

Прикладной статистический анализ данных. 2. Проверка параметрических гипотез.

Юлиан Сердюк
Ольга Кравцова
cs.msu.psad@gmail.com

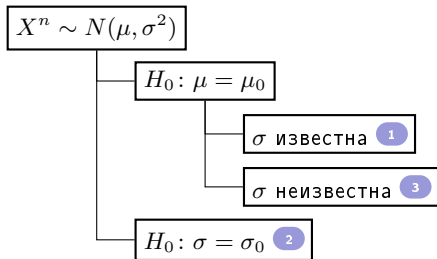
16.02.2024

В предыдущей серии

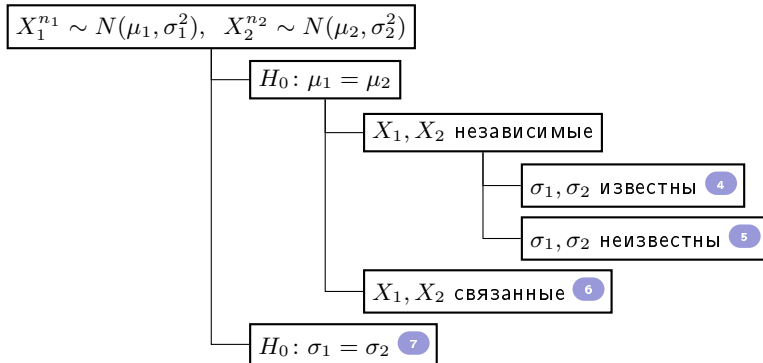
На прошлом занятии мы узнали, что:

- Мы будем заниматься проверкой гипотез
- Есть основная гипотеза (нулевая), которую мы проверяем и ищем повод чтобы отвергнуть её.
- Гипотеза проверяется путем выбора статистики, оценки нулевого распределения этой статистики и оценки, в какой процент неправдоподобных событий мы попали
- Нулевая гипотеза отвергается в пользу некоторой альтернативной, которая влияет на метод проверки нулевой гипотезы

Виды задач: одновыборочные



Виды задач: двухвыборочные



1 Z-критерий

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$

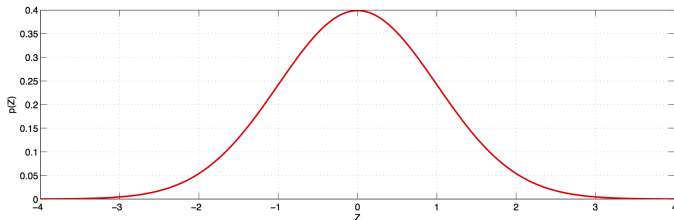
σ известна

нулевая гипотеза: $H_0: \mu = \mu_0$

альтернатива: $H_1: \mu < \neq > \mu_0$

статистика: $Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

нулевое распределение: $N(0, 1)$



достигаемый уровень значимости:

$$p(Z) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z), & H_1: \mu > \mu_0, \\ F_{N(0,1)}(Z), & H_1: \mu < \mu_0, \\ 2(1 - F_{N(0,1)}(|Z|)), & H_1: \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

1 Z-критерий

Пример (Канџи, критерий 1): линия по производству пудры должна обеспечивать средний вес пудры в упаковке 4 грамма, заявленное стандартное отклонение — 1 грамм.

В ходе инспекции выбрано 9 упаковок, средний вес продукта в них составляет 4.6 грамма.

H_0 : средний вес пудры в упаковке соответствует норме.

H_1 : средний вес пудры в упаковке не соответствует норме $\Rightarrow p = 0.0719$,
95% доверительный интервал для среднего веса — $[3.95, 5.25]$ г.

H_1 : средний вес пудры в упаковке превышает норму $\Rightarrow p = 0.0359$,
нижний 95% доверительный предел для среднего веса — 4.05 г.

Критерий хи-квадрат

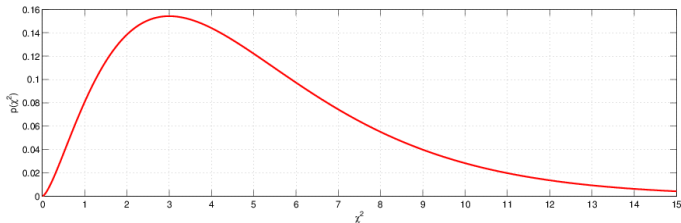
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma = \sigma_0$

альтернатива: $H_1: \sigma < \neq > \sigma_0$

статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

нулевое распределение: χ_{n-1}^2



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = \begin{cases} 1 - F_{\chi_{n-1}^2}(\chi^2), & H_1: \sigma > \sigma_0, \\ F_{\chi_{n-1}^2}(\chi^2), & H_1: \sigma < \sigma_0, \\ 2 \min(1 - F_{\chi_{n-1}^2}(\chi^2), F_{\chi_{n-1}^2}(\chi^2)), & H_1: \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

Критерий хи-квадрат

Пример (Капji, критерий 15): при производстве микрогидравлической системы делается инъекция жидкости. Дисперсия объёма жидкости — критически важный параметр, установленный стандартом на уровне 9 кв. мл. В выборке из 25 микрогидравлических систем выборочная дисперсия объёма жидкости составляет 12 кв. мл.

H_0 : дисперсия объёма жидкости соответствует стандарту.

H_1 : дисперсия объёма жидкости не соответствует стандарту $\Rightarrow p = 0.254$,
95% доверительный интервал для дисперсии — [7.3, 23.2] кв. мл.

