UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA

INGRESO A LA CARRERA DE TÉCNICO SUPERIOR EN PROGRAMACIÓN

CICLO INTRODUCTORIO

MATEMÁTICA INICIAL

A nuestros amigos y compañeros

LIC. JUAN CARLOS MAQUIEIRA
ING. AMADEO AGUSTÍN CICHERO

UNIDAD 1

Cuando un matemático desea ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema de **lógica**.
Esto también alcanza a los profesionales de la informática, los cuales desarrollan los algoritmos necesarios para un programa o sistemas de programas.
La **lógica** de la matemática se utiliza en múltiples campos del saber.
En el desarrollo de cualquier teoría se analizan la veracidad o no de determinadas oraciones.
Definiremos como una **proposición** a una oración para la cuál tiene sentido preguntarse si es **verdadera o falsa.**
Por ejemplo " Eduardo Galeano es un escritor uruguayo " es una proposición , pues tiene sentido preguntarse si Eduardo Galeano es uruguayo o no , como sabemos que Eduardo Galeano es un escritor uruguayo , diremos que esta es una **proposición verdadera.**
Las proposiciones se representan con letras minúsculas (**p , q , r , s , t**).
Para expresar simbólicamente que la proposición anterior es verdadera lo haremos de la siguiente manera.

p = " Eduardo Galeano es un escritor uruguayo " $V_{(p)} = 1$

Expresiones como " ¡ Que bonita tarde ¡ " o " Levántate y haz tus tareas " no son proposiciones, la primera es una exclamación y la segunda es una orden.

Dada una o más proposiciones se pueden obtener otras, a partir de operar con ellas.
Para las distintas operaciones entre proposiciones se utilizan diferentes símbolos que se llaman conectivos.
Veremos los siguientes.

a) **Negación**
b) **Conjunción**
c) **Disyunción (en sentido incluyente y en sentido excluyente)**
d) **Condicional**
e) **Bicondicional**

Negación

Dada una proposición p se obtiene su negación anteponiendo la palabra **no**, es decir diremos **" no p ".**
Se simboliza $-$ p.

Si consideramos la proposición **p = " El oxígeno es un metal "** , la negación de la proposición **p es** :
$-$ p = " No el oxígeno es un metal "

pero usando el lenguaje usual sería

$-$ p = " El oxígeno no es un metal "

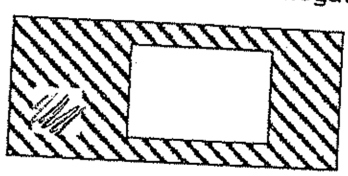
siendo también correcto decir

$-$ p = " No es cierto que el oxígeno sea un metal "

La tabla de valores de verdad de la **negación** es:

p	$-$ p
1	0
0	1

El **diagrama** de Venn de la **negación** es:



Conjunción

Dadas dos proposiciones , p y q , se obtiene una nueva proposición al unir ambas con la conjunción " y ", proposición que leeremos " p y q ".
Se simboliza " $p \wedge q$ ".

Consideremos las proposiciones

p = " El oxígeno es un metal "

q = " El hidrógeno es un gas "

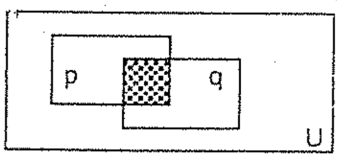
podemos definir la conjunción de ellas diciendo

$p \wedge q$ = " **El oxígeno es un metal y el hidrógeno es un gas** "

La tabla de valores de verdad de la conjunción es

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

El **diagrama** de Venn de la **conjunción** es



Disyunción

El vocablo "o" tiene , en castellano , dos usos que lo hacen ambiguo , por ejemplo podemos decir

" **Cristóbal Colon nació en Argentina o Colón descubrió América** "

" **Será declarado culpable o inocente** "

En ambas tenemos una proposición que surge de unir dos proposiciones con la disyunción " **o** " , pero en ellas el sentido de este " **o** " es distinto por el significado de la proposición que se define.
Por ello , en lógica , se distinguen dos casos de **disyunción : inclusiva y excluyente.**

Disyunción inclusiva

Dadas dos proposiciones , **p y q** , queda definida una nueva proposición al unirlas con el vocablo **o** , que leeremos " **p o q** " y si su sentido es incluyente la simbolizaremos

$$p \vee q$$

De las proposiciones que definimos inicialmente , la proposición

" **Cristóbal Colon nació en Argentina o Colón descubrió América** "

es una disyunción en sentido incluyente que indicamos simbólicamente $p \vee q$, donde

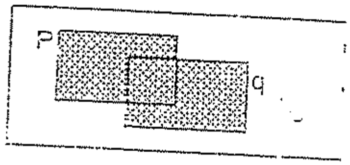
p = " **Cristóbal Colon nació en Argentina** "
q = " **Colón descubrió América** "

La disyunción es en sentido incluyente pues enuncia una alternativa que no excluye que ocurran ambas acciones, es decir que Colón haya nacido en Argentina y que también descubriera América.

La tabla de valores de verdad de la disyunción en sentido incluyente es

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El diagrama de Venn de la disyunción en sentido incluyente es



Disyunción excluyente

Dadas dos proposiciones , **p y q** , queda definida una nueva proposición al unirlas con el vocablo **o** , que leeremos **" p o q "** y si su sentido es excluyente la simbolizaremos

$p \underline{\vee} q$

Un ejemplo de disyunción en sentido excluyente es la proposición enunciada anteriormente.

" Será declarado culpable o inocente "

Es una disyunción en sentido excluyente , pues las alternativas que plantea no pueden ocurrir a la vez.

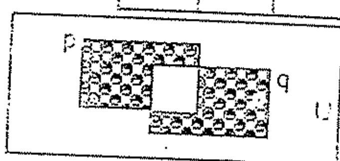
Si llamamos **t = " Será declarado culpable "**
s = "Será declarado inocente "

la expresión simbólica de la **disyunción** en sentido excluyente es $t \underline{\vee} s$

La **tabla de valores de verdad** de la **disyunción** en sentido **excluyente** es

t	s	$t \underline{\vee} s$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El **diagrama de Venn** de la **disyunción** en sentido **excluyente** es



Condicional

Dadas dos proposiciones **p y q** , en ese orden , y las palabras " Si ..... entonces ....." queda definida una nueva proposición que leeremos

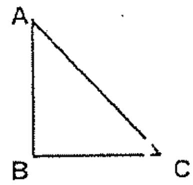
" Si p entonces q " o bien " p implica q "

y llamaremos **condicional**.
El **condicional** se simboliza $p \Rightarrow q$.

En el condicional a la proposición p se le llama **antecedente** y a la proposición q se le llama **consecuente**

Un ejemplo de **condicional** sería

" **Si ABC es un triángulo rectángulo entonces B es un ángulo recto** "



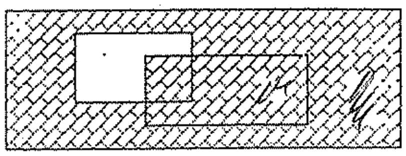
Luego la proposición: p = " **ABC es un triángulo rectángulo** " es el **antecedente** del condicional y la

proposición: q = "**B es un ángulo recto** " define el **consecuente** de este condicional.

La **tabla de valores de verdad** del **condicional** es

p	q	p ⇨ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El **diagrama de Venn** del **condicional** es



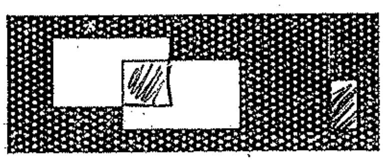
Bicondicional

Dadas dos proposiciones p y q puede definirse una nueva proposición al unir ambas con las palabras " **si y solo si** " esta nueva proposición recibe el nombre de **bicondicional** y se simboliza p ⇔ q .

La **tabla de valores de verdad** del **bicondicional** es

p	q	p ⇔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

El **diagrama de Venn** del condicional es



TAUTOLOGIA
Una proposición compleja o compuesta es una TAUTOLOGIA si y solo sí cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones elementales que la componen , la proposición es **siempre verdadera.**
CONTRADICCION
Una proposición compleja o compuesta es una CONTRADICCION si y solo sí cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones elementales que la componen , la proposición es **siempre falsa.**
CONTINGENCIA
Una proposición compleja o compuesta es una CONTINGENCIA si y solo sí **no** es una tautología y **no** es una contradicción.

Definiciones

Consideremos la sig. proposición

p = " Chile es un país sudamericano "

En la estructura de una proposición o de una oración, puede establecerse un objeto o un sujeto, sobre el que, en la proposición se dice algo.
En este caso esta oración tiene un **sujeto** que es: **Chile** y un **predicado** que es: **es un país sudamericano**
En este caso sobre el **objeto o sujeto, Chile**, se está diciendo algo , que **es un país sudamericano.**
Si en la proposición p anterior reemplazamos **Chile** por **Egipto** también queda definida una nueva proposición, sin importar el valor de verdad de la misma.

q = " **Egipto es un país sudamericano** "

Si reemplazáramos **Chile** por la palabra **camisa**, la oración " **camisa es un país sudamericano** " no es una proposición.
Podríamos reemplazar el objeto o sujeto considerado por un símbolo indeterminado, por ejemplo la letra " **x** " y quedaría la expresión

" **x es un país sudamericano** "

Dado que podemos asignar a **x** un objeto cualquiera la llamaremos **variable**.
En base a todo lo anteriormente enunciado definiremos como **forma proposicional a la expresión que se obtiene al tomar una variable como un objeto o sujeto, al que se le atribuye un predicado.**

Una forma proposicional no es una proposición, pero da lugar a una proposición si reemplazamos la variable por un objeto conveniente.

Las formas proposicionales se indican con la notación: $p_{(x)}$, $q_{(x)}$, étc.

El conjunto de los elementos que transforman una forma proposicional en una proposición recibe el nombre de Dominio. (D)

Aquellos elementos del Dominio que transforman una forma proposicional en una proposición verdadera definen lo que se denomina Conjunto de verdad. (Cv)

En el ejemplo que estamos analizando el Dominio podría ser

D = { son todos los países del mundo }   ó   D = { países de América }

Volvamos al ejemplo : $p_{(x)}$ = " **x es un país sudamericano** "

Si tomamos como dominio al conjunto D = { son todos los países del mundo }

y modificamos la expresión correspondiente a $p_{(x)}$ anteponiendo la frase: " **para todo x** " resulta:

" **para todo x , x es un país sudamericano** "

Esta afirmación equivale a decir que **todos los países del mundo son sudamericanos**, lo cuál de manera evidente resulta una proposición y además falsa.
La frase " **para todo x** " designa a lo que se llama **cuantificador universal** y se simboliza " **x** ".
O sea la frase anterior puede escribirse

" $\forall$x : **x es un país sudamericano** " o bien " $\forall$x : $p_{(x)}$ "

De manera similar, si anteponemos a $p_{(x)}$ la " **existe x tal que** " queda
" **Existe x tal que x es un país sudamericano** "

Esta afirmación equivale a decir que existe algún país en el mundo que es sudamericano, lo que evidentemente resulta una proporción y en este caso verdadera.

