**航空工学実験Ⅰ**

**実験番号２**

**慣性二次モーメントの推定**

**2班　2020**

**大村蒼摩**

**実験日　令和5年6月６日**

**審査日　令和5年6月１３日**

**再提出日　令和５年6月１８日**

目次

[1.概要 3](#_Toc138011828)

[2.目的 3](#_Toc138011829)

[3.慣性２次モーメント推定の原理 3](#_Toc138011830)

[4.実験装置 5](#_Toc138011831)

[＜供試体＞ 5](#_Toc138011832)

[＜電子天秤＞ 6](#_Toc138011833)

[＜ばね定数測定装置＞ 7](#_Toc138011834)

[＜回転振動装置＞ 7](#_Toc138011835)

[<直流安定化電源> 8](#_Toc138011836)

[<変換ユニット> 8](#_Toc138011837)

[<オシロスコープ> 9](#_Toc138011838)

[5.実験方法 10](#_Toc138011839)

[（5-1）理論的方法 10](#_Toc138011840)

[（5-2）実験的方法 12](#_Toc138011841)

[（5-2-1）予備実験１（振動が微小であることの確認） 12](#_Toc138011842)

[(5-2-2)予備実験２（定数Ｋの測定） 13](#_Toc138011843)

[(5-3)本実験（周期の測定と慣性二次モーメントの算出） 13](#_Toc138011844)

[6．実験結果 14](#_Toc138011845)

[(6-1) 理論的実験の結果 14](#_Toc138011846)

[(6-2-1) 予備実験１の結果 15](#_Toc138011847)

[(6-2-2) 予備実験２の結果 16](#_Toc138011848)

[(6-3) 本実験の結果 19](#_Toc138011849)

[7.考察 21](#_Toc138011850)

[8.結論 31](#_Toc138011851)

[９．参考文献 32](#_Toc138011852)

# 1.概要

　慣性二次モーメントを理論的方法と実験的方法の2種類を用いて計算した．また，理論値と推定値を比較し，それぞれの測定方法の長所，短所，測定誤差について観察する．また，実験的方法においての準備のため，予備実験を２つ行った．実験結果として，理論値と推定値に誤差が生じた．原因として，実験方法の違いや空気抵抗や装置の摩擦などの影響が考えられる．また，測定値の精度も影響していると考える．

　理論的方法は供試体の形状がシンプルなときに，実験的方法は供試体の形状が複雑なとき使用して慣性二次モーメントを算出するとよい．

# 2.目的

　与えられた物体の慣性二次モーメントを推定するために必要となる理論を学び，推定のために必要となる物理量の計測方法を学ぶ．また，慣性２次モーメントの推定値と理論値とを比較し，計算方法の長所と短所，測定誤差について考察することで，回転運動や慣性二次モーメントの理解を深める．

# 3.慣性２次モーメント推定の原理

　直径D，質量ｍの均等な円柱の中心軸周りの慣性モーメント*I*の式(1)は次の通りだ．

円柱に限らず，均質な物体の場合，その物体の質量と形状度を測定すればある固定軸周りの慣性モーメントを理論的に求めることができる．

　これに対し，質量や形状が分からなくとも慣性モーメントを求める方法がある．剛体がある固定軸周りに回転するとき，自由度は1であり，回転角*θ*，時間を*t* ，回転軸周りの剛体の関せモーメントを*I* ，剛体に作用する外力による回転軸周りの力のモーメントをMとすれば，運動方程式は式(2)のように書くことができる．

ここで，外力によるモーメント*M*がKを定数とし

と与えられるものであったとしたら，運動方程式は

この二階の線形微分方程式を解くためにとし，代入すると次のような特性方程式を得られる．

よって特性方程式の解は以下の通りになる．

とおくと

オイラーの式より

A,Bは任意の定数であるため，，とおく．式(10)を変形すると

このΩｎは固有角振動数と呼ばれる．そこで，運動方程式が式(4)で表されるような実験系を構成し，自由運動させたときの周期Ｔを測定すれば，

となるから，と式(12)より

この式は，「Ｋの値があらかじめ分かっていれば，周期Ｔを測定することで慣性２次モーメント*Ｉ*を推定できる」ことを示している．本実験では，運動方程式が式(4)で表される実験系を構成し，振動周期*T*を測定して，式(13)より*I*を求める．

