Abgabe am 20. März 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 4.1. *Fortbewegung bei Menschen und Tieren* [††]

Wir wollen herausfinden, wie die Geschwindigkeit v eines sich bewegenden Tiers mit dessen Schrittlänge s zusammenhängt. Zu diesem Zweck messen wir den Zusammenhang zwischen v und s bei einigen Tieren. Die Daten könnten etwa so wie in Abbildung 4.1(a) aussehen. In dieser Aufgabe werden Sie sehen, wie nützlich die

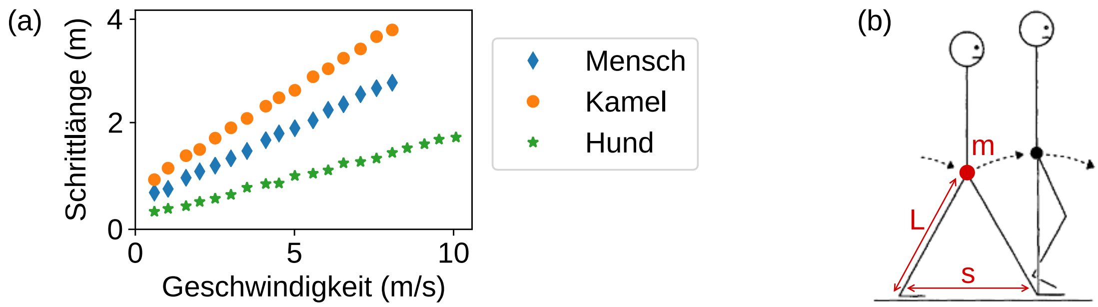

Abbildung 4.1: **(a)** Realistische (aber nicht echte) Daten zur Abhängigkeit der Schrittlänge von der Geschwindigkeit. **(b)** Einfaches Modell eines gehenden Menschen

Dimensionsanalyse ist. Wir werden nur durch die Inspektion der beteiligten physikalischen Grössen herausfinden, welche Form ein solches Modell haben kann.

(a) Im ersten Schritt finden wir heraus, welche physikalischen Grössen für das gegebene Problem relevant sind. Als Denkhilfe zeichnen wir die möglichst einfache Skizze eines laufenden Menschen in Abbildung 4.1(b). Intuitiv erwarten wir, dass Tiere mit längeren Beinen grössere Schritte machen. Daher wird die Beinlänge L eine Rolle spielen. Bei jedem Schritt wird der Körper gegen die Schwerkraft ein wenig nach oben angehoben und gegen seine Trägheit in Bewegung gesetzt. Wir vermuten daher, dass die Masse m des Tieres eine Rolle spielt, sowie die Erdbeschleunigung g. Damit haben wir zusammen mit der Geschwindigkeit v und der Schrittlänge s fünf relevante Grössen.
Ordnen sie diese Grössen und deren Dimensionen nach dem aus der Vorlesung bekannten Schema in Tabelle 1 und zählen sie auf, wie viele verschiedene Dimensionen auftreten.

Grösse 1	...	Grösse N	Zahl der Grössen
Dimension der Grösse 1	...	Dimension der Grösse N	Zahl der verschiedenen Dimensionen

Tabelle 1: Vorbereitung der Dimensionsanalyse.

(b) Wie viele dimensionslosen Grössen brauchen Sie, um eine Gleichung zu Formulieren, die das Model beschreibt?

Hinweis. *π-Theorem von Buckingham*

(c) Schlagen Sie sinnvolle dimensionslose Grössen vor, die sich aus den zwei Grössen s, v, L, m und g zusammensetzen lassen. Behalten Sie dabei im Auge, dass wir schussendlich an der Beziehung $s(v)$ interessiert sind.

(d) Erklären Sie Abbildung 4.2. Begründen sie insbesondere die Wahl der Achsen. Lesen sie eine Gesetzmässigkeit $s(v)$ ab. Sie haben nun ein für fast alle Säugetiere gültiges Modell der Forbewegung aufgebaut!

Hinweis. *Vergleichen sie die Achsenbeschriftung mit ihren Antworten zur Teilaufgabe (c). Wären sie ohne Dimensionsanalyse auf die Idee gekommen, ihre Messdaten auf diese Weise darzustellen?*

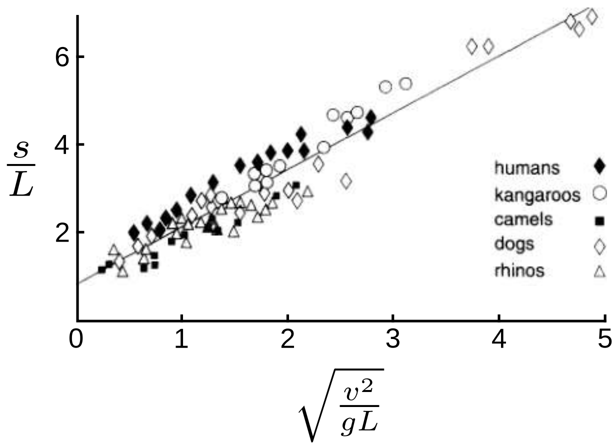

Abbildung 4.2: Gemessene Daten zur Fortbewegung verschiedener Tiere.