La frase " existe x " designa a lo que se llama **cuantificador existencial** y se simboliza " $\exists x$ ".
En este caso la proposición obtenida se escribe

" $\exists$ x / x es un país sudamericano " o bien " $\exists x / p_{(x)}$ "

Una forma proposicional $p_{(x)}$ se transforma en una proposición si:

a) Reemplazamos la variable x de una forma proposicional por un elemento cualquiera del dominio.
b) Si anteponemos a la forma proposicional un cuantificador universal.
c) Si anteponemos a la forma proposicional un cuantificador existencial.

Tanto " $\forall x : p_{(x)}$ " como " $\exists x / p_{(x)}$ " son proposiciones , por lo tanto tienen asociado un **valor de verdad** , pueden ser verdaderas o falsas.

Diremos que la proposición " $\forall x : p_{(x)}$ " **es verdadera sí y solo sí el conjunto de verdad de $p_{(x)}$ es el conjunto Universal o Dominio.**

La proposición " $\forall x : p_{(x)}$ " **es falsa sí el conjunto de verdad de $p_{(x)}$ no es el conjunto Universal o Dominio.**

La proposición " $\exists x / p_{(x)}$ " **es verdadera sí el conjunto de verdad de $p_{(x)}$ tiene al menos un elemento , es decir no es el conjunto vacío.**

La proposición " $\exists x / p_{(x)}$ " **es falsa sí el conjunto de verdad de $p_{(x)}$ no tiene elementos , es decir es el conjunto vacío.**

....

Ejemplo

Expresar en lenguaje lógico las siguientes proposiciones.

a) Hay políticos y además hay corruptos.
b) Hay políticos y además ellos son corruptos.
c) Todos los políticos son corruptos.
d) Todos son políticos y corruptos.
e) No todos los políticos son corruptos.

Resolución

En todas las proposiciones se distinguen dos clases de personas.

P = { x / x es un político }

C = { x / x es un corrupto }

Ambas contenidas en el conjunto universal

U = { x / x es un ser humano }

a) Hay políticos y además hay corruptos.	$[\exists x : P(x)] \wedge [\exists x : C(x)]$
b) Hay políticos y además ellos son corruptos.	$\exists x : [P(x) \wedge C(x)]$
c) Todos los políticos son corruptos.	$\forall x : [P(x) \Rightarrow C(x)]$
d) Todos son políticos y corruptos.	$\forall x : [P(x) \wedge C(x)]$
e) No todos los políticos son corruptos.	$-\{\forall x : [P(x) \Rightarrow C(x)]\}$

....

UNIDAD 1 – Problemas

1) Determine cuál de las siguientes oraciones son proposiciones.

a) En 1990 Argentina se consagró campeón mundial de fútbol.
b) Si $x \in N$ entonces $x + 3$ es un entero positivo.
c) Quince es un número par.
d) ¿ Que hora es ?
e) Tengo un vecino que es alto.
f) Hasta el año 2000 Argentina había ganado 2 mundiales de fútbol.

2) Determine el **valor de verdad** de las siguientes proposiciones.

a) El 25 de Mayo de 1810 se declaró la independencia.
b) El 9 de Julio de 1816 se formó la 1° Junta de Gobierno.
c) Hipólito Irigoyen fue presidente de la República.
d) El 25 de Mayo de 1810 se nombró la 1° Junta de Gobierno patrio.
e) Todos los números impares son primos.
f) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3) Construya la **tabla de verdad** de cada una de las siguiente proposiciones.

a) $p \wedge (-p)$
b) $[p \wedge (-q)] \Rightarrow r$
c) $[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
d) $[p \wedge (-p)] \Rightarrow q$
e) $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
f) $\{[p \wedge (-q)] \Rightarrow r\} \wedge [(p \vee q) \Rightarrow r]$

4) Indicar si las proposiciones del ejercicio anterior son **Tautología , Contradicción o Contingencia**

5) Considerando las siguiente proposiciones

p : " 5 es un número mayor que 3 "
q : " 13 es un número mayor que 15 "

Analizar el **valor de verdad** de las siguientes proposiciones.

a) $(p \wedge q)$
b) $(q \wedge p)$
c) $(-p) \wedge q$
d) $(-p) \wedge (-q)$

6) Determine el **valor de verdad** de la proposición compuesta

$$[(-p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge q)$$

Siendo las proposiciones : **p : " 3 es un número menor que 5 "**
q : " 13 es un número mayor que 15 "
r : " 24 es múltiplo de 6 "

7) Considerando las siguientes proposiciones **p = " Estudiaré Matemática Discreta "**
q = " Iré al cine "
r = " Estoy de buen humor "

Escribir en lenguaje simbólico las siguientes oraciones.

a) Si no estoy de buen humor, entonces iré a un cine.
b) No iré a un cine y estudiaré Matemática Discreta.
c) Si no estoy de buen humor, iré a un cine y no estudiaré Matemática Discreta.
d) Si no estudio Matemática Discreta, entonces no estoy de buen humor.

8) Realizar la tabla de verdad para las proposiciones de los ítems a), b), c) y d) del ejercicio anterior.

9) Si $V(p \Rightarrow q) = 0$, determinar el valor de verdad de $-(p \wedge q) \Rightarrow q$.

10) Considerando los valores de verdad:

$$V[q \veebar s] = 1 \qquad V[-p \Rightarrow r] = 0 \qquad V[-p \Rightarrow (q \wedge -r)] = 0$$

Deducir, si es posible, los valores de verdad de todas las proposiciones que intervienen.

11) Con los valores hallados en el ejercicio 10) calcule el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(q \Rightarrow -r) \wedge (-p \vee s)]$$

12) Sea el conjunto universal U = R (números reales) y las formas proposicionales.

$p_{(x)}$ = " x es solución de $2x^3 - 8x = 0$ " $\qquad$ $q(x)$ = " $4x + 3 = -3$ "

a) Hallar los conjuntos de verdad de las proposiciones: $p_{(x)}$ y $q_{(x)}$

b) Como se modifican los conjuntos de verdad si el conjunto universal es:

I) U = N (naturales) II) U = Z (enteros) III) U = Q (racionales) IV) $U = \{-3/2\}$

¿ Qué conclusión puede sacar ?.

c) Hallar el valor de verdad de: $p_{(-2)}, q_{(2)}, q_{(-2)}$.

d) Hallar el valor de verdad de:

I) $-p_{(2)} \wedge q_{(-2)}$ II) $p_{(2)} \Rightarrow q_{(2)}$ III) $\forall x : q_{(x)}$ IV) $\exists x / q_{(x)}$

e) Si el conjunto universal es $U = \{-3/2\}$, ¿ qué valor de verdad tiene: $\forall x : q_{(x)}$?.

13) Dado el conjunto universal $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ y las formas proposicionales.

a) $p_{(x)}$ = " x es negativo mayor o igual a -4 ".
b) $q_{(x)}$ = " x es mayor que -2 "
c) $r_{(x)}$ = " x^2 es par "

I) Hallar el conjunto de verdad de las siguientes formas proposicionales: $p_{(x)}, q_{(x)}, -q_{(x)}, r_{(x)}$

II) Visualizar los conjuntos en un solo diagrama de Venn.

III) Hallar el conjunto de verdad de las siguientes proposiciones:

A) $r_{(x)} \vee p_{(x)}$ B) $r_{(x)} \veebar p_{(x)}$ C) $r_{(x)} \wedge -p_{(x)}$
D) $r_{(x)} \Rightarrow p_{(x)}$ E) $-[r_{(x)} \Leftrightarrow p_{(x)}]$ F) $[r_{(x)} \wedge p_{(x)}] \Rightarrow -q_{(x)}$

IV) Visualizar los conjuntos (del ítem III) mediante diagramas de Venn.

UNIDAD 1 – Respuestas

1)

a) Proposición
b) Proposición
c) Proposición
d) No es proposición
e) Discútalo con su docente
f) Proposición

2)

a) Falso
b) Falso
c) Verdadero
d) Verdadero
e) Falso
f) Verdadero

3) a)

p	− p
1	0
0	1

b)

p	q	− q	p ∧ (− q)	r	[p ∧ (− q)] ⇨ r
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1

c)

p	q	p	p ∨ q	q ∨ p	(p ∨ q) ∧ (q ∨ p)	p ∨ q	[(p ∨ q) ∧ (q ∨ p)] ⇨ (p ∨ q)
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1

d)

p	− p	p ∧ (− p)	q	[p ∧ (− p)] ⇨ q
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1

e)

p	q	r	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	p	[p ∧ (q ∨ r)] ⇨ p
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1

f)

p	q	−q	p ∧ (−q)	r	[p ∧ (−q)] ⇨ r	p ∨ q	r	(p ∨ q) ⇨ r	{[p ∧ (−q)] ⇨ r} ∧ [(p ∨ q) ⇨ r]
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

4) a) CONTRADICCIÓN b) CONTINGENCIA c) TAUTOLOGIA d) TAUTOLOGIA e) TAUTOLOGIA f) CONTINGENCIA

5) a) $V_{(p \wedge q)} = 0$ b) $V_{(q \wedge p)} = 0$ c) $V_{[-(p) \wedge q]} = 0$ d) $V_{[-(p) \wedge -(q)]} = 0$

6) $V_{\{[-(p) \wedge q] \vee r\} \Rightarrow (p \wedge q)} = 0$

7) a) $(-r) \Rightarrow q$ b) $(-q) \wedge p$ c) $(-r) \Rightarrow [q \wedge (-p)]$ d) $(-p) \Rightarrow (-r)$

8) a)

r	−r	q	(−r) ⇒ q
1	0	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

b)

q	−q	p	(−q) ∧ p
1	0	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

c)

r	−r	q	p	−p	q ∧ (−p)	(−r) ⇒ [q ∧ (−p)]
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1

d)

p	−p	r	−r	(−p) ⇒ (−r)
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

9) $V_{[-(p \wedge q)] \Rightarrow q} = 0$

10) $V_{(r)} = 0$ $V_{(p)} = 0$ $V_{(q)} = 0$ $V_{(s)} = 1$

11) $V_{[q \Rightarrow (-r)] \wedge [(-p) \vee s]} = 1$

12) a) $Cv[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{-3/2\}$

b) I) $Cv[p_{(x)}] = \{0, 2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{\}$ II) $Cv[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{\}$
III) $Cv[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{-3/2\}$ IV) $Cv[p_{(x)}] = \{\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{-3/2\}$

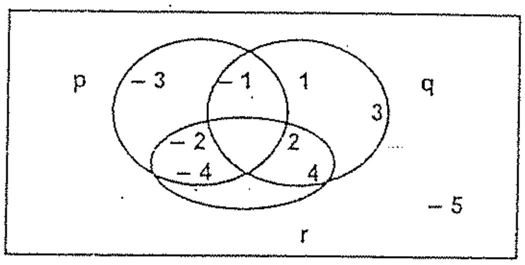
c) $V_{p(-2)} = 1$ $V_{q(2)} = 0$ $V_{q(-2)} = 0$

d) I) $V_{[-p(2) \wedge q(-2)]} = 0$ II) $V_{[p(2) \Rightarrow q(2)]} = 0$
III) $V_{[\forall x : q(x)]} = 0$ IV) $V_{[\exists x / q(x)]} = 1$

e) $V_{[\forall x : q(x)]} = 1$

13) I) $Cv[p_{(x)}] = \{-4, -3, -2, -1\}$
$Cv[q_{(x)}] = \{-1, 1; 2, 3, 4\}$
$Cv[-q_{(x)}] = \{-5, -4, -3, -2\}$
$Cv[r_{(x)}] = \{-4, -2, 2, 4\}$

II)



III) A) $Cv = \{-4, -3, -2, -1, 2, 4\}$
B) $Cv = \{-3, -1, 2, 4\}$
C) $Cv = \{2, 4\}$
D) $Cv = \{-4, -3, -2, -1, 1, 3\}$
E) $Cv = \{-3, -1, 2, 4\}$
F) $Cv = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

UNIDAD 2

SISTEMAS NUMÉRICOS

DEFINICIONES

Los sistemas numéricos se clasifican en dos grandes grupos: "**no posicionales**" y "**posicionales**".

