

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

# Práctica 3

## Supercomputador

María Jesús López Salmerón  
Nazaret Román Guerrero  
Laura Hernández Muñoz  
José Baena Cobos  
Carlos Sánchez Páez

6 de abril de 2018

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

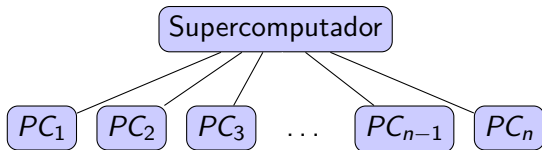
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } \textit{proceso}_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$



# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

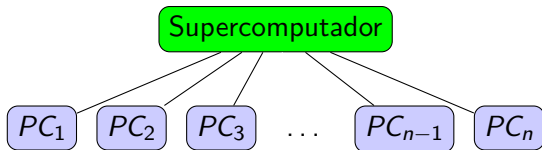
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } proceso_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$



# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

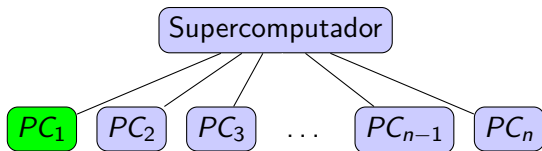
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } \textit{proceso}_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$



# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

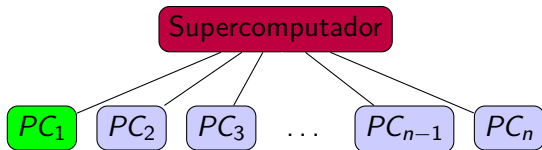
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } \textit{proceso}_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$



# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

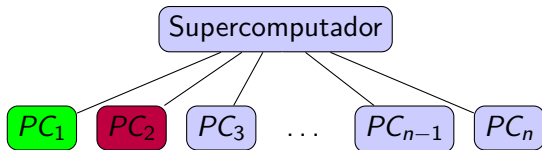
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } \textit{proceso}_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$





# Supercomputador

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

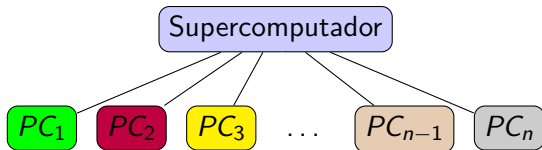
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

$$\text{Tiempo de } \textit{proceso}_i = \begin{cases} p(i) & \text{segundos en el supercomputador} \\ + \\ f(i) & \text{segundos en un PC} \end{cases}$$



# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

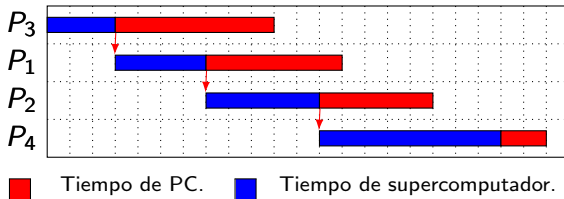
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

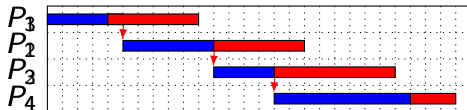
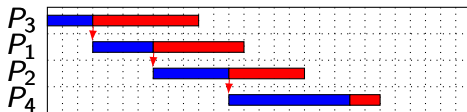
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

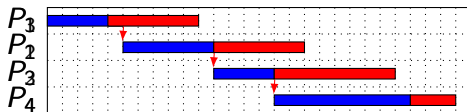
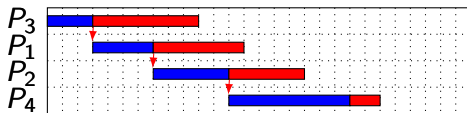
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.

Para 4 procesos hay  $4! = 24$  posibles soluciones.

# Índice

Presentación del problema

**Algoritmo tradicional**

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Algoritmo tradicional

Presentación del problema

**Algoritmo tradicional**

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

❶ Probar las distintas combinaciones ( $n!$ )

# Algoritmo tradicional

Presentación del problema

**Algoritmo tradicional**

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- 1 Probar las distintas combinaciones ( $n!$ )
- 2 Elegir la que menor tiempo total consuma.



# Algoritmo tradicional

Presentación del problema

**Algoritmo tradicional**

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- 1 Probar las distintas combinaciones ( $n!$ )
- 2 Elegir la que menor tiempo total consuma.

$$O(n!)$$

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

**Algoritmo voraz**

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

**Elementos del algoritmo voraz**

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- **Elementos del algoritmo voraz**
  - Metodología
  - Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema  
Algoritmo tradicional  
Algoritmo voraz  
**Elementos del algoritmo voraz**  
Metodología  
Ejemplo de uso  
Demostración de optimalidad  
Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$

# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

**Elementos del algoritmo voraz**

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- **Conjunto de seleccionados.** Aquellos procesos que iremos incorporando a la lista final.

# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

**Elementos del algoritmo voraz**

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- **Conjunto de seleccionados.** Aquellos procesos que iremos incorporando a la lista final.
- **Función solución.**  $p_i$  completado  $\forall i \in [1, \#P]$ .

# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

**Elementos del algoritmo voraz**

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- **Conjunto de seleccionados.** Aquellos procesos que iremos incorporando a la lista final.
- **Función solución.**  $p_i$  completado  $\forall i \in [1, \#P]$ .
- **Función de factibilidad.** El tiempo de ejecución de un proceso debe ser finito.

# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

**Elementos del algoritmo voraz**

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- **Conjunto de seleccionados.** Aquellos procesos que iremos incorporando a la lista final.
- **Función solución.**  $p_i$  completado  $\forall i \in [1, \#P]$ .
- **Función de factibilidad.** El tiempo de ejecución de un proceso debe ser finito.
- **Función de selección.** Seleccionaremos aquel proceso que tenga un  $f(i)$  mayor.



# Elementos del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- **Conjunto de candidatos.** Todos los procesos a ejecutar.  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- **Conjunto de seleccionados.** Aquellos procesos que iremos incorporando a la lista final.
- **Función solución.**  $p_i$  completado  $\forall i \in [1, \#P]$ .
- **Función de factibilidad.** El tiempo de ejecución de un proceso debe ser finito.
- **Función de selección.** Seleccionaremos aquel proceso que tenga un  $f(i)$  mayor.
- **Función objetivo.** Obtener la solución cuyo tiempo global sea menor, siendo  
$$t_{fin_{global}} = \sum_{i=1}^n p(i) + \text{máx}\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_n)\}.$$

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

**Metodología**

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- **Metodología**
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Metodología del algoritmo voraz

Presentación del problema  
Algoritmo tradicional  
Algoritmo voraz  
Elementos del algoritmo voraz  
**Metodología**  
Ejemplo de uso  
Demostración de optimalidad  
Fin de la presentación

- 1 Ordenar el vector de procesos de forma decreciente según su  $f(i) \rightarrow \text{Quicksort}$ .

# Metodología del algoritmo voraz

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

**Metodología**

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

- 1 Ordenar el vector de procesos de forma decreciente según su  $f(i) \rightarrow \text{Quicksort}$ .

$$O(n \cdot \log(n))$$

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

**Ejemplo de uso**

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- **Ejemplo de uso**

## 4 Demostración de optimalidad

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

**Ejemplo de uso**

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

<b>Proceso</b>	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

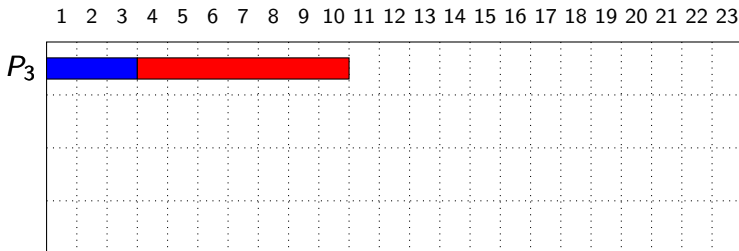
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

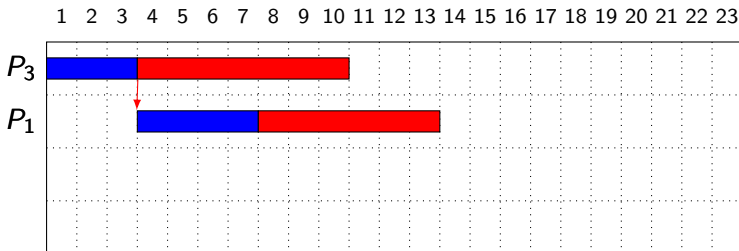
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.



# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

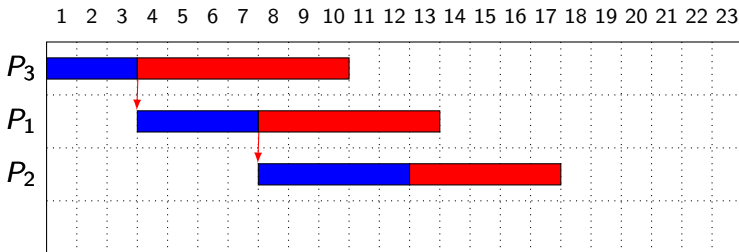
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.

# Ejemplo

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

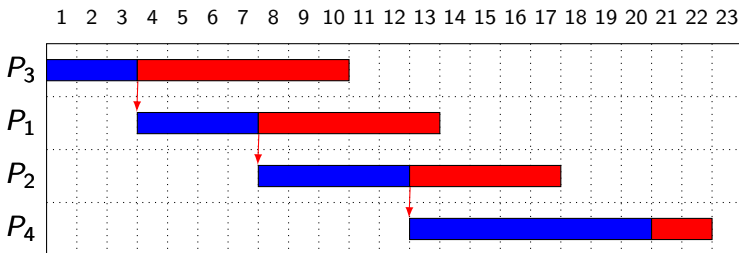
Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Proceso	$p(i)$	$f(i)$
$P_1$	4	6
$P_2$	5	5
$P_3$	3	7
$P_4$	8	2



Tiempo de PC.