H_1 : дисперсия объёма жидкости превышает допустимое значение
 $\Rightarrow p = 0.127$

3 t-критерий Стьюдента

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$

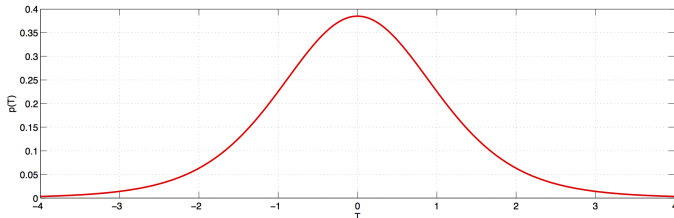
σ неизвестна

нулевая гипотеза: $H_0: \mu = \mu_0$

альтернатива: $H_1: \mu < \neq > \mu_0$

статистика: $T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

нулевое распределение: $St(n-1)$



С ростом объёма выборки разница между t- и z-критериями уменьшается.

3 t-критерий Стьюдента

Пример: средний вес детей при рождении составляет 3300 г. В то же время, если мать ребёнка живёт за чертой бедности, то средний вес таких детей — 2800 г.

С целью увеличить вес тех детей, чьи матери живут за чертой бедности, разработана экспериментальная программа ведения беременности. Чтобы проверить ее эффективность, проводится эксперимент. В нём принимают участие 25 женщин, живущих за чертой бедности. У всех них рождаются дети, и их средний вес составляет 3075 г, выборочное стандартное отклонение — 500 г.

Эффективна ли программа?

H_0 : программа не влияет на вес детей, $\mu = 2800$

H_1 : программа как-то влияет на вес детей, $\mu \neq 2800 \Rightarrow p = 0.0111$, 95% доверительный интервал для изменения веса — $[68.6, 481.4]$ г.

H_1 : программа увеличивает вес детей, $\mu > 2800 \Rightarrow p = 0.0056$

Выбор альтернативы

Одностороннюю альтернативу можно использовать, если знак изменения среднего известен заранее.

Альтернатива должна выбираться до получения данных!

Z-критерий

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

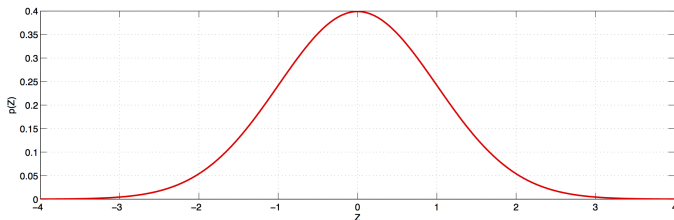
σ_1, σ_2 известны

нулевая гипотеза: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2$

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

нулевое распределение: $N(0, 1)$



Пример (Капji, критерий 3): известно, что одна из линий по расфасовке чипсов даёт упаковки с более вариабельным весом продукта, чем вторая. Дисперсии равны 0.000576 г^2 и 0.001089 г^2 соответственно, средние значения веса в выборках из 13 и 8 элементов — 80.02 г и 79.98 г.

H_0 : средний вес продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, совпадает.

H_1 : средние веса продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, различаются $\Rightarrow p = 0.001$, 95% доверительный интервал для разности — $[0.039, 0.041]$.

5 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
 σ_1, σ_2 неизвестны

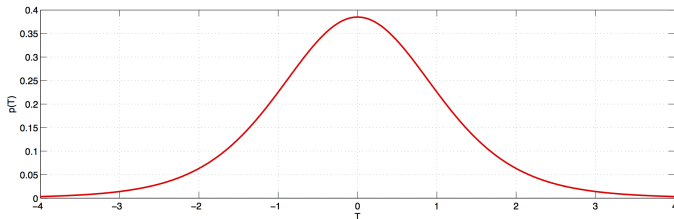
нулевая гипотеза: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2$

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

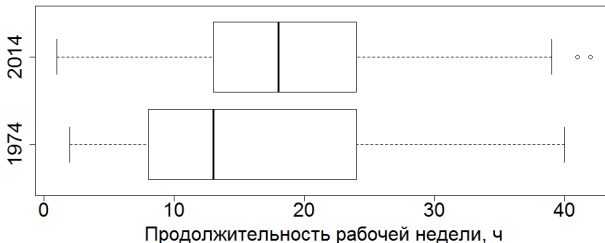
нулевое распределение: $\approx St(\nu)$



Приближение достаточно точно при $n_1 = n_2$ или $[n_1 > n_2] = [\sigma_1 > \sigma_2]$.

5 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

Пример: в 1974 году 108 респондентов GSS работали неполный день, в 2014 — 196. Для каждого из них известно количество рабочих часов за неделю, предшествующую опросу.



Изменилось ли среднее время работы у работающих неполный день?

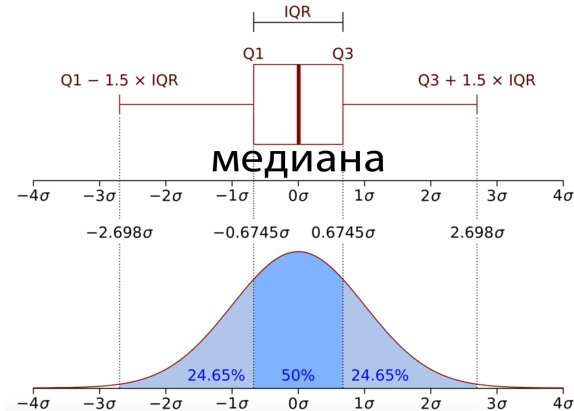
H_0 : среднее время работы не изменилось, $\mu_1 = \mu_2$.