No posicionales: cada símbolo tiene un significado particular, independiente de su ubicación.

Ejemplo 1:

Si con este símbolo (I) represento un día, para representar los días que tiene una semana tendría siete veces ese símbolo: **IIIIIII**.
Se pueden imaginar lo incomodo que sería representar los días que tiene una década.

Ejemplo 2:

Los romanos utilizaron un sistema de signos de valores crecientes: I , V , X , L , C , D , M , etc que se agrupaban de derecha a izquierda, sumándose o restándosé entre sí, según siguieran o no el orden creciente:

CXVII = cien + diez + cinco + uno + uno
MCMV = mil + (mil – cien) + cinco

Posicionales: fueron desarrollados por pueblos orientales e indoamericanos (Mayas) consisten en un conjunto limitado y constante de símbolos, entre los cuales se encuentra el "**cero**" para indicar ausencia de elementos.

Cada símbolo representa dos cosas:
a) El número de unidades considerado aisladamente.
b) Según la posición que ocupa en el grupo de caracteres (del que forma parte) tiene un significado o peso distinto.

Nota: los caracteres se denominan "**dígitos**".
En general será:

Dado un número $b \in N \wedge b > 1$, llamado base del sistema de numeración, todo número n se representa como la combinación de potencias sucesivas de b con coeficientes, a, que toman valores comprendidos entre **0 y b – 1** .

A partir de esto el número:

$$n = a_k \; a_{k-1} \; a_{k-2} \ldots\ldots\ldots a_2 \; a_1 \; a_0 \, , \, a_{-1} \; a_{-2} \ldots\ldots$$

Se podrá escribir:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \ldots\ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} \ldots$$

Pregunta: ¿cuántos dígitos tiene el número "**n**" recientemente escrito?.

....

Veamos esto aplicado en el **sistema decimal**: ($10 \in N \wedge 10 > 1$)

Diez dígitos: **0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9** . (valores comprendidos entre $0 \wedge b - 1 = 10 - 1 = 9$)

Ejemplos:

a) Año de la ley universitaria: **1918**

$$1 * 10^3 + 9 * 10^2 + 1 * 10^1 + 8 * 10^0 = 1000 + 900 + 10 + 8 = 1918$$

b) Cotización del dólar: **3,09**

$$3 * 10^0 + 0 * 10^{-1} + 9 * 10^{-2} = 3 + 0 + 0{,}09 = 3{,}09$$

c) Longitud de una hormiga: **0,57 cm**

$$0 * 10^0 + 5 * 10^{-1} + 7 * 10^{-2} = 0 + 0{,}5 + 0{,}07 = 0{,}57$$

d) Número π : 3,1415926536 .....

$3 * 10^{0} + 1 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2} + 1 * 10^{-3} + 5 * 10^{-4} + 9 * 10^{-5} + \ldots\ldots = $

$= 3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 + 0,0005 + 0,00009 + \ldots\ldots = \pi$

Nota: Las computadoras usan los números binarios para seleccionar posiciones de memoria. Cada posición se asigna a un único número denominado **dirección**. Por ejemplo, el microprocesador Pentium tiene 32 líneas de dirección que pueden seleccionar 2^{32} (4 294 967 296) posiciones unívocas .

Nota: Con memorias de computadora en el rango de los gigabytes es mucho mas sencillo expresar un código de 32 bits utilizando ocho dígitos hexadecimales.

Tabla de equivalencias

Decimal	Binario	Octal	Hexadecimal
0	base 0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
base 4	100	base 4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	base 7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15
22	10110	26	16
23	10111	27	17
24	11000	30	18
25	11001	31	19
26	11010	32	1A
27	11011	33	1B
28	11100	34	1C
29	11101	35	1D
30	11110	36	1E

Nota: cuando se trabaja simultáneamente con mas de un sistema es conveniente individualizar el número con un subíndice.

Ejemplo:

El número 10 (uno Λ cero) en sistema decimal: $10_{(10}$ ó $10_{(D}$

El número 10 (uno Λ cero) en sistema binario: $10_{(2}$ ó $10_{(B}$

El número 10 (uno Λ cero) en sistema octal: $10_{(8}$ ó $10_{(O}$

El número 10 (uno Λ cero) en sistema hexadecimal: $10_{(16}$ ó $10_{(H}$

¿Cómo pasar de un sistema a otro?

1)

$D \rightarrow B, O, H$
- parte entera: divisiones sucesivas por la base (se toman los restos)
- parte fraccionaria: productos sucesivos por la base (se toma la parte entera)

Ejemplo:

El número $2{,}625_{(D}$
- en binario es: **$10{,}101_{(B}$**
- en octal es: **$2{,}5_{(O}$**
- en hexa es: **$2{,}10_{(H}$**

Cálculo:

$$2{,}625_{(D} = \left\{ \begin{array}{lll} \text{parte entera: } 2 / 2 \text{ dá cociente: } 1 \wedge \text{ resto: } 0 & & \\ \text{parte fraccionaria: } 0{,}625 * 2 = 1{,}250 & \text{parte entera: } 1 & \\ \qquad 0{,}250 * 2 = 0{,}5 & \text{parte entera: } 0 & \\ \qquad 0{,}5 * 2 = 1 & \text{parte entera: } 1 & \end{array} \right\} = 10{,}101_{(B}$$

$$2{,}625_{(D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{parte entera: } 2 \text{ por ser } 2 < 8 \\ \text{parte fraccionaria: } 0{,}625 * 8 = 5{,}0 \text{ parte entera: } 5 \end{array} \right\} \quad 2{,}5_{(O}$$

$$2{,}625_{(D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{parte entera: } 2 \text{ por ser } 2 < 16 \\ \text{parte fraccionaria: } 0{,}625 * 16 = 10{,}0 \text{ parte entera: } 10 \end{array} \right\} \quad 2{,}10_{(H}$$

---

2)

- $B \rightarrow D$: suma de productos [dígito * potencias (de 2) crecientes (parte entera) ó decrecientes (parte fraccionaria)].
- $B \rightarrow O$: grupos de tres dígitos binarios determinan un dígito octal.
- $B \rightarrow H$: grupos de cuatro dígitos binarios determinan un dígito hexa.

Ejemplo:

El número $10{,}1_{(B}$
- en decimal es: **$2{,}5_{(D}$**
- en octal es: **$2{,}4_{(O}$**
- en hexa es: **$2{,}8_{(H}$**

Cálculo:

$$10{,}1_{(B} = 1 * 2^{1} + 0 * 2^{0} + 1 * 2^{-1} = 2 + 0 + 0{,}5 = 2{,}5\,(D$$
$$10{,}1_{(B} = 010\,,\,100_{(B} = 2{,}4_{(O}$$
$$10{,}1_{(B} = 0010\,,\,1000_{(B} = 2{,}8_{(H}$$

---

3)

O → D: suma de productos [dígito * potencias (de 8) crecientes (parte entera) ó decrecientes (parte fraccionaria)].

O → B: un dígito octal determina un grupo de tres dígitos binarios .

Ejemplo:

El número $12,\overline{3146}_{(O}$ → en decimal es: $\approx 10,4_{(D}$

→ en binario es: 001 010 , 011 001 100 110 $_{(B}$

Cálculo:

$$\overline{12,3146}_{(O} = 1*8^{1} + 2*8^{0} + 3*8^{-1} + 1*8^{-2} + 4*8^{-3} + 6*8^{-4} =$$
$$= 8 + 2 + 0,375 + 0,015 + 0,007 + 0,001 = 10,398_{(D} \approx 10,4_{(D}$$

$\overline{12,3146}_{(O}$ = 001 010 , 011 001 100 110 $_{(B}$

4)

H → D: suma de productos [dígito * potencias (de 16) crecientes (parte entera) ó decrecientes (parte fraccionaria)].

H → B: un dígito hexa determina un grupo de cuatro dígitos binarios .

