Cálculo da estatística assintótica para medidas de conectividade lineares

23 de outubro de 2009

Resumo

1 Introdução

Dadas n séries temporais, queremos inferir se há relação de causalidade entre elas. Para isso usaremos a definição de causalidade de Granger, de forma que devemos inferir se uma série temporal ajuda na predição de outra série temporal. Assumiremos que as séries temporais são geradas por um modelo autoregressivo multivariado (VAR) de ordem finita p, definido por:

$$x_t = \sum_{k=1}^{p} A_k \cdot x_{t-k} + \varepsilon_t; (n \times 1) \tag{1}$$

onde x_t é o valor da série multivariada no tempo t, A_k são as matrizes de relação linear entre as śeries e ε_t são ruídos gaussianos brancos, também definidos como inovação do modelo.

Assim a série temporal de índice j Granger-causa outra de índice i se para alguma das matrizes A temos $A_{k_{ij}} \neq 0$.

A partir desse modelo, foram definidos diversos índices de conectividade, cada um com certas propriedades e limitações. Uma medida, chamada Coerência Parcial Direcionada (PDC), é definida em cada frequencia λ por:

$$|\pi_{ij}(\lambda)|^2 = \frac{a_{ij}\bar{a}_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\bar{a}_{kj}} \tag{2}$$

onde aqui cada a_{ij} está no domínio da frequência, obtido pela transformada de Fourier discreta na frequencia λ dos termos $a_{k_{ij}}$. Ela pondera o valor da relação de j para i pelas outras relações que com origem em j. Em outras palavras, normaliza pela fonte.

Ao aplicar esta análise a dados reais, deve-se inferir os valores de A e se torna necessário um teste contra a hipótese nula $|\pi_{ij}(\lambda)|^2 = 0$, além de intervalos de confiança. Este trabalho deseja obter as fórmulas assintóticas para fazer este teste e obter estes intervalos.

2 Exemplo de referência: PDC diagonal

Daremos como exemplo de cálculo o procedimento para a obtenção do teste contra a hipótese nula e dos intervalos de confiança para a Coerência Parcial Direcionada diagonal (PDCd) (definida anteriormente como generalizada, gPDC):

$$|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2 = \frac{a_{ij}\bar{a}_{ij}\sigma_{ij}^{-2}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\bar{a}_{kj}\sigma_{kk}^{-2}} \tag{3}$$

O procedimento se baseará no método delta para estatísticas assintóticas. Dado uma estimador $\hat{y}$ para y, com variância assintótica Ω/N, e uma função $g = g(\hat{y})$, a variância assintótica de g é $\frac{1}{N} \cdot G \cdot \Omega \cdot G^{'}$, onde $G = \frac{\partial g(y)}{\partial y}$:

$$\sqrt{N}(g(\hat{y}) - g(y)) \rightarrow N(0, G\Omega G^{'}) \tag{4}$$

Se temos a variância assintótica dos estimadores dos parâmetros do VAR, temos que calcular a derivada de nosso índice de conectividade por estes parâmetros. A partir da variância assintótica inferimos os intervalos de confiança.

2.1 Variância assintótica dos estimadores do VAR

Dada uma amostra X de tamanho N da série temporal multivariada e a ordem p, estimaremos as matrizes A, tendo os ε_t como resíduos do modelo (ou inovações do processo). Os estimadores eficientes para as matrizes A, por exemplo Yule-Walker e Nuttall-Strand, tem como variância assintótica:

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow N(0, \Omega_\alpha); (n^2p \times n^2p) \tag{5}$$

onde $\alpha = vec(A^*)$ é como representaremos as matrizes A conjuntamente, $\Omega_\alpha = \Gamma_x(0)^{-1} \otimes \Sigma$ e $\Sigma = E[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t^{'}]$. $\Gamma_x(0)$ é definido por:

$$\Gamma_x(0) = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \cdots & \Gamma(p-1) \\ \Gamma(-1) & \Gamma(0) & \cdots & \Gamma(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(p-1) & \Gamma(p-2) & \cdots & \Gamma(0) \end{bmatrix}; (np \times np) \tag{6}$$

onde $\Gamma(k) = E[x_t \cdot x_{t-k}^{'}]$ e é estimado pela correlação entre a série e a série com lag k.

