Прикладной статистический анализ данных.
2. Проверка параметрических гипотез.

Юлиан Сердюк
Ольга Кравцова
cs.msu.psad@gmail.com

16.02.2023

Виды задач: одновыборочные

- $X^n \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $H_0\colon \mu = \mu_0$
    - σ известна 1
    - σ неизвестна 3
  - $H_0\colon \sigma = \sigma_0$ 2

Виды задач: двухвыборочные

- $X_1^{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2^{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2$
    - X_1, X_2 независимые
      - σ_1, σ_2 известны 4
      - σ_1, σ_2 неизвестны 5
    - X_1, X_2 связанные 6
  - $H_0 \colon \sigma_1 = \sigma_2$ 7

1 Z-критерий

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

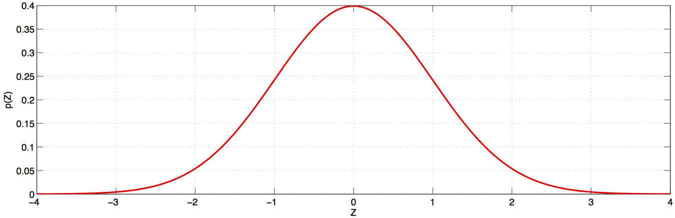
σ известна

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$

альтернатива: $H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$

статистика: $Z\left(X^n\right) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(Z\right) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ F_{N(0,1)}(Z), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2\left(1 - F_{N(0,1)}(|Z|)\right), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

Z-критерий

Пример (Kanji, критерий 1): линия по производству пудры должна обеспечивать средний вес пудры в упаковке 4 грамма, заявленное стандартное отклонение — 1 грамм.
В ходе инспекции выбрано 9 упаковок, средний вес продукта в них составляет 4.6 грамма.

H_0: средний вес пудры в упаковке соответствует норме.
H_1: средний вес пудры в упаковке не соответствует норме $\Rightarrow p = 0.0719$, 95% доверительный интервал для среднего веса — $[3.95, 5.25]$ г.
H_1: средний вес пудры в упаковке превышает норму $\Rightarrow p = 0.0359$, нижний 95% доверительный предел для среднего веса — 4.05 г.

Критерий хи-квадрат

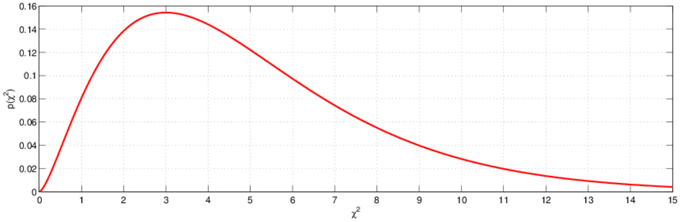
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma = \sigma_0$

альтернатива: $H_1: \sigma <\neq> \sigma_0$

статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

нулевое распределение: χ^2_{n-1}



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = \begin{cases} 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(\chi^2), & H_1: \sigma > \sigma_0, \\ F_{\chi^2_{n-1}}(\chi^2), & H_1: \sigma < \sigma_0, \\ 2\min\left(1 - F_{\chi^2_{n-1}}(\chi^2), F_{\chi^2_{n-1}}(\chi^2)\right), & H_1: \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

2 Критерий хи-квадрат

Пример (Kanji, критерий 15): при производстве микрогидравлической системы делается инъекция жидкости. Дисперсия объёма жидкости — критически важный параметр, установленный стандартом на уровне 9 кв. мл. В выборке из 25 микрогидравлических систем выборочная дисперсия объёма жидкости составляет 12 кв. мл.

H_0: дисперсия объёма жидкости соответствует стандарту.
H_1: дисперсия объёма жидкости не соответствует стандарту $\Rightarrow p = 0.254$, 95% доверительный интервал для дисперсии — $[7.3, 23.2]$ кв. мл.
H_1: дисперсия объёма жидкости превышает допустимое значение $\Rightarrow p = 0.127$, односторонний нижний 95% доверительный предел — 7.9 кв. мл.

t-критерий Стьюдента

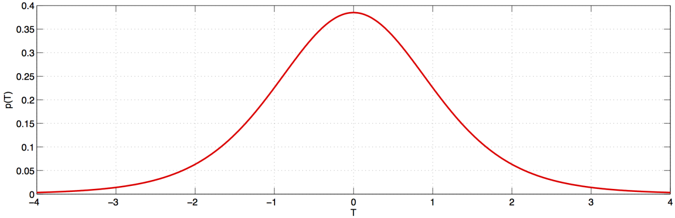
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$
σ неизвестна

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$

альтернатива: $H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$

статистика: $T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

нулевое распределение: $St(n-1)$



С ростом объёма выборки разница между t- и z-критериями уменьшается.

t-критерий Стьюдента

Пример: средний вес детей при рождении составляет 3300 г. В то же время, если мать ребёнка живёт за чертой бедности, то средний вес таких детей — 2800 г.
С целью увеличить вес тех детей, чьи матери живут за чертой бедности, разработана экспериментальная программа ведения беременности. Чтобы проверить ее эффективность, проводится эксперимент. В нём принимают участие 25 женщин, живущих за чертой бедности. У всех них рождаются дети, и их средний вес составляет 3075 г, выборочное стандартное отклонение — 500 г.
Эффективна ли программа?