Ejemplo:

El número $DB_{(H}$ → en decimal es: $219_{(D}$

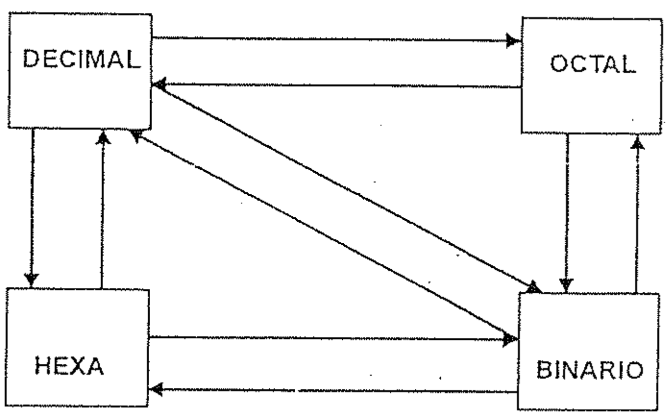
→ en binario es: 1101 1011 $_{(B}$

Cálculo:

$$DB_{(H} = D*16^{1} + B*16^{0} = 13*16^{1} + 11*16^{0} = 208 + 11 = 219_{(D}$$

$DB_{(H}$ = 1101 1011 $_{(B}$

Para completar



a) / 2 y * 2
b) / 8 y * 8
c) / 16 y * 16
d) 2^n
e) 8^n
f) 16^n
g) grupos de 3
h) grupos de 4

Operaciones en el sistema binario

Suma

Las siguientes son las reglas para sumar en binario

0 + 0 = 0	suma 0 ∧ acarreo 0
0 + 1 = 1	suma 0 ∧ acarreo 0
1 + 0 = 1	suma 0 ∧ acarreo 0
1 + 1 = 10	suma 0 ∧ acarreo 1

Ejemplo:

Los binarios a sumar son: **1011 + 1011**

```
   1 1 1   <---- acarreos
   1 0 1 1
   1 0 1 1
 ---------
 1 0 1 1 0
```

Resta

Las siguientes son las reglas para restar en binario

0 – 0 = 0
1 – 1 = 0
1 – 0 = 1
0 – 1 = 1

ó 10 – 1 = 1 con acarreo negativo de 1

Ejemplo sin acarreo:

Los binarios a restar son: **11 – 01**

```
 1 1
 0 1
 ---
 1 0
```

Ejemplo con acarreo:

Los binarios a restar son: **1010 – 0111**

```
1  0  1  0
0  1  1  1
0  0  1  1
             10 – 1 = 1
             10 – 1 = 1
             1 – 1 = 0
             0 – 0 = 0
```

Los binarios a restar son: **1110 0101 – 1001 1111**

```
 1  1  0  1  1  10
 1  1  1  0  0  0  10
 1  1  1  0  0  1  0  1
 1  0  0  1  1  1  1  1
 ----------------------
 0  1  0  0  0  1  1  0
```

Multiplicación

Las siguientes son las reglas para multiplicar en binario

0 * 0 = 0
0 * 1 = 0
1 * 0 = 0
1 * 1 = 1

Ejemplo:

Los binarios a multiplicar son: **111 * 101**

```
        1 1 1
        1 0 1
        -----
        1 1 1
      0 0 0
    1 1 1
  -----------
  1 0 0 0 1 1
```

Operaciones en el sistema octal

Suma

Ejemplo:

Los octales a sumar son: 23651 + 17043

$$
\begin{array}{ccccc}
{\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & \leftarrow \text{acarreos} \\
2 & 3 & 6 & 5 & 1 \\
1 & 7 & 0 & 4 & 3 \\
\hline
4 & 2 & 7 & 1 & 4
\end{array}
$$

Resta

Ejemplo:

Los octales a restar son: 314 – 67

$$
\begin{array}{ccc}
3 & 1 & 4 \\
 & 6 & 7 \\
\hline
2 & 2 & 5
\end{array}
$$

$14 - 7 = 5_{(O}$

$10 - 6 = 2_{(O}$

Operaciones en el sistema hexadecimal

Suma

Las siguientes son las reglas para sumar en hexadecimal:

- En cualquier columna dada de una suma, pensar en los dígitos hexadecimales en términos de su valor decimal (ver tabla de equivalencias).
- Si la suma de los dos dígitos es $15_{(D}$ o menor, reducir al dígito hexadecimal correspondiente.
- Si la suma de los dígitos es mayor que $15_{(D}$, hay que reducir la suma que excede de $16_{(D}$, y pasar el acarreo de 1 a la siguiente columna.

Ejemplo:

Los hexadecimales a sumar son: DF + AC

$$
\begin{array}{ccc}
 & D & F \\
 & A & C \\
\hline
1 & 8 & B
\end{array}
$$

columna derecha: $\begin{cases} F_{(H} + C_{(H} = 15_{(D} + 12_{(D} = 27_{(D} & (27 > 15) \\ 27_{(D} - 16_{(D} = 11_{(D} = B_{(H} & (\text{con acarreo de } 1) \end{cases}$

columna izquierda: $\begin{cases} D_{(H} + A_{(H} + 1_{(H} = 13_{(D} + 10_{(D} + 1_{(D} = 24_{(D} & (24 > 15) \\ 24_{(D} - 16_{(D} = 8_{(D} = 8_{(H} & (\text{con acarreo de } 1) \end{cases}$

Resta

Ejemplo:

Los hexadecimales a restar son: 100 – FF

$$
\begin{array}{ccc}
 & {\scriptstyle F} & {\scriptstyle 10} \\
1 & 0 & 0 \\
 & F & F \\
\hline
 & & 1
\end{array}
$$

Otra forma de realizar las operaciones

Operación de suma

¿ Cuándo aparece acarreo ? : Cuándo aparece un número que no pertenece a la base.

¿ Cuánto acarreo ? : Siempre acarreo 1.

¿ Qué número pongo en la columna ? : La diferencia entre la suma y la base.

Ejemplos

Decimal

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 1\ 9 \\ +\quad 5 \\ \hline 2\ 4 \end{array}$$

(9 + 5 = 14 . 14 ∉ a la base ∧ 14 − 10 = 4 ∴ va un 4 con acarreo de 1)

Binario

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 1\ 1} \\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

(1 + 1 = 2 . 2 ∉ a la base ∧ 2 − 2 = 0 ∴ va un 0 con acarreo de 1)

Octal

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 5\ 6 \\ +\quad 3 \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

(6 + 3 = 9 . 9 ∉ a la base ∧ 9 − 8 = 1 ∴ va un 1 con acarreo de 1)

Hexa

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 9\ 9 \\ +\quad 9 \\ \hline A\ 2 \end{array}$$

(9 + 9 = 18 . 18 ∉ a la base ∧ 18 − 16 = 2 ∴ va un 2 con acarreo de 1)

(el 10 ∉ a la base , el 10 ≡ A)

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 8\ 7 \\ +\ 4\ C \\ \hline D\ 3 \end{array}$$

(C ≡ 12 ∧ 7 + 12 = 19 . 19 ∉ a la base ∧ 19 − 16 = 3 ∴ va un 3 con acarreo de 1)

(1 + 8 + 4 = 13 ∧ 13 ≡ D)

Operación de resta

¿ Cuándo no se puede ? : Cuándo el digito del minuendo es < que el digito del sustraendo.

Ejemplos

Decimal

$$\begin{array}{rr} {}^{8}9 & {}^{11}1 \\ - & 5 \\ \hline 8 & 6 \end{array}$$

($1 - 5 = -4 \wedge -4 \notin$ a la base $\therefore 10 - 4 = 6$, pongo 6)

Binario

$$\begin{array}{rrr} {}^{0}1 & {}^{10}0 & 1 \\ - & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

($1 - 1 = 0 \wedge 0 \in$ a la base $\therefore$ pongo 0)

($0 - 1 = -1 \wedge -1 \notin$ a la base $\therefore 2 - 1 = 1$, pongo 1)

Octal

$$\begin{array}{rr} {}^{5}6 & {}^{11}1 \\ - & 7 \\ \hline 5 & 2 \end{array}$$

($1 - 7 = -6 \wedge -6 \notin$ a la base $\therefore 8 - 6 = 2$, pongo 2)

$$\begin{array}{rr} {}^{5}6 & 0 \\ -3 & 4 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

($0 - 4 = -4 \wedge -4 \notin$ a la base $\therefore 8 - 4 = 4$, pongo 4)

($5 - 3 = 2 \wedge 2 \in$ a la base $\therefore$ pongo 2)

Hexa

$$\begin{array}{rr} {}^{5}6 & 1 \\ - & 7 \\ \hline 5 & A \end{array}$$

($1 - 7 = -6 \wedge -6 \notin$ a la base $\therefore 16 - 6 = 10 \wedge 10 \equiv A$, pongo A)

$$\begin{array}{rrr} {}^{E}F & {}^{9}A & A \\ -A & F & F \\ \hline 4 & A & B \end{array}$$

($A - F \equiv 10 - 15 = -5 \wedge -5 \notin$ a la base $\therefore 16 - 5 = 11 \wedge 11 \equiv B$, pongo B)

($9 - F \equiv 9 - 15 = -6 \wedge -6 \notin$ a la base $\therefore 16 - 6 = 10 \wedge 10 \equiv A$, pongo A)

($E - A \equiv 14 - 10 = 4 \wedge 4 \in$ a la base $\therefore$ pongo 4)

UNIDAD 2 - Problemas

Pasaje entre sistemas

1) Dados los siguientes números decimales, pasarlos a:

a) 55 b) 48 c) 204 d) 10,4 e) 83,45 f) 2131,48 g) 376,4303

A) Binario B) Octal C) Hexadecimal

2) Dados los siguientes números binarios, pasarlos a:

a) 1011 b) 1 1101 c) 11 0011,11 d) 10 1010,01 e) 100 0001,111 f) 111 1111, 1111 1

A) Decimal B) Octal C) Hexadecimal

3) Dados los siguientes números octales, pasarlos a:

a) 13 b) 57 c) 321 d) 4653 e) 13271 f) 45600 g) 100213

A) Decimal B) Binario

4) Dados los siguientes números hexadecimales, pasarlos a:

a) 38 b) 59 c) 7E d) A14 e) 4100 f) FB17 g) 8A9D

A) Decimal B) Binario

Operaciones en el sistema binario

Suma

a) 11 + 01 b) 10 + 10 c) 101 + 11 d) 111 + 110 e) 1001 + 101 f) 10 1011,101 + 11 1100,01

Resta

a) 101 – 100 b) 110 – 101 c) 1110 – 11 d) 1100 – 1001 e) 1 1010 – 1 0111

Multiplicación

a) 11 * 11 b) 100 * 10 c) 1001 * 110 d) 1101 * 1101 e) 1110 * 1101

Operaciones en el sistema octal

Suma

a) 3 + 3 b) 2 + 6 c) 3701 + 2620

Resta

a) 7 – 4 b) 23 – 16 c) 3701 – 2620

Operaciones en el sistema hexadecimal

Suma

a) 37 + 29 b) A0 + 6B c) FF + BB

Resta

a) 51 – 40 b) C8 – 3A c) FD – 88

Problemas

1) A un profesor de programación le piden que dé la información de la cantidad de alumnos que hay en su clase.
El profesor dice: hay **100** alumnos de los cuales **32** son **mujeres** y **24** son **varones**.
¿En qué sistema de numeración dio la información?.

