

航空工学実験 I

実験番号 2

慣性二次モーメントの推定

2 班 2020

大村蒼摩

実験日 令和 5 年 6 月 6 日

審査日 令和 5 年 6 月 13 日

再提出日 令和 5 年 6 月 18 日

目次

1.概要	3
2.目的	3
3.慣性 2 次モーメント推定の原理	3
4.実験装置	5
< 供試体 >	5
< 電子天秤 >	6
< ばね定数測定装置 >	7
< 回転振動装置 >	7
< 直流安定化電源 >	8
< 変換ユニット >	8
< オシロスコープ >	9
5.実験方法	10
(5-1) 理論的方法	10
(5-2) 実験的方法	12
(5-2-1) 予備実験 1 (振動が微小であることの確認)	12
(5-2-2) 予備実験 2 (定数 K の測定)	13
(5-3) 本実験 (周期の測定と慣性二次モーメントの算出)	13
6. 実験結果	14
(6-1) 理論的実験の結果	14
(6-2-1) 予備実験 1 の結果	15
(6-2-2) 予備実験 2 の結果	16
(6-3) 本実験の結果	19
7.考察	21
8.結論	31
9. 参考文献	32

1.概要

慣性二次モーメントを理論的方法と実験的方法の2種類を用いて計算した。また、理論値と推定値を比較し、それぞれの測定方法の長所、短所、測定誤差について観察する。また、実験的方法においての準備のため、予備実験を2つ行った。実験結果として、理論値と推定値に誤差が生じた。原因として、実験方法の違いや空気抵抗や装置の摩擦などの影響が考えられる。また、測定値の精度も影響していると考ええる。

理論的方法は供試体の形状がシンプルなときに、実験的方法は供試体の形状が複雑なとき使用して慣性二次モーメントを算出するとよい。

2.目的

与えられた物体の慣性二次モーメントを推定するために必要となる理論を学び、推定のために必要となる物理量の計測方法を学ぶ。また、慣性2次モーメントの推定値と理論値とを比較し、計算方法の長所と短所、測定誤差について考察することで、回転運動や慣性二次モーメントの理解を深める。

3.慣性2次モーメント推定の原理

直径 D 、質量 m の均等な円柱の中心軸周りの慣性モーメント I の式(1)は次の通りだ。

$$I = \frac{mD^2}{8} \quad (1)$$

円柱に限らず、均質な物体の場合、その物体の質量と形状度を測定すればある固定軸周りの慣性モーメントを理論的に求めることができる。

これに対し、質量や形状が分からなくとも慣性モーメントを求める方法がある。剛体がある固定軸周りに回転するとき、自由度は1であり、回転角 θ 、時間を t 、回転軸周りの剛体の関せモーメントを I 、剛体に作用する外力による回転軸周りの力のモーメントを M とすれば、運動方程式は式(2)のように書くことができる。

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad (2)$$

ここで、外力によるモーメント M が K を定数とし

$$M = -K\theta \quad (3)$$

と与えられるものであったとしたら、運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta \quad (4)$$

この二階の線形微分方程式を解くために $\theta = e^{\lambda t}$ とし、代入すると次のような特性方程式を得られる.

$$I\lambda^2 + K = 0 \quad (5)$$

$$\lambda^2 = -\frac{K}{I} \quad (6)$$

よって特性方程式の解は以下の通りになる.

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{K}{I}} \quad (7)$$

$$\theta(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{K}{I}} i t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{K}{I}} i t} \quad (8)$$

$\sqrt{\frac{K}{I}} = \Omega_n$ とおくと

$$\theta(t) = C_1 e^{\Omega_n i t} + C_2 e^{-\Omega_n i t} \quad (9)$$

オイラーの式より

$$\theta(t) = C_1 (\cos \Omega_n t + i \sin \Omega_n t) + C_2 (\cos \Omega_n t - i \sin \Omega_n t) \quad (10)$$

A,B は任意の定数であるため, $C_1 + C_2 = A$, $i(C_1 - C_2) = B$ とおく. 式(10)を変形すると

$$\theta(t) = A\cos\Omega_n t + B\sin\Omega_n t \quad (11)$$

この Ω_n は固有角振動数と呼ばれる. そこで, 運動方程式が式(4)で表されるような実験系を構成し, 自由運動させたときの周期Tを測定すれば,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_n} \quad (12)$$

となるから, $\sqrt{\frac{K}{I}} = \Omega_n$ と式(12)より

$$I = \frac{KT^2}{4\pi^2} \quad (13)$$

この式は, 「Kの値があらかじめ分かっているならば, 周期Tを測定することで慣性2次モーメント I を推定できる」ことを示している. 本実験では, 運動方程式が式(4)で表される実験系を構成し, 振動周期 T を測定して, 式(13)より I を求める.

4.実験装置

< 供試体 >

本実験では以下の2つを用いた.

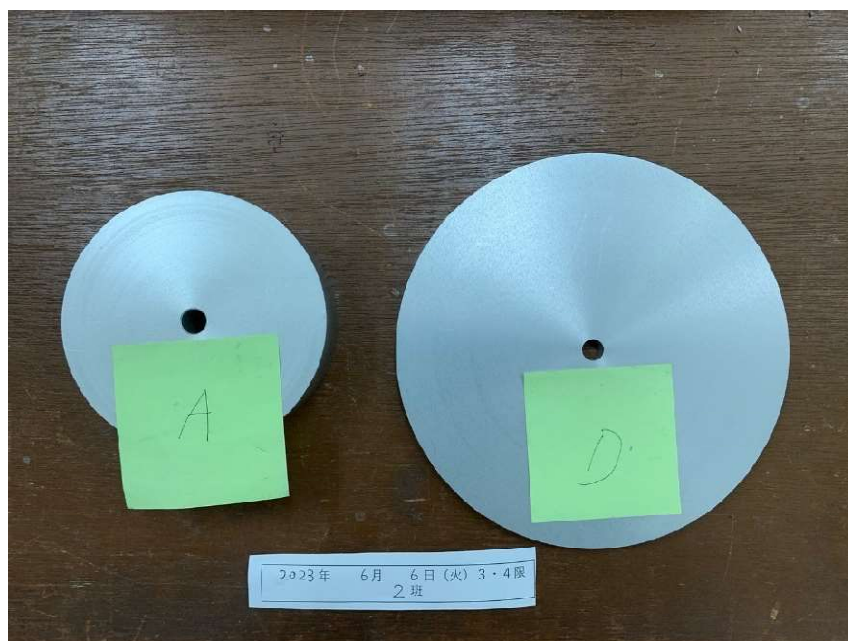


図1 供試体 A と供試体 D

< 電子天秤 >

供試体の質量を測定するのに使用した電子天秤を図2に示す。最小読み取り値は 0.01 g である。図2 電子天秤



図2 電子天秤

<ばね定数測定装置>



図3 ばね定数計測器

<回転振動装置>

本実験では図2に示す装置を使用する．この装置では，回転角 θ を直接計測するのではなく，EMIC社製の非接触変位計を用いて，アームの回転軸からの距離 $L_0=76\text{mm}$ の点とセンサとの距離 z を測定する．この z の値から，

