Algorítmica

grado en ingeniería informática

Ejercicios ecuaciones de recurrencia

Método de expansión

Autor

Carlos Sánchez Páez

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Curso 2017-2018

Índice

Índice de figuras

1. Enunciado

Ejercicio. Resuelva las siguientes ecuaciones de recurrencia mediante el método de *expansión.*

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \quad \text{con T(1)=1} \tag{1}$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{con T(1)=1} \tag{2}$$

2. Resolución

El método de expansión consiste en ir resolviendo la ecuación de la forma $T(n-i)$ hasta que llegue un punto en el que podamos obtener un patrón de resolución del que hallaremos una ecuación. En ese momento, aplicaremos la ecuación al caso base y acotaremos mediante la notación **O(n)**.

2.1. Ecuación 1

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \quad \text{con T(1)=1}$$

Comenzamos desarrollando la ecuación para $i = 1$

$$T(n-1) = 2 \cdot \left[2T(\frac{n-1}{2}) + 1\right] + 1 = 4T(\frac{n-1}{2}) + 3$$

Seguimos ahora con $i = 2$

$$T(n-2) = 4 \cdot \left[2T(\frac{n-2}{2}) + 1\right] + 3 = 8T(\frac{n-2}{2}) + 7$$

Intuimos el patrón que sigue la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2^{i+1} \cdot T(\frac{n-i}{2}) + 2^{i+1} - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lo comprobamos para $i = 3$

1. Por expansión

$$T(n-3) = 8 \cdot \left[2T(\frac{n-3}{2}) + 1\right] + 7 = 16T(\frac{n-3}{2}) + 15$$

2. Mediante la ecuación del patrón

$$T(n-3) = 2^{3+1} \cdot T(\frac{n-3}{2}) + 2^{3+1} - 1 = 16T(\frac{n-3}{2}) + 15$$

Por tanto, nuestro patrón era acertado. Ahora, aplicamos al *caso base* ($i = n - 2$)

$$\begin{aligned} T\left[n-(n-2)\right] = T(2) = 2^{(n-2)+1} \cdot T(\frac{n-(n-2)}{2}) + 2^{(n-2)+1} - 1 = \\ = 2^{n-1} \cdot T(1) + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, concluimos que $T(n)$ es del orden de $O(2^n)$ en la notación **O**.

2.2. Ecuación 2

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{con T(1)=1}$$

Igual que en el apartado anterior, comenzamos desarrollando para $i = 1$

$$T(n-1) = 2 \cdot \left[2T(\frac{n-1}{2}) + n\right] + n = 4T(\frac{n-1}{n}) + 3n$$

Procedemos para $i = 2$

$$T(n-2) = 4 \cdot \left[2T(\frac{n-2}{2} + n\right] + 3n = 8T(\frac{n-2}{2}) + 7n$$

Vemos que el patrón de la ecuación es probablemente el siguiente:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2^{i+1} \cdot T(\frac{n-i}{2}) + (2^{i+1} - 1)n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Comprobamos para $i = 3$

1. Por expansión

$$T(n-3) = 8 \cdot \left[2T(\frac{n-3}{2}) + n\right] + 7 = 16T(\frac{n-3}{2}) + 15n$$

2. Mediante la ecuación del patrón

$$T(n-3) = 2^{3+1} \cdot T(\frac{n-3}{2}) + (2^{3+1} - 1)n = 16T(\frac{n-3}{2}) + 15n$$

Por tanto, nuestro patrón es correcto. Aplicamos al *caso base* ($i = n - 2$):

$$\begin{aligned} T\left[n-(n-2)\right] = T(2) = 2^{(n-2)+1} \cdot T(\frac{n-(n-2)}{2}) + (2^{(n-2)+1} - 1)n = \\ = 2^{n-1} \cdot T(1) + (2^{n-1} - 1)n = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)n = (2^{n-1} - 1)n + 2^{n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, podemos concluir que la ecuación $T(n)$ es del orden de $O(n \cdot 2^n)$ en notación **O**.