2) Marcar con una **x** la respuesta que considere correcta:

a) $5655_{(O}$ = $985_{(H}$ $9F5_{(H}$ $BD5_{(H}$ $BAD_{(H}$ $DBA_{(H}$ Ninguna de las anteriores

b) $2550276_{(O}$ = $AD0BE_{(H}$ $2FD7A_{(H}$ $EB0DA_{(H}$ $708798_{(H}$ Ninguna de las anteriores

UNIDAD 2 – Respuestas

Pasaje entre sistemas

1)
- A) Binario a) 11 0111 b) 11 0000 c) 1100 1100 d) 1010 , $\overline{0110}$ e) 101 0011 , 01 1100
  f) 1000 0101 0011 , 0111 10 g) 1 0111 1000 , 0110 11
- B) Octal a) 67 b) 60 c) 314 d) 12 , $\overline{3146}$ e) 123 , 3 $\overline{4631}$ f) 4123 , 365605 g) 570 , 334240
- C) Hexadecimal a) 37 b) 30 c) CC d) A , $\overline{6}$ e) 53 , 7 $\overline{3}$ f) 853 , $\overline{7AE14}$ g) 178 , 6E2823

---

2)
- A) Decimal a) 11 b) 29 c) 51 , 75 d) 42 , 25 e) 65 , 875 f) 127 , 96875
- B) Octal a) 13 b) 35 c) 63 , 6 d) 52 , 2 e) 101 , 7 f) 177 , 76
- C) Hexadecimal a) B b) 1D c) 33 , C d) 2A , 4 e) 41 , E f) 7F , F8

---

3)
- A) Decimal a) 11 b) 47 c) 209 d) 2475 e) 5817 f) 19328 g) 32907
- B) Binario a) 00 1011 b) 10 1111 c) 0 1101 0001 d) 1001 1010 1011 e) 001 0110 1011 1001
  f) 100 1011 1000 0000 g) 00 1000 0000 1000 1011

---

4)
- A) Decimal a) 56 b) 89 c) 126 d) 2580 e) 16640 f) 64279 g) 35485
- B) Binario a) 0011 1000 b) 0101 1001 c) 0111 1110 d) 1010 00010100
  e) 0100 0001 0000 0000 f) 1111 1011 0001 0111 g) 1000 1010 1001 1101

Operaciones en el sistema binario

Suma a) 100 b) 100 c) 1000 d) 1101 e) 1110 f) 110 0111 , 111

Resta a) 001 b) 001 c) 1011 d) 0011 e) 0 0011

Multiplicación a) 1001 b) 1000 c) 11 0110 d) 1010 1001 e) 1011 0110

Operaciones en el sistema octal

Suma a) 6 b) 10 c) 6521

Resta a) 3 b) 5 c) 1061

Operaciones en el sistema hexadecimal

Suma a) 60 b) 10B c) 1BA

Resta a) B b) 8E c) 75

Problemas

1) El sistema de numeración usado es con base 6.

2) a) $BAD_{(H}$ b) $AD0BE_{(H}$

Unidad 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Comenzaremos con el estudio de las llamadas ecuaciones lineales o de 1° grado.
Estas son ecuaciones del tipo polinómicas, o sea.

$$P(x) = 0$$

Donde $P(x)$ es en este caso un polinomio de 1° grado, la igualdad recibe el nombre de **ecuación entera de variable o incógnita** x.

Si el grado del polinomio $P(x)$ es 1, la ecuación se dice **lineal o de 1° grado.**

Resolver una ecuación $P(x) = 0$ es hallar todos los números reales que la verifican.
Tal conjunto se llama **Conjunto Solución** de la ecuación, y sus elementos son las **raíces o soluciones** de dicha ecuación.
De acuerdo a su conjunto solución clasificamos a las ecuaciones de la siguiente forma:

a) **Compatibles Determinadas,** cuando la solución es única.

b) **Compatibles Indeterminadas,** cuando tiene infinitas soluciones.

c) **Incompatibles,** cuando no tienen solución o el conjunto solución no tiene elementos.

Una ecuación de 1° grado en x es del tipo:

$$ax + b = 0$$

a) Si $a \neq 0$, entonces $x = -\dfrac{b}{a}$, en este caso la solución es única, o sea **Compatible Determinada.**

b) Si $a = b = 0$, es $0\,x = 0$, hay infinitos valores de x que verifican la igualdad, se dice que la ecuación es **Compatible Indeterminada.**

c) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, es $0x = b$, o sea no hay valores de que verifiquen la igualdad, la ecuación es **Incompatible.**

Para resolver una ecuación hagamos hincapié en algunos conceptos.
Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo **conjunto solución.**

Ejemplo

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$4x + 2 = 0$

Ya que todas ellas admiten como única solución a $x = -\dfrac{1}{2}$

En particular, esta solución es más evidente en la ecuación 2 (x + 1 / 2) = 0

Para hallar el conjunto solución de una ecuación lineal o de 1° grado, transformamos a ésta en otra ecuación equivalente más sencilla , en la cuál sea más simple obtener el valor que la verifica.

Para hacer esto hay una serie de operaciones permitidas, estas son:

Sumar o restar un mismo número a los dos miembros de una ecuación.
Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.

Veamos ahora algunos problemas que se pueden resolver planteando una ecuación lineal o de 1° grado.

Ejemplo

Ramiro recibió **$ 435** una semana por trabajar **52 horas.**
En su trabajo pagan **1,5** veces cada **hora extra** por encima de **40** horas de trabajo.
¿ Cuál es el salario por hora que recibe Ramiro ?

Antes de intentar resolver el problema, léalo nuevamente y trate de identificar la incógnita del mismo.

Llamaremos $x =$ **" Salario por hora de Ramiro "**

Hasta la hora **40** el salario por hora de Ramiro es x , después de las **40 horas**, cada horas tiene un valor de $1,5x$.
$40x + 12.1,5x = 435$ es la ecuación que nos permitirá resolver el problema.

Para resolver la ecuación planteada, al separar en términos en el 1° miembro, todavía hay un producto que es necesario resolver antes de realizar la suma.

$40x + 18x = 435$

$58x = 435$

Una vez que hemos llegado aquí, para despejar la incógnita hemos dividido ambos miembros por 58.

$$\frac{58x}{58} = \frac{435}{58}$$

$$x = \frac{435}{58}$$

$x = 7,5$
Una vez resuelta la ecuación vuelvo al problema para recordar la pregunta que nos hacían y poder responderla.

El salario por hora de Ramiro es de $ 7.5.

Veamos otro ejemplo.

Para comprar un traje y un abrigo gasta un señor **300 €**. ¿Cuánto le costó el traje si pagó por él **20 €** menos que por el abrigo ?.

En este problema quizás para resolverlo estemos tentados en asignar dos incógnitas, pero si leemos un par de veces detenidamente el texto vemos que lo que se pagó por el traje tiene **relación** con lo que se pagó por el abrigo, **20 €** menos.

Llamaremos $x =$ **" Precio pagado por el abrigo "** .

De lo anterior surge que (x - 20) es el precio pagado por el traje.

Por lo tanto la ecuación resultaría:

$x + (x - 20) = 300$

$x + x - 20 = 300$

$2x - 20 = 300$

Para despejar la incógnita sumaremos a ambos miembros de la igualdad 20.

$2x - 20 + 20 = 300 + 20$

$2x = 320$

$$\frac{2x}{2} = \frac{320}{2}$$

O sea por el abrigo pagó 160 € y por el traje 140 €.

....

Es muy probable que cuando resolvemos una ecuación no apliquemos las operaciones elementales para despejar la incógnita, pero es necesario saber que las reglas de despeje utilizadas salen de hacer una simplificación de las operaciones elementales.

....

Agregamos algunas ecuaciones y algunos problemas para aplicar los conceptos explicados anteriormente.

Resolver las siguientes ecuaciones lineales

1)……$3x+1=1$

2)……$3x-2=x+1$

3)……$4(x+1)-2x=x$

4)……$-5(x+5)-x=-3x+2x$

5)……$\frac{(2x+8)}{2}-x=4$

6)……$2x+a=2+3x$

7) …… $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-1}{4}$

8) …… $3x-2\sqrt{2}=2x+\sqrt{2}$

9) …… $(x+2).(x-3)-(x+1)^2=0$

10) …… $a+b=\frac{a-1}{a}x$

11) …… $\frac{3x-1}{4}+\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{8}$

12) …… $(x-1)^2=(x+1).(x-1)$

13) …… $(t-2)^2=(1+t).(t-3)$

14) …… $\frac{x+a}{5}+\frac{x-1}{}=1$

15) …… $a-b=\frac{a+1}{a}x$

16) $\ldots 2(x+2)-5(2x-3)=3$ 17) No existe

18) $\ldots(3x-3)^2-(2x-7)=(3x-5).(3x+5)$

19) $\ldots(x-7)^2-(1+x)^2=2(3x-4)$

20) $\ldots\frac{2x+13}{3}-\frac{6-x}{4}=1$

21) $\ldots x-\frac{2+x}{6}=\frac{1}{2}$

22) $\ldots\frac{8x-9}{100}+\frac{7x-2}{25}-\frac{3+2x}{30}=\frac{x}{750}$

23) $\ldots\frac{8-2x}{3}+\frac{5-2x}{7}+4=5-(8x-6)+\frac{1}{2}$

24) $\ldots 6+(2z-5)-(3z+4)-\frac{z+1}{2}=2$

25) $\ldots 6x-(2x-1).(2x+1)=2-(3+2x)^2$

26) $\ldots\frac{4-9x}{5}-\frac{2(3-4x)}{2}-1=x$

27) $\ldots\frac{9z-9}{10}+1=z-\frac{3z-5}{2}+\frac{1}{\ }$

28) $\ldots 33{,}7-(1{,}5x+2{,}3)=3{,}4x-(0{,}4-5{,}7x)$

29) $\ldots\frac{4}{3}\frac{2(5-2x)}{3}-x=\frac{1}{2}-3x$

30) $\ldots 4-2(x+7)-(3x+5)=2x+(4x-9+3x)-(x-3)$

Resolver los siguientes problemas planteando una ecuación lineal o de 1° grado.

1. Hallar un número tal que su triple menos 5 sea igual a su doble más 2.

2. El triple de un número es igual al quíntuplo del mismo menos 20.
¿Cuál es este número ?.

3. ¿Cuál es el número que disminuido de 12 da lo mismo que el número disminuido en 36 ?.

4. ¿Cuál es el número cuya tercera parte más 7 da 29 ?.

5. Hallar un número tal que sumando su mitad y su tercera parte más 25 dé por suma 320.

6. Añadiendo 5 unidades al doble de, un número más los 3 / 4 del mismo, da por resultado el doble de dicho número más 2.
¿Cuál es el número ?.

7. Se reparten 170 € entre 3 personas de forma que la segunda recibe 25 € más que la primera y la tercera tanto como las otras dos juntas.
¿Cuánto ha recibido cada una ?.

8. Se desea distribuir una suma de 400 $ entre 3 personas de modo que la primera reciba 60 $ más que la segunda y ésta 20 $ más que la tercera.
¿Cuánto tocará a cada una ?.

9. Dos personas tienen juntas 2.500 u$s; una de ellas tiene 500 u$s más que la otra.
¿Cuánto tiene cada una?.

10. Unas gafas con su funda valen juntos 30 € Las gafas cuestan 20 € más que la funda.
¿Cuánto vale cada cosa ?.

11. En una familia la suma de las edades de los 4 hijos es 28 años.
¿Cuál es la edad de cada uno si el mayor tiene 4 años más que el 2°, el segundo 2 años más que el 3° y éste 4 más que el pequeño ?.

