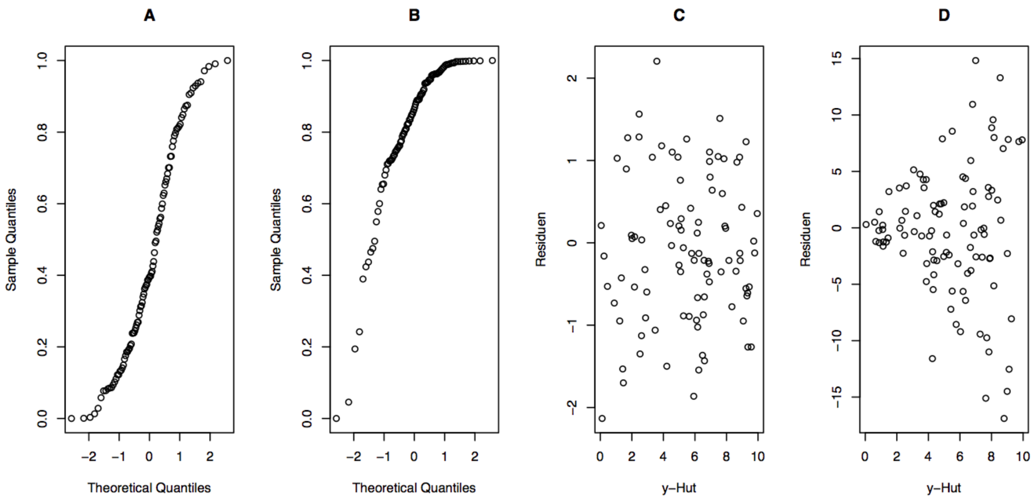
c) Es wurde ein neu entwickeltes Antibiotika gegenüber einem alten Antibiotika an infizierten Ratten getestet. Zwei verschieden grosse Gruppen von Ratten wurden unter ähnlichen Umständen mit dem jeweiligen Antibiotika behandelt und die Bakterienkonzentration wurde nach zwei Tagen gemessen. Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

d) In einem Experiment sollte der Effekt von Multitasking auf die Lernauffassung untersucht werden. Dazu wurden 30 Studenten dazu aufgefordert zwei kleine Tests durchzuführen. Im ersten Test sollte man die Details von einem Text lernen und man musste gleichzeitig in unregelmässigen Abständen Bilder wegklicken um danach Fragen zu beantworten. Die Studenten konnten sich danach jeweils wieder von der Anstrengung erholen und haben dann den zweiten Test nach dem gleichen Prinzip, aber diesmal ohne Bilder, durchgeführt. Es handelt sich um ungepaarte Stichproben.

Gruppe C

Lineare Regression

18. In der folgenden Abbildung sehen Sie vier Bilder. Die beiden Bilder links ('A' und 'B') sind QQ-Plots der Residuen von zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die beiden Bilder rechts ('C' und 'D') sind Tukey-Anscombe Plots zu zwei verschiedenen Regressionsanalysen. Die zugrunde liegenden Daten sind für alle vier Bilder unterschiedlich. Beantworten Sie zu jedem Plot eine Frage zur Residuenanalyse (die Aussagen sind entweder richtig oder relativ offensichtlich falsch):



a) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'A'. Die Residuen stammen von einer Normalverteilung.

b) Betrachten Sie den QQ-Plot in Abbildung 'B'. Die Residuen stammen von einer linksschiefen Verteilung.

c) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'C'. Der Plot zeigt keine auffallenden Abweichungen von den Modellannahmen.

d) Betrachten Sie den TA-Plot in Abbildung 'D'. Der Plot zeigt, dass die Varianz der Residuen nicht konstant ist.

19. Es wurde eine einfache lineare Regression mit 34 Datenpunkten geschätzt ($y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$). Der R-Output wurde in folgende Tabelle übertragen:

	Estimate	*Std.Error*	*t value*	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	1.134	0.264	4.297	0
x	3.856	0.143	?	0

Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

a) Gemäss der Tabelle ist der Standard-Fehler des geschätzten Achsenabschnitts gleich 4.297.

b) Die Untergrenze des zweiseitigen 95%-Vertrauensintervalls (exakt) für den Achsenabschnitt ist 0.506.

c) Die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ kann auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

d) An der Stelle des Fragezeichens sollte in der Tabelle der Wert 16.132 stehen.

20. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die Tabelle aus der vorherigen Aufgabe. Beurteilen Sie folgende Aussagen (Runden Sie auf drei Nachkommastellen):

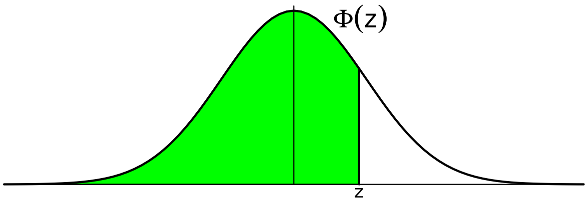
a) Falls man x um eine Einheit erhöht, sagt unser Modell voraus, dass sich y um den Wert 3.856 erhöht.

b) Angenommen Null ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten. Dann kann die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

c) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 0.799 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Für $x = 2.402$ sagt dieses Modell dann ein erwartetes y von $y = 2.459$ vorraus.

d) Angenommen der Schätzwert für β_1 wäre 4.227 und der Schätzwert von β_0 ist wie in der Tabelle angegeben (1.134). Wenn unser Modell dann ein erwartetes $y = 2.229$ vorraussagt, dann wurde als Input $x = -1.493$ verwendet.

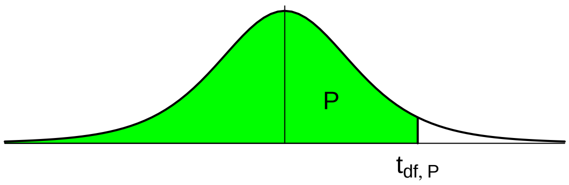
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}[Z \leq z]\,,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576