Version 2017-04-28 – Abgabe am Montag 8. Mai in der Vorlesung

Aufgabe 10.1. *Konzeptaufgabe: p-V Diagramm* [†]

Ein Kolben ist mit einem idealen Gas gefüllt. Das Gas wird vom thermodynamischen Zustand 1 zum Zustand 2 gebracht, wie im p-V Diagramm gezeigt. Für welchen Weg ist die vom Gas verrichtete Arbeit am grössten?

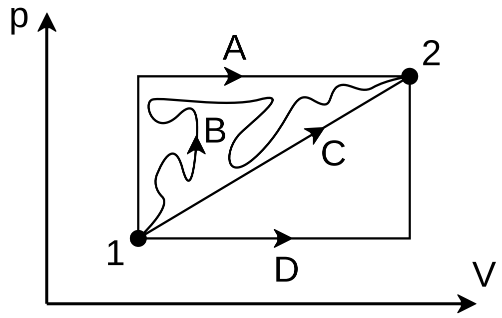

Abbildung 10.1: Vier Wege vom Zustand 1 zum Zustand 2 im p-V Diagramm.

(a) Weg A

(b) Weg B

(c) Weg C

(d) Weg D

(e) Die verrichtete Arbeit ist von dem Weg im p-V Diagramm unabhängig

Lösung. Bei einer Volumenänderung dV wird von dem Gas die Arbeit $dW = pdV$ verrichtet. Da beim Weg A die Volumenänderung bei dem höchsten Druck stattfindet ist auf diesem Weg die verrichtete Arbeit maximal.

Aufgabe 10.2. *Arbeit der Lunge* [††]

In Abbildung 10.2(a) ist ein p-V Diagramm dargestellt. Zwei Funktionen $p_{\text{exp}}(V)$ und $p_{\text{insp}}(V)$ beschreiben darin einen geschlossenen Weg. Sie wurden so gewählt, dass die Beschriebene Kurve den Verlauf des Drucks in der menschlichen Lunge ungefähr reproduziert (vgl. Abbildung 10.2(b)).

Beim Einatmen erhöht sich das Volumen der Lunge von $V = 0\,\text{l}$ auf $V = V_{\text{max}}$, und die Abhängigkeit des Drucks von dem Volumen ist gegeben durch

$$p_{\text{insp}}(V) = p_{\text{max}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{V}{V_{\text{max}}}} - \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_{\text{max}}}\right)^4 \right). \tag{1}$$

Beim Ausatmen sinkt das Volumen wieder auf $V = 0$ und der Druck folgt

$$p_{\text{exp}}(V) = p_{\text{max}} \left(\frac{V}{V_{\text{max}}}\right)^5 \tag{2}$$

wobei $p_{\text{max}} = 1400\,\text{Pa}$ und $V_{\text{max}} = 1.5\,\text{l}$.

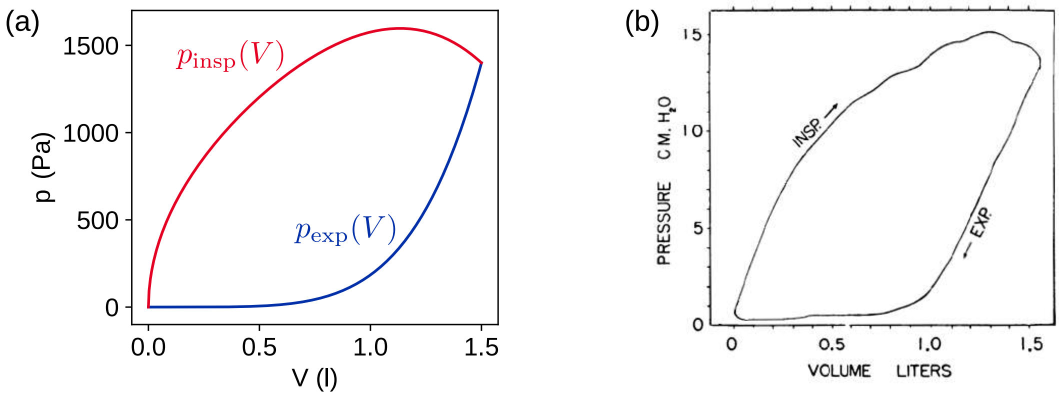

Abbildung 10.2: **(a)** Ein geschlossener Weg im p-V Diagramm. P und V sind relative Werte relativ bezogen auf den Luftdruck bzw. das Volumen der leeren Lunge. **(b)** Druck und Volumen in der menschlichen Lunge. Hierzu wurde ein Pneumotachogram bei gleichzeitiger Messung des Drucks im Mund aufgenommen. $1\ \text{cmH}_2\text{O} \approx 98\,\text{Pa}$. Anpassung eines Bildes aus *Mechanics of Breathing in Man*, A. Otis et al, J. Appl. Phys. Vol. 2 no. 11, 592-607 (1950).