H_0 : среднее время работы изменилось, $\mu_1 \neq \mu_2$.

t-критерий: $p = 0.02707$, средняя продолжительность рабочей недели увеличилась на 2.57 часов (95% доверительный интервал — [0.29, 4.85] ч).

Боксплот

Ящик с усами — способ визуализации основных характеристик распределения:



Длина усов отличается в разных реализациях.

6 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

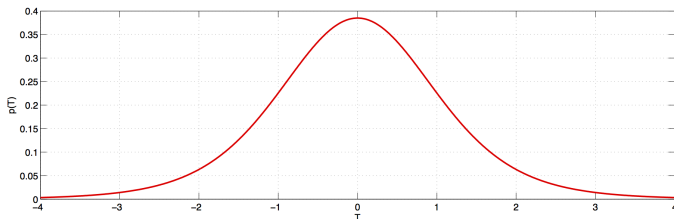
альтернатива: $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2$

статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}}$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}$$

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

нулевое распределение: $St(n-1)$



6 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

Пример (Капji, критерий 10): на 10 испытуемых сравниваются два лекарства против респираторного заболевания. Каждый из испытуемых вдыхает первое лекарство с помощью ингалятора, после чего проходит упражнение беговой дорожке. Измеряется время достижения максимальной нагрузки. Затем после периода восстановления эксперимент повторяется со вторым лекарством.

H_0 : время достижения максимальной нагрузки не отличается для исследуемых лекарств.

H_1 : время достижения максимальной нагрузки для исследуемых лекарств отличается $\Rightarrow p = 0.916$; 95% доверительный интервал для разницы — $[-2.1, 0.9]$.

Пример

Пусть имеются следующие связанные выборки:

$$X_1^n, X_1 \sim N(0, 1),$$

$$X_2^n, X_2 = X_1 + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0.1, 0.25) \Rightarrow X_2 \sim N(0.1, 1.25);$$

требуется оценить разность $\Delta = \mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2$.

Если попарные соответствия элементов известны, лучшая оценка

$$\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i}) \text{ имеет дисперсию}$$

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}(X_{1i} - X_{2i}) = \frac{1}{n} \mathbb{D}\varepsilon = \frac{1}{2n};$$

мощность 0.8 достигается при $n \approx 200$.

Если же попарные соответствия неизвестны, лучшая оценка —

$\hat{\Delta}_i = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$; её дисперсия:

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_{1i} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_{2i} = \frac{1}{n} + \frac{5}{4n} = \frac{9}{4n}$$

— в 4.5 раза больше; мощность 0.8 достигается при $n \approx 1900$.

7 F-критерий Фишера

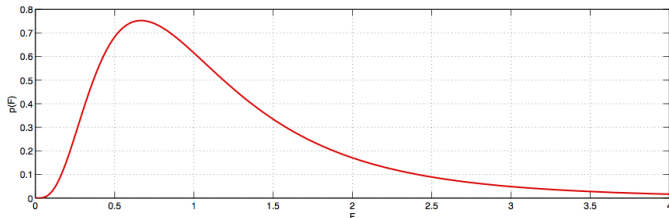
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

альтернатива: $H_1: \sigma_1 < \neq > \sigma_2$

статистика: $F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

нулевое распределение: $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

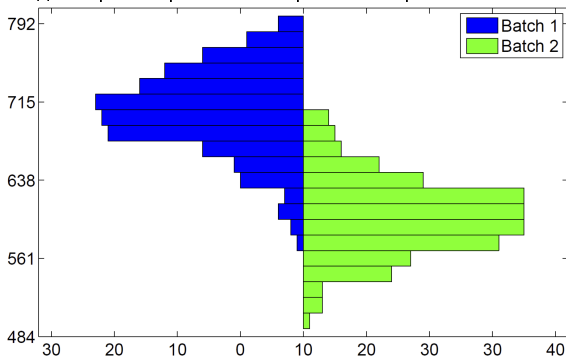


Критерий Фишера неустойчив к отклонениям от нормальности даже асимптотически.

7 F-критерий Фишера

Пример (NIST/industry ceramics consortium for strength optimization of ceramic, 1996): собраны данные о прочности материала 440 керамических изделий из двух партий по 220 в каждой.

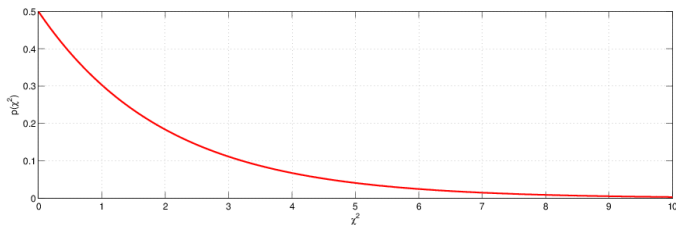
Одинакова ли дисперсия прочности в разных партиях?



Критерий Фишера: $p = 0.1721$, $[C_L, C_U] = [0.9225, 1.5690]$.