$H_0:$ программа не влияет на вес детей, $\mu = 2800$
$H_1:$ программа как-то влияет на вес детей, $\mu \neq 2800 \Rightarrow p = 0.0111$, 95% доверительный интервал для изменения веса — $[68.6, 481.4]$ г.
$H_1:$ программа увеличивает вес детей, $\mu > 2800 \Rightarrow p = 0.0056$, 95% нижний доверительный предел для увеличения веса — 103.9 г.

Выбор альтернативы

Одностороннюю альтернативу можно использовать, если знак изменения среднего известен заранее.

Альтернатива должна выбираться до получения данных!

4 Z-критерий

выборки: $X_1^{n_1} = \left(X_{11}, \ldots, X_{1n_1}\right), X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$

$X_2^{n_2} = \left(X_{21}, \ldots, X_{2n_2}\right), X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

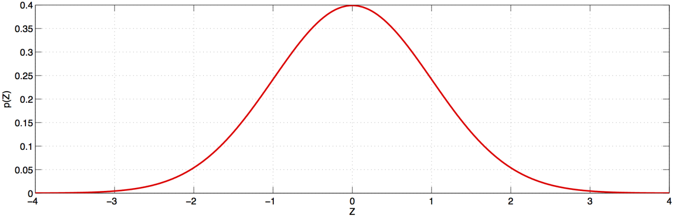
σ_1, σ_2 известны

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



4 Z-критерий

Пример (Kanji, критерий 3): известно, что одна из линий по расфасовке чипсов даёт упаковки с более вариабельным весом продукта, чем вторая. Дисперсии равны 0.000576 г^2 и 0.001089 г^2 соответственно, средние значения веса в выборках из 13 и 8 элементов — 80.02 г и 79.98 г.

H_0: средний вес продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, совпадает.
H_1: средние веса продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, различаются $\Rightarrow p = 0.001$, 95% доверительный интервал для разности — $[0.039, 0.041]$.

5 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
σ_1, σ_2 неизвестны

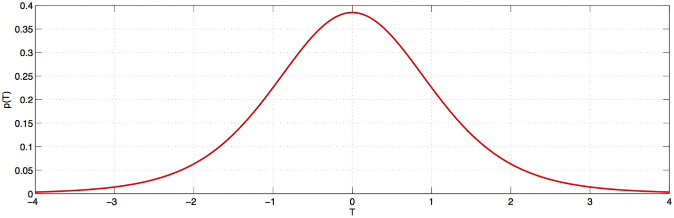
нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

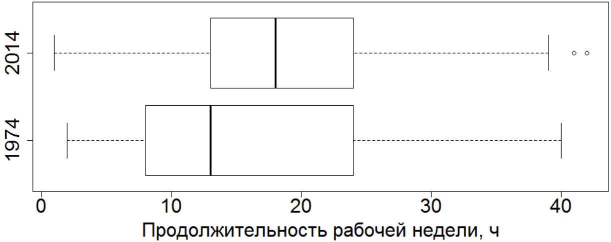
нулевое распределение: $\approx St(\nu)$



Приближение достаточно точно при $n_1 = n_2$ или $[n_1 > n_2] = [\sigma_1 > \sigma_2]$.

t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

Пример: в 1974 году 108 респондентов GSS работали неполный день, в 2014 — 196. Для каждого из них известно количество рабочих часов за неделю, предшествующую опросу.



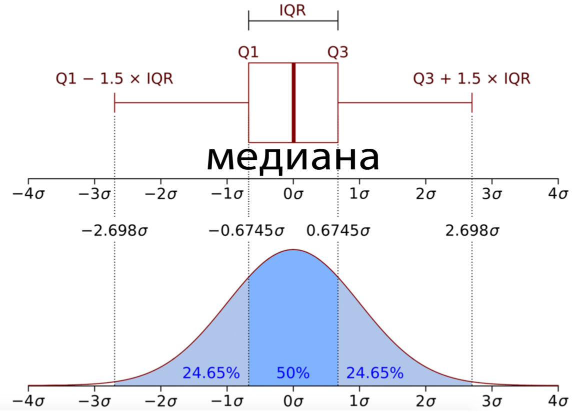
Изменилось ли среднее время работы у работающих неполный день?

$H_0:$ среднее время работы не изменилось, $\mu_1 = \mu_2$.
$H_0:$ среднее время работы изменилось, $\mu_1 \neq \mu_2$.

t-критерий: $p = 0.02707$, средняя продолжительность рабочей недели увеличилась на 2.57 часов (95% доверительный интервал — $[0.29, 4.85]$ ч).

Боксплот

Ящик с усами — способ визуализации основных характеристик распределения:



Длина усов отличается в разных реализациях.

6 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$

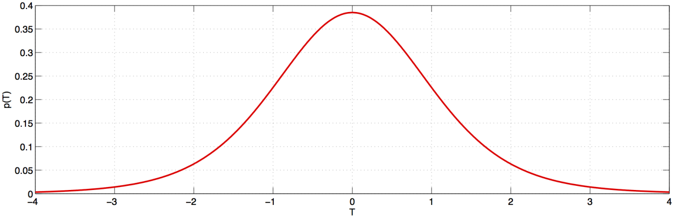
альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$

статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}}$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}$$

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

нулевое распределение: $St(n-1)$



6 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

Пример (Kanji, критерий 10): на 10 испытуемых сравниваются два лекарства против респираторного заболевания. Каждый из испытуемых вдыхает первое лекарство с помощью ингалятора, после чего проходит упражнение беговой дорожке. Измеряется время достижения максимальной нагрузки. Затем после периода восстановления эксперимент повторяется со вторым лекарством.