$$\theta = \tan^{-1} \frac{z}{L_0} \quad (14)$$

により回転角 θ を求める．なお，この非接触変位計の仕様を表1に示す．

表1 非接触変位計の仕様

最接近点	200 μ m
測定可能範囲	最接近点から 0~2mm
分解能	0.2 μ m
出力	電圧(V)
ゲイン	2mm/V
直線性	0.5%以下フルスケール
応答周波数	DC~20kHz,-adb(0~20kHz の範囲の振動であれば，真の値に対して出力が-1db 以上になる．)

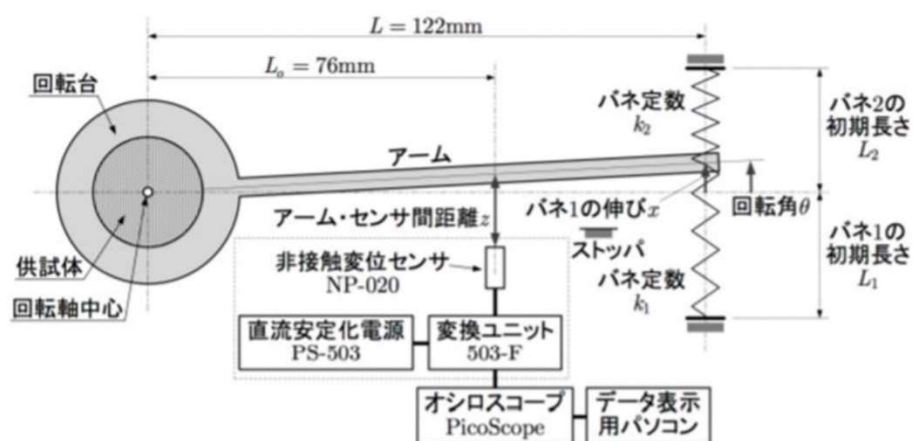


図4 回転振動装置の模式図

<直流安定化電源>：電子機器などの動作に必要な直流の電源を，商用電源ラインの交流から作り出すもの。

<変換ユニット>：アナログ量をデジタル量に変換する装置。

<オシロスコープ>：時間の経過とともに電気信号（電圧）が変化していく周期的変化をリアルタイムに波形としてブラウン管に表示させ，電気信号の変化を可視化できるようにした波形測定器である．



図5 オシロスコープ

この装置において，非接触変位センサで z の時間応答を計測し，振動周期を求める．その後式 (13) より，慣性モーメントを算出する．

まず， K について考えてみると，回転台が θ 回転すると，バネの伸び x は

$$x = L \sin \theta \quad (15)$$

であり，バネによる力は

$$F = -(k_1 + k_2)x = -(k_1 + k_2)L \sin \theta \quad (16)$$

となる．したがって，バネ力による回転軸中心の反時計回りのモーメント M は

$$M = FL \cos \theta = -(k_1 + k_2)L^2 \sin \theta \cos \theta \quad (17)$$

となる．ここで θ が微小であると仮定する．マクローリン展開を用いて近似を行う，

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \cong \theta \quad (18)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \cong 1 \quad (19)$$

と近似可能である．これを式(17)に用いると

$$M = -(k_1 + k_2)L^2\theta \quad (20)$$

式(3)と式(20)を比較すると

$$K = (k_1 + k_2)L^2 \quad (21)$$

となることが分かる．このことから K を求めるためには，アームの長さ L と各々のバネ定数を計測すればよい．今回の実験では $L=122\text{mm}$ とする．



図6 回転振動装置

5.実験方法

(5-1) 理論的方法

中がくりぬかれている円柱の中心軸周りの慣性二次モーメントについて考える．

内側の円柱の質量 m_1 、直径を d_0 、慣性二次モーメントを I_1 とし、外側の円柱の質量 m_2 、直径を d_1 、慣性二次モーメント I_2 とする。この物体の密度を ρ 、円柱の高さは内側と外側で同様の l を用いる。

式(1)より、

$$I_1 = \frac{m_1 d_0^2}{8} \quad (22)$$

$$I_2 = \frac{m_2 d_1^2}{8} \quad (23)$$

と表せる。したがって、中がくりぬかれている円柱の慣性二次モーメントは

$$I = I_2 - I_1 = \frac{m_2 d_1^2 - m_1 d_0^2}{8} \quad (24)$$

ここで、質量 m_1 、 m_2 に考えてみる。

m_1 は

$$m_1 = \rho V_1 = \frac{\rho \pi l d_0^2}{4} \quad (25)$$

と表せ、 m_2 は

$$m_2 = \rho V_2 = \frac{\rho \pi l d_1^2}{4} \quad (26)$$

式(25)(26)を式(24)に代入すると

$$I = \frac{\rho \pi l (d_1^4 - d_0^4)}{32} \quad (27)$$

また、 $M = m_2 - m_1$ とおくと

$$M = m_2 - m_1 = \frac{\rho \pi l d_1^2}{4} - \frac{\rho \pi l d_0^2}{4} = \frac{\rho \pi l (d_1^2 - d_0^2)}{4} \quad (28)$$

式(28)を変形して

$$\rho = \frac{4M}{\pi l (d_1^2 - d_0^2)} \quad (29)$$

とする。この式(29)を式(27)に代入すると

$$I = \frac{4M}{\pi l (d_1^2 - d_0^2)} \cdot \frac{\pi l (d_1^4 - d_0^4)}{32} = \frac{M(d_1^2 + d_0^2)}{8} \quad (30)$$

