Übung 3

Ausgabe 05.03.2018
Abgabe 12.03.2018

1 Die Brown'sche Molekularbewegung

Als Brown'sche Molekularbewegung wird die vom schottischen Botaniker Robert Brown (1773-1858) im Jahr 1827 entdeckte Wärmebewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen bezeichnet. Bei seinen Untersuchungen von Pollenkörnern unter dem Lichtmikroskop beobachtete er, dass die Pollenkörner eine unaufhörliche und unregelmässige Zick-Zack-Bewegung machten. Die unter dem Mikroskop sichtbaren Partikel werden ständig von den viel kleineren Molekülen der Flüssigkeit bzw. des Gases angestossen und so gewissermassen "herumgeschubst". Anzahl, Stärke und Richtung der stossenden Moleküle ändern sich ständig, sodass eine beobachtete zufällige Zick-Zack-Bewegung entsteht. Der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener (1893–1964) beschrieb diesen stochastischen Prozess ("Wiener Prozess") mathematisch.

Erklären Sie qualitativ, wie die Brown'sche Molekularbewegung von Teilchen in einem flüssigen Medium beinflusst wird, wenn

1. die Temperatur des flüssigen Mediums erhöht wird.
2. anstatt einer wässrigen Lösung Dichlormethan verwendet wird.
3. kleinere und leichtere Teilchen in der Lösung gelöst sind.

2 Diffusion von Saccharose in Wasser

Eine konzentrierte Saccharose-Lösung (10 g Saccharose in 15 ml Wasser) befindet sich in einem zylinderförmigen Kolben mit einem Durchmesser von 4 cm. Es werden langsam 0.985 l Wasser zugegeben, wobei die unten liegende Saccharoselösung nicht aufgewirbelt wird. Im Folgenden werden nur Diffusionsprozesse betrachtet und Effekte aufgrund der Schwerkraft vernachlässigt. Die molare Masse von Saccharose beträgt $342\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ und der Diffusionskoeffizient von Saccharose in Wasser ist $D = 5.21 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$.

1. Berechnen Sie die Saccharose-Konzentration in der Wasserschicht 1.0 cm über der ursprünglichen Saccharose-Lösung nach
   a) 30 Sekunden
   b) 30 Tagen
   c) 3 Jahren

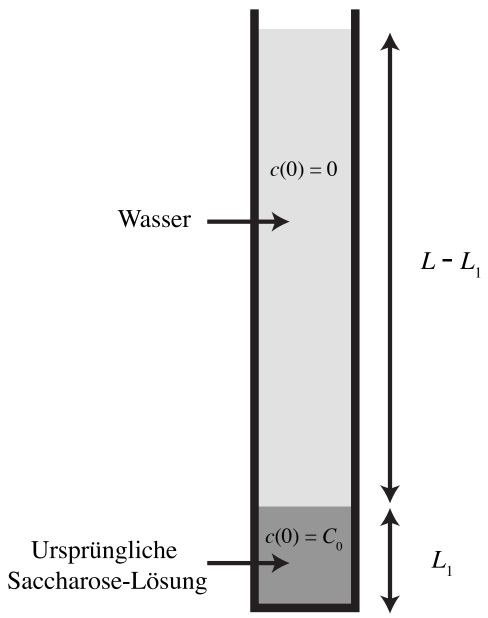
Hinweis:
Die Abhängigkeit der Konzentration von Zeit und Strecke (hier liegt ein begrenzter, asymmetrischer, eindimensionaler Diffusionsprozess vor) kann durch die Gleichung

$$c(x,t) = \frac{Z_0}{2A(\pi D t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \qquad \text{(II.5) im Skript}$$

nicht korrekt beschrieben werden. Die Gleichung (II.5) ist eine Lösung für das 2. Fick'sche Gesetz mit den Bedingungen, dass die Moleküle in beide Richtungen unbegrenzt und von einem einzigen Punkt ($x = 0$) aus startend diffundieren können. Die zuletzt genannten Bedingungen trifft man in der Realität aber nie an.

