

“季节—灰色”预测模型

林 长 泰

引起经济波动的因素类型一般包括趋势、周期、季节和不规则（原因不明确）四种因素。因此，一般的时间序列数据都包括趋势变动、周期变动、季节变动和不规则变动（原因不明的偶然变动）。对于具有明显的季节变动的时间序列，或周期变动和不规则变动大的时间序列，采用灰色模型来预测时，常常会产生很大的预测误差，就是采用参考文献〔1〕所介绍的折扣灰色模型，同样存在很大的预测误差问题。这样就使得灰色预测模型在应用方面受到一定的限制。因此，本文的目的主要是建立一种适应季节变动的灰色预测模型。

一、“季节—灰色”预测模型的建立

在建立模型之前，我们先简单介绍一下用于时间序列的灰色预测模型。

由于时间序列数据是动态数据，也就是只随时间变化而变化的数据，因此，我们要选择灰色模型中的GM(1, 1)型作为灰色预测模型。其表达形式是一阶常微分方程，即

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u \quad (1)$$

式中， $x^{(1)}$ 是变量一阶灰过程的累加变换，对离散序列，则有 $x^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x^{(0)}(k)$

（此处 $t=1, 2, \dots, n$ ），其中 $x^{(0)}$ 是不包含季节变动的时间序列数据变量， n 为过去的时间序列数据量。

确定GM(1, 1)模型参数（即待定系数） a 、 u 的矩阵形表达公式是

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T y_n$$

其中：

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)) & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times 2}$$

$$y_n = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

求解方程(1)，就可得到灰色预测模型：

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = [x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}] e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (2)$$

$$\hat{x}^{(0)}(t+1) = \hat{x}^{(1)}(t+1) - \hat{x}^{(1)}(t) \quad (3)$$

式中， $t=1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots$ ，且 $t=0$ 时 $\hat{x}^{(1)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1)$ 。

由(2)、(3)式可看出，预测值 $\hat{x}^{(1)}$ 是一种指型型(e^{-at})曲线的拟合值。当 $a > 0$ 时，则 $\hat{x}^{(1)}$ 值是递增的(因 $a > 0$ ，必有 $x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} < 0$)，但递增的速度 $(-a[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-at})$ 是递减的，因而 $\hat{x}^{(0)}$ 值是递减的；当 $a < 0$ 时，很显然， $\hat{x}^{(0)}$ 是递增的。所以， $\hat{x}^{(0)}$ 实质上是一种按灰色系统理论确定的趋势值。

对于包含趋势和季节变动的时间序列数据 $F(t)$ ，其构成可以用乘法模型来表达，即

$$F(t) = T(t) \cdot S(t)$$

式中， $T(t)$ 为趋势值； $S(t)$ 为季节指数。

于是，相应的预测模型是

$$\hat{F}(t) = \hat{T}(t) \cdot \hat{S}(t) \quad (4)$$

式中“ $\hat{\cdot}$ ”符号表示预测。

因由上述GM(1, 1)模型得到的预测值 $\hat{x}^{(0)}$ 是不包含季节变动的时间序列的趋势值，所以有 $\hat{T}(t+1) = \hat{x}^{(0)}(t+1)$ ，把该式代入(4)式，就得到考虑季节变动的灰色预测模型(简称“季节—灰色”预测模型)：

$$\hat{F}(t+1) = [\hat{x}^{(1)}(t+1) - \hat{x}^{(1)}(t)] \cdot \hat{S}(t+1) \quad (5)$$

其中，季节指数预测值 \hat{S} 可按下列方法来确定：设最后一年某期(月或季)的季节指数为 $S(T)$ ，上年同期(月或季)的季节指数为 $S(T-1)$ ，则下一年(预测期)同期(月或季)的季节指数 $\hat{S}(T+1)$ 可用

$$\hat{S}^{(T+1)} = \frac{1}{2} [3S(T) - S(T-1)] \quad (6)$$

来推算。

二、应用实例

某企业1979—1987年销售额的统计数据见表1所示。为了分析和检验“季节—灰色”模型对未来的可靠性和预测精度，本例是把1987年作为未来年，预测其各月的销售额。