となる。よって中がくりぬかれた円柱の慣性二次モーメントは式(30)の通りである。

(5-2) 実験的方法

実験的方法は、2つの予備実験と1つの本実験から構成されている。

(5-2-1) 予備実験1（振動が微小であることの確認）

本実験では、アームが図4のストッパに当たるまで回転させてから、静かに手を離し、振動させる。したがって、ストッパにアームが当たっているときの変位 x_{min} とすれば $x_{min} < 0$ であり、減衰があることを考えると、バネの振幅 $\delta_{max} \equiv |x_{min}|$ よりも大きくなることはない。そこで、式(13)より、 $x = \delta_{max}$ のとき

θ (θ_{max} とする)を求めると、この θ_{max} が微小であれば、振動中の θ は常に微小である。

図1において、アームに触れていないときの変位 z_{ref} と、アームをストッパまで回転させて変位センサに最接近させたときの変位 z_{min} を求めればよい。その後、 θ_{max} と $\sin \theta_{max} \cos \theta_{max}$ の値を比較して、同程度の値になることを確認する。 z_{ref} 、 z_{min} より θ_{max} を求める。アームの長さを L_0 とすると

$$\tan \theta_{max} = \frac{(z_{ref} - z_{min})}{L_0} \quad (31)$$

θ_{max} は以下のようなになる。

$$\theta_{max} = \tan^{-1} \frac{(z_{ref} - z_{min})}{L_0} \quad (32)$$

式(15)より

$$\delta_{max} = L \sin \left(\tan^{-1} \frac{(z_{ref} - z_{min})}{L_0} \right) \quad (33)$$

と表せる.

(5-2-2)予備実験 2 (定数 K の測定)

図 1 より, バネ 1 の長さは最大で $(L_1 - \delta_{max})$ から $(L_1 + \delta_{max})$ までの範囲で変化する. ここで, バネ定数 K_1 を測定する場合, まずは L_1 をノギスで測定する. 次に, 図 3 のバネ定数測定装置に取り付ける. その際, バネの長さが L_1 になるようにセットする. そして k_1 を算出する. 今回の実験では ± 2.5 の範囲で測定する. 理由は, 本実験で $\pm \delta_{max}$ の範囲で直線性を示せばよいからである. この際, バネ定数は f_1 , u_1 が比例すると仮定して算出するが, 本当に比例している, 仮定したフックの法則が成り立つかどうかを確認する必要がある. (比例していなければ, 式(16)が成り立たなくなるため, 実験が破綻する). そこで, 横軸に u_1 , 縦軸に f_1 をとって, 測定点をプロットし, 測定点が直線上に並ぶかどうか確認する. その上で, 直線の傾きを求め, それを k_1 とする. k_2 も同様に変位 u_2 と引張力 f_2 の関係の直線性を確認した上で直線の傾きを求め, その値を k_2 とする.

以上より式(21)の定数 K を求める.

(5-3)本実験 (周期の測定と慣性二次モーメントの算出)

図 1 に示す 2 種類の供試体の寸法をそれぞれ計測する. 図 1 に示す通り, 供試体は回転台に乗せることになるのでその際の振動周期 T から式(11)で得られるのは回転台の慣性二次モーメント I_0 と供試体の慣性二次モーメント I の両方を合わせた値である. 式で表すと

$$I_0 + I = \frac{KT^2}{4\pi^2} \quad (34)$$

そこで, 供試体を回転台に載せない場合の振動周期 T_0 を求め, I_0 を次式で求める.

$$I_0 = \frac{KT_0^2}{4\pi^2} \quad (35)$$

次に供試体を台に載せたときの振動周期 T を計測し, 式 (34) に代入して移項して供試体の慣性二次モーメント I を求められる.

$$I = \frac{K}{4\pi^2}(T^2 - T_0^2) \quad (36)$$

K に式(21)を代入し，さらに供試体の慣性二次モーメントを $u_1, f_1, u_2, f_2, L, T_0, T$ を用いて表すと

$$I = \frac{L^2}{4\pi^2} \left(\frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} \right) (T^2 - T_0^2) \quad (37)$$

となる．

6. 実験結果

(6-1) 理論的実験の結果

2つの供試体の測定結果を表 1, 表 2 に示す．

表 2 供試体 A の寸法および質量の測定結果

測定回数	重さ [g]	直径 [mm]	内径 [mm]	高さ [mm]
1 回目	1191.4	119.80	10.60	39.95
2 回目		119.80	10.55	40.00
3 回目		119.80	10.60	40.00
平均	1191.4	119.80	10.58	39.98

表 3 供試体 D の寸法および質量の測定結果

測定回数	重さ [g]	直径 [mm]	内径 [mm]	高さ [mm]
1 回目	868.4	200.15	10.40	10.20
2 回目		200.40	10.65	10.05
3 回目		200.15	10.65	10.10
平均	868.4	200.23	10.57	10.12

表 2，表 3 より理論的方法での慣性二次モーメントを求める．式(30)に代入する．

< 供試体 A >

$$I = \frac{m(d^2 + d_0^2)}{8} = \frac{1191.4 \times 10^{-3}(0.1198^2 + 0.01058^2)}{8} = 2.154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

< 供試体 D >

$$I = \frac{m(d^2 + d_0^2)}{8} = \frac{864.4 \times 10^{-3}(0.20023^2 + 0.01057^2)}{8} = 4.344 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(6-2-1) 予備実験 1 の結果

z_{ref} と z_{min} の変位を以下のグラフに表した.