Критерий Харке-Бера

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$
 нулевая гипотеза: $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$
 альтернатива: $H_1: H_0$ неверна
 статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{n}{6} (g_1^2 + \frac{1}{4}g_2^2)$
 нулевое распределение: χ^2_2



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = 1 - F_{\chi^2_2}(\chi^2)$$

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$
нулевая гипотеза: $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$
альтернатива: $H_1: H_0$ неверна

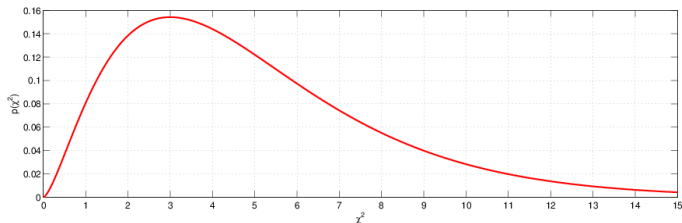
статистика:
$$\chi^2(X^n) = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

$[a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \dots, K$ — интервалы гистограммы

n_i — число элементов выборки в $[a_i, a_{i+1}]$

$p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$ — вероятность попадания в i -й интервал при H_0

нулевое распределение:
$$\begin{cases} \chi^2_{K-1}, & \mu, \sigma \text{ заданы,} \\ \chi^2_{K-3}, & \mu, \sigma \text{ оцениваются,} \end{cases}$$



Недостатки:

- разбиение на интервалы неоднозначно
- требует больших выборок ($np_i > 5$ в 80% ячеек)

Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

Ряд критериев согласия основаны на различиях между $F(x)$ и $F_n(x)$:

- Джини:

$$\int |F_n(x) - F(x)| dx$$

- Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2 dx$$

- Колмогорова (одновыборочный Колмогорова-Смирнова):

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

- Смирнова-Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$$

Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

- Андерсона-Дарлинга:

$$\int \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$$

- Купера:

$$\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - F(x)) + \sup_{-\infty < x < \infty} (F(x) - F_n(x))$$

- Ватсона:

$$\int \left(F_n(x) - F(x) - \int (F_n(x) - F(x)) dF(x) \right) dF(x)$$

- Фроцини:

$$\int |F_n(x) - F(x)| dF(x)$$

Предполагается, что $F(x)$ известна с точностью до параметров (если они оцениваются по выборке, нулевое распределение корректируется).

Критерий Колмогорова (Лиллиефорса)

выборка:	$X^n = (X_1, \dots, X_n)$
нулевая гипотеза:	$H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$
альтернатива:	$H_1: H_0$ неверна
статистика:	$D(X^n) = \sup_{-\infty < x < \infty} F_n(x) - \Phi(x) $
нулевое распределение:	табличное

Недостатки:

- имеет низкую мощность
- не чувствителен к различиям на хвостах распределений

Критерий Шапиро-Уилка

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$

нулевая гипотеза: $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$

альтернатива: $H_1: H_0$ неверна

статистика: $W(X^n) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

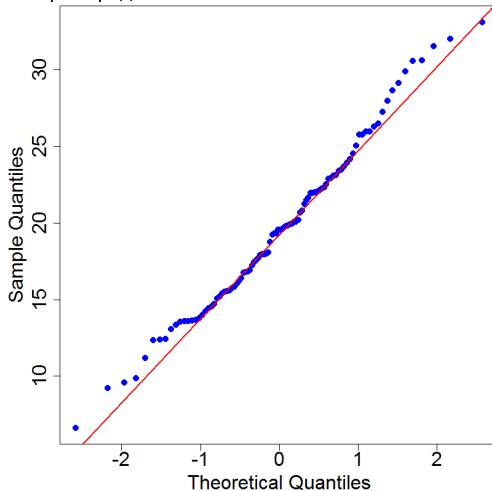
$m = (m_1, \dots, m_n)^T$ — матожидания порядковых статистик $N(0, 1)$, V — их ковариационная матрица

нулевое распределение: табличное

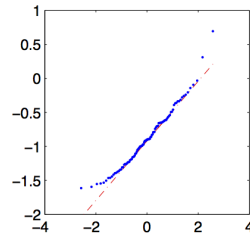
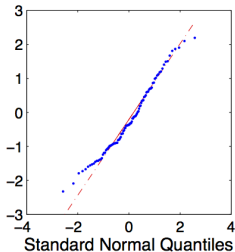
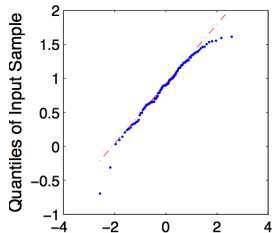
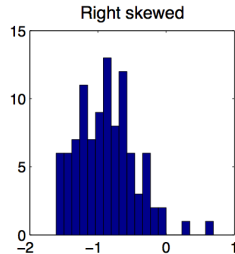
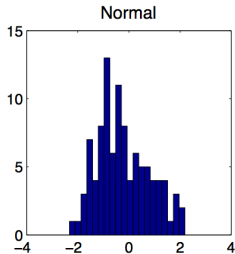
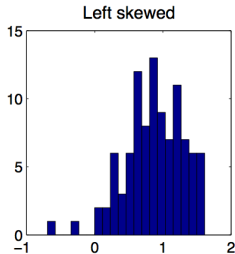
Значения a_i также табулированы.