Diese Übung beschreibt eine andere Situation: Es sind zwei Lösungen von unterschiedlich grossem Volumen, in welchen sich der grösste Anteil des gelösten Stoffes nur in eine Richtung und für eine begrenzte Strecke bewegen kann. Für diese Situation gibt es keine einfache Lösung des 2. Fick'schen Gesetzes, trotzdem kann man für einen gewissen Zeitrahmen Annäherungen zur Lösung finden. Wir werden das Problem unterschiedlich betrachten, abhängig von der Diffusionslänge (Distanz der Bewegung eines durchschnittlichen Moleküles) verglichen mit den Längen L und L_1 im zylindrischen Kolben. (siehe Abb.1). Berechne zuerst die Diffusionslänge $L_{\text{diff}} = \sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}$. Dann bestimme, welche Gleichung geeignet ist für die Aufgabe.

Abbildung 1:



- Für $L_{\text{diff}} \leq \frac{L_1}{2\sqrt{2}}$ brauche:

$$c(x) \quad = \quad \begin{cases} C_0 & \text{falls} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}\,\pi L_{\text{diff}}}{2} \\ C_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}L_{\text{diff}}}\right)\right) & \text{falls} \quad -\frac{\sqrt{2}\,\pi L_{\text{diff}}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}\,\pi L_{\text{diff}}}{2} \\ 0 & \text{falls} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}\,\pi L_{\text{diff}}}{2} \end{cases} \tag{1}$$

  Achtung: $x = 0$ ist die ursprüngliche Saccharoselösung/Wasser-Grenzfläche

- Für $\sqrt{2}\,L_1 \leq L_{\text{diff}} \leq \frac{L-L_1}{2\sqrt{2}}$ brauche:

$$c(x) = \frac{2\,C_0\,L_1}{\sqrt{2\pi}\,L_{\text{diff}}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L_{\text{diff}}}\right)^2} \tag{2}$$

  Achtung: $x = 0$ ist der Boden des Behälters
  (Weitere Bedingungen und genauere Erklärungen sind auf dem Lösungsblatt.)

2. Wie hoch ist die Saccharose-Konzentration auf der ursprünglichen Saccharoselösung-/Wasser-Grenzfläche bei $t = \infty$?
3. Wieso sind keine der gegebenen Gleichungen nützlich für die Berechnung der Aufgabe 3.2?
4. Warum ist Gleichung (2) der Gleichung (II.5) ähnlich?

3 Die Grösse eines Bakteriums

Eine Bakterienzelle ist ein einzelliger Organismus mit einer sehr einfachen internen Struktur, deren die Organellen der Eukaryoten und deren assoziierten Transportsysteme der Vesikel fehlen. Die meisten Bakterien haben einen Radius von 1 μm bis 10 μm. Betrachten Sie ein durchschnittliches lösliches Proteinmolekül mit einer Masse von 50 kDa und einem Diffusionskoeffizient von $D = 3 \times 10^{-8}\text{cm}^2\text{s}^{-1}$, das innerhalb einer 2 μm Bakterienzelle frei diffundieren kann.

1. Schätzen Sie ab wie lange das Proteinmolekül braucht um durch diese Bakterienzelle zu diffundieren?
2. Wie lange würde es für ein Saccharose-Molekül dauern?
3. Wie lange dauert es für das gleiche Protein um durch:
   a) eine 20 μm eukaryotische Zelle
   b) ein 1 cm langes neuronales Zellaxon

   zu diffundieren?
4. Diskutieren sind die obere Grenze der Bakteriengrösse basierend auf Ihren Berechnungen.

4 Die Wärmeleitfähigkeiten von Wasserdampf und Ammoniak

Die Wärmeleitfähigkeit von Wasserdampf bei einer Temperatur von $T = 373\,\mathrm{K}$ und einem Druck von $p = 1\,\mathrm{bar}$ beträgt $\kappa = 18.5\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{K \cdot m}}$. Die Viskosität von Wasserdampf unter entsprechenden Bedinungen ist $\eta = 12.4\,\mathrm{\mu Pa \cdot s}$.

1. Vergleichen Sie die Wärmeleitfähigkeiten von Wasserdampf bei einem Druck von $p = 1\,\mathrm{atm}$ und $p = 0.1\,\mathrm{atm}$ und erklären Sie das Ergebnis.
2. Berechnen Sie aus der Wärmeleitfähigkeit und der Viskosität von Wasserdampf die Boltzmannkonstante. Warum ist der ermittelte Wert nicht exakt?
3. Der Molekülradius von Wasser ist um den Faktor $\sqrt{2} \approx 1.41$ kleiner als der Molekülradius von Ammoniak (NH_3). Wie gross ist die Wärmeleitfähigkeit von Ammoniak?