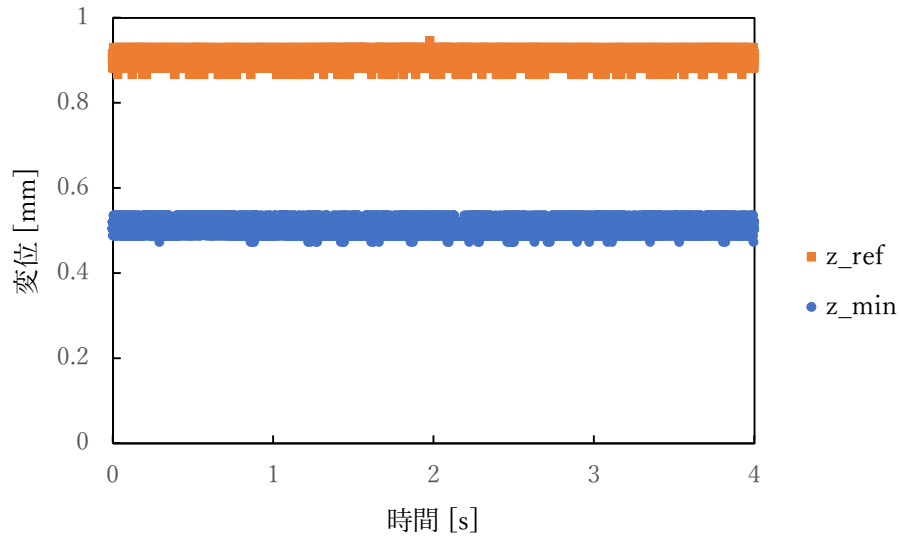


図 7 z_{ref} と z_{min} の時間的变化

それぞれの平均値は以下の通りだ.

表 4 z_{ref} と z_{min} の平均値

z_{ref}	0.9134 mm
z_{min}	0.5039 mm

θ_{max} は式(32)より求められる. 計算すると

$$\theta_{\text{max}} = \tan^{-1} \left(\frac{z_{\text{ref}} - z_{\text{min}}}{L_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.91339 - 0.503937}{76} \right) = 0.005387 \text{ rad}$$

$\sin\theta_{max} \cdot \cos\theta_{max}$ は

$$\begin{aligned}\sin\theta_{max} \cdot \cos\theta_{max} &= \sin(0.00538749) \cdot \cos(0.00538749) = 0.00538739 \text{ rad} \\ &= 0.005387 \text{ rad}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\sin\theta_{max} \cdot \cos\theta_{max} \cong \theta_{max}$ が成り立ち、 θ_{max} が微小であることが確認でき、式(17)から式(20)への近似が成立する。そのため δ_{max} を求めることが可能になる。 δ_{max} は式(33)で表せる。

$$\delta_{max} = L \sin\left(\tan^{-1} \frac{(z_{ref} - z_{min})}{L_0}\right) = L \sin\theta_{max} = 122 \times \sin(0.00538749) = 0.6572 \text{ mm}$$

となる。また、予備実験1は成功し、実験結果も妥当であると考ええる。

(6-2-2) 予備実験2の結果

以下のグラフは z_{ref} と z_{min} の変位を表したものである。

表5 バネの伸びと引張力

基準の長さからの変位 u [mm]	引張力 f_1 [N]	引張力 f_2 [N]
-2.5	-1.04	-1.10
-2	-0.82	-0.86
-1.5	-0.61	-0.65
-1.0	-0.42	-0.43
-0.5	-0.18	-0.24
0	0.00	0.00
0.5	0.23	0.20
1.0	0.43	0.41
1.5	0.66	0.62
2.0	0.87	0.85
2.5	1.08	1.06

この値から2つのばね定数の値をグラフより求める。

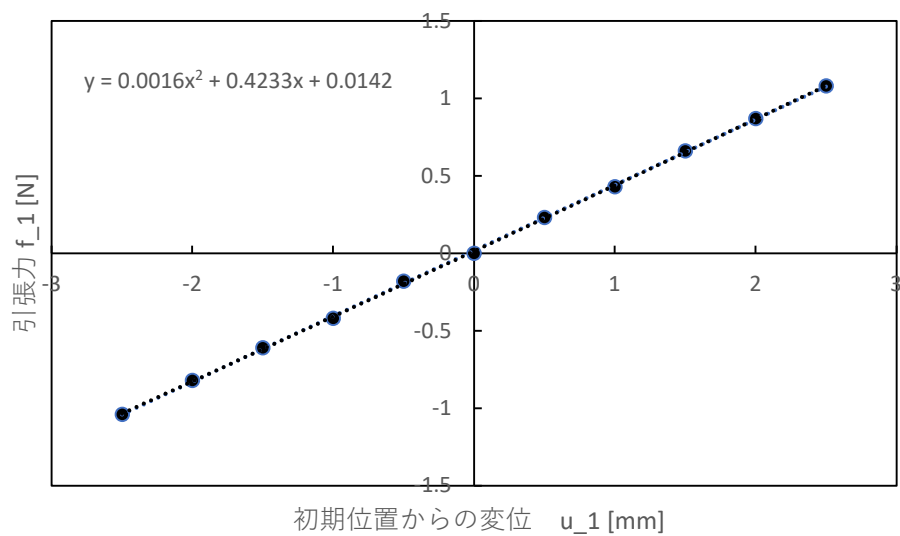


図 9 ばね L_1 の変位と引張力の関係

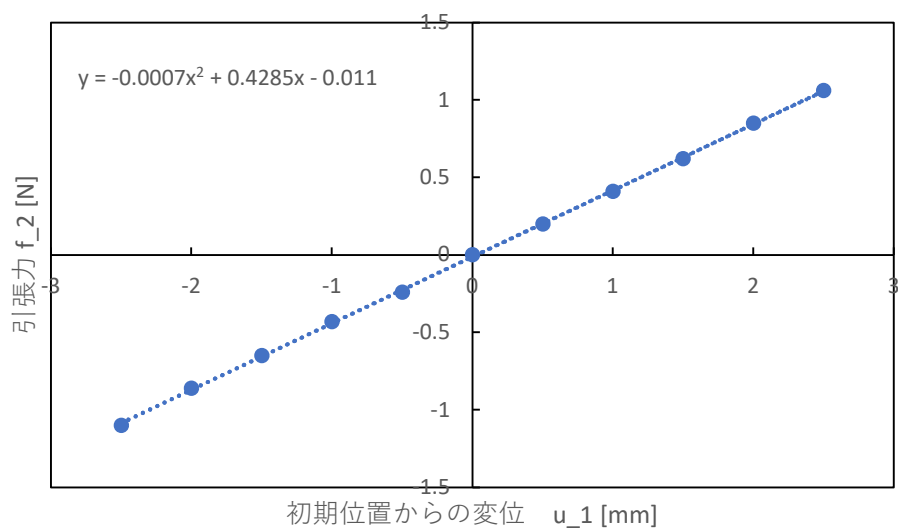


図 10 ばね L_2 の変位と引張力の関係

ばね L_1 , L_2 の二次曲線の式は以下の通りだ.