12. La suma de 4 números impares consecutivos es 112.
¿Cuáles son dichos números?

13. Se reparte una herencia de 29.000 $ entre 3 hermanos de modo que el 2° recibe el doble de lo que recibe el 3° y el mayor recibe tanto como los otros dos juntos menos 1.000 $.
¿Cuánto recibe cada uno ?.

14. La guarnición de un cuartel se compone de 1.000 hombres.
Sabiendo que hay triple número de soldados de caballería que artilleros y el doble de infantería que de caballería, se pregunta cuántos soldados hay de cada clase.

15. Hállese un número tal que si se le quitan 10 unidades queda el doble que si de dicho número se quitan 80.

16. El precio de venta de un televisor, después de un descuento del 25 %, es de 3.800 $.
¿ Cuál es el precio antes del descuento ?.

17. Una empresa de computación ha reducido el precio de una computadora en 15 %.
¿ Cuál es el precio original de la computadora si el precio de oferta es 1.275 $?.

18. Un taller producirá 126 artículos diarios.
Como resultado del perfeccionamiento técnico su producción diaria aumentó hasta 189 artículos.
¿ En qué tanto por ciento se incrementó el rendimiento ?.

Respuestas de ecuaciones lineales

1) 0
2) 3 / 2
3) – 4
4) – 5
5) Se verifica para cualquier número real.
6) a – 2
7) – 3 / 4
8) $3\sqrt{2}$
9) – 7 / 3
10) $(a^2 + a\,b) / (a - 1)$
11) – 1 / 3
12) 1
13) 7 / 2
14) (16 – 3 a) / 4
15) $(a^2 - a\,b) / (a + 1)$
16) 2
17) No existe
18) 41 / 20
19) 28 / 11
20) – 2
21) 1
22) 135 / 146
23) 173 / 296
24) – 11 / 3
25) – 4 / 9
26) 8 / 3
27) 53 / 28
28) 3
29) – 71 / 4
30) – 9 / 13

Respuesta de los problemas de ecuaciones lineales.

1) 7
2) 10
3) 24
4) 66
5) 354
6) – 2
7) 30 , 55 , 85
8) 100 , 120 ,180
9) 1000 , 1500
10) 25 , 5
11) 2, 6, 8, 12
12) 25, 27, 29, 31
13) (14000, 10000, 5000) $
14) 100, 300, 600
15) 150
16) 5066,66 $
17) 1500 $
18) 50 %

Ecuaciones de segundo grado

La expresión $P(x)=0$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado 2 recibe el nombre de **ecuación de segundo grado con una incógnita.**

Supondremos que los coeficientes del polinomio $P(x)$ son números reales.
La ecuación podrá escribirse:

$$ax^2+bx+c=0 \text{ donde } a\neq 0$$

Las ecuaciones de segundo grado también reciben el nombre de ecuaciones cuadráticas.

a es el coeficiente del término cuadrático o de segundo grado , b es el coeficiente del término lineal o de primer grado y c es el término independiente.

Este tipo de ecuaciones pueden clasificarse como **completas** o **incompletas.**
Se dice que es **completa** cuando b y c **son distintos de cero.**
Se dice que es **incompleta** cuando b o c **son cero** al mismo tiempo, o cuando sólo una de ellas es cero, sea b o c .
Para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, sea la ecuación completa o incompleta se puede aplicar la fórmula.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cuando la ecuación es incompleta se puede resolver sin la necesidad de aplicar la fórmula anterior.
Se presentan tres situaciones posibles.

a) Si $b=c=0$ entonces la ecuación es $ax^2=0$
b) Si $b=0$ entonces la ecuación es $ax^2+c=0$
c) Si $c=0$ entonces la ecuación es $ax^2+bx=0$

Para el caso a) la ecuación se verifica para un único valor $x=0$, por lo tanto este valor es la solución de la ecuación.

Observe en este caso, que si dividimos ambos miembros por a , esto quedaría.

$$\frac{ax^2}{a}=\frac{0}{a} \quad \text{por lo tanto } x^2=0 \quad \text{lo que } \Rightarrow x=0$$

Para el caso b) resolvemos de la siguiente manera:

$$ax^2+c-c=0-c$$

$$ax^2=-c$$

$$\frac{ax^2}{a}=\frac{-c}{a}$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{y} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Observe que hay dos soluciones posibles, siempre y cuando y tengan signos opuestos, ya que para poder resolver la raíz cuadrada, el radicando debe ser positivo o nulo.

Para el caso c) lo que se hace es sacar factor común x quedando la ecuación.

$x(ac + b) = 0$

Ahora para que un producto dé cero uno de los dos factores debe ser cero.

$x = 0 \quad \text{y} \quad ax + b = 0$

En consecuencia las soluciones son:

$x_1 = 0$ y

$ax + b - b = -b$

$ax = -b$

$\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$

$x_2 = -\frac{b}{a}$

Agregamos algunas ecuaciones y algunos problemas para aplicar los conceptos explicados anteriormente.

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1)... $2x^2 - 3x - 2 = 0$

2)... $-7x^2 + 8x = 0$

3).... $x^2 = 4x$

4)... $4x^2 = -1$

5)... $2.(x-1)^2 - 8 = 0$

6)...$(3-x)^2 + (2-x)^2 = 0$

7)... $x^2 + 10x + 15 = 0$

8)... $6x^2 + 2x = 0$

9).. $-2x^2 - 4x + 1 = 0$

10). $3x^2 - 3x - 6 = 0$

11).. $6x^2 = 11x$

12)..$(x-3)^2 - 1 = 0$

13)..$(3x-2)(2x-3) = 0$

14).. $x^2 + 9 = 0$

15).. $-x^2 + 4 = 0$

16)... $x.(x-1) = 2.(x-1)$

17).. $-x^2 = 3x$

Resolver los siguientes problemas planteando una ecuación de 2° grado.

1. Hallar las dimensiones de un rectángulo de área 35 m^2, sabiendo que la base excede a la altura en 2 m

2.Determinar dos números naturales, pares y consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 100

3. El producto de un número entero por su consecutivo es igual a 2.
¿ Cuál es el número ?.

4. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 7 m. más que el otro y 2 m. menos que la hipotenusa.
¿ Cuál es la longitud de los lados ?

.5. El producto entre el cuadrado de un número natural y el cuadrado del número anterior a este es igual al número original, aumentado en 3, elevado al cuadrado.
¿ Cuál es el número ?. Se pide solamente el planteo.

6. Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.

7. En un rectángulo la base mide el triple que la altura.
Si disminuimos en 1 cm. cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm^2.
Calcular las dimensiones y el área del rectángulo inicial.

8. Hallar tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.

9. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo.
Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la de su hijo.
¿ Cuántos años tiene ahora cada uno ?.

10. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 121.
Hallar los números.

11. La diferencia de dos números es 3 y la diferencia de sus cuadrados es 27.
Hallar los números.

12. Determina dos números tales que la diferencia de sus cuadrados es 120 y su suma es 6.

13. Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aumenta 3 cm a la altura y se disminuye 2 cm a la base, su área no aumenta ni disminuye, siendo además la altura 2 cm mayor que la base.

14. Calcular dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus inversos es $^{19}/_{90}$.

15. Los radios de dos círculos son números consecutivos y la razón de sus áreas es $^{4}/_{9}$.
Calcular ambos radios.

16. ¿ Calcule A para que la ecuación $A x^2 - 6x + 8 = 0$ tenga como solución dos raíces reales e iguales ?.

17. ¿ Calcule B para que la ecuación $x^2 - Bx + 8 = 0$ tenga como solución dos raíces reales y distintas ?.

18. ¿ Calcule C para que la ecuación $x^2 - 6x + C = 0$ no tenga como solución raíces reales ?.

Respuestas de ecuaciones cuadráticas

1) $S = \{ 2, -\frac{1}{2} \}$

2) $S = \{ 0, \frac{8}{7} \}$

3) $S = \{ 0, 4 \}$

4) $S = \{ \}$

5) $S = \{ 3, -1 \}$

6) $S = \{ \}$

7) $S = \{ -5+\sqrt{10}, -5-\sqrt{10} \}$

8) $S = \{ 0, -\frac{1}{3} \}$

9) $S = \{ -1-\frac{1}{2}\sqrt{6}, -1+\frac{1}{2}\sqrt{6} \}$

10) $S = \{ 2, -1 \}$

11) $S = \{ 0, \frac{11}{6} \}$

12) $S = \{ 2, 4 \}$

13) $S = \{ \frac{3}{2}, \frac{2}{3} \}$

14) $S = \{ \}$

15) $S = \{ 2, -2 \}$

16) $S = \{ 2, 1 \}$

17) $S = \{ 0, -3 \}$

Respuestas de los problemas de ecuaciones cuadráticas

1) Base = 7 Altura = 5

2) Los números son 6 y 8.

3) El número es 1 y − 2.

4) Cateto mayor = 15 , Cateto menor = 8 , Hipotenusa = 17 .

5) El número es 3.

6) Los catetos miden 3 y 4 , la hipotenusa 5.

7) Base = 12 , Altura = 4 , Área = 48 .

8) Los números son 5 , 7 , 9 y − 1 , 1 , 3 .

9) El padre tiene 36 años y el hijo 6.

10) Los números son 61 y 60.

11) Los números son 6 y 3.

12) Los números son − 7 y 13.

13) Base = 10 , Altura = 12 .

14) Los números son 9 y 10.

15) Los radios son $r = 2$, $R = 3$.

16) $A = 9/8$

17) $B = 4\sqrt{2}$ y $B = -4\sqrt{2}$

18) $C = 9$

UNIDAD 4

Vectores

Definiciones

Vector renglón:

Lo definimos como un conjunto ordenado de n números escrito como (x 1 , x 2 , ... x n)

Vector columna

Lo definimos como un conjunto ordenado de n números escrito como $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

En ambos x_1 es la primera componente, x_2 la segunda componente, etc.

Cualquier vector con todas sus componentes iguales a cero se llama **vector cero.**

Ejemplos:

(3 , 6) es un vector renglón con dos componentes.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector columna con tres componentes

(0 , 1 , 0 , - 20) es un vector renglón con cuatro componentes.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero

---

¿ Cómo surge un vector ?

Ejemplo:

Supongamos que el comprador de una planta manufacturera debe pedir cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel.
Puede anotar las cantidades pedidas con un simple vector:

El vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que se han pedido **10** unidades de acero, **30** de aluminio, y así sucesivamente.

Aquí vemos la importancia en el orden en que son escritas las componentes de un vector.
Para el comprador tendría un significado diferente, o sea que

el vector $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ **no son iguales.**

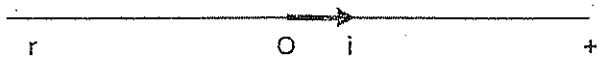
¿ Cómo puedo representar geométricamente un vector ?