# 4.実験装置

## ＜供試体＞

本実験では以下の2つを用いた．

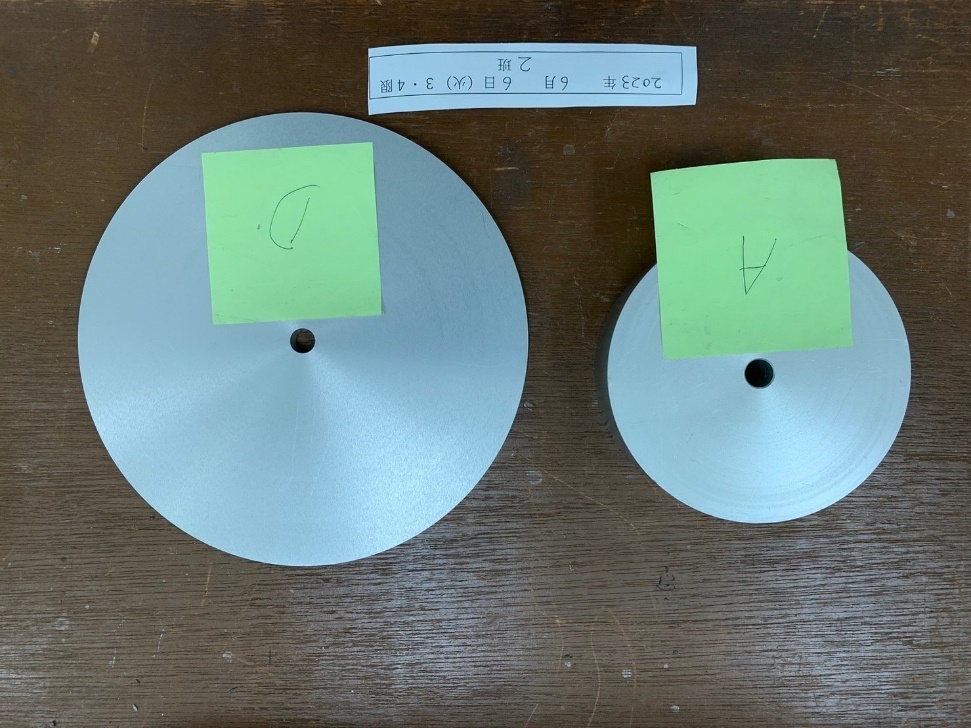


図１　供試体Aと供試体D

## ＜電子天秤＞

テーブル が含まれている画像

自動的に生成された説明　供試体の質量を測定するのに使用した電子天秤を図２に示す．最小読み取り値は0.01ｇである．図２　電子天秤

　　図２　電子天秤

## 屋内, テーブル, 座る, カウンター が含まれている画像 自動的に生成された説明＜ばね定数測定装置＞

図３　ばね定数計測器

## ＜回転振動装置＞

本実験では図２に示す装置を使用する．この装置では，回転角θを直接計測するのではなく，EMIC社製の非接触変位計を用いて，アームの回転軸からの距離L０＝76ｍｍの点とセンサとの距離ｚを測定する.このｚの値から，

により回転角θを求める．なお，この非接触変位計の仕様を表１に示す．

表１　非接触変位計の仕様

|  |  |
| --- | --- |
| 最接近点 | 200μm |
| 測定可能範囲 | 最接近点から0~2mm |
| 分解能 | 0.2μm |
| 出力 | 電圧(V) |
| ゲイン | 2mm/V |
| 直線性 | 0.5%以下フルスケール |
| 応答周波数 | DC~20kHz,-adb(0~20kHzの範囲の振動であれば，真の値に対して出力が-1db以上になる．) |

ダイアグラム, 概略図

自動的に生成された説明

図４　回転振動装置の模式図

<直流安定化電源>：電子機器などの動作に必要な直流の電源を，商用電源ラインの交流から作り出すもの．

<変換ユニット>：アナログ量をデジタル量に変換する装置．

テキスト, 手紙

自動的に生成された説明<オシロスコープ>：時間の経過とともに電気信号（電圧）が変化していく周期的変化をリアルタイムに波形としてブラウン管に表示させ，電気信号の変化を可視化できるようにした波形測定器である．