表 6 二次曲線の式

ばね L_1	$y = 0.0016x^2 + 0.4233x + 0.0142$
ばね L_2	$y = -0.0007x^2 + 0.4285x - 0.011$

二次曲線の一般式は $y = ax^2 + bx + c$ と表せる．この式と今回求めた二次曲線の式を比較すると

b の値は a の値の 10^2 倍以上大きいので， $a \ll b$ であり a の項は無視することができる．残りの項は一般式でいう

$$bx + c = f \quad (38)$$

であり，ばね定数 k_1, k_2 は式(39)を微分することで得られる． $f = kx$ なので

$$\frac{d}{dx}(bx + c) = \frac{d}{dx}(kx) \quad (39)$$

結果は

$$b = k \quad (40)$$

となり， b がばね定数となる．

$$k_1 = 0.4233[N/mm] = 423 \text{ N/m}$$

$$k_2 = 0.4285[N/mm] = 429 \text{ N/m}$$

これらの値を式(21)に代入すると，ばね定数 K は

$$K = (k_1 + k_2)L^2 = (423 + 429)0.122^2 = 12.68 \text{ N/m}$$

となる．

(6-3) 本実験の結果

以下のグラフは、回転台だけの周期、供試体 A、供試体 D を振動させたときの周期を示したものである。

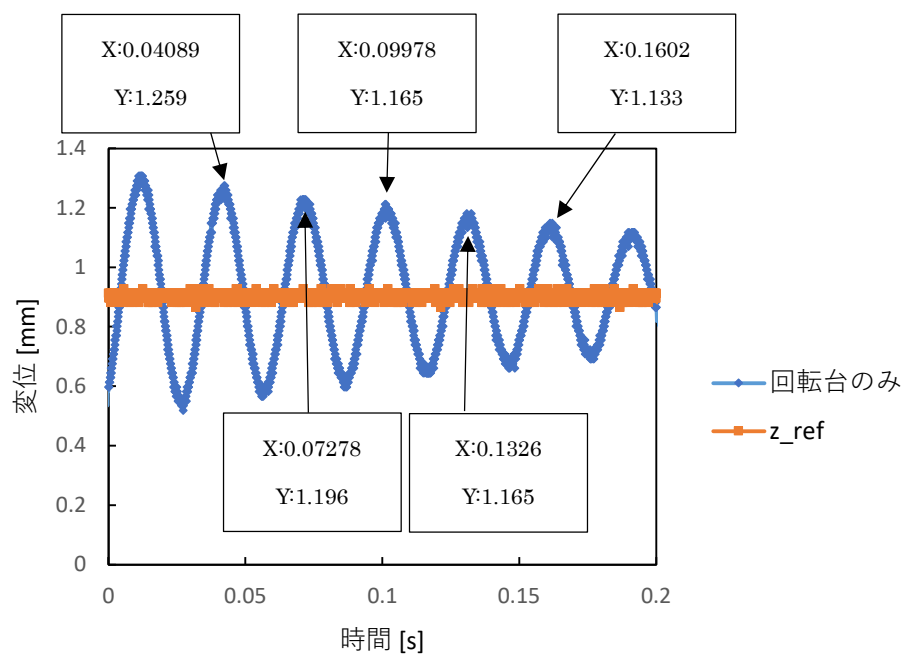


図 11 回転台だけの振動波形

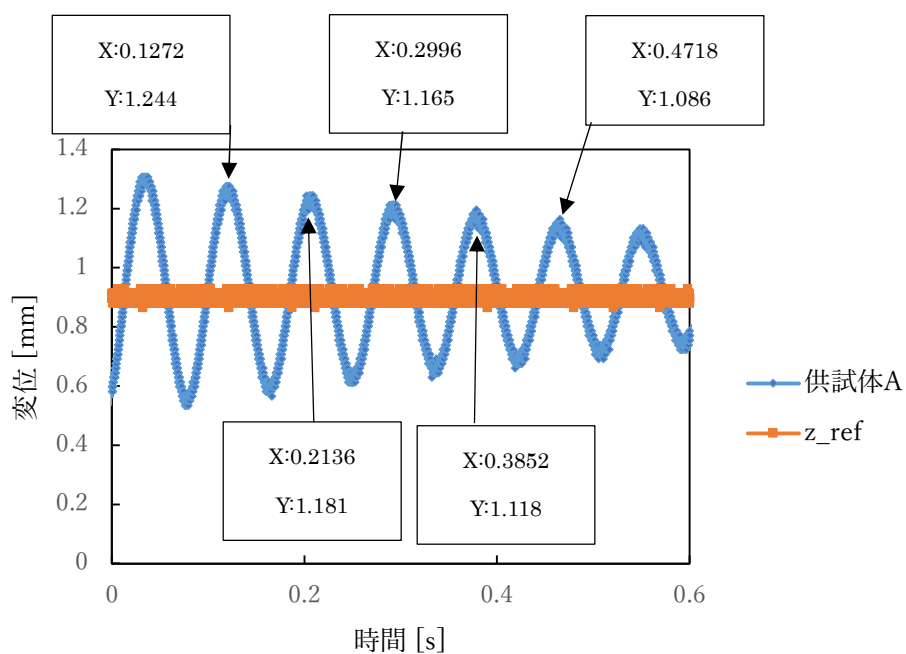


図 12 供試体 A の振動波形

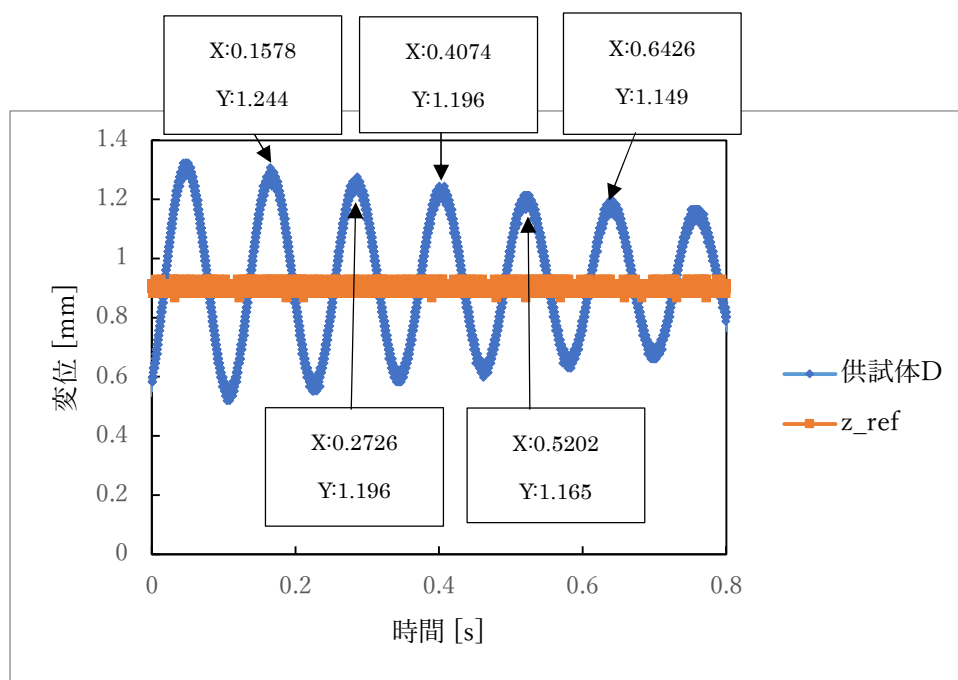


図 13 供試体 D の振動波形

表 7 各頂点における時間

	回転台のみ [s]	供試体 A [s]	供試体 D [s]
t ₁	0.04089	0.1272	0.1578
t ₂	0.07278	0.2136	0.2726
t ₃	0.09978	0.2996	0.4074
t ₄	0.13267	0.3852	0.5202
t ₅	0.16027	0.4718	0.6426

表 7 より周期 T を求める。

表 8 周期 T

	回転体のみ[s]	供試体 A [s]	供試体 D [s]
T ₁	0.03189	0.08638	0.1147
T ₂	0.02699	0.08598	0.1347
T ₃	0.03289	0.08558	0.1127
T ₄	0.02759	0.08658	0.1224
平均	0.02984	0.08613	0.1212

よって、この周期を用いて慣性二次モーメントを求める。

供試体 A

$$I_A = \frac{K}{4\pi^2} (T_A^2 - T_0^2) = \frac{12.68}{4\pi} (0.086136^2 - 0.0298^2) = 2.098 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

供試体 D

$$I_D = \frac{K}{4\pi^2} (T_D^2 - T_0^2) = \frac{12.68}{4\pi} (0.121203^2 - 0.0298^2) = 4.433 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

7. 考察

理論的方法と実験的方法の比較

比較した結果と相対誤差は以下の表のとおりだ。なお、相対誤差を算出するにあたって真の値は理論的方法の結果を用いている。

表 9 慣性二次モーメントの比較

	供試体 A	供試体 D
理論的方法 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	2.154×10^{-3}	4.344×10^{-3}
実験的方法 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	2.098×10^{-3}	4.433×10^{-3}
相対誤差 [%]	-2.600	2.049

このような結果から、本実験では供試体 A の方が相対誤差が大きくなったことが明らかである。

次に、誤差が生じた理由について考えていく。考えていく項目は 2 つである。

- ・測定機器の誤差について
- ・減衰の影響について

測定機器の相対誤差について

今回用いた測定機器の相対誤差は以下の表のとおりだ。

表 10 測定機器の測定誤差

測定機器	測定対象	単位	誤差
ノギス	d_0, d, L_1, L_2	Mm	± 0.05
電子天秤	m	g	± 0.1
フォースゲージ	f_1, f_2	N	± 0.01
ばね定数測定装置 (伸びを測る方)	u_1, u_2	mm	± 0.01

ある量 w が測定値 x, y, z の関数は

$$w = f(x, y, z) \quad (41)$$