Coordenadas cartesianas de un vector

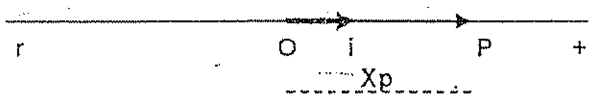
1) Espacio unidimensional: R

Dada una recta r le asociamos $\begin{cases} \text{un punto fijo: O, llamado origen.} \\ \text{un versor: i , aplicado en el origen.} \\ \text{un sentido positivo: el del versor i .} \end{cases}$

Diremos que la recta r y los tres elementos que hemos asociado definen un eje o recta numérica o sistema coordenado, que simbolizamos (O , i).

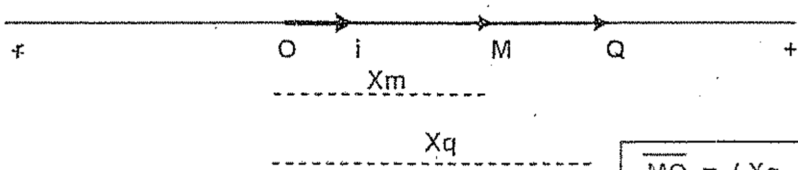


Dado un punto P ∈ r , el vector posición $\overline{OP}$ lo indicamos con su inicio en O y su extremo en P , puede expresarse como:



$\boxed{\overline{OP} = Xp * i}$

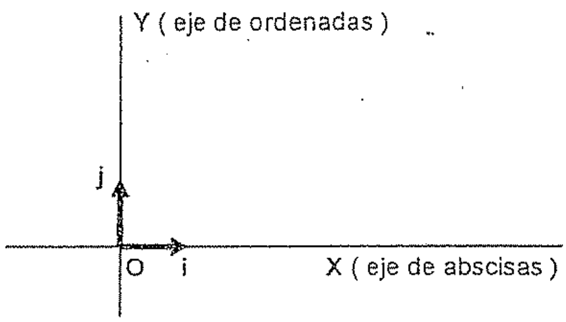
El vector $\overline{MQ}$ puede expresarse como la diferencia entre los vectores posición $\overline{OQ}$ y $\overline{OM}$



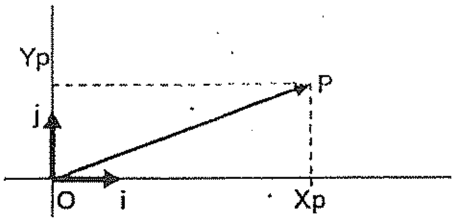
$\boxed{\overline{MQ} = (Xq - Xm) * i}$

2) Espacio bidimensional: R ² .

Si en un plano, trazamos dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O y en dicho punto aplicamos los versores i y j en las direcciones de las rectas, la terna (O , i , j) define un sistema de coordenadas en el plano, el plano recibe el nombre de plano coordenado.



Dado un punto P del plano, de coordenadas (Xp , Yp) , el vector posición $\overline{OP}$ lo indicamos con su inicio en O y su extremo en P , puede expresarse como:



$$\boxed{\overline{OP} = Xp * i + Yp * j = (Xp , Yp)}$$

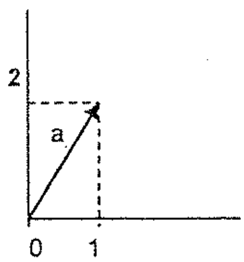
Para calcular el módulo de un vector aplicamos el teorema de Pitágoras: $\boxed{|\overline{OP}| = \sqrt{(Xp)^2 + (Yp)^2}}$

Las componentes de un vector del plano se calculan hallando las diferencias de las componentes homónimas. El módulo en este caso esta dado por:

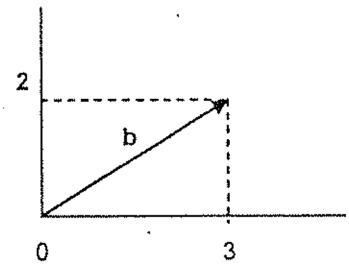
$$\boxed{|\overline{PQ}| = \sqrt{(Xq - Xp)^2 + (Yq - Yp)^2}}$$

Ejemplos:

a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



b) $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Igualdad de vectores (vale para vector renglón v vector columna)

Dos vectores a $\wedge$ b son iguales si y solo si ($\Leftrightarrow$) tienen el mismo número de componentes y sus componentes correspondientes son iguales.

En símbolos sería:

Los vectores $a = (a_1 , a_2 , ... a_n) \wedge b = (b_1 , b_2 , ... b_n)$

son iguales $\Leftrightarrow a_1 = b_1 , a2 = b_2 , ... a_n = b_n$

Suma de vectores en forma analítica (vale para vector renglón v vector columna)

Si los vectores son $a = (a_1 , a_2 , ... a_n) \vee b = (b_1 , b_2 , ... b_n)$

La suma se define como

$$a + b = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , ... a_n + b_n)$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-6) \\ 2 + 7 \\ 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nota:

Los vectores $a \wedge b$ tienen que tener el mismo número de componentes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ esta suma no es válida.

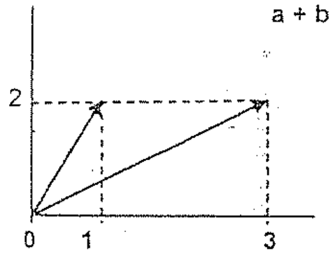
Los vectores $a \wedge b$ deben ser los dos vector renglón y vector columna

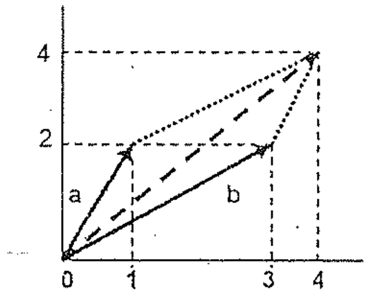
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (3, 5)$$ esta suma no es válida.

Suma de vectores en forma gráfica

Ejemplos:

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$





Multiplicación de vectores por un escalar en forma analítica (vale para vector renglón y vector columna)

Multiplicar un vector (a) por un escalar (α) es multiplicar cada componente del vector por el escalar.

En símbolos:

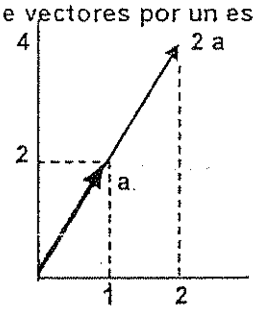
$$\alpha * a = \begin{pmatrix} \alpha a 1 \\ \alpha a 2 \\ . \\ . \\ \alpha a n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$3 * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 * 2 \\ 3 * (-1) \\ 3 * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de vectores por un escalar en forma gráfica

Ejemplos:



$$2 * a = 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Suma de productos de vectores por escalares en forma analítica (vale para vector renglón y vector columna)

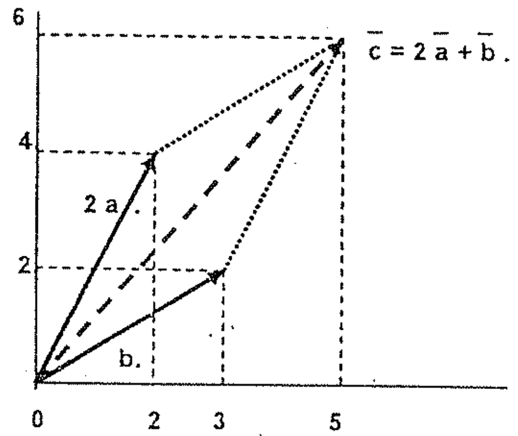
Ejemplo:

Calcular $2\bar{a} - 3\bar{b}$ siendo $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Suma de productos de vectores por escalares en forma gráfica

$$\bar{c} = 2\,\bar{a} + \bar{b} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Combinación lineal

El vector $c = 2\,a + b$ recién obtenido, se ha logrado como combinación lineal de los vectores $a \wedge b$: es decir se ha obtenido un nuevo vector como suma vectorial de productos escalares .

Espacio vectorial

El espacio vectorial se forma con un conjunto de vectores que deben cumplir:

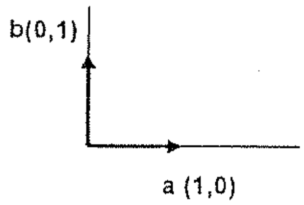
* La suma de dos vectores (cualesquiera) que pertenecen al conjunto, está también en el conjunto.
* Todos los múltiplos escalares (de cualquier vector en el conjunto) pertenecen también al conjunto.

Bases

Supongamos dos vectores $a \wedge b$ unitarios, o sea: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Con estos dos vectores unitarios definimos dos dimensiones . o sea R^2. Los dos vectores forman lo que se define como **base, sistema de coordenadas o ejes de referencia**, con la condición de que estos vectores unitarios sean **linealmente independientes** (definición que se verá en matemática I).

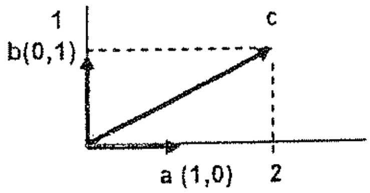
Gráficamente sería:



Veamos como se puede representar el vector **c = 2 a + b** en esla base.

$$c = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+0\\0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Gráficamente seria:



UNIDAD 4 - Problemas

1) Dados los vectores $\bar{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ efectuar las operaciones indicadas

a) $\bar{a} + \bar{b}$ b) $-2\,\bar{c}$ c) $2\,\bar{a} - 5\,\bar{b}$ d) $0\,\bar{c}$ e) $3\,\bar{a} - 2\,\bar{b} + 4\,\bar{c}$

2) Dados los vectores $\bar{a} = (3, -1, 4, 2)$ $\bar{b} = (6, 0, -1, 4)$ $\bar{c} = (-2, 3, 1, 5)$ efectuar las operaciones indicadas

a) $\bar{a} + \bar{c}$ b) $4\,\bar{c}$ c) $2\,\bar{a} - \bar{c}$ d) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ e) $3\,a - 2\,b + 4\,c$

3) Dados los vectores $\bar{a} = (2, 3)$ $\wedge$ $\bar{b} = (-5, 4)$ encontrar analítica y gráficamente:

a) $3\,\bar{a}$ b) $\bar{a} + \bar{b}$ c) $\bar{b} - \bar{a}$ d) $2\,\bar{a} - 7\,\bar{b}$

4) A partir de:

$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ y siendo 0 el vector columna n – dimensional cero.

Mostrar que:
a) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ b) $\bar{0} * \bar{a} = 0$

5) Dados los puntos $P_{(2,-5)}$ y $Q_{(4,-3)}$, determine el vector $\overline{PQ}$, hallar el módulo y graficar.

6) Sean α y β números reales, indique cuáles de las siguientes expresiones son escalares y cuáles son vectores, siendo a y b vectores de un plano.