Q-Q plot

Визуальный метод проверки согласия выборки и распределения — q-q plot (для нормального распределения называется также normal probability plot)

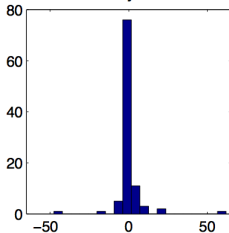


Q-Q plot

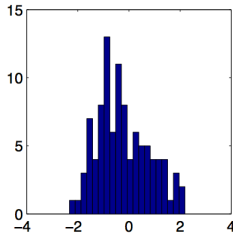


Q-Q plot

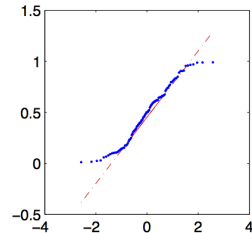
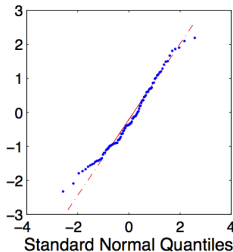
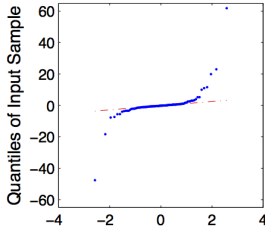
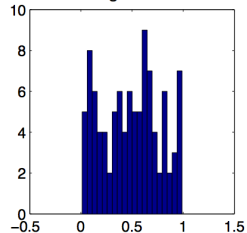
Heavy tails



Normal



Light tails



Итого о проверке нормальности

- **выбросы:** сильно влияют на выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса
- **критерий Лиллиефорса:** представляет только исторический интерес
- **критерий хи-квадрат:** слишком общий, не самый мощный, потеря информации из-за разбиения на интервалы

Итого о проверке нормальности

Сравнение критериев проверки
нормальности распределения случайных величин

Наименование критерия (раздел)	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро–Уилка (3.2.2.1)	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2 (3.2.2.16)	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина (3.1.2.7)	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино (3.2.2.14)	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4 (3.2.2.16)	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека (3.2.2.2)	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (3.2.2.10)	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2 (3.1.1.1)	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона–Дарлинга (3.1.2.4)	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена (3.2.2.5)	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова–Смирнова (3.1.2.1)	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса–Иглевича (3.2.2.14)	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина–Мудхолкара (3.2.2.13)	4	15	12	12	16	13
Критерий α_3 (3.2.2.16)	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера (3.2.2.11)	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади (3.2.2.12)	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова–Крамера–фон Мизеса (3.1.2.2)	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка–Спурье (3.2.2.7)	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя (3.2.2.8)	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази–Грина (3.2.2.3)	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты–Такеучи (3.2.2.17)	15	21	17	20	20	21

Кобзарь, 3.2.2.19, табл. 80.

Итого о проверке нормальности

- **очень маленькие выборки:** любой критерий может пропустить отклонения от нормальности, графические методы бесполезны
- **очень большие выборки:** любой критерий может выявлять небольшие статистически, но не практически значимые отклонения от нормальности; значительная часть методов, предполагающих нормальность, демонстрируют устойчивость к отклонениям от неё

Итого о проверке нормальности

- если данные явно ненормальны (например, бинарны или дискретны), нужно выбрать метод, специфичный для такого распределения
- если на ку-ку графике не видно существенных отклонений от нормальности, можно сразу использовать методы, устойчивые к небольшим отклонениям (например, критерии Стьюдента)
- если метод чувствителен к отклонениям от нормальности (например, критерий Фишера), проверять её рекомендуется критерием Шапиро-Уилка
- если нормальность отвергается, чувствительные методы, предполагающие нормальность, использовать нельзя!

Правдоподобие

$$X^n = (X_1, \dots, X_n), \quad X \sim f(x, \theta).$$

ОМП для θ :

$$\log L(X^n, \theta) = \sum_{i=1}^n f(X_i, \theta),$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \log L(X^n, \theta),$$

$$I(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta),$$

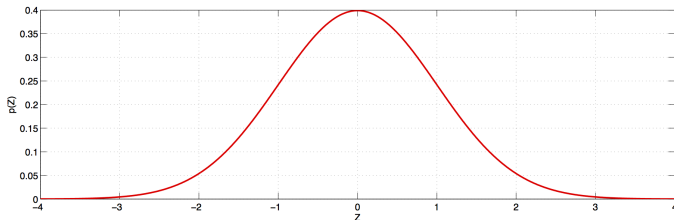
$$\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE} = I^{-1}(\hat{\theta}_{MLE}),$$

$$S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta).$$

$\hat{\theta}_{MLE}$ и $S(\hat{\theta}_{MLE})$ асимптотически нормально распределены.

Критерий Вальда

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim F(x, \theta)$
нулевая гипотеза: $H_0: \theta = \theta_0$
альтернатива: $H_1: \theta < \neq > \theta_0$
статистика: $Z_W(X^n) = \frac{\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0}{\sqrt{\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE}}}$
нулевое распределение: $Z_W(X^n) \sim N(0, 1)$ при H_0

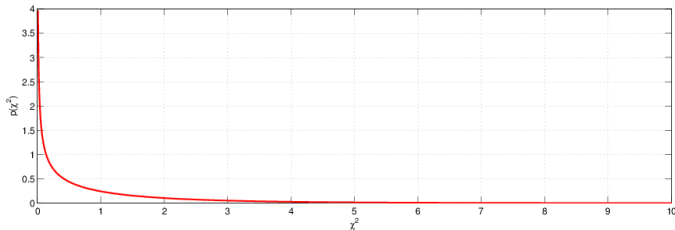


достигаемый уровень значимости:

$$p(Z_W) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z_W), & H_1: \theta > \theta_0, \\ F_{N(0,1)}(Z_W), & H_1: \theta < \theta_0, \\ 2(1 - F_{N(0,1)}(|Z_W|)), & H_1: \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Критерий отношения правдоподобия

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim F(x, \theta)$
 нулевая гипотеза: $H_0: \theta = \theta_0$
 альтернатива: $H_1: \theta \neq \theta_0$
 статистика: $LR(X^n) = -2 \log \frac{L(X^n, \theta_0)}{L(X^n, \hat{\theta}_{MLE})}$
 нулевое распределение: $LR(X^n) \sim \chi_1^2$ при H_0



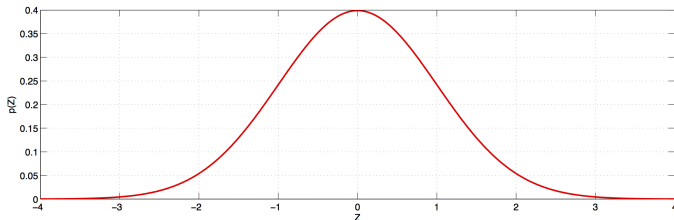
достигаемый уровень значимости:

$$p(LR) = 1 - F_{\chi_1^2}(LR).$$

Если θ — вектор размерности k , то нулевое распределение критерия — χ_k^2 .