$H_0:$ время достижения максимальной нагрузки не отличается для исследуемых лекарств.

$H_1:$ время достижения максимальной нагрузки для исследуемых лекарств отличается $\Rightarrow p = 0.916$; 95% доверительный интервал для разницы — $[-2.1, 0.9]$.

Пример

Пусть имеются следующие связные выборки:

$$X_1^n,\ X_1 \sim N(0,1),$$
$$X_2^n,\ X_2 = X_1 + \varepsilon,\ \ \varepsilon \sim N(0.1, 0.25) \Rightarrow X_2 \sim N(0.1, 1.25);$$

требуется оценить разность $\Delta = \mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2$.
Если попарные соответствия элементов известны, лучшая оценка $\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_{1i} - X_{2i})$ имеет дисперсию

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X_{1i} - X_{2i}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{D}\varepsilon = \frac{1}{2n};$$

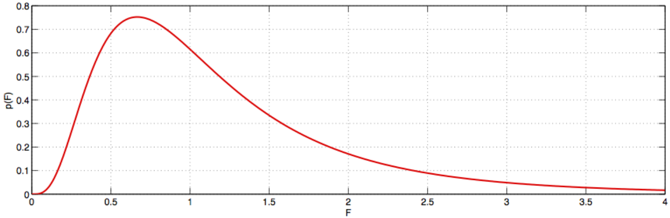
мощность 0.8 достигается при $n \approx 200$.
Если же попарные соответствия неизвестны, лучшая оценка — $\hat{\Delta}_i = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$; её дисперсия:

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}X_{1i} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}X_{2i} = \frac{1}{n} + \frac{5}{4n} = \frac{9}{4n}$$

— в 4.5 раза больше; мощность 0.8 достигается при $n \approx 1900$.

7 F-критерий Фишера

выборки:	$X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2$
альтернатива:	$H_1\colon \sigma_1 <\neq> \sigma_2$
статистика:	$F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
нулевое распределение:	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

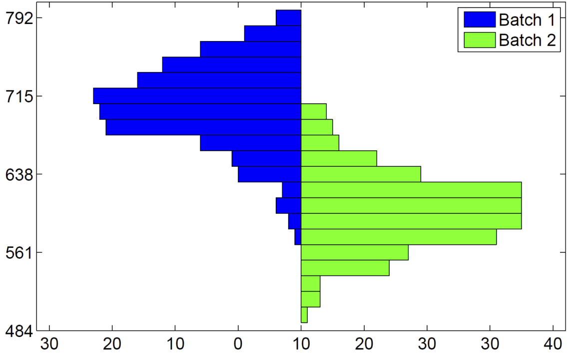


Критерий Фишера неустойчив к отклонениям от нормальности даже асимптотически.

7 F-критерий Фишера

Пример (NIST/industry ceramics consortium for strength optimization of ceramic, 1996): собраны данные о прочности материала 440 керамических изделий из двух партий по 220 в каждой.

Одинакова ли дисперсия прочности в разных партиях?



Критерий Фишера: $p = 0.1721, \quad [C_L, C_U] = [0.9225, 1.5690]$.

Критерий Харке-Бера

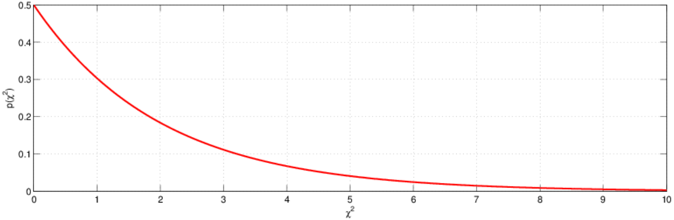
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна

статистика: $\chi^2\left(X^n\right) = \frac{n}{6}\left(g_1^2 + \frac{1}{4} g_2^2\right)$

нулевое распределение: χ_2^2



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = 1 - F_{\chi_2^2}\left(\chi^2\right)$$

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon X \sim N(\mu, \sigma^2)$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна

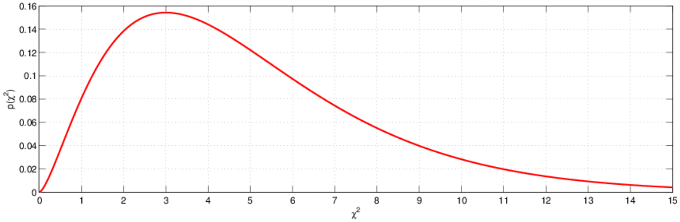
статистика: $\chi^2(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{K} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$

$[a_i, a_{i+1}], i = 1, \dots, K$ — интервалы гистограммы

n_i — число элементов выборки в $[a_i, a_{i+1}]$

$p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$ — вероятность попадания в i-й интервал при H_0

нулевое распределение: $\begin{cases} \chi^2_{K-1}, & \mu, \sigma \text{ заданы}, \\ \chi^2_{K-3}, & \mu, \sigma \text{ оцениваются}, \end{cases}$



Недостатки:

- разбиение на интервалы неоднозначно
- требует больших выборок ($np_i > 5$ в 80% ячеек)

Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

Ряд критериев согласия основаны на различиях между $F(x)$ и $F_n(x)$:

- Джини:

$$\int |F_n(x) - F(x)|\, dx$$

- Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2\, dx$$

- Колмогорова (одновыборочный Колмогорова-Смирнова):

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|$$

- Смирнова-Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2\, dF(x)$$

Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

- Андерсона-Дарлинга:

$$\int \frac{\left(F_n(x) - F(x)\right)^2}{F(x)\left(1 - F(x)\right)} dF(x)$$

- Купера:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left(F_n(x) - F(x)\right) + \sup_{-\infty<x<\infty} \left(F(x) - F_n(x)\right)$$

- Ватсона:

$$\int \left(F_n(x) - F(x) - \int \left(F_n(x) - F(x)\right) dF(x)\right) dF(x)$$

- Фроцини:

$$\int \left|F_n(x) - F(x)\right| dF(x)$$

Предполагается, что $F(x)$ известна с точностью до параметров (если они оцениваются по выборке, нулевое распределение корректируется).