I) $-\bar{a}$ II) $|\bar{a}|$ III) $\bar{a} + \bar{b}$ IV) $\alpha * \bar{a}$

V) $|\bar{a} + \bar{b}|$ VI) $\alpha * \beta$ VII) $\bar{a}\ / \beta\,;\ \beta \neq 0$

7) Determine los valores reales de t, para que el vector $\bar{a} = t\ i + (t+1)\ j$ tenga módulo $\sqrt{5}$

8) Dados los vectores $\bar{u} = (5, -4)$; $\bar{v} = (4, 1)$ y $\bar{w} = (1, 2)$
Determine, si existen, los escalares α y β de modo que $\bar{u} = \alpha * \bar{v} + \beta * \bar{w}$.

9)
Determine las componentes del vector $\bar{x}$ si se verifica la igualdad: $3\,\bar{a} - 5\,\bar{b} + 2\,\bar{x} = \bar{0}$

Siendo $\bar{a} = (-3, 1)$; $\bar{b} = (-2, 5)$.

10) En la fabricación de cierto producto se necesitan cuatro materias primas.

El vector $\bar{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ representa una demanda dada para cada uno de los cuatro materiales para elaborar una unidad de su producto.

Si $\bar{D}_1$ es el vector de demanda para la fábrica 1 y $\bar{D}_2$ es el vector de demanda para la fábrica 2, decir:

a) ¿qué representan el vector $\bar{D}_1 + \bar{D}_2$?. b) ¿qué representan el vector $2\,\bar{D}_1$?.

11) Dados los vectores $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ encuentre un vector $\bar{w}$ tal que: $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{w} = \bar{0}$

12) Un fabricante de joyería tiene pedidos para **dos** anillos, **tres** pares de aretes, **cinco** fistoles y **un** collar. El fabricante estima que requiere **1 hora** de trabajo el elaborar un anillo; **1 ½ horas** el hacer un par de aretes; **½ hora** el hacer un fistol, y **2 horas** la elaboración de un collar.

a) Exprese las órdenes de trabajo o pedidos como un vector renglón.
b) Exprese los tiempos de elaboración de los diversos productos como un vector columna.

13) Una compañía les paga a sus ejecutivos su sueldo y les concede participación en las acciones como una gratificación anual.
El año pasado, el presidente recibió **80 000 unidades monetarias** (u.m.) y **50 acciones**, cada uno de los tres vicepresidentes recibió **45 000 u.m.** y **20 acciones**, y el tesorero, **40 000 u.m.** y **10 acciones.**

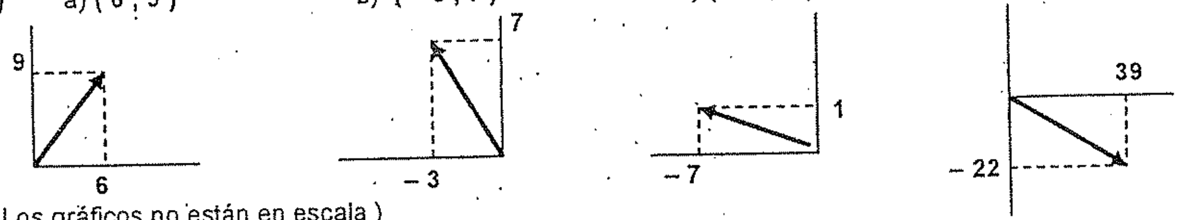
a) Exprese los pagos en dinero como un vector renglón.
b) Exprese los pagos en acciones como un vector renglón.
c) Exprese el número de ejecutivos de cada categoría por un vector columna.
d) Averigüe con su docente ¿ qué se puede hacer con a) y b) ?.

UNIDAD 4 - Respuestas

) a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -31 \\ 22 \\ -27 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$

) a) (1 , 2 , 5 , 7) b) (− 8 , 12 , 4 , 20) c) (8 , − 5 , 7 , − 1) d) (7 , 2 , 4 , 11) e) (− 1 1 , 9 , 18 , 18)

) a) (6 , 9) b) (− 3 , 7) c) (− 7 , 1) d) (39 , − 22)



Los gráficos no están en escala)

) a) b)

) $\overline{PQ} = (2 , 2)$; $|\overline{PQ}| = 2\sqrt{2}$

) I) vector II) escalar III) vector I V) vector V) escalar V I) escalar V II) vector

) t = 1 v t = − 2 8) $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ 9) (− 1 / 2 , 11)

10) a) $D_1 + D_2$ es la demanda combinada de las dos fábricas.
b) es la demanda de la fábrica 1 para cada una de las cuatro materias primas que se necesitan para producir 2 unidades de su producto.

11) $\overline{W} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

12)
a) (2 , 3 , 5 , 1) b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \\ 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

13) a) (80 000 45 000 40 000) b) (50 20 10)

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) con a) y b) se puede armar una matriz (de 3 * 2) de la forma:

$$\begin{pmatrix} 80\,000 & 45\,000 & 40\,000 \\ 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

rrfonte@datafull.com jccolubi@hotmail.com

Ing. Rubén Fonte Ing. Juan Carlos Colubi

Modelos de evaluación para los alumnos que hayan cursado el ciclo introductorio

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL – FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA

TÉCNICO SUPERIOR EN PROGRAMACIÓN – EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA INGRESO

TEMA : APELLIDO Y NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... SUPERVISÓ: .... FECHA:

1		2		3		4		SUMA	NOTA

* La duración del examen es de 120 minutos.
* Condición minima de aprobación: 50 % del examen bien resuelto.
* El examen no puede ser resuelto en esta hoja ni en lápiz.

Todas las respuestas deben tener justificación

Unidad 1

A) Sabiendo que $V[(r \wedge s)] \Rightarrow t = 0$ encontrar $V[(-r \Rightarrow t)] \vee s$

B) Calcular el siguiente valor de verdad: $V[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$

p = " El número 111 escrito en sistema binario equivale a 6 escrito en sistema decimal ".
q = " El número 23 escrito en sistema octal equivale al 11001 escrito en el sistema binario ".
r = " La suma 13 + 12 + 10 en sistema octal da 35 en el mismo sistema ".

Unidad 2

A) Dados los números 1011011_2, 62_8 y AD_{16}.

a) Ordenar de mayor a menor justificando la respuesta.
b) Escribir los números 1011011_2, 62_8 en el sistema hexadecimal.
c) Escribir los números 1011011_2 y AD_{16} en el sistema octal.

B) a) Resolver la sig. ecuación trabajando en el sistema octal $430 - X = 167$
b) Resolver la sig. ecuación trabajando en el sistema hexadecimal $45E - X = 14B$

Unidad 3

A) Un señor desea vender un coche, una moto y una bicicleta por $ 42.000 , sabiendo que el coche vale 3 veces más que la moto y la moto 5 veces más que la bicicleta. ¿ Cuánto vale cada vehículo ?.

B) Resolver la sig. ecuación e indicar el conjunto solución de la misma.

$$(x-3)^2/2 - x + x^2 = x - (x-2)$$

Unidad 4

A) Dados los vectores $\bar{a} = (2, -3, -1)$, $\bar{b} = (-3, 4, -1)$, $\bar{c} = (1, -1, 3)$ obtener $\bar{w} = 3\bar{a} - 4\bar{b} - 2\bar{c}$ analíticamente

B) Dados los vectores $\bar{a} = (4, -3)$, $\bar{b} = (-3, 4)$ y $\bar{c} = (-8, 6)$ obtener $|\bar{a}| + 2|\bar{b}| + |\bar{c}|$ analíticamente

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL – FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA

TÉCNICO SUPERIOR EN PROGRAMACIÓN – EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA INGRESO

TEMA : .... APELLIDO Y NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... SUPERVISÓ: .... FECHA:

1		2		3		4		SUMA	NOTA

* La duración del examen es de **120** minutos.
* Condición mínima de aprobación: **50 %** del examen bien resuelto.
* El examen **no** puede ser resuelto en esta hoja ni en lápiz.

Todas las respuestas deben tener justificación

Unidad 1

A) Dar el **valor de verdad** de la siguiente proposición:
"El producto de un número par de números negativos es negativo"

B) Siendo el conjunto universal: $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
y las formas proposicionales:
$p_{(x)}$ = " x es menor o igual que 2 ".
$q_{(x)}$ = " x es primo mayor que -2 ".

Hallar el **conjunto de verdad** de la siguiente expresión simbólica: $-[p(x) \wedge q(x)]$

Unidad 2

A) Dadas las siguientes operaciones numéricas:
en sistema octal: **6 7 4 + 5 0 7** en sistema hexadecimal: C 0 1 – 9 A 3
Decir cuál resultado es el mayor.

B) Siendo a = **25** y **b = 34** , al hacer **a + b** el resultado da **103**.
¿ En que base se hizo la operación de suma ?.

Unidad 3

A) El precio de venta de un televisor, después de un descuento del **25 %**, es de **3.800 $.**
¿ Cuál es el precio antes del descuento ?.

B) La cuarta parte del producto de dos enteros pares positivos y consecutivos es **56**.
Obtenga dichos números.

Unidad 4

A) Dados los vectores $\overline{a} = (2, 3)$; $\overline{b} = (-5, 4)$. Encontrar analítica y gráficamente: $(\frac{1}{2}\overline{b}, -2\overline{a})$.

B) Dados los vectores $\overline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\overline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$

Resolver analíticamente: $\overline{w} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$

Programa de ingreso - Matemática

Unidad 1 – Lógica proposicional

Conectivos: negación, conjunción, disyunción, condicional, bicondicional. Tabla de valores de verdad. Forma proposicional. Dominio. Conjunto verdad. Cuantificadores: universal, existencial. Ejemplos. Problemas. Respuestas.

Unidad 2 – Sistemas numéricos

No posicionales y posicionales: decimal, binario, octal, hexadecimal. Tabla de equivalencias. Pasajes de un sistema a otro. Sistema binario: suma, resta, multiplicación. Sistema octal: suma, resta. Sistema hexadecimal: suma, resta. Ejemplos. Problemas. Respuestas.

Unidad 3 – Ecuaciones

Lineales o de 1° grado. Definición. Compatibles e incompatibles. Equivalentes. Operaciones permitidas. Conjunto solución. Ejemplos. Problemas. Respuestas.
Cuadráticas o de 2° grado. Definición. Fórmula resolverte. Completas e incompletas. Conjunto solución. Ejemplos. Problemas. Respuestas.

Unidad 4 – Vectores

Definición. Vector rengión y vector columna. Representación geométrica de un vector. Igualdad. Suma: analítica y gráfica. Multiplicación por un escalar: analítica y gráfica. Suma de productos: analítica y gráfica. Combinación lineal. Bases. Ejemplos. Problemas. Respuestas.

Bibliografía:

Matemática discreta (UTN Regional Bs. As.)
Floyd, Thomas: Fundamentos de Sistemas digitales (Prentice Hall)
Faires, Douglas & De Franza, James: Precálculo. (Thomson Editores)
Munier, Nolberto J.: Programación lineal (Editorial Astrea).

INDICE