(a) Berechnen Sie die Arbeit, die an der Luft in der Lunge im Laufe eines Atemzyklus verrichtet wird.

(b) Dürfen wir hier eigentlich mit dem Druckunterschied zum Luftdruck rechnen? Tatsächlich ändert sich der Druck in der Lunge von etwa 100 000 Pa auf 101 400 Pa...

Lösung.

(a) Wird ein Volumen um ein Volumenelement dV beim Druck p geändert, so wird *an* dem Gas in diesem Volumen die Arbeit $dW = -pdV$ verrichtet. Die gesamte geleistete Arbeit W ergibt sich also aus dem Integral von $-p(V)$ bezüglich V. Hier integrieren wir $p_{\text{insp}}(V)$ zwischen $V = 0$ und $V = V_{\text{max}}$, und $p_{\text{exp}}(V)$ zwischen $V = V_{\text{max}}$ und $V = 0$. Zwecks Übersichtlichkeit schreiben wir $W = W_{\text{insp}} + W_{\text{exp}}$

und rechnen beide Terme separat. Die beim Einatmen geleistete Arbeit W_{insp} ist:

$$\begin{aligned}
W_{\text{insp}} &= -\int_{V=0}^{V=V_{\max}} p_{\text{insp}}(V)dV \\
&= -\int_{V=0}^{V=V_{\max}} p_{\max}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{V}{V_{\max}}} - \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_{\max}}\right)^4\right)dV \\
&= -p_{\max}\left(\frac{3}{2\sqrt{V_{\max}}}\int_{V=0}^{V=V_{\max}} \sqrt{V}dV - \frac{1}{2V_{\max}^4}\int_{V=0}^{V=V_{\max}} V^4 dV\right) \\
&= -p_{\max}\left(\frac{3}{2\sqrt{V_{\max}}}\cdot\frac{2}{3}V^{\frac{3}{2}}\Big|_{V=0}^{V=V_{\max}} - \frac{1}{2V_{\max}^4}\,\frac{V^5}{5}\Big|_{V=0}^{V=V_{\max}}\right) \\
&= -p_{\max}\left(\frac{V_{\max}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V_{\max}}} - \frac{V_{\max}^5}{10V_{\max}^4}\right) \\
&= -p_{\max}\left(V_{\max} - \frac{V_{\max}}{10}\right) \\
&= -\frac{9}{10}p_{\max}V_{\max}
\end{aligned} \tag{L.1}$$

Wir setzen Zahlenwerte ein und erhalten

$$W_{\text{insp}} = -\frac{9}{10} \times 1400\,\text{Pa} \times 1.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^{-3} = -1.89\,\text{J} \tag{L.2}$$

Die beim Ausatmen geleistete Arbeit W_{exp} ist:

$$\begin{aligned}
W_{\text{exp}} &= -\int_{V=V_{\max}}^{V=0} p_{\text{exp}}(V)dV \\
&= -\int_{V=V_{\max}}^{V=0} p_{\max}\left(\frac{V}{V_{\max}}\right)^5 dV \\
&= -\frac{p_{\max}}{V_{\max}^5}\int_{V=V_{\max}}^{V=0} V^5 dV \\
&= -\frac{p_{\max}}{V_{\max}^5}\,\frac{V^6}{6}\Big|_{V=V_{\max}}^{V=0} \\
&= \frac{1}{6}\,p_{\max}V_{\max}
\end{aligned} \tag{L.3}$$

Wir setzen Zahlenwerte ein und erhalten

$$W_{\text{exp}} = \frac{1}{6} \times 1400\,\text{Pa} \times 1.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^{-3} = 0.35\,\text{J} \tag{L.4}$$

Insgesamt haben wir die Arbeit

$$\begin{aligned}
W = W_{\text{insp}} + W_{\text{exp}} = (\frac{1}{6} - \frac{9}{10})p_{\max}V_{\max} &= -\frac{11}{15}p_{\max}V_{\max} \\
&= -\frac{11}{15} \times 1400\,\text{Pa} \times 1.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^{-3} \\
&= 1.54\,\text{J}
\end{aligned} \tag{L.5}$$

(b) Wir haben in der Teilaufgabe (a) die Fläche zwischen den von $p_{\text{insp}}(V)$ und $p_{\text{exp}}(V)$ beschriebenen Kurven berechnet. Diese ändert sich nicht, falls wir den Nullpunkt der p-Achse verschieben.