Критерий Колмогорова (Лиллиефорса)

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$
нулевая гипотеза:	$H_0\colon X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$
альтернатива:	$H_1\colon H_0$ неверна
статистика:	$D\left(X^n\right) = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \lvert F_n(x) - \Phi(x)\rvert$
нулевое распределение:	табличное

Недостатки:

- имеет низкую мощность
- не чувствителен к различиям на хвостах распределений

Критерий Шапиро-Уилка

выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна

статистика: $W\left(X^n\right) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$

$(a_1, \ldots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{\left(m^T V^{-1} V^{-1} m\right)^{1/2}}$

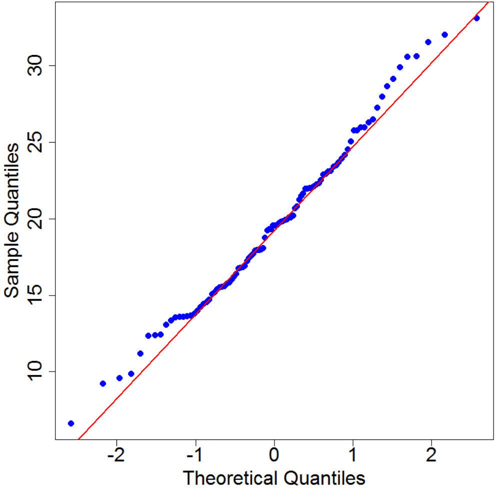
$m = (m_1, \ldots, m_n)^T$ — матожидания порядковых статистик $N(0,1)$, V — их ковариационная матрица

нулевое распределение: табличное

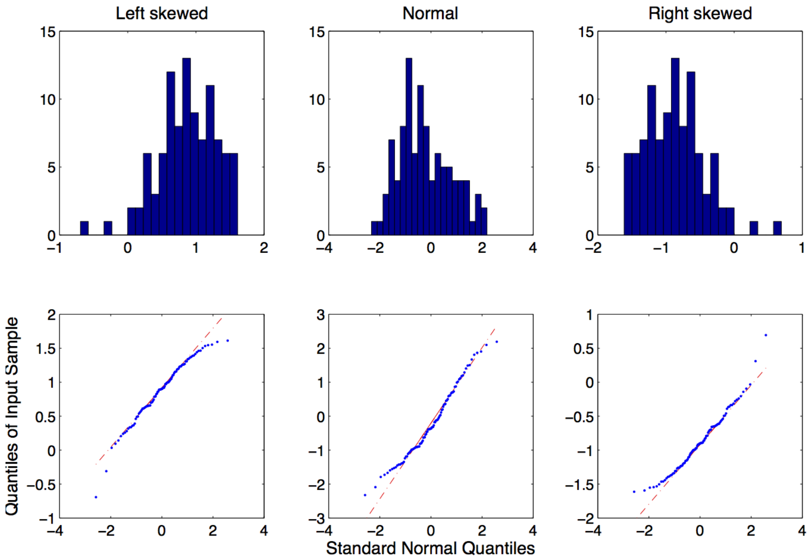
Значения a_i также табулированы.

Q-Q plot

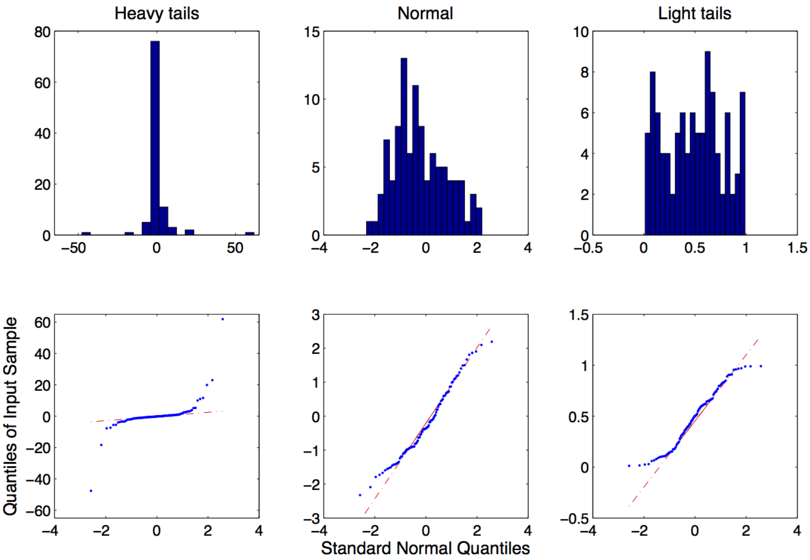
Визуальный метод проверки согласия выборки и распределения — q-q plot (для нормального распределения называется также normal probability plot)



Q-Q plot


Left skewed
Normal
Right skewed
Quantiles of Input Sample
Standard Normal Quantiles

Q-Q plot


Heavy tails
Normal
Light tails
Quantiles of Input Sample
Standard Normal Quantiles