Se Σ é desconhecido, teremos que estimá-lo também, com base na covariância dos resíduos do modelo estimado. Tem-se a variância assintótica deste estimador dada por:

$$\sqrt{(N)}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) \rightarrow N(0, \Omega_\varepsilon) \tag{7}$$

$$\Omega_\varepsilon = 2 \cdot D_n \cdot D_n^{+} \cdot (\Sigma \otimes \Sigma) \cdot D_n^{+'} \cdot D_n^{'} \tag{8}$$

onde $\hat{\varepsilon} = vec(\hat{\Sigma})$ é como representaremos Σ, D_n é a matriz de duplicação para matrizes $n \times n$ simétricas A: $D_n * vech(A) = vec(A)$, ou seja, dado um vetor contendo os termos contidos e abaixo da diagonal de uma matriz simétrica, ele recupera a matriz toda. D_n^{+} é a inversa generalizada de D_n.

A estimação do α e do ε são assintoticamente independentes.

2.2 Formulação matricial

Escolhemos desenvolver as contas de forma matricial, assim reformularemos o PDCd.

Na fórmula do PDCd temos as variáveis no domínio da frequencia. Elas são obtidas por:

$$a(\lambda)_{ij} = \sum_{k=0}^{p} a_{ij} \cdot e^{-j2\pi\lambda k} \tag{9}$$

ou de forma matricial: $a^*(\lambda) = vec(I_n - \sum_{k=1}^{p} A_k \cdot e^{-j2\pi\lambda k})$. Como $a^*(\lambda)$ é um vetor imaginário iremos decompô-lo em sua parte real e imaginária para facilitar as futuras derivadas: $a(\lambda) = \begin{bmatrix} \Re(a^*(\lambda)) \\ \Im(a^*(\lambda)) \end{bmatrix}$, denotado daqui para frente simplesmente por a.

A formulação matricial de a é: $a = vec([I_n O_n]) - \zeta^* \cdot \alpha$, onde ζ^* é a matriz que aplica a transformada de Fourier, separando a parte real e imaginária ($\cos e \sin$) e pode ser construída por:

$$C = [\cos(-2\pi\lambda \cdot 1) \cos(-2\pi\lambda \cdot 2) \dots \cos(-2\pi\lambda \cdot p)] \tag{10}$$

$$S = [\sin(-2\pi\lambda \cdot 1) \sin(-2\pi\lambda \cdot 2) \dots \sin(-2\pi\lambda \cdot p)] \tag{11}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} C \\ S \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\zeta^* = \zeta \otimes I_{n^2} \tag{13}$$

Reescrevendo o PDCd:

$$|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2 = \frac{a_{ij}\bar{a}_{ij}\sigma_{ij}^{-2}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\bar{a}_{kj}\sigma_{kk}^{-2}} = \frac{a^{'}\bar{\Sigma}_d^{-1} I_{ij}^c a}{a^{'}\bar{\Sigma}_d^{-1} I_j^c a} \tag{14}$$

Nesta segunda formulação, I_{ij}^c serve para selecionar os termos $a(\lambda)_{ij}$ (tanto a parte real quanto imaginária), pois $a_{ij}\bar{a}_{ij} = \Re a_{ij}{}^2 + \Im a_{ij}{}^2$, de forma que $I_{ij}^c \cdot a$ mantém apenas estes elementos e zera os outros. I_j^c serve de forma semelhante para selecionar toda a coluna j de a, zerando os outros termos. Eles podem ser definidos por:

$$I_{ij} = diag([0 \dots 010 \dots 0]); (n^2 \times n^2) \tag{15}$$

com apenas termo $i + n \cdot j$ não nulo.

$$I_{ij}^c = I_2 \otimes I_{ij}; (2n^2 \times 2n^2) \tag{16}$$

$$I_j^* = diag([0 \dots 010 \dots 0]); (n \times n) \tag{17}$$

com apenas termo j não nulo.

$$I_j = I_j^* \otimes I_n; (n^2 \times n^2) \tag{18}$$

$$I_j^c = I_2 \otimes I_j; (2n^2 \times 2n^2) \tag{19}$$

A matriz $\bar{\Sigma}_d$ é formulada convenientemente para manter a normalização desejada:

$$\Sigma_d = diag(diag(\Sigma)); (n \times n) \tag{20}$$

$$\bar{\Sigma}_d = I_{2n} \otimes \Sigma_d; (2n^2 \times 2n^2) \tag{21}$$

O mais importante é que a formulação é dada por uma razão de formas quadráticas, facilitando as contas seguintes.