図５　オシロスコープ

この装置において，非接触変位センサで*ｚ*の時間応答を計測し，振動周期を求める．その後式（13）より，慣性モーメントを算出する．

まず，Ｋについて考えてみると，回転台がθ回転すると，バネの伸びｘは

であり，バネによる力は

となる．したがって，バネ力による回転軸中心の反時計回りのモーメントＭは

となる．ここでθが微小であると仮定する．マクローリン展開を用いて近似を行う，

と近似可能である．これを式(17)に用いると

式(3)と式(20)を比較すると

となることが分かる．このことからKを求めるためには，アームの長さLと各々のバネ定数を計測すればよい．今回の実験ではL＝122mmとする．

テーブル, 座る, 木製, 机 が含まれている画像

自動的に生成された説明

図６　回転振動装置

# 5.実験方法

## （5-1）理論的方法

　中がくりぬかれている円柱の中心軸周りの慣性二次モーメントについて考える．

内側の円柱の質量ｍ１，直径をd0，慣性二次モーメントをI１とし，外側の円柱の質量ｍ２，直径をd1，慣性二次モーメントI２とする．この物体の密度をρ，円柱の高さは内側と外側で同様のlを用いる．

式(1)より，

と表せる．したがって，中がくりぬかれている円柱の慣性二次モーメントは

ここで，質量m1，m2に考えてみる．

ｍ１は

と表せ，ｍ２は

式(25)(26)を式(24)に代入すると

また，とおくと

式(28)を変形して

とする．この式(29)を式(27)に代入すると

となる．よって中がくりぬかれた円柱の慣性二次モーメントは式(30)の通りである．

## （5-2）実験的方法

　実験的方法は，2つの予備実験と1つの本実験から構成されている．

## （5-2-1）予備実験１（振動が微小であることの確認）

　本実験では，アームが図4のストッパに当たるまで回転させてから，静かに手を離し，振動させる．したがって，ストッパにアームが当たっているときの変位とすれば＜０であり，減衰があることを考えると，バネの振幅よりも大きくなることはない．そこで，式(13)より，x＝のとき

θ(とする)を求めると，このが微小であれば，振動中のθは常に微小である．

図１において，アームに触れていないときの変位と，アームをストッパまで回転させて変位センサに最接近させたときの変位を求めればよい．その後，とsincosの値を比較して，同程度の値になることを確認するzref，zminよりを求める．アームの長さをL０とすると

は以下のようになる．

式(15)より

と表せる．

## (5-2-2)予備実験２（定数Ｋの測定）

　図１より，バネ１の長さは最大で()から()までの範囲で変化する．そこで，バネ定数を測定する場合，まずはをノギスで測定する．次に，図3のバネ定数測定装置に取り付ける．その際，バネの長さがになるようにセットする．そしてを算出する．今回の実験ではの範囲で測定する．理由は，本実験での範囲で直線性を示せばよいからである．この際，バネ定数はf1，u1が比例すると仮定して算出するが，本当に比例していて，仮定したフックの法則が成り立つかどうかを確認する必要がある．(比例していなければ，式(16)が成り立たなくなるため，実験が破綻する)．そこで，横軸にu1，縦軸にf１をとって，測定点をプロットし，測定点が直線上に並ぶかどうか確認する．その上で，直線の傾きを求め，それをk１とする．k2も同様に変位u２と引張力f２の関係の直線性を確認した上で直線の傾きを求め，その値をk２とする．

以上より式(21)の定数Kを求める．

## (5-3)本実験（周期の測定と慣性二次モーメントの算出）

　図1に示す２種類の供試体の寸法をそれぞれ計測する．図１に示す通り，供試体は回転台に乗せることになるのでその際の振動周期Tから式(11)で得られるのは回転台の慣性二次モーメントと供試体の慣性二次モーメント*I*の両方を合わせた値である．式で表すと