Итого о проверке нормальности

- **выбросы**: сильно влияют на выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса
- **критерий Лиллиефорса**: представляет только исторический интерес
- **критерий хи-квадрат**: слишком общий, не самый мощный, потеря информации из-за разбиения на интервалы

Итого о проверке нормальности

Сравнение критериев проверки нормальности распределения случайных величин

Наименование критерия (раздел)	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро–Уилка (3.2.2.1)	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2 (3.2.2.16)	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина (3.1.2.7)	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино (3.2.2.14)	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4 (3.2.2.16)	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека (3.2.2.2)	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (3.2.2.10)	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2 (3.1.1.1)	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона–Дарлинга (3.1.2.4)	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена (3.2.2.5)	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова–Смирнова (3.1.2.1)	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса–Иглевича (3.2.2.14)	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина–Мудхолкара (3.2.2.13)	4	15	12	12	16	13
Критерий α_3 (3.2.2.16)	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера (3.2.2.11)	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади (3.2.2.12)	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова–Крамера–фон Мизеса (3.1.2.2)	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка–Спурье (3.2.2.7)	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя (3.2.2.8)	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази–Грина (3.2.2.3)	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты–Такеучи (3.2.2.17)	15	21	17	20	20	21

Кобзарь, 3.2.2.19, табл. 80.

Итого о проверке нормальности

- **очень маленькие выборки**: любой критерий может пропустить отклонения от нормальности, графические методы бесполезны
- **очень большие выборки**: любой критерий может выявлять небольшие статистически, но не практически значимые отклонения от нормальности; значительная часть методов, предполагающих нормальность, демонстрируют устойчивость к отклонениям от неё

Итого о проверке нормальности

- если данные явно ненормальны (например, бинарны или дискретны), нужно выбрать метод, специфичный для такого распределения
- если на ку-ку графике не видно существенных отклонений от нормальности, можно сразу использовать методы, устойчивые к небольшим отклонениям (например, критерии Стьюдента)
- если метод чувствителен к отклонениям от нормальности (например, критерий Фишера), проверять её рекомендуется критерием Шапиро-Уилка
- если нормальность отвергается, чувствительные методы, предполагающие нормальность, использовать нельзя!

Правдоподобие

$$X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, \;\; X \sim f(x, \theta)\,.$$

ОМП для θ:

$$\log L(X^n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta)\,,$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \operatorname*{argmax}_{\theta} \log L(X^n, \theta)\,,$$

$$I(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta)\,,$$

$$\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE} = I^{-1}\left(\hat{\theta}_{MLE}\right),$$

$$S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta)\,.$$

$\hat{\theta}_{MLE}$ и $S\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$ асимптотически нормально распределены.

Критерий Вальда

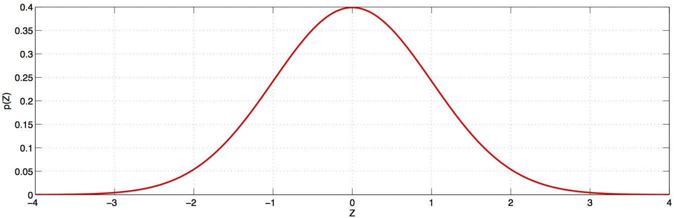
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim F(x, \theta)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \theta = \theta_0$

альтернатива: $H_1\colon \theta <\neq> \theta_0$

статистика: $Z_W(X^n) = \frac{\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0}{\sqrt{\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE}}}$

нулевое распределение: $Z_W(X^n) \sim N(0,1)$ при H_0



достигаемый уровень значимости:

$$p(Z_W) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z_W), & H_1\colon \theta > \theta_0, \\ F_{N(0,1)}(Z_W), & H_1\colon \theta < \theta_0, \\ 2\left(1 - F_{N(0,1)}(|Z_W|)\right), & H_1\colon \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Критерий отношения правдоподобия

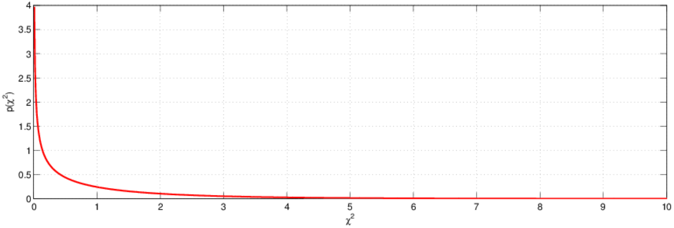
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X \sim F(x, \theta)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \theta = \theta_0$

альтернатива: $H_1\colon \theta \neq \theta_0$

статистика: $LR(X^n) = -2 \log \frac{L(X^n, \theta_0)}{L(X^n, \hat{\theta}_{MLE})}$

нулевое распределение: $LR(X^n) \sim \chi^2_1$ при H_0



достигаемый уровень значимости:

$$p(LR) = 1 - F_{\chi^2_1}(LR)\,.$$

Если θ — вектор размерности k, то нулевое распределение критерия — χ^2_k.