(e) Sie vermessen ein weiteres Tier und tragen die Daten in Abbildung 4.2 ein. Sie stellen fest, dass die Daten nicht auf der gleichen Linie wie für die anderen Tiere liegen. Was können sie daraus schliessen?

(f) Betrachten Sie nochmals Abbildung 4.1(b). Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, mit der ein Mensch gehen kann. Anders gesagt, ab welcher Geschwindigkeit muss ein Mensch rennen? Zeichnen Sie den enstprechenden Punkt in Abbildung 4.2 ein.

Hinweis. *Nehmen sie an, dass die Masse in der Hüfte konzentriert ist. Diese Bewegt sich auf einer Kreisbahn.*

Die Abbildungen 4.1(b) und 4.2 stammen aus dem Artikel *Walking and Running* von R. Mc Neill Alexander in The Mathematical Gazette **80** 262-266. Die Daten in Abbildung 4.1(a) wurden anhand des Modells, das Sie in Teilaufgabe (d) aufgestellt haben simuliert, mit Annahme einer für das entsprechende Tier typischen Beinlänge und Addition von Rauschen.

Aufgabe 4.2. *Chronobiologie* [††]

Das Gebiet der Chronobiologie untersucht zeitliche Muster in biologischen Systemen. Viele dieser Vorgänge können näherungsweise durch **harmonische Oszillationen** beschrieben werden. Sie haben z. B. die periodischen Konzentrationsschwankungen der Cycline im Zellzyklus kennengelernt, ein bekanntes Beispiel aus der Biotechnologie ist der 'Repressilator'.

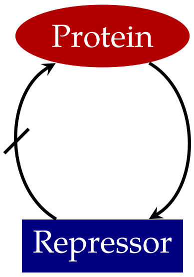

Abbildung 4.3: Vereinfachter *feedback-loop* eines Proteins über seinen Repressor.

Wir wollen in dieser Aufgabe eine Situation betrachten, in der ein Protein die Transkription und Translation seines eigenen Repressors anregt, siehe Abbildung 4.3.[1] Wir bezeichnen die Konzentration des Proteins als c_P und jene des Repressors als c_R.

(a) Beschreiben Sie, wie diese Kopplung des Proteins an seinen eigenen Repressor zu einer oszillierenden Konzentration führen kann.

Im Gleichgewicht kompensieren sich Synthese und Abbau des Proteins und des Repressors bei den Konzentrationen c_P^0 bzw. c_R^0. Weichen die Konzentrationen leicht von diesem Gleichgewichtszustand ab, $c_\mathrm{P,R} = c_\mathrm{P,R}^0 + \delta c_\mathrm{P,R}$, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta c_\mathrm{P})}{\mathrm{d}t} = -A \times \delta c_\mathrm{R} \,, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\delta c_\mathrm{R})}{\mathrm{d}t} = B \times \delta c_\mathrm{P} \,. \tag{1b}$$

Dabei sind $A > 0$ und $B > 0$ positive Konstanten.

(b) Erklären Sie die Bedeutung dieser Gleichungen in Worten.

(c) Welche Dimension haben A und B?

(d) Leiten Sie eine harmonische Schwingungsgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2(\delta c_\mathrm{P})}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \times \delta c_\mathrm{P} \tag{2}$$

aus den Gleichungen (1) her.

Hinweis. Leiten Sie dafür Gleichung (1a) nach t ab und setzen Sie Gleichung (1b) ein.

[1] Tatsächlich ist dies eine relativ starke Vereinfachung. So sind bei der Regulation der Expression von Cyclinen zahlreiche Pathways, Transkriptionsfaktoren und Proteinkomplexe beteiligt.

(e) Wir nehmen an, dass $A = B$ gilt. Berechnen Sie diese Konstante A, wenn die beobachtete Periode einer Schwingung $T \simeq 1\,\mathrm{h}$ beträgt.

Hinweis. Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Zusammenhänge für ω, f und T für harmonische Schwingungen.

(f) Skizzieren Sie die Konzentrationen c_P und c_R als Funktion der Zeit, wenn diese leicht von den Gleichgewichtswerten abweichen.

Wir haben gesehen, dass wir unsere Resultate von Schwingungen in mechanischen Systemen auch auf biologische Prozesse anwenden können. Tatsächlich kann die hier vorgestellte Beschreibung von Proteinkonzentrationen auch auf andere Vorgänge, z. B. die Räuber–Beute-Beziehungen, übertragen werden.

(g*) Stellen Sie eine Analogie zwischen den Protein-Konzentrationen und den Populationen von Räubern und Beute auf. Beschreiben Sie diese Zusammenhänge mathematisch ähnlich wie in den Gleichungen (1).[2]

[2] Die genauen Zusammenhänge sind als Lotka–Volterra-Gleichungen bekannt und wesentlich komplizierter. Für den Fall, dass die Populationen nur wenig von den Gleichgewichtspopulationen abweichen, ist jedoch die hier beschriebene vereinfachte Darstellung ausreichend.