Критерий меток

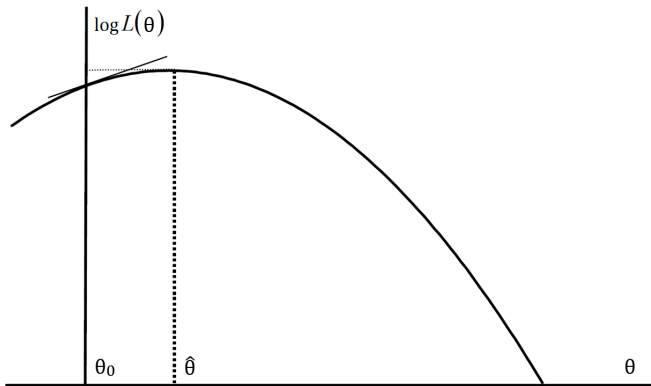
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim F(x, \theta)$
 нулевая гипотеза: $H_0: \theta = \theta_0$
 альтернатива: $H_1: \theta < \neq > \theta_0$
 статистика: $Z_S(X^n) = \frac{S(\theta_0)}{\sqrt{I(\theta_0)}}$
 нулевое распределение: $N(0, 1)$



достигаемый уровень значимости:

$$p(Z_S) = \begin{cases} 1 - F_{N(0,1)}(Z_S), & H_1: \theta > \theta_0, \\ F_{N(0,1)}(Z_S), & H_1: \theta < \theta_0, \\ 2(1 - F_{N(0,1)}(|Z_S|)), & H_1: \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Три критерия



- критерий Вальда использует информацию о правдоподобию только в $\hat{\theta}_{MLE}$, критерий меток — только в θ_0 , критерий отношения правдоподобия — в обеих точках
- все три критерия асимптотические; на конечных выборках хуже всего критерий Вальда

Правдоподобие

$$X^n = (X_1, \dots, X_n), \quad X \sim \text{Ber}(p), \quad T = \sum_{i=1}^n X_i.$$

ОМП для p :

$$L(p) = p^T (1-p)^{(n-T)},$$

$$\log L(p) = T \ln p + (n-T) \ln (1-p),$$

$$\hat{p} = \frac{T}{n},$$

$$I(p) = -\frac{\partial^2 \log L(p)}{\partial p^2} = \frac{n}{p(1-p)},$$

$$\mathbb{D}\hat{p} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n},$$

$$S(p) = \frac{T}{p} - \frac{n-T}{1-p}$$

Правдоподобие

$$LR = -2 \log \frac{L(p_0)}{L(\hat{p})} \sim \chi_1^2$$

$$Z_W = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{1/I(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$Z_S = \frac{S(p_0)}{\sqrt{I(p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Z-критерий меток для доли

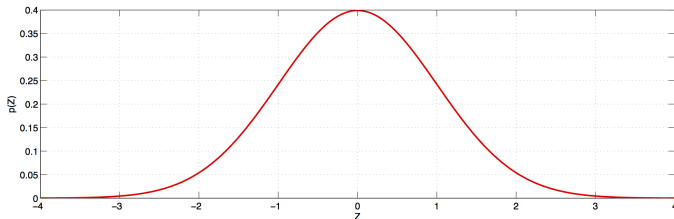
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$

нулевая гипотеза: $H_0: p = p_0$

альтернатива: $H_1: p < \neq > p_0$

статистика: $Z_S(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

нулевое распределение: $N(0, 1)$



Биномиальный критерий

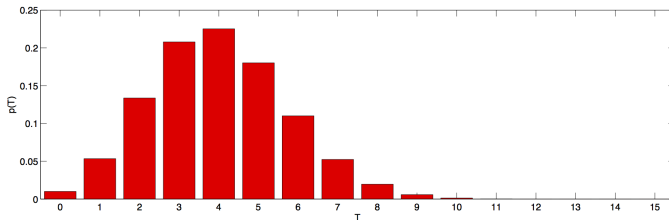
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$

нулевая гипотеза: $H_0: p = p_0$

альтернатива: $H_1: p < \neq > p_0$

статистика: $T(X^n) = \sum_{i=1}^n X_i$

нулевое распределение: $Bin(n, p_0)$



достигаемый уровень значимости:

$$p(T) = \begin{cases} 1 - F_{Bin(n, p_0)}(T), & H_1: p > p_0, \\ F_{Bin(n, p_0)}(T), & H_1: p < p_0, \\ \text{через бета-распределение,} & H_1: p \neq p_0. \end{cases}$$

Поскольку нулевое распределение дискретно, нельзя добиться, чтобы вероятность ошибки первого рода была равна в точности α .