2.3 Derivada de PDCd por α

Fazendo a derivada do PDCd por a, obtemos:

$$G^*_{d_1} = \frac{\partial|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial a'} = \frac{2a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}}{a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_j a} - \frac{2a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_j(a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}a)}{(a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_j a)^2}; (1 \times 2n^2) \tag{22}$$

A derivada de a por α é dada por:

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha'} = -\zeta^*; (2n^2 \times n^2 p) \tag{23}$$

De forma que a derivada de PDCd em relação a α, pela regra da cadeia, é:

$$G_{d_1} = \frac{\partial|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial \alpha'} = G^*_{d_1} \cdot -\zeta^*; (1 \times n^2 p) \tag{24}$$

Assim, se Σ for conhecido, a variância assintótica de $|\hat{\pi}_{d_{ij}}(\lambda)|^2$ é:

$$\sqrt{N}(|\hat{\pi}_{d_{ij}}(\lambda)|^2 - |\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2) \rightarrow N(0, G_{d_1}\Omega_\alpha G'_{d_1}) \tag{25}$$

2.4 Derivada de PDCd por ε

Se Σ não for conhecido, teremos que estimá-lo. Como ele aparece na formulação do PDCd, sua estimação influirá na variância assintótica do estimador. Assim desejamos encontrar $G_{d_e} = \frac{|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial \varepsilon'}$.

Decompomos o $|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2$ em numerador e denominador:

$$|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2 = \frac{num_d}{den_d} \tag{26}$$

$$num_d = a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}a \tag{27}$$

$$den_d = a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_j a \tag{28}$$

e definimos $\bar{\varepsilon} = vec(\bar{\Sigma}); (4n^4 \times 1)$.

Aplicaremos várias vezes a regrada cadeia:

$$\frac{|\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial \varepsilon'} = \frac{den_d \cdot \frac{\partial num_d}{\partial \varepsilon'} - num_d \cdot \frac{\partial den_d}{\partial \varepsilon'}}{den_d^2}; (1 \times \frac{n(n+1)}{2}) \tag{29}$$

Novamente pela regra da cadeia:

$$\frac{num_d}{\partial \varepsilon'} = \frac{num_d}{\partial \bar{\varepsilon}'} \cdot \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon'} \tag{30}$$

$$\frac{den_d}{\partial \varepsilon'} = \frac{den_d}{\partial \bar{\varepsilon}'} \cdot \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon'} \tag{31}$$

Temos:

$$\frac{\partial num_d}{\partial \bar{\varepsilon}'} = ((I_{ij} \cdot a)' \otimes a') \cdot \frac{\partial vec(\bar{\Sigma}_d^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}'} \tag{32}$$

$$\frac{\partial den_d}{\partial \bar{\varepsilon}'} = ((I_j \cdot a)' \otimes a') \cdot \frac{\partial vec(\bar{\Sigma}_d^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}'} \tag{33}$$

e

$$\frac{\partial vec(\bar{\Sigma}_d^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}'} = diag(vec(-\bar{\Sigma}_d^2)) \tag{34}$$

pois zera os termos fora da diagonal.

Como $\bar{\varepsilon} = vec(I_{2n} \otimes \Sigma)$, temos

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon'} = (T_{2n,n} \otimes I_{n \cdot 2n}) \cdot (I_n \otimes vec(I_{2n}) \otimes I_n); (4n^4 \times n^2) \tag{35}$$

onde $T_{p,q} \cdot vec(B) = vec(B^{'})$, com $B(p \times q)$, concluindo assim a derivada.