そこで，供試体を回転台に載せない場合の振動周期を求め，を次式で求める．

　次に供試体を台に載せたときの振動周期Tを計測し，式（34）に代入して移項して供試体の慣性二次モーメントIを求められる．

Kに式(21)を代入し，さらに供試体の慣性二次モーメントをを用いて表すと

となる．

# 6．実験結果

## (6-1) 理論的実験の結果

　２つの供試体の測定結果を表1,表2に示す．

表2　供試体Aの寸法および質量の測定結果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 測定回数 | 重さ[g] | 直径[mm] | 内径[mm] | 高さ[mm] |
| １回目 | 1191.4 | 119.80 | 10.60 | 39.95 |
| ２回目 | 119.80 | 10.55 | 40.00 |
| ３回目 | 119.80 | 10.60 | 40.00 |
| 平均 | 1191.4 | 119.80 | 10.58 | 39.98 |

表３　供試体Dの寸法および質量の測定結果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 測定回数 | 重さ[g] | 直径[mm] | 内径[mm] | 高さ[mm] |
| １回目 | 868.4 | 200.15 | 10.40 | 10.20 |
| ２回目 | 200.40 | 10.65 | 10.05 |
| ３回目 | 200.15 | 10.65 | 10.10 |
| 平均 | 868.4 | 200.23 | 10.57 | 10.12 |

表２，表３より理論的方法での慣性二次モーメントを求める．式(30)に代入する．

＜供試体A＞

＜供試体D＞

## (6-2-1) 予備実験１の結果

　zrefとzminの変位を以下のグラフに表した．

図7　zrefとzminの時間的変化

それぞれの平均値は以下の通りだ．

表4　との平均値

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0.9134 mm |
|  | 0.5039 mm |

は式(32)より求められる．計算すると

は

となる．したがって,が成り立ち，が微小であることが確認でき，式(17)から式(20)への近似が成立する．そのためを求めることが可能になる．は式(33)で表せる．

となる．また，予備実験１は成功し，実験結果も妥当であると考える．

## (6-2-2) 予備実験２の結果

以下のグラフはzrefとzminの変位を表したものである．

表5　バネの伸びと引張力

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 基準の長さからの変位u [mm] | 引張力 f1 [N] | 引張力 f2 [N] |
| -2.5 | -1.04 | -1.10 |
| -2 | -0.82 | -0.86 |
| -1.5 | -0.61 | -0.65 |
| -1.0 | -0.42 | -0.43 |
| -0.5 | -0.18 | -0.24 |
| 0 | 0.00 | 0.00 |
| 0.5 | 0.23 | 0.20 |
| 1.0 | 0.43 | 0.41 |
| 1.5 | 0.66 | 0.62 |
| 2.0 | 0.87 | 0.85 |
| 2.5 | 1.08 | 1.06 |

この値から２つのばね定数の値をグラフより求める．

図9　ばねL１の変位と引張力の関係

図10　ばねL２の変位と引張力の関係

ばねL１，L２の二次曲線の式は以下の通りだ．

表6　二次曲線の式

|  |  |
| --- | --- |
| ばねL１ | y = 0.0016x2 + 0.4233x + 0.0142 |
| ばねL２ | y = -0.0007x2 + 0.4285x - 0.011 |

二次曲線の一般式はと表せる．この式と今回求めた二次曲線の式を比較すると

bの値はの値の102倍以上大きいので，でありの項は無視することができる．残りの項は一般式でいう

であり，ばね定数k１,k2は式(39)を微分することで得られる．f= kxなので

結果は

となり，ｂがばね定数となる．

これらの値を式(21)に代入すると，ばね定数Kは

となる．

## (6-3) 本実験の結果

　以下のグラフは，回転台だけの周期，供試体A，供試体Dを振動させたときの周期を示したものである．

X:0.09978

Y:1.165

X:0.1602

Y:1.133

X:0.04089

Y:1.259

X:0.1326

Y:1.165

X:0.07278

Y:1.196

図11　回転台だけの振動波形

X:0.4718

Y:1.086

X:0.2996

Y:1.165

X:0.1272

Y:1.244

X:0.3852

Y:1.118

X:0.2136

Y:1.181

図12　供試体Ａの振動波形

X:0.6426

Y:1.149

X:0.1578

Y:1.244

X:0.4074

Y:1.196

X:0.5202

Y:1.165

X:0.2726

Y:1.196

図13　供試体Dの振動波形

表７　各頂点における時間

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 回転台のみ [s] | 供試体A [s] | 供試体D [s] |
| ｔ1 | 0.04089 | 0.1272 | 0.1578 |
| ｔ２ | 0.07278 | 0.2136 | 0.2726 |
| ｔ３ | 0.09978 | 0.2996 | 0.4074 |
| ｔ４ | 0.13267 | 0.3852 | 0.5202 |
| ｔ５ | 0.16027 | 0.4718 | 0.6426 |