で決まり, x, y, z の誤差を $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とする. 近似関数を用いて測定誤差を求める. n 次近似式として誤差 $e_1(x, y, z)$ とする. テイラー展開より

$$f(x, y, z) = f(x, y, z) + f'(x, y, z)(\Delta x, \Delta y, \Delta z) + \cdots + \frac{f^n(x, y, z)}{n!}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^n + R_{n+1}(x, y, z) \quad (42)$$

一般的に誤差は微小であるため, 1 次近似を用いると

$$f(x, y, z) = f(x, y, z) + f'(x, y, z)(\Delta x, \Delta y, \Delta z) + R_{n+1}(x, y, z) \quad (43)$$

$R_{n+1}(x, y, z)$ を誤差項として扱うため, 測定誤差を Δw とすると多変数の偏微分を使い

$$\Delta w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Delta z \quad (44)$$

と表せる. 誤差は正負の値をとるため, 絶対値をとると

$$|\Delta w| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| \quad (45)$$

となる.

理論的方法では式(30)で慣性二次モーメントを求めた.

$$I = f(m, d, d_0) = \frac{m(d^2 + d_0^2)}{8} \quad (46)$$

慣性二次モーメントの誤差 ΔI は、質量の誤差を Δm 、内径の誤差 Δd_0 、直径の誤差を Δd とする
と

$$|\Delta I| = \left| \frac{\partial f}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial d_0} \Delta d_0 \right| = \left| \frac{(d^2 + d_0^2)}{8} \Delta m \right| + \left| \frac{md}{4} \Delta d \right| + \left| \frac{md_0}{4} \Delta d_0 \right| \quad (47)$$

によって求められる。なお、今回用いる値は誤差を小さくするために有効数字を考慮する
前の値を用いる。

供試体 A の測定誤差は

$$\begin{aligned} |\Delta I| &= \left| \frac{(0.1198^2 + 0.01058^2)}{8} \times (0.01 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1.1914 \times 0.1198}{4} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1.1914 \times 0.01058}{4} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &= 1.808 \times 10^{-8} + 1.7412 \times 10^{-6} + 1.57563 \times 10^{-7} \\ &= 1.917 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

供試体 D の測定誤差は

$$\begin{aligned} |\Delta I| &= \left| \frac{(0.20023^2 + 0.01057^2)}{8} \times (0.01 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{0.8684 \times 0.20023}{4} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{0.8684 \times 0.01057}{4} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &= 5.02547 \times 10^{-8} + 2.1735 \times 10^{-6} + 1.14737 \times 10^{-7} \\ &= 2.338 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

次は、同様に実験的方法の測定誤差について考えていきたい。
 実験的方法に関しての慣性二次モーメントは式(37)より求めた。
 また、式(21)のばね定数は予備実験 2 より近似式を用いて記述した。