OBS: A fórmula é $\frac{\partial vec(A \otimes B)}{\partial vec(B)} = (T_{n,p} \otimes I_{n \cdot q}) \cdot (I_q \otimes vec(A) \otimes I_p); A(m \times n), B(p \times q)$.

Assim a variância assintótica do PDCd é a soma da variância em relação a estimação do α e do ε:

$$\sqrt{N}(|\hat{\pi}_{d_{ij}}(\lambda)|^2 - |\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2) \rightarrow N(0, G_{d_1} \Omega_\alpha G_{d_1}^{'} + G_{d_e} \Omega_\varepsilon G_{d_e}^{'}) \tag{36}$$

Para os intervalos de confiança basta pegar os respectivos quantis da distribuição normal assintótica.

2.5 Teste contra a hipótese nula

Uma observação importante é a que variância encontrada na seção anterior se anula sob H_0, pois $I_j^c a = 0$, de forma que devemos encontrar as derivadas de ordem 2. Nesse caso, dado uma estimador $\hat{y}$ para y, com variância assintótica Ω tal que $\frac{\Omega}{N} \rightarrow 0$, e uma função $g = g(\hat{y})$, com $G_2 = \frac{\partial g(y)}{\partial y \partial y'}$, temos:

$$N(g(\hat{y}) - g(y)) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^{'} \cdot G_2 \cdot x \tag{37}$$

com $x \rightarrow N(0, \Omega)$.

Neste caso podemos fazer uma transformação de variáveis que torna o limite uma soma de chi-quadrados. Seja $\Omega = L \cdot L^{'}$ a decomposição de Choleski de Ω, sendo L matriz triangular inferior. Defina $x = Lz$, logo $z = (L^{'}L)^{-1}L^{'}x$.

Temos que $E[z \cdot z^{'}] = I$. Assim se $D = L^{'}G_2 L$ e $D = U \Lambda U^{'}$ sua diagonalização, temos: que $\frac{\Omega}{N} \rightarrow 0$, e uma função $g = g(\hat{y})$, com $G_2 = \frac{\partial g(y)}{\partial y \partial y'}$, temos:

$$x^{'} G_2 x = z^{'} D z = \sum_k l_k z^{'} u_k u_k^{'} z = \sum_k l_k \nu_k^2 \tag{38}$$

pois $u_k u_k^{'} = I$, sendo l_k os autovalores de D e ν_k^2 chi-quadrados com 1 grau de liberdade.

Logo $N(g(\hat{y}) - g(y)) \rightarrow \sum_k l_k \nu_k^2$.

Assim para ter a distribuição assintótica de segunda ordem necessitamos a segunda derivada G_{d_2}, dada por:

$$G_{d_2} = \frac{\partial |\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial \alpha \partial \alpha'} = \zeta^{*^{'}} \cdot G_{d_2}^* \cdot \zeta^*; (n^2 p \times n^2 p) \tag{39}$$

$$G_{d_2}^* = \frac{\partial |\pi_{d_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial a \partial a'} = \frac{2 \bar{\Sigma}_d^{-1} I_{ij}^c}{(a' \bar{\Sigma}_d^{-1} I_j^c a)}; (2n^2 \times 2n^2) \tag{40}$$

Dado G_{d_2}, basta decompor Ω, calcular D e achar seus autovalores. Para o teste de hipótese basta calcular o quantil superior da soma de chi-quadrados $\sum_k l_k \nu_k^2$.

Para este cálculo utilizamos a aproximação de Patnaik, por uma chi-quadrado: $c \cdot \chi_d^2$, com $c = \frac{\sum_k l_k^2}{(\sum_k l_k)^2}$ e $d = \frac{\sum_k l_k^2}{(\sum_k l_k)^2}$.

Temos $rank(D) \leq rank(G_2^* \leq rank(I_{ij}^c) = 2$, logo no máximo dois autovalores serão não-nulos, sendo uma soma de até duas chi-quadrados.

Caso Σ seja desconhecido, devemos adicionar a variância relativa à sua estimação. No caso do PDCd, esta derivada é nula, pois os termos $I_{ij}^c a$, que são nulos sob H_0, não desaparecem.

3 Estatística para PDCe, PDCg e DTF

Utilizando o mesmo procedimento do capítulo anterior, iremos calcular a estatística para outras medidas de conectividades baseadas no modelo VAR.