Критерий меток

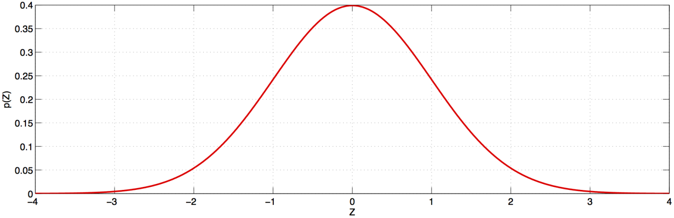
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim F(x, \theta)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \theta = \theta_0$

альтернатива: $H_1\colon \theta <\neq> \theta_0$

статистика: $Z_S(X^n) = \frac{S(\theta_0)}{\sqrt{I(\theta_0)}}$

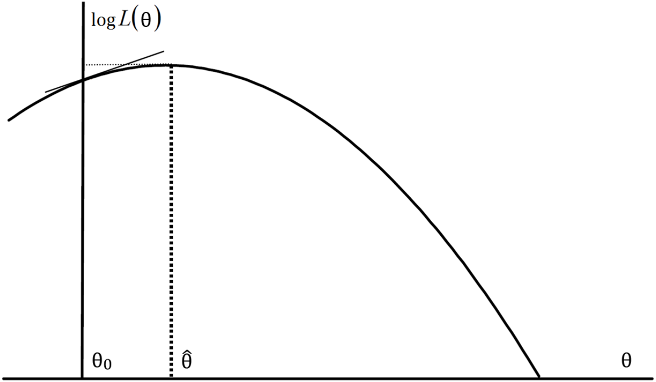
нулевое распределение: $N(0,1)$



достигаемый уровень значимости:

$$p(Z_S) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z_S), & H_1\colon \theta > \theta_0, \\ F_{N(0,1)}(Z_S), & H_1\colon \theta < \theta_0, \\ 2\left(1 - F_{N(0,1)}(|Z_S|)\right), & H_1\colon \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Три критерия



- критерий Вальда использует информацию о правдоподобии только в $\hat{\theta}_{MLE}$, критерий меток — только в θ_0, критерий отношения правдоподобия — в обеих точках
- все три критерия асимптотические; на конечных выборках хуже всего критерий Вальда

Правдоподобие

$$X^n = (X_1, \dots, X_n)\,,\ X \sim Ber\,(p)\,,\ T = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

ОМП для p:

$$\begin{aligned}
L\,(p) &= p^T\,(1-p)^{(n-T)}\,,\\
\log L\,(p) &= T\ln p + (n-T)\ln\,(1-p)\,,\\
\hat{p} &= \frac{T}{n},\\
I\,(p) &= -\frac{\partial^2 \log L(p)}{\partial p^2} = \frac{n}{p\,(1-p)},\\
\mathbb{D}\hat{p} &= \frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n},\\
S\,(p) &= \frac{T}{p} - \frac{n-T}{1-p}
\end{aligned}$$

Правдоподобие

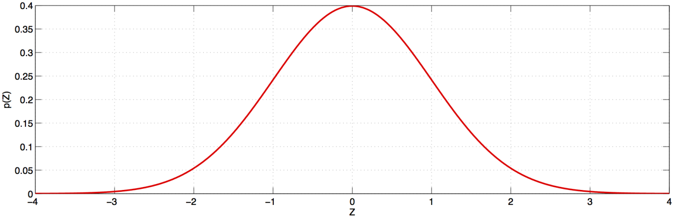
$$LR = -2\log\frac{L(p_0)}{L(\hat{p})} \sim \chi^2_1$$

$$Z_W = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{1/I(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z_S = \frac{S(p_0)}{\sqrt{I(p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Z-критерий меток для доли

выборка:	$X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$
нулевая гипотеза:	$H_0: p = p_0$
альтернатива:	$H_1: p <\neq> p_0$
статистика:	$Z_S(X^n) = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
нулевое распределение:	$N(0,1)$



Биномиальный критерий

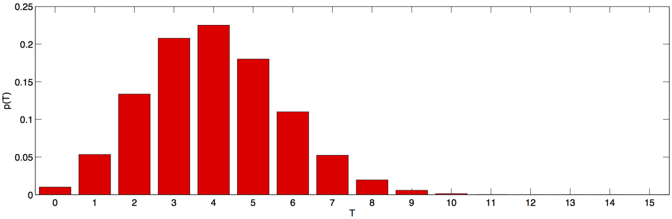
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$

нулевая гипотеза: $H_0: p = p_0$

альтернатива: $H_1: p <\neq> p_0$

статистика: $T(X^n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$

нулевое распределение: $Bin(n, p_0)$



достигаемый уровень значимости:

$$p(T) = \begin{cases} 1 - F_{Bin(n,p_0)}(T), & H_1: p > p_0, \\ F_{Bin(n,p_0)}(T), & H_1: p < p_0, \\ \text{через бета-распределение}, & H_1: p \neq p_0. \end{cases}$$

Поскольку нулевое распределение дискретно, нельзя добиться, чтобы вероятность ошибки первого рода была равна в точности α.

Примеры

Пример 1 (Королёв, задача 7.2.2): Бенджамин Спок, знаменитый педиатр и автор большого количества книг по воспитанию детей, был арестован за участие в антивоенной демонстрации в Бостоне. Его дело должен был рассматривать суд присяжных. Присяжные назначаются с помощью многоступенчатой процедуры, на очередном этапе которой было отобрано 300 человек. Однако среди них оказалось только 90 женщин. Адвокаты доктора Спока подали протест на предвзятость отбора.

$H_0:$ процедура отбора была беспристрастной, женщины попадали в выборку с вероятностью $1/2$.
$H_1:$ предпочтение отдавалось кандидатам-мужчинам.

