

Lösungsvorschläge zur Serie 4

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$(a \ b \ c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3-3Z_1 \\ Z_2-2Z_1}]{\substack{Z_4-4Z_1 \\ Z_3-4Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4-2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der $(4,3)$ -Matrix $(a \ b \ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, hat also Rang 2, was kleiner als $n = 3$ ist. Die Vektoren sind deswegen linear abhängig. Wie finden wir eine Linearkombination, die einen der Vektoren als Kombination der anderen angibt? Entweder durch Raten oder daraus, dass wegen der gezeigten linearen Abhängigkeit eine Linearkombination $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ existieren muss, in der nicht alle λ_i verschwinden.

Sei also $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt aus der ersten Komponente $\lambda_1 = -3\lambda_3$ und daraus eingesetzt in die restlichen Komponenten jeweils immer $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Wir können somit zum Beispiel $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ wählen. Es gilt also $3a - 2b - c = 0$. Eine Linearkombination könnte somit $c = 3a - 2b$ sein.

b) Es gilt

$$\det(a \ b \ c) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -3 - 2 - 1 + 4 = -2 \neq 0.$$

Die Determinante der Matrix $(a \ b \ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, ist also ungleich null. Die Vektoren sind deswegen linear unabhängig.

c) Es gilt

$$\det(a \ b \ c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} = -7 + 16 + 4 - 1 + 16 - 28 = 0.$$

Die Determinante der Matrix $(a \ b \ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, ist gleich null. Die Vektoren sind deswegen linear abhängig. Wir suchen nun eine Linearkombination. Sei $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 7\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches man bsp. mit dem Gaußverfahren lösen kann. Man findet als mögliche Lösung (es gibt unendlich viele, da die Vektoren ja linear abhängig sind) zum Beispiel $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Es gilt also $-3a + 2b - c = 0$. Eine Linearkombination könnte somit $c = -3a + 2b$ sein.

- d) Die Anzahl Vektoren (=3) ist grösser als die Dimension des Raumes, aus dem sie stammen (=2). Die Vektoren sind also linear abhängig. In der Tat sieht man zum Beispiel sofort $c = a - 5b$.

Aufgabe 2

- a) Wir berechnen mit dem Gaußverfahren

$$\begin{aligned} (A|0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & v+8 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 - Z_1]{Z_3 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & v+9 & | & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[Z_4 + Z_3]{Z_3 + 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & v+10 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & | & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit gibt es eine eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem ob $v \neq 0$ oder $v = 0$ (in der Tat ist $\det(A) = v$ wie man nachrechnen kann). Falls $v \neq 0$ ist die eindeutige Lösung die triviale $x = 0$.

Falls $v = 0$ folgt von unten nach oben gelöst $-x_3 + 5x_4 = 0$ und somit $x_4 = t \in \mathbb{R}$ und $x_3 = 5t$. Daraus dann $x_2 = 2t$ und schliesslich $x_1 = -9t$. Der Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = t \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

- b) Die genau gleichen Zeilenumformungen wie in Teilaufgabe 2a) können wir für das Lösen des Systems $Ax = b$ brauchen. Wir müssen nur daran denken, jeweils auch die Spalte b in der erweiterten Matrix $(A|b)$ umzuformen. Man erhält auf diese Weise

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & w \\ 1 & -2 & 1 & v+8 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & w \\ 0 & 0 & 0 & v & -w \end{array} \right) = (A^*|b^*)$$

Falls $v \neq 0$ gibt es eine eindeutige Lösung und zwar von unten nach oben gelöst

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2w + 9w/v \\ -1 - 2w/v \\ -w - 5w/v \\ -w/v \end{pmatrix}.$$

Falls $v = 0$ hängt die Lösbarkeit von w ab. Falls $v = 0$ und $w \neq 0$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Falls $v = 0$ und $w = 0$ folgt von unten nach oben gelöst $-x_3 + 5x_4 = 0$ und somit $x_4 = t \in \mathbb{R}$ und $x_3 = 5t$. Daraus dann $x_2 = 2t - 1$ und schließlich $x_1 = 1 - 9t$. Der Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = \begin{pmatrix} 1 - 9t \\ 2t - 1 \\ 5t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Aufgabe 3

- a) Wir führen im Gaußverfahren an der erweiterten Matrix $(A|b)$ folgende elementare Zeilenumformungen in dieser Reihenfolge durch:

- 1) $Z_2 - Z_1 \quad Z_3 + 2Z_1 \quad Z_5 + Z_1$
- 2) $Z_4 + Z_3 \quad Z_5 - Z_3$
- 3) $Z_2 \leftrightarrow Z_3$
- 4) $Z_4 - 5Z_3 \quad Z_5 + 4Z_3$

Die erweiterte Matrix sollte jetzt so aussehen

$$(A^*|b^*) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir sehen sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist, falls $s \neq 1$. Falls $s = 1$, dass folgt von unten nach oben gelöst $x_4 - 2x_5 = -1$ und somit $x_5 = t \in \mathbb{R}$ und $x_4 = -1 + 2t$. Die zweite Zeile ist dann $2x_3 + 3(-1 + 2t) - 3t = -1$, also $x_3 = 1 - \frac{3}{2}t$. Die erste Zeile umgeformt ist

dann $2x_1 - x_2 = -6 + \frac{11}{2}t$. Sei also $x_2 = s \in \mathbb{R}$. Dann ist $x_1 = \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}s$. Die Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = \begin{pmatrix} -3 + \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}s \\ s \\ 1 - \frac{3}{2}t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

- b) Aus Teilaufgabe 3a) wissen wir, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ entweder keine Lösung (falls $s \neq 1$) oder unendlich viele Lösungen (falls $s = 1$) besitzt. Da es sich um ein inhomogenes quadratisches Gleichungssystem handelt, folgt sofort (und ohne Rechnung) $\det(A) = 0$.