Aufgabe 10.3. *Mikro- und Makrozustände* [†]

Wir betrachten 11 Personen (jede wiegt 80 kg) und eine Warenwaage. Betrachten wir eine einzelne Person, so interessiert uns nur ein Parameter: steht die Person auf oder neben der Waage?

(a) Sie lesen die Anzeige der Waage: 240 kg. Beschreibt diese Information einen Mikro- oder einen Makrozustand?

(b) Sie kennen die Namen aller Personen, die auf der Warenwaage stehen. Beschreibt diese Information einen Mikro- oder einen Makrozustand?

(c) Welcher Makrozustand hat die höchste Multiplizität?

(d) Wie viele Mikrozustände gibt es?

(e) Falls sie es beim Verfassen Ihrer Lösung nicht gemacht haben, Übersetzen Sie noch die Fragen aus Teilaufgaben (c) und (d) in Alltagssprache.

(f) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Waage mit 240 kg zu beladen?

Lösung.

(a) Wir beschreiben mit der Angabe zur Gesamtmasse einen Makrozustand, denn diese Information zeichnet nur eine Untermenge aller möglichen Zustände aus. Wir haben eine eindeutig definierte Eigenschaft des Systems beschrieben, wissen aber damit noch nicht alles über dessen Teile.

(b) Hier beschreiben wir für alle Teile des Systems alle relevanten Freiheitsgrade. Damit ist ein Mikrozustand des Systems beschrieben.

(c) In abstrakten Termen haben wir hier ein System von $N = 11$ Teilchen, in dem jedes Teilchen in einem von zwei möglichen *Eintleilchen*zuständen sein kann. Die Multiplizität des Makrozustandes, in dem k von diesen Teilchen in den einem Einteilchenzustand sind (und $N - k$ in dem anderen) ist gegeben durch den Binomialkoeffizienten

$$\Omega(k) = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}. \tag{L.6}$$

Es ist leicht einzusehen, dass $\Omega(k) = \Omega(N-k)$ (es werden nur die zwei Terme im Nenner vertauscht was den Wert ihres Produktes nicht ändert). Ferner ist $\Omega(k)$ maximal für die Werte von k welche am nächsten zu $N/2$ liegen (siehe den Graphen Seite 161 im Skript).

Hier ist $N/2 = 5.5$, die nächsten ganzen Zahlen sind 5 und 6. Die Makrozustände mit der höchsten Multiplizität sind also die, in den $k = 5$ oder $k = 6$ Personen im Einteilchenzustand "Steht auf der Waarenwage" sind. Wir beschreiben hier Makrozustände mit einer Angabe der Gesamtmasse. In den Makrozuständen höchster Multiplizität zeigt die Waage 400 kg bzw. 480 kg.

(d) Die Anzahl der möglichen Mikrozustände in einem System mit N Teilchen und 2 möglichen Einteilchenzuständen ist 2^N, hier also 2048.

(e) Es gibt viele äquivalente Möglichkeiten diese Sätze anschaulich auszudrücken, zum Beispiel:

  (c) Bei welchem Gesamtgewicht gibt es die meisten Möglichkeiten, wer auf der Waage steht?
  Oder: Bei welchem Gesamtgewicht ist es am unwahrscheinlichsten richtig zu raten, welche der 11 Personen auf der Waage stehen?

  (d) Sie schreiben auf wer auf der Waage steht, wie viele verschiedene Listen können so entstehen?

(f) Wir berechnen die Multiplizität des Makrozustandes, in dem 3 Personen auf der Waage stehen:

$$\Omega(3) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165 \qquad \text{(L.7)}$$

Es gibt also 165 Möglichkeiten, die Waage mit $240\,\text{kg} = 3 \times 80\,\text{kg}$ zu beladen.