表7より周期Tを求める．

表8　周期T

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 回転体のみ[s] | 供試体A [s] | 供試体D [s] |
| T1 | 0.03189 | 0.08638 | 0.1147 |
| T2 | 0.02699 | 0.08598 | 0.1347 |
| T3 | 0.03289 | 0.08558 | 0.1127 |
| T4 | 0.02759 | 0.08658 | 0.1224 |
| 平均 | 0.02984 | 0.08613 | 0.1212 |

よって，この周期を用いて慣性二次モーメントを求める．

供試体A

供試体D

# 7.考察

理論的方法と実験的方法の比較

比較した結果と相対誤差は以下の表のとおりだ．なお，相対誤差を算出するにあたって真の値は理論的方法の結果を用いている．

表９　慣性二次モーメントの比較

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 供試体A | 供試体D |
| 理論的方法 [kg・ｍ２] |  |  |
| 実験的方法 [kg・ｍ２] |  |  |
| 相対誤差 [%] | -2.600 | 2.049 |

このような結果から，本実験では供試体Aの方が相対誤差が大きくなったことが明らかである．

次に，誤差が生じた理由について考えていく．考えていく項目は2つである．

・測定機器の誤差について

・減衰の影響について

測定機器の相対誤差について

今回用いた測定機器の相対誤差は以下の表のとおりだ．

表10　測定機器の測定誤差

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 測定機器 | 測定対象 | 単位 | 誤差 |
| ノギス |  | Mm |  |
| 電子天秤 |  | ｇ |  |
| フォースゲージ |  | N |  |
| ばね定数測定装置  (伸びを測る方) |  | mm |  |
|  |  |  |  |

ある量が測定値の関数は

で決まり,の誤差をとする．近似関数を用いて測定誤差を求める．n次近似式として誤差とする．テイラー展開より

一般的に誤差は微小であるため，1次近似を用いると

を誤差項として扱うため，測定誤差をとすると多変数の偏微分を使い

と表せる．誤差は正負の値をとるため，絶対値をとると

となる．

理論的方法では式(30)で慣性二次モーメントを求めた．

慣性二次モーメントの誤差は，質量の誤差を，内径の誤差，直径の誤差をとすると

によって求められる．なお，今回用いる値は誤差を小さくするために有効数字を考慮する

前の値を用いる．

供試体Ａの測定誤差は

供試体Dの測定誤差は

次は，同様に実験的方法の測定誤差について考えていきたい．

実験的方法に関しての慣性二次モーメントは式(37)より求めた．

また，式(21)のばね定数は予備実験２より近似式を用いて記述した．

最初にKについての測定誤差に関して求めていく．

このような式になるが，ばね１とばね２では数値がほぼ等しいため，同じ値を用いて計算していく．

また，実験前の段階でL＝122mmと与えられていたため，Lについての誤差は考慮しない．

なお，理論的方法と同様に測定誤差を求めるにあたっての誤差を小さくするために，有効数

字に直す前の値を使用する．

次に，式(37)より

ここで，はオシロスコープを用いて測定したため，オシロスコープの時間軸の誤差を

用いる．今回の実験で使用したオシロスコープは，pico Technology社の『PicoScope 4262』

だ．そのデータベースより時間軸の確度はと記されていたため，その値を用いる．

供試体Aは

供試体Dは

と求めることができる．

（7-1）理論的方法と実験的方法の測定誤差の比較

以下の表は理論的方法で求めた測定誤差と実験的方法で求めた測定誤差をまとめたものだ．

上記で求めた式を％に直している．

表11　測定誤差の比較

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 供試体A | 供試体D |
| 理論的方法の測定誤差 [%] |  |  |
| 実験的方法の測定誤差 [%] |  |  |