Критерий	p
Z-критерий меток	2.3×10^{-12}
Z-критерий Вальда	2.1×10^{-12}
Биномиальный	1.6×10^{-12}

Примеры

Пример 2 (Кобзарь, задача 227): нормируемый уровень дефектных изделий в партии $p_0 = 0.05$. Среди 20 изделий партии проверка обнаружила 2 дефектных.

H_0: доля дефектных изделий в партии не выше нормы.
H_1: доля дефектных изделий в партии выше нормы.

Обратите внимание: если $H_0 : p = p_0$ проверяется против $H_1 : p > p_0$, ничего не изменится от замены нулевой гипотезы на $H_0 : p \leq p_0$.

Критерий	p
Z-критерий меток	0.1524
Z-критерий Вальда	0.2280
Биномиальный	0.2642

Доверительные интервалы для доли

$100\,(1-\alpha)\%$ доверительный интервал Вальда:

Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	$[0.2481, 0.3519]$	$[-0.0315, 0.2315]$

Недостатки:

- доверительные пределы могут выходить за границы $[0,1]$ (вообще, при $\hat{p} \in (0,1)$ нежелательно даже $C_L = 0$ и $C_U = 1$)
- при $\hat{p} = 0$ и $\hat{p} = 1$ вырождается в точку
- антиконсервативен — накрывает p реже, чем в $100\,(1-\alpha)\%$ случаев

Доверительные интервалы для доли

Более точный доверительный интервал Уилсона (основан на критерии меток):

$$\frac{T + z_{1-\frac{\alpha}{2}}/2}{n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}}{n + z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right) + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n}}$$

Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	$[0.2481, 0.3519]$	$[-0.0315, 0.2315]$
Уилсона	$[0.2509, 0.3541]$	$[0.0279, 0.3010]$

Доверительные интервалы для доли

Доверительный интервал Клоппера-Пирсона (основан на биномиальном критерии) определяется квантилями бета-распределения.

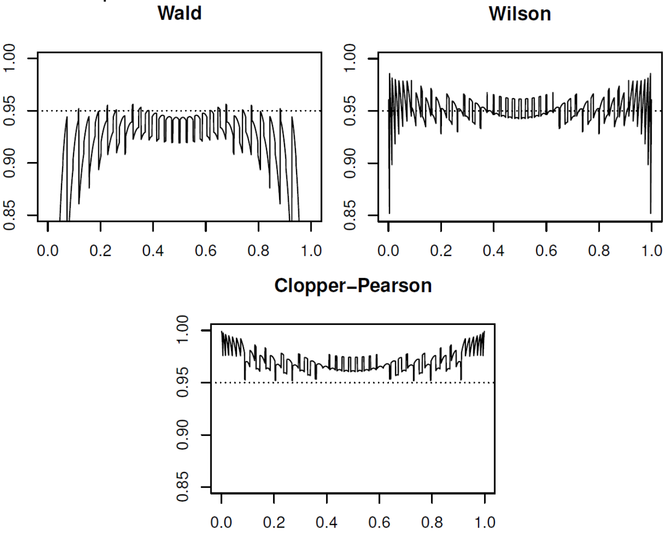
Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	$[0.2481, 0.3519]$	$[-0.0315, 0.2315]$
Уилсона	$[0.2509, 0.3541]$	$[0.0279, 0.3010]$
Клоппера-Пирсона	$[0.2486, 0.3553]$	$[0.0123, 0.3170]$

Особенности:

- всегда точен — уровень доверия никогда не ниже номинального
- почти всегда консервативен — уровень доверия часто выше номинального

Доверительные интервалы для доли

Эксперименты при $n = 40$:



Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})\,, X_1 \sim Ber\,(p_1)$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})\,, X_2 \sim Ber\,(p_2)$
выборки независимы

Исход \ Выборка	$X_1^{n_1}$	$X_2^{n_2}$
1	a	b
0	c	d
$\sum$	n_1	n_2

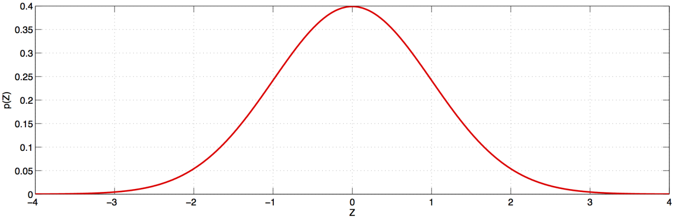
нулевая гипотеза: $H_0\colon p_1 = p_2$

альтернатива: $H_1\colon p_1 <\neq> p_2$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

$P = \dfrac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1+n_2},\ \hat{p}_1 = \dfrac{a}{n_1},\ \hat{p}_2 = \dfrac{b}{n_2}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

Пример (Кобзарь, задача 226): в двух партиях объёмами $n_1 = 100$ шт. и $n_2 = 200$ шт. обнаружено соответственно $t_1 = 3$ и $t_2 = 5$ дефектных приборов. Необходимо проверить гипотезу о равенстве долей дефектных приборов в партиях.

Наличие дефекта \ Номер партии	1	2
Есть	$a = 3$	$b = 5$
Нет	$c = 97$	$d = 195$
Всего	$n_1 = 100$	$n_2 = 200$

$H_0:$ доли дефектных изделий в партиях равны.
$H_1:$ доли дефектных изделий в партиях различаются $\Rightarrow p = 0.8$.
$H_1:$ доля дефектных изделий в первой партии выше $\Rightarrow p = 0.4$.
$H_1:$ доля дефектных изделий в первой партии ниже $\Rightarrow p = 0.6$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon],$$

$$\delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{l_1(1-l_1)}{n_1} + \frac{u_2(1-u_2)}{n_2}},$$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{u_1(1-u_1)}{n_1} + \frac{l_2(1-l_2)}{n_2}},$$

l_1, u_1 — корни уравнения $|x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_1}}$,

l_2, u_2 — корни уравнения $|x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_2}}$.