3.1 PDC

A Coerência Parcial Direcionada (PDC) é a medida originalmente proposta, não havendo normalização pela variância dos resíduos:

$$|\pi_{ij}(\lambda)|^2 = \frac{a_{ij}\bar{a}_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\bar{a}_{kj}} = \frac{a' I_{ij}^c a}{a' I_j^c a} \tag{41}$$

Temos uma formulação matricial semelhante ao PDCd, mas sem a presença do Σ. Desta forma teremos derivadas semelhantes:

$$G_1^* = \frac{\partial |\pi_{ij}(\lambda)|^2}{\partial a'} = \frac{2a' I_{ij}^c}{a' I_j^c a} - \frac{2a' I_j^c (a' I_{ij}^c a)}{(a' I_j^c a)^2}; (1 \times 2n^2) \tag{42}$$

e sob H_0 ($I_{ij}^c a = 0$):

$$G_2^* = \frac{\partial |\pi_{ij}(\lambda)|^2}{\partial a \partial a'} = \frac{2 I_{ij}^c}{(a' I_j^c a)}; (2n^2 \times 2n^2) \tag{43}$$

no lugar de G_{d_1} e G_{d_2}, respectivamente.

Como não há dependência de $\hat{\Sigma}$ em sua definição, não precisamos considerar sua variância assintótica ou então considerar a derivada em relação a ε como nula.

3.2 PDCg

A Coerência Parcial Direcionada generalizada (PDCg) se diferencia havendo normalização pela matriz Σ completa, e não apenas sua diagonal:

$$|\pi_{g_{ij}}(\lambda)|^2 = \frac{a' \bar{\Sigma}_d^{-1} I_{ij}^c a}{a' I_j^c \bar{\Sigma}^{-1} I_j^c a} \tag{44}$$

com $\bar{\Sigma} = I_{2n} \otimes \Sigma$.

Novamente a formulação é semelhante, tendo as derivadas em relação ao a:

$$G^*_{g_1} = \frac{\partial|\pi_{g_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial a'} = \frac{2a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}}{a'I^c_j\bar{\Sigma}^{-1}I^c_j a} - \frac{2a'I^c_j\bar{\Sigma}^{-1}I^c_j(a'\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}a)}{(a'I^c_j\bar{\Sigma}^{-1}I^c_j a)^2}; (1 \times 2n^2) \quad (45)$$

$$G^*_{g_2} = \frac{\partial|\pi_{g_{ij}}(\lambda)|^2}{\partial a\partial a'} = \frac{2\bar{\Sigma}_d^{-1}I^c_{ij}}{(a'I^c_j\bar{\Sigma}^{-1}I^c_j a)}; (2n^2 \times 2n^2) \quad (46)$$

e derivada em relação ao ε:

$$\frac{\partial den_g}{\partial\bar{\varepsilon}'} = ((I_j \cdot a)' \otimes (a' \cdot I_j)) \cdot \frac{\partial vec(\bar{\Sigma}^{-1})}{\partial\bar{\varepsilon}'} \quad (47)$$

com:

$$\frac{\partial vec(\bar{\Sigma}^{-1})}{\partial vec(\bar{\Sigma})'} = -\bar{\Sigma}^{-1'} \otimes \bar{\Sigma}^{-1} \quad (48)$$

3.3 DTF

Um outro grupo de medidas de conectividade utiliza a inversa da matriz $A(\lambda)$. Uma delas é a função de transferência direcionada (DTF):

$$|dtf_{ij}(\lambda)|^2 = \frac{h'I^l_{ij}h}{h'I^l_i h} \quad (49)$$

onde $h = vec([\ \Re(A^{-1}(\lambda))\quad \Im(A^{-1}(\lambda))])$, análogo ao a. A matriz I^l_i seleciona a linha i (diferentemente de I^c_j que seleciona a coluna j):

$$I^*_i = diag([0\ldots010\ldots0]); (n \times n) \quad (50)$$

com apenas termo i não nulo.