最初に K についての測定誤差に関して求めていく。

$$K = f(f_1, u_1, f_2, u_2, L)(k_1 + K_2)L^2 = \left(\frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2}\right)L^2 \quad (48)$$

$$\begin{aligned} |\Delta K| &= \left| \frac{\partial f}{\partial f_1} \Delta f_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \Delta u_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial f_2} \Delta f_2 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial u_2} \Delta u_2 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial L} \Delta L \right| \\ &= \left| \frac{L^2}{u_1} \Delta f_1 \right| + \left| -\frac{f_1 L^2}{u_1^2} \Delta u_1 \right| + \left| \frac{L^2}{u_2} \Delta f_2 \right| + \left| -\frac{f_2 L^2}{u_2^2} \Delta u_2 \right| + 2 \left| \left(\frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} \right) L \Delta L \right| \end{aligned} \quad (49)$$

このような式になるが、ばね 1 とばね 2 では数値がほぼ等しいため、同じ値を用いて計算していく。

また、実験前の段階で $L=122\text{mm}$ と与えられていたため、 L についての誤差は考慮しない。
 なお、理論的方法と同様に測定誤差を求めるにあたっての誤差を小さくするために、有効数字に直す前の値を使用する。

$$\begin{aligned} |\Delta K| &= 2 \times \left| \frac{L^2}{u_1} \Delta f_1 \right| + 2 \times \left| -\frac{f_1 L^2}{u_1^2} \Delta u_1 \right| = 2 \times \left| \frac{0.122^2}{2.5 \times 10^{-3}} \times 0.01 \right| + 2 \times \left| -\frac{-1.08 \times 0.122^2}{2.5 \times 10^{-3}} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &= 2 \times (0.059536) + 2 \times (0.000321494) = 0.119714988 \text{ N/m} = 0.1197 \text{ N/m} \end{aligned}$$

次に、式(37)より

$$I = I(T, T_0, K) = \frac{K}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2) \quad (50)$$

ここで、 ΔT はオシロスコープを用いて測定したため、オシロスコープの時間軸の誤差を用いる。今回の実験で使ったオシロスコープは、pico Technology 社の『PicoScope 4262』だ。そのデータベースより時間軸の確度は $\pm 50 \text{ ppm}$ と記されていたため、その値を用いる。

供試体 A は

$$\begin{aligned} |\Delta I| &= \left| \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial T_0} \Delta T_0 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial K} \Delta K \right| = \left| \frac{KT}{2\pi^2} \Delta T \right| + \left| \frac{KT_0}{2\pi^2} \Delta T_0 \right| + \left| \frac{1}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2) \Delta K \right| \\ &= \left| \frac{12.68 \times 0.086136}{2\pi^2} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{12.68 \times 0.02984513}{2\pi^2} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{4\pi^2} (0.086136^2 - 0.02984513^2) \times (0.119714988) \right| \\ &= 2.35 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

供試体 D は

$$\begin{aligned} |\Delta I| &= \left| \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial T_0} \Delta T_0 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial K} \Delta K \right| = \left| \frac{KT}{2\pi^2} \Delta T \right| + \left| \frac{KT_0}{2\pi^2} \Delta T_0 \right| + \left| \frac{1}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2) \Delta K \right| \\ &= \left| \frac{12.68 \times 0.121203}{2\pi^2} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{12.68 \times 0.02984513}{2\pi^2} \times (0.05 \times 10^{-3}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{4\pi^2} (0.123776^2 - 0.02984513^2) \times (0.119714988) \right| \\ &= 4.86 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(7-1) 理論的方法と実験的方法の測定誤差の比較

以下の表は理論的方法で求めた測定誤差と実験的方法で求めた測定誤差をまとめたものだ。
上記で求めた式を%に直している。

表 11 測定誤差の比較

	供試体 A	供試体 D
理論的方法の測定誤差 [%]	0.0901	0.0538
実験的方法の測定誤差 [%]	1.10	1.08

表 11 より実験的方法よりも理論的方法の方が測定誤差が小さいことがわかる．要因としては，理論的方法だと慣性二次モーメントを求めるにあたって測定するものは m, d_0, d の 3 つだけだが，実験的方法に関してはばね定数の K を求めるのに， f_1, u_1, f_1, u_2, L の 4 つ，その後，慣性二次モーメントを求めるのに T, T_0, K の 3 つと合計で 7 個の測定が必要となる．その結果が測定誤差の大小に影響したと考える．特に，周期 T を求めるところは大きな誤差の影響だと考える．また，理論的方法で測定する物理量はそもそも誤差があまりないことが考えられる．

このような結果から，理論的方法では，測定する箇所も少なく，誤差も小さくなるので大まかな慣性二次モーメントを求めたいときに簡単に求められるという長所がある．しかし，物体が動くことを考慮していないこと，複雑な形状になると測定すらできないことも想定されるという短所もある．

一方で，実験的方法では誤差は大きく出るものの，物体が動くことも考慮され，複雑な形状にも対応できる長所がある．

最終的に誤差を考慮した慣性二次モーメントは以下の通りだ．

表 12 測定誤差を考慮した慣性二次モーメント

	供試体 A	供試体 D
理論的方法 [$kg \cdot m^2$]	$(2.154 \pm 1.91684 \times 10^{-3}) \times 10^{-3}$	$(4.344 \pm 2.33849 \times 10^{-3}) \times 10^{-3}$
実験的方法 [$kg \cdot m^2$]	$(2.0978 \pm 0.0235) \times 10^{-3}$	$(4.433 \pm 0.0486) \times 10^{-3}$

次に，2 つ目の減衰の影響について考えていく．回転振動が減衰する場合，減衰モーメントが角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ に比例すると仮定して，これを $-C \frac{d\theta}{dt}$ とおくと，運動方程式は以下のようになる．

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C \frac{d\theta}{dt} - K\theta \quad (51)$$

両辺を I でわると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{K}{I} \theta = 0 \quad (52)$$

文字を次のように置き換える.