Примеры

Пример 1 (Королёв, задача 7.2.2): Бенджамин Спок, знаменитый педиатр и автор большого количества книг по воспитанию детей, был арестован за участие в антивоенной демонстрации в Бостоне. Его дело должен был рассматривать суд присяжных. Присяжные назначаются с помощью многоступенчатой процедуры, на очередном этапе которой было отобрано 300 человек. Однако среди них оказалось только 90 женщин. Адвокаты доктора Спока подали протест на предвзятость отбора.

H_0 : процедура отбора была беспристрастной, женщины попадали в выборку с вероятностью $1/2$.

H_1 : предпочтение отдавалось кандидатам-мужчинам.

Критерий	p
Z-критерий меток	2.3×10^{-12}
Z-критерий Вальда	2.1×10^{-12}
Биномиальный	1.6×10^{-12}

Примеры

Пример 2 (Кобзарь, задача 227): нормируемый уровень дефектных изделий в партии $p_0 = 0.05$. Среди 20 изделий партии проверка обнаружила 2 дефектных.

H_0 : доля дефектных изделий в партии не выше нормы.

H_1 : доля дефектных изделий в партии выше нормы.

Обратите внимание: если $H_0: p = p_0$ проверяется против $H_1: p > p_0$, ничего не изменится от замены нулевой гипотезы на $H_0: p \leq p_0$.

Критерий	p
Z-критерий меток	0.1524
Z-критерий Вальда	0.2280
Биномиальный	0.2642

Доверительные интервалы для доли

$100(1 - \alpha)\%$ доверительный интервал Вальда:

Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	$[0.2481, 0.3519]$	$[-0.0315, 0.2315]$

Недостатки:

- доверительные пределы могут выходить за границы $[0, 1]$ (вообще, при $\hat{p} \in (0, 1)$ нежелательно даже $C_L = 0$ и $C_U = 1$)
- при $\hat{p} = 0$ и $\hat{p} = 1$ вырождается в точку
- антиконсервативен — накрывает p реже, чем в $100(1 - \alpha)\%$ случаев

Доверительные интервалы для доли

Более точный доверительный интервал Уилсона (основан на критерии меток):

$$\frac{T + z_{1-\frac{\alpha}{2}}/2}{n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}}{n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4n}}$$

Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	[0.2481, 0.3519]	[-0.0315, 0.2315]
Уилсона	[0.2509, 0.3541]	[0.0279, 0.3010]

Доверительные интервалы для доли

Доверительный интервал Клоппера-Пирсона (основан на биномиальном критерии) определяется квантилями бета-распределения.

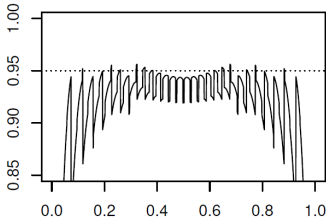
Метод	Пример 1	Пример 2
Вальда	[0.2481, 0.3519]	[−0.0315, 0.2315]
Уилсона	[0.2509, 0.3541]	[0.0279, 0.3010]
Клоппера-Пирсона	[0.2486, 0.3553]	[0.0123, 0.3170]

Особенности:

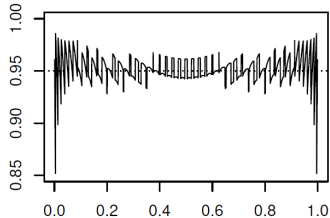
- всегда точен — уровень доверия никогда не ниже номинального
- почти всегда консервативен — уровень доверия часто выше номинального

Доверительные интервалы для доли

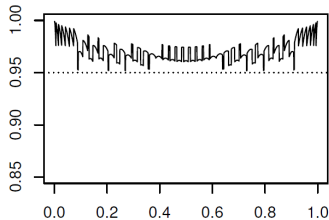
Эксперименты при $n = 40$:
Wald



Wilson



Clopper-Pearson



Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim \text{Ber}(p_1)$
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim \text{Ber}(p_2)$
 выборки независимы

Исход \ Выборка	Выборка	
	$X_1^{n_1}$	$X_2^{n_2}$
1	a	b
0	c	d
Σ	n_1	n_2

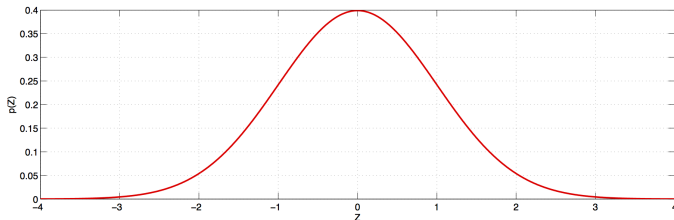
нулевая гипотеза: $H_0: p_1 = p_2$

альтернатива: $H_1: p_1 \neq p_2$

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

$$P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2}, \hat{p}_1 = \frac{a}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{b}{n_2}$$

нулевое распределение: $N(0, 1)$



Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

Пример (Кобзарь, задача 226): в двух партиях объёмами $n_1 = 100$ шт. и $n_2 = 200$ шт. обнаружено соответственно $t_1 = 3$ и $t_2 = 5$ дефектных приборов. Необходимо проверить гипотезу о равенстве долей дефектных приборов в партиях.

Наличие дефекта \ Номер партии	1	2
	1	2
Есть	$a = 3$	$b = 5$
Нет	$c = 97$	$d = 195$
Всего	$n_1 = 100$	$n_2 = 200$

H_0 : доли дефектных изделий в партиях равны.

H_1 : доли дефектных изделий в партиях различаются $\Rightarrow p = 0.8$.

H_1 : доля дефектных изделий в первой партии выше $\Rightarrow p = 0.4$.