$$I_i = I_n \otimes I^*_i; (n^2 \times n^2) \quad (51)$$

$$I^l_i = I_2 \otimes I_i; (2n^2 \times 2n^2) \quad (52)$$

Vemos que a formulação é analoga ao PDC, mas utilizando h no lugar de a e I^l_i no lugar de I^c_j. Desta forma adicionaremos na regra da cadeia a derivada $\frac{\partial h}{\partial a'}$ e substituiremos I^l_i por I^c_j:

$$G^*_{dtf_1} = \frac{\partial|dtf_{ij}(\lambda)|^2}{\partial h'} = \frac{2h'I^l_{ij}}{h'I^l_i h} - \frac{2h'I^l_i(h'I^l_{ij}h)}{(h'I^l_i h)^2}; (1 \times 2n^2) \quad (53)$$

$$G_{dtf_1} = G^*_{dtf_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial a'} \cdot -\zeta^* \quad (54)$$

$$G^*_{dtf_2} = \frac{\partial|dtf_{ij}(\lambda)|^2}{\partial h\partial h'} = \frac{2I^l_{ij}}{(h'I^l_j h)}; (2n^2 \times 2n^2) \quad (55)$$

$$G_{dtf_2} = \zeta^{*'} \cdot (\frac{\partial h}{\partial a'})' \cdot G^*_{dtf_2} \cdot \frac{\partial h}{\partial a'} \cdot \zeta^* \quad (56)$$

Para o cálculo de $\frac{\partial h}{\partial a'}$ temos $H = A^{-1}$, assim a derivada complexa será:

$$B = \frac{\partial vec(H)}{\partial vec(A)'} = -H' \otimes H \quad (57)$$

De forma que a derivada decompondo as partes reais e imaginárias será:

$$\frac{\partial h}{\partial a'} = \begin{bmatrix} \Re(B) & -\Im(B) \\ \Im(B) & \Re(B) \end{bmatrix} \quad (58)$$

4 Coerência, coerência parcial e densidade espectral

4.1 Coerencia parcial

A coerência parcial é matricialmente definida por:

$$PC_{num_{ij}} = \left(a^{'} k_1^{ij} a\right)^2 + \left(a^{'} k_2^{ij} a\right)^2 \tag{59}$$

$$PC_{den_{ij}} = \left(a^{'} k_1^{ii} a\right) \cdot \left(a^{'} k_1^{jj} a\right) \tag{60}$$

$$PC_{ij} = \frac{PC_{num_{ij}}}{PC_{den_{ij}}} \tag{61}$$

$$k_1^{ij} = \left[\begin{array}{cc} c_i & 0 \\ 0 & c_i \end{array} \right] \Sigma_2^{-1} \left[\begin{array}{cc} c_j & 0 \\ 0 & c_j \end{array} \right]^{'} \tag{62}$$

$$k_2^{ij} = \left[\begin{array}{cc} c_i & 0 \\ 0 & c_i \end{array} \right] \Sigma_2^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & c_j \\ -c_j & 0 \end{array} \right]^{'} \tag{63}$$

onde c_i seleciona a coluna i. Em outras palavras é a norma do produto vetorial da coluna i pelo conjugado da coluna j, normalizado por Σ^{-1}, dividido pelo produto vetorial da coluna i pelo seu conjugado, multiplicado pelo produto vetorial da coluna j pelo seu conjugado, também normalizados por Σ^{-1}.

A matriz c_i é dada por:

$$v_i = [0 \ldots 010 \ldots 0]^{'}; (n \times 1) \tag{64}$$

com apenas elemento i não nulo.

$$c_i = v_i \otimes I_n; (n^2 \times n) \tag{65}$$

e $\Sigma_2 = I_2 \otimes \Sigma$.