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{K}{I}}, \zeta = \frac{C}{2\Omega_n m} \quad (53)$$

式(53)の文字の書き換えを行うと, 運動方程式は以下のようなになる.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\zeta\Omega_n \frac{d\theta}{dt} + \Omega_n^2 \theta = 0 \quad (54)$$

この運動方程式の解 $\theta = e^{\lambda t}$ とおき, 代入すると以下のような特性方程式が得られる.

$$\lambda^2 + 2\zeta\Omega_n \lambda + \Omega_n^2 = 0 \quad (55)$$

よって平方完成して, λ を求めると

$$(\lambda + \zeta\Omega_n)^2 + \Omega_n^2 - (\zeta\Omega_n)^2 = 0 \quad (56)$$

$$(\lambda + \zeta\Omega_n)^2 = (\zeta\Omega_n)^2 - \Omega_n^2 \quad (57)$$

$$\lambda = -\zeta\Omega_n \pm \Omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (58)$$

となり, ζ は減衰係数であり 1 より小さいことを考慮すると,

$$\lambda = -\zeta\Omega_n \pm \Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (59)$$

となり, 特性方程式の解が求まった. もとの運動方程式の一般解は定数 A, B を用いると以下のようなになる.

$$\theta = A e^{(-\zeta\Omega_n + \Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t} + B e^{(-\zeta\Omega_n - \Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t} \quad (60)$$

オイラーの式を用いて計算すると

$$\theta = e^{-\zeta\Omega t} \left\{ i(A - B) \sin \left(\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t + (A + B) \cos \left(\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right\} \quad (61)$$

初期条件 $\frac{d\theta}{dt}(0)=0, \theta(0)=\theta_0$ とすると運動方程式の一般解は以下のようになる.

$$\theta = \theta_0 e^{-\zeta\Omega t} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t + \cos \left(\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right\} \quad (62)$$

式(62)から N 回後のピークでの時刻 t_N は周期振動 T の N 倍で

$$t_N = 2\pi \frac{N}{\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (63)$$

となり, そのときの θ の値を θ_N とすれば

$$\theta_N = \theta_0 e^{-\frac{2\pi\zeta N}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (64)$$

となることがわかる. よって δ_N を

$$\delta \equiv \ln \left(\frac{\theta_0}{\theta_N} \right) \quad (65)$$

と定義する. 式(64)より

$$\zeta = \frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N^2 + (2\pi N)^2}} \quad (66)$$

となる. これを式(67), t_N は

$$t_N = \sqrt{\frac{\delta_N^2 + (2\pi N)^2}{\Omega_n^2}} \quad (67)$$

となる。したがって式(53)と式(67)から

$$I = \frac{K}{\Omega_n^2} = \frac{K t_N^2}{\delta^2 + (2\pi N)^2} \quad (68)$$

この式は t_N と δ を計測すれば、慣性二次モーメントを推定できることを意味している。
今回は、2 個目のピークを $N=0$ とし、 $N=4$ のときの慣性二次モーメントを求める。
まず、最初に δ を求める。

回転台のみ

$$\delta_0 = \ln \frac{\theta_0}{\theta_3} = \ln \frac{0.3464526}{0.251954} = 0.3185 \text{ mm}$$

供試体 A は

$$\delta_A = \ln \frac{\theta_0}{\theta_3} = \ln \frac{0.3307044}{0.2047202} = 0.4797 \text{ mm}$$

供試体 D は

$$\delta_D = \ln \frac{\theta_0}{\theta_3} = \ln \frac{0.330704}{0.2519944} = 0.2718 \text{ mm}$$

続いて、式(67)と $\sqrt{\frac{K}{I}} = \Omega_n$ より、 t_N を求める。

供試体 A は

$$t_{NA} = \frac{\sqrt{0.478^2 + (2\pi \times 3)^2}}{\sqrt{\frac{12.68}{2.098 \times 10^{-3}}}} = 0.24254 = 0.2425 \text{ s}$$

供試体 D は

$$t_{ND} = \frac{\sqrt{0.2718^2 + (2\pi \times 3)^2}}{\sqrt{\frac{12.68}{4.433 \times 10^{-3}}}} = 0.3525 \text{ s}$$

以上より減衰の影響を考慮して慣性二次モーメントを求めるのに用いる値は以下の通りだ.

表 13 減衰を考慮するのに用いる各値

δ_0	0.3185 mm
δ_A	0.4797 mm
δ_D	0.2718 mm
t_{NA}	0.2425 s
t_{ND}	0.3525 s

式(68)より,減衰を考慮した慣性二次モーメントを求める.

供試体 A は

$$I_A = \frac{12.68 \times 0.2425^2}{0.4797^2 + (2 \times \pi \times 3)^2} = 2.097 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

供試体 D は

$$I_D = \frac{12.68 \times 0.3525^2}{0.2718^2 + (2 \times \pi \times 3)^2} = 4.433 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

表 13 慣性二次モーメントの比較

供試体	供試体 A	供試体 D
理論的方法 [kg · m ²]	2.154×10^{-3}	4.344×10^{-3}
実験的方法 [kg · m ²]	2.098×10^{-3}	4.433×10^{-3}
減衰を考慮 [kg · m ²]	2.097×10^{-3}	4.433×10^{-3}

上記の表より, 減衰を考慮すると理論的方法の値からは少し離れたが, 実験的方法の値とほ

ほぼ同じ値になった。これは2つの供試体で共通するものだ。このような結果から、減衰は直径が大きいことや質量が重いなどといったことは関係ないことが分かった。また、減衰による影響よりも測定誤差の影響の方が大きいのではないかと考える。

このようなことから、慣性二次モーメントを算出するときは減衰を考慮しないでもよいと考えられる。

8. 結論

- ・実験の原理の条件や測定機器の精度の影響で、理論値と推定値では誤差が生じる。
- ・理論的方法と実験的方法にはそれぞれ長所と短所がある。
- ・与えられた慣性二次モーメントを推定するために必要な理論を学び、推定の為の物理量の計測方法を理解できた。
- ・慣性二次モーメントの理論値と推定値を比較し、測定誤差や減衰を考慮することで、慣性二次モーメントの理解を深めることができた。

9. 参考文献

1. 航空宇宙工学実験 I P.25~32
2. 基礎物理学実験ガイドブック P.49~51
3. <http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2009.calculus-I/html.dir/node116.html>
(閲覧日：2023 年 6 月 1 0 日)
4. <https://manabitimes.jp/math/2652> (閲覧日：2023 年 6 月 1 0 日)
5. <https://akizukidenshi.com/download/ds/picotechnology/MM030.en-9.pdf>
(閲覧日：2023 年 6 月 15 日)