表11より実験的方法よりも理論的方法の方が測定誤差が小さいことがわかる．要因としては，理論的方法だと慣性二次モーメントを求めるにあたって測定するものはの3つだけだが，実験的方法に関してはばね定数のKを求めるのに，の4つ，その後，慣性二次モーメントを求めるのにの3つと合計で7個の測定が必要となる．その結果が測定誤差の大小に影響したと考える．特に，周期Tを求めるところは大きな誤差の影響だと考える．また，理論的方法で測定する物理量はそもそも誤差があまりないことが考えられる．

このような結果から，理論的方法では，測定する箇所も少なく，誤差も小さくなるので大まかな慣性二次モーメントを求めたいときに簡単に求められるという長所がある．しかし，物体が動くことを考慮していないこと，複雑な形状になると測定すらできないことも想定されるという短所もある．

一方で，実験的方法では誤差は大きく出るものの，物体が動くことも考慮され，複雑な形状にも対応できる長所がある．

最終的に誤差を考慮した慣性二次モーメントは以下の通りだ．

表12　測定誤差を考慮した慣性二次モーメント

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 供試体A | 供試体D |
| 理論的方法 [] |  | ( |
| 実験的方法 [] | ( |  |

次に，2つ目の減衰の影響について考えていく．回転振動が減衰する場合，減衰モーメントが角速度に比例すると仮定して，これをとおくと，運動方程式は以下のようになる．

両辺をIでわると

文字を次のように置き換える．

式(53)の文字の書き換えを行うと，運動方程式は以下のようになる．

この運動方程式の解とおき，代入すると以下のような特性方程式が得られる．

よって平方完成して，を求めると

となり，は減衰係数であり１より小さいことを考慮すると，

となり，特性方程式の解が求まった．もとの運動方程式の一般解は定数A,Bを用いると以下のようになる．

オイラーの式を用いて計算すると

初期条件(0)=0,θ(0)=とすると運動方程式の一般解は以下のようになる．

式(62)からN回後のピークでの時刻は周期振動TのN倍で

となり，そのときのの値をとすれば

となることがわかる．よってを

と定義する．式(64)より

となる．これを式(67)，は

となる．したがって式(53)と式(67)から

この式はとを計測すれば，慣性二次モーメントを推定できることを意味している．

今回は，2個目のピークをN=０とし，N＝４のときの慣性二次モーメントを求める．

まず，最初にを求める。

回転台のみ

供試体Aは

供試体Dは

続いて，式(67)とより，を求める．

供試体Aは

供試体Dは

以上より減衰の影響を考慮して慣性二次モーメントを求めるのに用いる値は以下の通りだ．

表13　減衰を考慮するのに用いる各値

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

式(68)より,減衰を考慮した慣性二次モーメントを求める．

供試体Aは

供試体Dは

表13　慣性二次モーメントの比較

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 供試体 | 供試体A | 供試体D |
| 理論的方法 [kg・m2] |  |  |
| 実験的方法 [kg・m2] |  |  |
| 減衰を考慮 [kg・m2] |  |  |

上記の表より，減衰を考慮すると理論的方法の値からは少し離れたが，実験的方法の値とほぼ同じ値になった．これは２つの供試体で共通するものだ．このような結果から，減衰は直径が大きいことや質量が重いなどといったことは関係ないことが分かった．また，減衰による影響よりも測定誤差の影響の方が大きいのではないかと考える．

このようなことから，慣性二次モーメントを算出するときは減衰を考慮しないでもよいと考えられる．

# 8.結論

・実験の原理の条件や測定機器の精度の影響で，理論値と推定値では誤差が生じる．

・理論的方法と実験的方法にはそれぞれ長所と短所がある．

・与えられた慣性二次モーメントを推定するために必要な理論を学び，推定の為の物理量の計測方法を理解できた．

・慣性二次モーメントの理論値と推定値を比較し，測定誤差や減衰を考慮することで，慣性二次モーメントの理解を深めることができた．

# ９．参考文献

１．航空宇宙工学実験Ⅰ　P.25~32

２．基礎物理学実験ガイドブック　P.49~51

３．<http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2009.calculus-I/html.dir/node116.html>

（閲覧日：2023年６月１０日）

４．<https://manabitimes.jp/math/2652>　（閲覧日：2023年６月１０日）

５．<https://akizukidenshi.com/download/ds/picotechnology/MM030.en-9.pdf>

（閲覧日：2023年6月15日）