Assim temos as derivadas em relação ao a:

$$G_{PC_1} = \frac{\partial PC_{ij}}{\partial a^{'}} = \frac{2(a^{'} k_1^{ij} a) a^{'} (k_1^{ij} + k_1^{ij^{'}}) + 2(a^{'} k_2^{ij} a) a^{'} (k_2^{ij} + k_2^{ij^{'}})}{PC_{den_{ij}}} - \tag{66}$$

$$\frac{PC_{num_{ij}}}{PC^2_{den_{ij}}} \cdot (2a^{'} k_1^{ii} (a^{'} k_1^{jj} a) + 2a^{'} k_1^{jj} (a^{'} k_1^{ii} a)) \tag{67}$$

$$G_{PC_2} = \frac{\partial PC_{ij}}{\partial a \partial a^{'}} = \frac{2}{PC_{den_{ij}}} \cdot ((k_1^{ij} + k_1^{ij^{'}}) a a^{'} (k_1^{ij} + k_1^{ij^{'}}) + (k_2^{ij} + k_2^{ij^{'}}) a a^{'} (k_2^{ij} + k_2^{ij^{'}})) \tag{68}$$

Para a derivada em relação ao ε, reescrevemos a PC como:

$$a_{11}^i = a^{'} \left[\begin{array}{cc} c_i & 0 \\ 0 c_i & \end{array} \right] \tag{69}$$

$$a_{12}^i = \left[\begin{array}{cc} c_i & 0 \\ 0 & c_i \end{array} \right]^{'} a \tag{70}$$

$$a_{21}^i = a' \begin{bmatrix} c_i & 0 \\ 0c_i & \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$a_{22}^i = \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ -c_i & 0 \end{bmatrix}' a \tag{72}$$

$$num_{PC} = (a_{11}^i \Sigma_2^{-1} a_{12}^j)^2 + (a_{21}^i \Sigma_2^{-1} a_{22}^j)^2 \tag{73}$$

$$den_{PC_1} = a_{11}^i \Sigma_2^{-1} a_{12}^i \tag{74}$$

$$den_{PC_2} = a_{11}^j \Sigma_2^{-1} a_{12}^j \tag{75}$$

$$PC_{ij} = \frac{num_{PC}}{den_{PC_1} \cdot den_{PC_2}} \tag{76}$$

de forma que pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial PC_{ij}}{\partial \varepsilon'} = \frac{\frac{\partial num_{PC}}{\partial \varepsilon'}}{den_{PC_1} \cdot den_{PC_2}} - \frac{num_{PC}}{den_{PC_1} \cdot den_{PC_2}} \left(\frac{1}{den_{PC_2}} \frac{\partial den_{PC_2}}{\partial \varepsilon'} + \frac{1}{den_{PC_1}} \frac{\partial den_{PC_1}}{\partial \varepsilon'} \right) \tag{77}$$

Seja $\varepsilon_2 = vec(\Sigma_2)$, temos:

$$\frac{\partial num_{PC}}{\partial \varepsilon'} = (2(a_{11}^i \Sigma_2^{-1} a_{12}^j)(a_{12}^{j'} \otimes a_{11}^i) + 2(a_{21}^i \Sigma_2^{-1} a_{22}^j)(a_{22}^{j'} \otimes a_{21}^i)) \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} \tag{78}$$

$$\frac{\partial den_{PC_1}}{\partial \varepsilon'} = (a_{12}^{i'} \otimes a_{11}^i) \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} \tag{79}$$

$$\frac{\partial den_{PC_2}}{\partial \varepsilon'} = (a_{12}^{j'} \otimes a_{11}^j)) \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} \tag{80}$$

Como $\varepsilon_2 = vec(I_2 \otimes \Sigma)$, temos

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varepsilon'} = (T_{2,n} \otimes I_{n \cdot 2}) \cdot (I_n \otimes vec(I_2) \otimes I_n); (4n^2 \times n^2) \tag{81}$$

e

$$\frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial vec(\Sigma_2)'} = -\Sigma_2^{-1'} \otimes \Sigma_2^{-1} \tag{82}$$

de onde temos:

$$\frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial vec(\Sigma_2)'} \cdot \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varepsilon'} \tag{83}$$