Tiempo de supercomputador.

# Índice

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

**Demostración de optimalidad**

Fin de la presentación

## 1 Presentación del problema

## 2 Algoritmo tradicional

## 3 Algoritmo voraz

- Elementos del algoritmo voraz
- Metodología
- Ejemplo de uso

## 4 Demostración de optimalidad

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

**Demostración de optimalidad**

Fin de la presentación

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow$  conjunto de procesos candidatos.
- $t_{fin_{global}} = \sum_{i=1}^n p(i) + \max\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_n)\}$
- $p_x \in P$  un proceso tal que  $f(p_x) \geq f(p_i) \forall i \in [1, \#P]$ .

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Si  $p_x$  se ejecuta el primero:

- $t_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + p(p_x)$
- $t_{fin}(f(p_x)) = t_{inicio}(f(p_x)) + f(p_x)$

Sea  $t_{fin}(p) = t_0 + \sum_{i=1}^n p(i)$  el momento en el que han finalizado todos los cálculos del superordenador. Entonces:

$$t_{restante}(p_x) = t_{fin}(p_x) - t_{fin}(p)$$

**Reducción al absurdo**

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

**Demostración de optimalidad**

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

$$\bullet \quad t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i)}_{\text{espera}} + p(p_x)$$

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

- $$t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i) + p(p_x)}_{\text{espera}}$$
- $$t'_{inicio}(p_x) > t_{inicio}(p_x) \rightarrow t'_{fin}(p_x) > t_{fin}(p_x) \rightarrow t'_{restante}(p_x) > t_{restante}(p_x)$$

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

- $t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i) + p(p_x)}_{\text{espera}} \rightarrow$
- $t'_{inicio}(p_x) > t_{inicio}(p_x) \rightarrow t'_{fin}(p_x) > t_{fin}(p_x) \rightarrow t_{restante}p(x)' > t_{restante}(p_x)$

Por tanto, como  $t_{restante}p(x)'$  es mayor:



# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo

voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

- $$t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i) + p(p_x)}_{\text{espera}} \rightarrow$$
- $$t'_{inicio}(p_x) > t_{inicio}(p_x) \rightarrow t'_{fin}(p_x) > t_{fin}(p_x) \rightarrow$$
$$t_{restante}p(x)' > t_{restante}(p_x)$$

Por tanto, como  $t_{restante}p(x)'$  es mayor:

$$\begin{aligned} \text{máx}'\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\} &> \\ \text{máx}\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\} \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } t'_{fin_{global}} > t_{fin_{global}}$$

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo

voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

- $$t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i) + p(p_x)}_{\text{espera}} \rightarrow$$
- $$t'_{inicio}(p_x) > t_{inicio}(p_x) \rightarrow t'_{fin}(p_x) > t_{fin}(p_x) \rightarrow$$
$$t_{restante}p(x)' > t_{restante}(p_x)$$

Por tanto, como  $t_{restante}p(x)'$  es mayor:

$$\begin{aligned} \text{máx}'\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\} &> \\ \text{máx}\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\} \end{aligned}$$

Por tanto,  $t'_{fin_{global}} > t_{fin_{global}} \rightarrow$  Solución no óptima

# Demostración de optimalidad

Presentación del problema

Algoritmo tradicional

Algoritmo voraz

Elementos del algoritmo voraz

Metodología

Ejemplo de uso

Demostración de optimalidad

Fin de la presentación

Supongamos que no eligiendo  $p_x$  como el primer proceso obtenemos una solución óptima. Entonces:

- $$t'_{inicio}(f(p_x)) = t_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{pos_x-1} p(p_i) + p(p_x)}_{\text{espera}} \rightarrow$$
- $$t'_{inicio}(p_x) > t_{inicio}(p_x) \rightarrow t'_{fin}(p_x) > t_{fin}(p_x) \rightarrow$$
$$t_{restante}p(x)' > t_{restante}(p_x)$$

Por tanto, como  $t_{restante}p(x)'$  es mayor:

$$\text{máx}'\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\} > \text{máx}\{t_{restante}(p_1), \dots, t_{restante}(p_x), \dots, t_{restante}(p_n)\}$$

Por tanto,  $t'_{fin_{global}} > t_{fin_{global}} \rightarrow$  Solución no óptima  $\rightarrow$   
**contradicción**  $\rightarrow$  nuestra hipótesis es correcta.

# Fin

Presentación del problema  
Algoritmo tradicional  
Algoritmo voraz  
Elementos del algoritmo voraz  
Metodología  
Ejemplo de uso  
Demostración de optimalidad  
**Fin de la presentación**

## Fin de la presentación