H_1 : доля дефектных изделий в первой партии ниже $\Rightarrow p = 0.6$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon],$$

$$\delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{l_1(1-l_1)}{n_1} + \frac{u_2(1-u_2)}{n_2}},$$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{u_1(1-u_1)}{n_1} + \frac{l_2(1-l_2)}{n_2}},$$

l_1, u_1 — корни уравнения $|x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_1}},$

l_2, u_2 — корни уравнения $|x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_2}}.$

В примере 95% доверительный интервал — $[-0.0331, 0.0616]$, минимальное значение α , при котором интервал не содержит нуля — 0.8003.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \sim \text{Ber}(p_1)$
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_2 \sim \text{Ber}(p_2)$
 выборки связанные

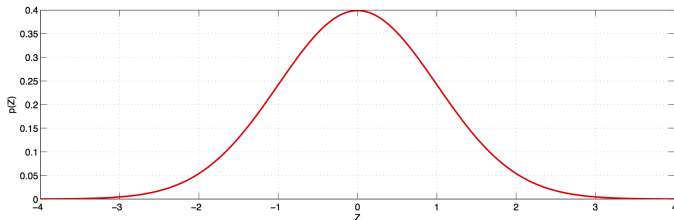
$X_1^n \backslash X_2^n$	1	0
1	e	f
0	g	h

нулевая гипотеза: $H_0: p_1 = p_2$

альтернатива: $H_1: p_1 < \neq > p_2$

статистика: $Z(X_1^n, X_2^n) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{f+g}{n^2} - \frac{(f-g)^2}{n^3}}} = \frac{f-g}{\sqrt{f+g - \frac{(f-g)^2}{n}}}$

нулевое распределение: $N(0, 1)$



Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Пример (Agresti, табл. 10.1): из опрошенных 1600 граждан Великобритании, имеющих право голоса, 944 высказали одобрение деятельности премьер-министра. Через 6 месяцев эти же люди были опрошены снова, на этот раз одобрение высказали только 880 опрошенных.

I \ II			Σ
	+	-	
+	$e = 794$	$f = 150$	944
-	$g = 86$	$h = 570$	656
Σ	880	720	1600

H_0 : рейтинг премьер-министра не изменился.

H_1 : рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 2.8 \times 10^{-5}$.

H_1 : рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 1.4 \times 10^{-5}$.

H_1 : рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.99999$.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Без учёта информации о связи между выборками:

Опрос \ Результат	I	II
+	$a = 944$	$b = 880$
-	$c = 656$	$d = 720$
Σ	$n_1 = 1600$	$n_2 = 1600$

H_0 : рейтинг премьер-министра не изменился.

H_1 : рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 0.0222$.

H_1 : рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 0.0112$.

H_1 : рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.9889$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon],$$

$$\delta = \sqrt{dl_1^2 - 2\hat{\phi}dl_1du_2 + du_2^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{du_1^2 - 2\hat{\phi}du_1dl_2 + dl_2^2},$$

$$\hat{\phi} = \begin{cases} \frac{eh - fg}{(e+f)(g+h)(e+h)(f+h)}, & \text{если знаменатель не равен нулю,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$dl_1 = \hat{p}_1 - l_1,$$

$$du_1 = u_1 - \hat{p}_1,$$

$$dl_2 = \hat{p}_2 - l_2,$$

$$du_2 = u_2 - \hat{p}_2,$$

$$l_1, u_1 — \text{корни уравнения } |x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}},$$

$$l_2, u_2 — \text{корни уравнения } |x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

В примере 95% доверительный интервал — $[2.14, 5.90]\%$, минимальное значение α , при котором интервал не содержит нуля — 3.1×10^{-5} .

Литература

Критерии нормальности:

- Харке-Бера (Jarque–Bera) — Кобзарь, 3.2.2.16
- Шапиро-Уилка (Shapiro-Wilk) — Кобзарь, 3.2.2.1
- хи-квадрат (chi-square) — Кобзарь, 3.1.1.1, 3.2.1.1
- согласия (goodness-of-fit), основанные на эмпирической функции распределения — Кобзарь, 3.1.2, 3.2.1.2

Для нормальных распределений:

- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 1, 2, 3
- t-критерии Стьюдента (t-tests) — Kanji, №№ 7, 8, 9
- критерий хи-квадрат (chi-square test) — Kanji, №15
- критерий Фишера (F-test) — Kanji, №16

Критерии, основанные на правдоподобию: Bilder, раздел B.5

Литература

Для распределения Бернулли:

- всё про одновыборочную задачу — Agresti, 1.3, 1.4
- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 4, 5
- точный критерий (exact binomial test) — McDonald,
<http://www.biostat handbook.com/exactgof.html>
- доверительные интервалы Уилсона (score confidence intervals) —
Newcombe, 1998a, 1998b, 1998c

Agresti A. *Categorical Data Analysis*, 2013.

Bilder C.R., Loughin T.M. *Analysis of Categorical Data with R*, 2013.

Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.

McDonald J.H. *Handbook of Biological Statistics*, 2008.

Newcombe R.G. (1998). *Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods*. *Statistics in Medicine*, 17, 857–872.

Newcombe R.G. (1998). *Interval estimation for the difference between independent proportions: comparison of eleven methods*. *Statistics in Medicine*, 17, 873–890.

Newcombe R.G. (1998). *Improved confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data*. *Statistics in Medicine*, 17, 2635–2650.

Литература

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Королёв В.Ю. *Теория вероятностей и математическая статистика*, 2008.

NIST/SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*.

<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>