Sob H_0 teremos $num_{PC} = 0$. Desta vez a derivada segunda não é nula. Primeiramente $\frac{\partial PC_{ij}}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'}$:

$$\frac{\partial num_{PC_1}}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial (a_{11}^i \Sigma_2^{-1} a_{12}^j)}{\partial \varepsilon'} = a_{12}^{j'} \otimes a_{11}^i \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} \tag{84}$$

$$\frac{\partial num_{PC_2}}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial (a_{21}^i \Sigma_2^{-1} a_{22}^j)}{\partial \varepsilon'} = a_{22}^{j'} \otimes a_{21}^i \frac{\partial vec(\Sigma_2^{-1})}{\partial \varepsilon'} \tag{85}$$

$$\frac{\partial PC_{ij}}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon'} = \frac{2 \frac{\partial num_{PC_1}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial num_{PC_1}}{\partial \varepsilon'} + 2 \frac{\partial num_{PC_2}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial num_{PC_2}}{\partial \varepsilon'}}{den_{PC_1} \cdot den_{PC_2}} \tag{86}$$

Também precisamos calcular $\frac{\partial PC_{ij}}{\partial\alpha\partial\varepsilon'}$:

$$\frac{\partial PC_{ij}}{\partial\alpha\partial\varepsilon'} = \frac{2\frac{\partial num_{PC_1}}{\partial\alpha}\frac{\partial num_{PC_1}}{\partial\varepsilon'} + 2\frac{\partial num_{PC_2}}{\partial\alpha}\frac{\partial num_{PC_2}}{\partial\varepsilon'}}{den_{PC_1} \cdot den_{PC_2}} \tag{87}$$

onde

$$\frac{\partial num_{PC_1}}{\partial\alpha} = (k_1^{ij} + k_1^{ij'})a\frac{\partial a}{\partial\alpha'} \tag{88}$$

$$\frac{\partial num_{PC_2}}{\partial\alpha} = (k_2^{ij} + k_2^{ij'})a\frac{\partial a}{\partial\alpha'} \tag{89}$$

Assim sendo $\Omega_{big} = \begin{bmatrix} \Omega_\alpha & 0 \\ 0 & \Omega_\varepsilon \end{bmatrix}$, $par = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ e $G_{PC_{par}} = \frac{\partial PC_{ij}}{\partial par'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial PC_{ij}}{\partial\alpha\partial\alpha'} & \frac{\partial PC_{ij}}{\partial\alpha\partial\varepsilon'} \\ \frac{\partial PC_{ij}}{\partial\varepsilon\partial\alpha'} & \frac{\partial PC_{ij}}{\partial\varepsilon\partial\varepsilon'} \end{bmatrix}$, temos que sob H_0

$$N(\hat{PC}_{ij} - PC_{ij}) \to \frac{1}{2} \cdot x' \cdot G_{PC_{par}} \cdot x \tag{90}$$

com $x \to N(0, \Omega_{big})$.

Assim devemos aplicar o mesmo procedimento da fatoração de Ω_{alpha} para Ω_{big}, chegando à soma de chi-quadrados.

4.2 Coerência

A coerência (coh) é definida de modo análogo á PC, mas para a matriz inversa H, assim h substitui a e Σ_2 substitui Σ_2^{-1}:

$$coh_{num_{ij}} = \left(h' k_{coh_1}^{ij} h\right)^2 + \left(h' k_{coh_2}^{ij} h\right)^2 \tag{91}$$

$$coh_{den_{ij}} = \left(h' k_{coh_1}^{ii} h\right) \cdot \left(h' k_{coh_1}^{jj} h\right) \tag{92}$$

$$coh_{ij} = \frac{PC_{num_{ij}}}{PC_{den_{ij}}} \tag{93}$$

$$k_{coh_1}^{ij} = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ 0 & l_i \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} l_j & 0 \\ 0 & l_j \end{bmatrix}' \tag{94}$$

$$k_{coh_2}^{ij} = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ 0 & l_i \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} 0 & l_j \\ -l_j & 0 \end{bmatrix}' \tag{95}$$

onde $l_i = I_n \otimes v_i$ seleciona a linha i de h.

O resto das contas é análogo, acrescentando apenas $\frac{\partial h}{\partial a'}$ na regra da cadeia da derivada em relação a α, como para o DTF.

4.3 Densidade espectral

A densidade espectral (SS) é semelhante à coerência, mas sem normalização:

$$SS_{ij} = \left(h' k_{coh_1}^{ij} h\right)^2 + \left(h' k_{coh_2}^{ij} h\right)^2 \tag{96}$$

As contas serão as mesmas, substituindo SS_{den} por 1.