Algorítmica

grado en ingeniería informática

Ejercicios ecuaciones de recurrencia

Método de expansión

Autor

Carlos Sánchez Páez

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Curso 2017-2018

Índice

Índice de figuras

1. Enunciado

Ejercicio. Resuelva las siguientes ecuaciones de recurrencia mediante el método de *expansión*.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \quad \text{con T(1)=1} \tag{1}$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{con T(1)=1} \tag{2}$$

2. Resolución

El método de expansión consiste en ir resolviendo la ecuación de la forma $T(n)$ hasta que llegue un punto en el que podamos obtener un patrón de resolución del que hallaremos una ecuación. En ese momento, aplicaremos la ecuación al caso base y acotaremos mediante la notación $\mathbf{O(n)}$.

2.1. Ecuación 1

Para este ejercicio iremos expandiendo en forma $T(\frac{n}{2^i})$.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \quad \text{con T(1)=1}$$

Comenzamos desarrollando la ecuación para $i = 1(\frac{n}{2})$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 = 2 \cdot \left[2T(\frac{n}{4}) + 1\right] + 1 = 4T(\frac{n}{4}) + 3 =$$

Seguimos ahora con $i = 2(\frac{n}{4})$

$$= 4 \cdot \left[2T(\frac{n}{8}) + 1\right] + 3 = 8T(\frac{n}{8}) + 7 =$$

Intuimos el patrón que sigue la recurrencia:

$$T(\frac{n}{2^i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 2^{i+1} \cdot T(\frac{n}{2^{i+1}}) + 2^{i+1} - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lo comprobamos para $i = 3$

1. Por expansión
$$= 8 \cdot \left[2T(\frac{n}{16}) + 1\right] + 7 = 16T(\frac{n}{16}) + 15$$

2. Mediante la ecuación del patrón
$$= 2^{3+1} \cdot T(\frac{n}{2^{3+1}}) + 2^{3+1} - 1 = 16T(\frac{n}{16}) + 15$$

Por tanto, nuestro patrón era acertado. Ahora, aplicamos al *caso base* ($\frac{n}{2^{i+1}} = 1 \to n = 2^{i+1} \to i = \log_2 n - 1$)

$$T(\frac{n}{2^{\log_2 n}}) = 2^{\log_2 n - 1 + 1} \cdot T(1) + 2^{\log_2 n - 1 + 1} - 1 = 2 \cdot 2^{\log_2 n} + 1 = 2^{\log_2 n + 1} - 1 \simeq 2n - 1 \tag{3}$$

Por tanto, concluimos que $T(n)$ es del orden de $O(n)$ en la notación **O**.

2.2. Ecuación 2

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{con T(1)=1}$$

Vemos que el ejercicio es prácticamente igual al anterior, por lo que sólo tendremos que añadir una n multiplicando al último patrón. No obstante, desarrollamos para comprobarlo: Comenzamos desarrollando la ecuación para $i = 1(\frac{n}{2})$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2 \cdot \left[2T(\frac{n}{4}) + n\right] + 1 = 4T(\frac{n}{4}) + 3n =$$

Procedemos con $i = 2(\frac{n}{4})$

$$= 4 \cdot \left[2T(\frac{n}{8}) + n\right] + 3 = 8T(\frac{n}{8}) + 7n =$$

Vemos que el patrón de la ecuación es probablemente el siguiente:

$$T(\frac{n}{2^i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 2^{i+1} \cdot T(\frac{n}{2^{i+1}}) + (2^{i+1} - 1)n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Comprobamos para $i = 3$

1. Por expansión
$$= 8 \cdot \left[2T(\frac{n}{16}) + n\right] + 7n = 16T(\frac{n}{16}) + 15n$$
2. Mediante la ecuación del patrón
$$= 2^{3+1} \cdot T(\frac{n}{2^{3+1}}) + (2^{3+1} - 1)n = 16T(\frac{n}{16}) + 15n$$

Por tanto, nuestro patrón es correcto. Aplicamos al *caso base* ($i = \log_2 n - 1$):

$$\begin{aligned} T(\frac{n}{2^{\log_2 n}}) &= 2^{\log_2 n - 1 + 1} \cdot T(1) + (2^{\log_2 n - 1 + 1} - 1)n = \\ &= 2^{\log_2 n} + (2^{\log_2 n} - 1)n \simeq 2n \cdot (2n - 1)n = 4n^2 - 2n \end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, podemos concluir que la ecuación $T(n)$ es del orden de $O(n^2)$ en notación **O**.