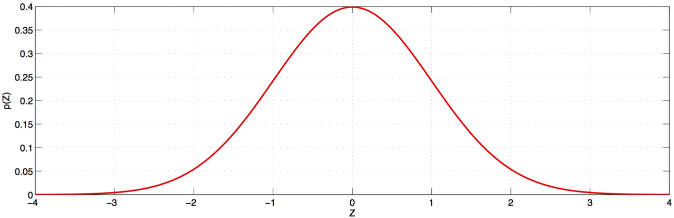
В примере 95% доверительный интервал — $[-0.0331, 0.0616]$, минимальное значение α, при котором интервал не содержит нуля — 0.8003.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})\,, X_1 \sim Ber\,(p_1)$
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})\,, X_2 \sim Ber\,(p_2)$
выборки связанные

$X_1^n \backslash X_2^n$	1	0
1	e	f
0	g	h

нулевая гипотеза: $H_0\colon p_1 = p_2$
альтернатива: $H_1\colon p_1 <\neq> p_2$
статистика: $Z\left(X_1^n, X_2^n\right) = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{f+g}{n^2} - \frac{(f-g)^2}{n^3}}} = \dfrac{f-g}{\sqrt{f+g-\frac{(f-g)^2}{n}}}$
нулевое распределение: $N(0,1)$



Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Пример (Agresti, табл. 10.1): из опрошенных 1600 граждан Великобритании, имеющих право голоса, 944 высказали одобрение деятельности премьер-министра. Через 6 месяцев эти же люди были опрошены снова, на этот раз одобрение высказали только 880 опрошенных.

I \ II	$+$	-	$\sum$
$+$	$e = 794$	$f = 150$	944
-	$g = 86$	$h = 570$	656
$\sum$	880	720	1600

H_0: рейтинг премьер-министра не изменился.
H_1: рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 2.8 \times 10^{-5}$.
H_1: рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 1.4 \times 10^{-5}$.
H_1: рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.99999$.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Без учёта информации о связи между выборками:

Результат \ Опрос	I	II
+	$a = 944$	$b = 880$
-	$c = 656$	$d = 720$
$\sum$	$n_1 = 1600$	$n_2 = 1600$

H_0: рейтинг премьер-министра не изменился.

H_1: рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 0.0222$.

H_1: рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 0.0112$.

H_1: рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.9889$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$\left[C_L, C_U\right] = \left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon\right],$$

$$\delta = \sqrt{dl_1^2 - 2\hat{\phi}dl_1du_2 + du_2^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{du_1^2 - 2\hat{\phi}du_1dl_2 + dl_2^2},$$

$$\hat{\phi} = \begin{cases} \frac{eh-fg}{(e+f)(g+h)(e+h)(f+h)}, & \text{если знаменатель не равен нулю,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$dl_1 = \hat{p}_1 - l_1,$$

$$du_1 = u_1 - \hat{p}_1,$$

$$dl_2 = \hat{p}_2 - l_2,$$

$$du_2 = u_2 - \hat{p}_2,$$

l_1, u_1 — корни уравнения $\left|x - \hat{p}_1\right| = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$,

l_2, u_2 — корни уравнения $\left|x - \hat{p}_2\right| = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.

В примере 95% доверительный интервал — $[2.14, 5.90]\%$, минимальное значение α, при котором интервал не содержит нуля — 3.1×10^{-5}.

Литература

Критерии нормальности:

- Харке-Бера (Jarque–Bera) — Кобзарь, 3.2.2.16
- Шапиро-Уилка (Shapiro-Wilk) — Кобзарь, 3.2.2.1
- хи-квадрат (chi-square) — Кобзарь, 3.1.1.1, 3.2.1.1
- согласия (goodness-of-fit), основанные на эмпирической функции распределения — Кобзарь, 3.1.2, 3.2.1.2

Для нормальных распределений:

- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 1, 2, 3
- t-критерии Стьюдента (t-tests) — Kanji, №№ 7, 8, 9
- критерий хи-квадрат (chi-square test) — Kanji, №15
- критерий Фишера (F-test) — Kanji, №16

Критерии, основанные на правдоподобии: Bilder, раздел B.5

Литература

Для распределения Бернулли:

- всё про одновыборочную задачу — Agresti, 1.3, 1.4
- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 4, 5
- точный критерий (exact binomial test) — McDonald, `http://www.biostathandbook.com/exactgof.html`
- доверительные интервалы Уилсона (score confidence intervals) — Newcombe, 1998a, 1998b, 1998c

Agresti A. *Categorical Data Analysis*, 2013.

Bilder C.R., Loughin T.M. *Analysis of Categorical Data with R*, 2013.

Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.

McDonald J.H. *Handbook of Biological Statistics*, 2008.

Newcombe R.G. (1998). *Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods*. Statistics in Medicine, 17, 857–872.

Newcombe R.G. (1998). *Interval estimation for the difference between independent proportions: comparison of eleven methods*. Statistics in Medicine, 17, 873–890.

Newcombe R.G. (1998). *Improved confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data*. Statistics in Medicine, 17, 2635–2650.

Литература

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Королёв В.Ю. *Теория вероятностей и математическая статистика*, 2008.

NIST/SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*.
`http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/`