3. Gráficas

3.1. Ejercicio 1

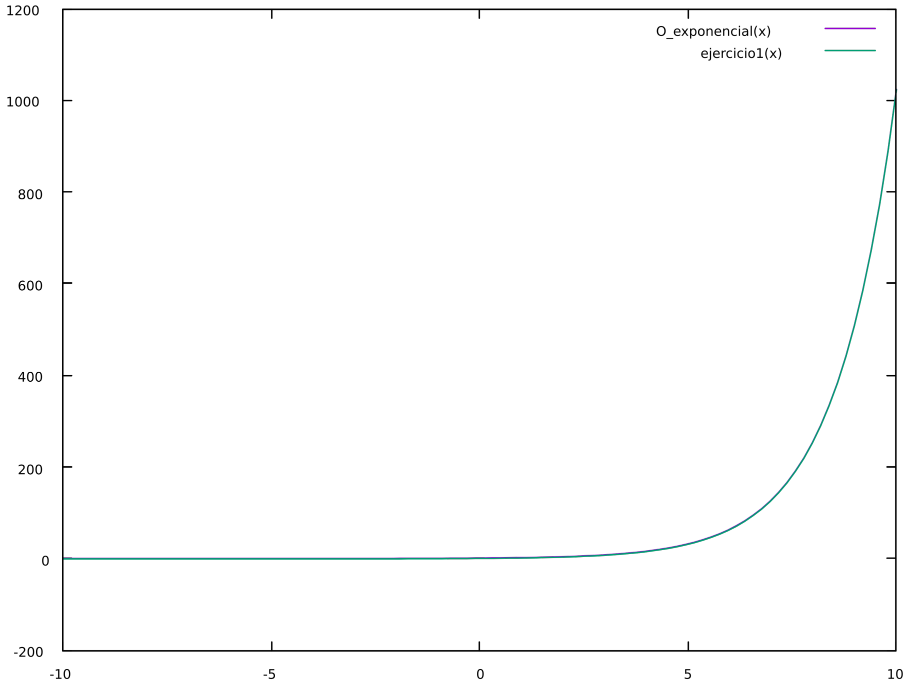

Figura 1: Representación de 2^n y $2^n - 1$

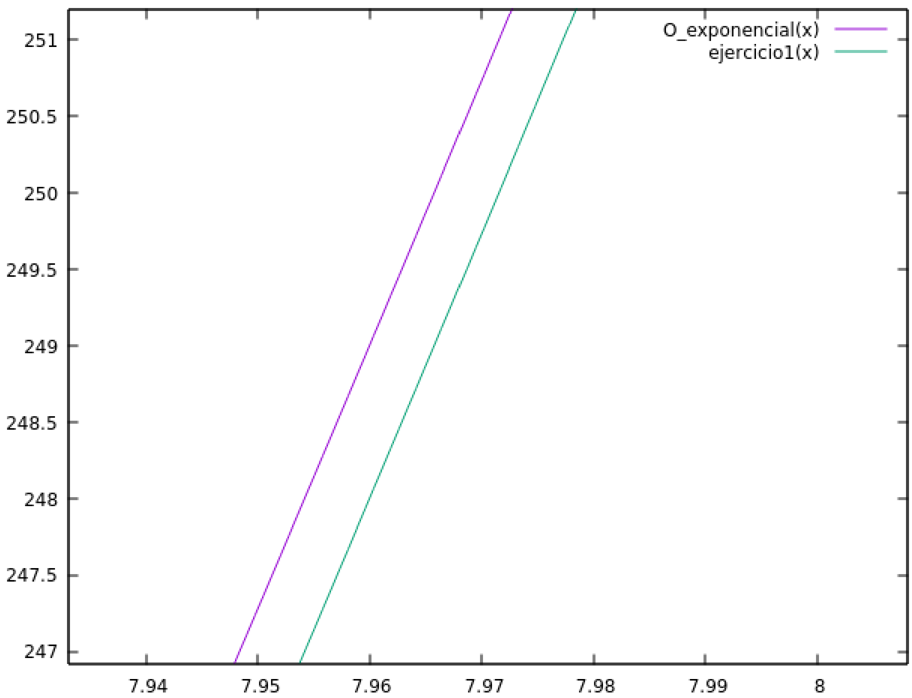

Figura 2: Ampliación de 2^n y $2^n - 1$

3.2. Ejercicio 2

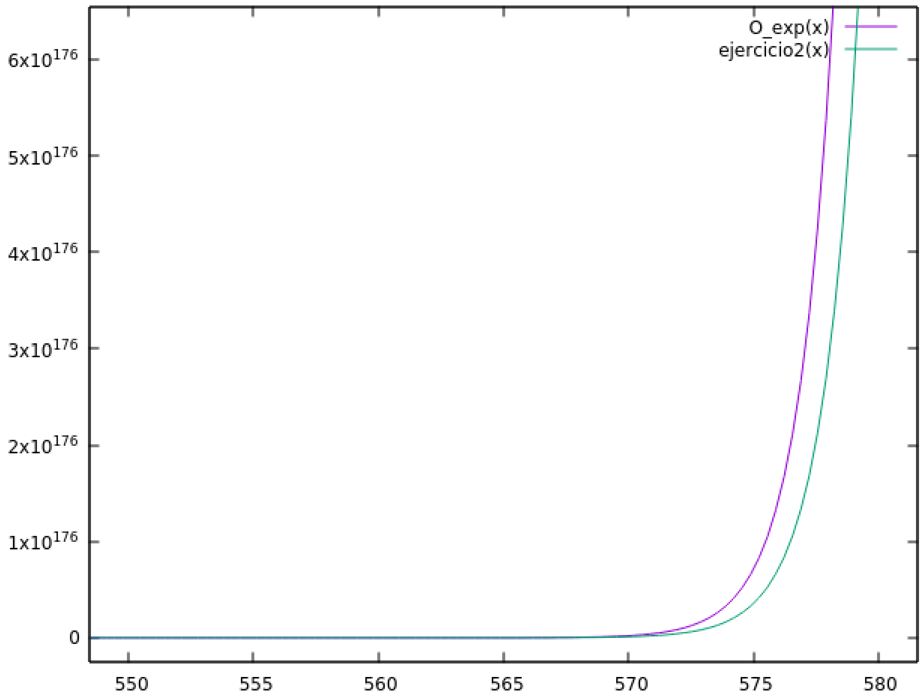

Figura 3: Representación de $n \cdot 2^n$ y $(2^{n-1} - 1)n + 2^{n-1}$

Como podemos ver, en ambos casos las funciones son acotadas por su $\mathbf{O(f(n))}$ correspondiente.