第1步：把原时间序列数据依期次(1, 2, ...,)顺序排列到最后，作为 t 数据序列 $F(t)$ 。

第2步：消除 $F(t)$ 中的季节变动，来获得GM(1, 1)模型中要用到的序列数据 $x^{(0)}$ 。

消除季节变动的方法有两种：一是采用12个月移动平均法(为了计算上的方便，有的采用13个月移动平均法)；一是采用6个月反复移动平均法[2]。前者得到的数据前后各缺

6项；后者得到的数据前后各缺5项，但后者可以通过“缩短加权法”处理，来避免出现缺项。为了不缺项，能为后面计算移动季节指数提供完整的数据，本例是采用6个月反复移动平均法来消除季节变动。其结果见表2（该表中的数据就是 $x^{(0)}$ 值）。

表1 某企业1979—1987年销售额 (单位：万元)

年 月	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
1	571	634	746	828	985	1204	1434	1594	1739
2	544	686	811	862	1026	1227	1427	1702	1952
3	819	1046	1100	1248	1441	1781	2106	2437	2530
4	776	946	1058	1139	1389	1719	1974	2197	2396
5	696	868	942	1089	1265	1559	1851	2064	2325
6	757	932	985	1120	1327	1671	1979	2071	2372
7	1051	1356	1435	1764	2122	2639	2938	3274	3662
8	593	718	796	909	1066	1338	1522	1662	1885
9	630	763	792	964	1164	1396	1607	1906	2069
10	847	1007	1140	1341	1602	1933	2130	2377	2568
11	943	1048	1228	1383	1648	2025	2292	2436	2784
12	2039	2393	2581	3027	3661	4412	4785	5216	5540

表2 6个月反复移动平均数 (万元)

年 月	1979—1982	1983	1984	1985	1986	1987
1		1454	1809	2107	2362	2554
2		1453	1816	2100	2362	2551
3		1450	1822	2093	2357	2539
4		1426	1799	2052	2341	2524
5		1362	1735	2014	2301	2485
6	(略)	1356	1731	1994	2277	2463
7		1462	1859	2119	2405	2407
8		1512	1912	2165	2443	2670
9		1565	1966	2213	2491	2765
10		1642	2049	2299	2516	2914
11		1806	2128	2382	2591	3110
12		1868	2190	2446	2653	3384

第3步：求季节指数。

季节指数分为固定季节指数和移动季节指数。由于受自然因素、国家政策、人民生活习惯、收入水平和新科技的影响，季节因素会发生变动，从而使季节指数随之年年变化。所以，本例是采用移动季节指数。求移动季节指数的过程是：

先用6个月反复移动平均数 $x^{(0)}$ 去除与之对应的原数据F，就得到季节变动和不规则变动（现实中时间序列数据一般都会包含有不规则变动，尤其在改革期间）合成比率，然后按月取出合成比率组成序列（共有12组序列），再用如同第2步的要点，分别算出4项反复移动平均数，并按年（12个月）合计值为1200来调整，就得到移动季节指数，见表3。该表中的1987年各月季节指数预测值是用1985、1986年各月季节指数和测算公式

$$\hat{S}^{(87)}(\tau) = \frac{1}{2} [3S^{(86)} - S^{(85)}]， (\text{月份}\tau=1, 2, \dots, 12) \text{推算出来的。}$$

表3 移动季节指数

年 月	1979—1982	1983	1984	1985	1986	1987	
						实际值	预算值
1		67.4	67.9	68.2	68.5	69.1	68.7
2		70.3	70.6	71.0	72.4	74.0	73.1
3		101.0	100.8	101.3	102.1	102.7	102.5
4		96.5	96.5	96.5	96.5	96.7	96.5
5		91.9	92.1	92.3	92.6	93.5	92.8
6	(略)	97.8	98.3	98.9	99.5	99.8	99.8
7		140.7	141.4	141.4	141.2	141.7	141.2
8		70.6	70.6	70.5	70.5	71.0	70.5
9		73.1	73.9	75.1	75.8	76.4	76.2
10		95.6	95.2	94.6	94.1	93.3	93.9
11		94.9	95.0	95.0	94.8	94.6	94.7
12		200.1	197.8	195.1	192.1	187.2	190.6

第4步：用GM(1, 1)模型，计算出灰色预测值 $\hat{x}^{(0)}$ ，本例仅用表2中的1985、1986两年24个 $x^{(0)}$ (t)值（此处 $t=1, 2, \dots, 24$ ），得到灰色模型： $\hat{x}^{(0)}(t+1)=191250.01e^{0.010637t}-189145.01$ ，据此测算出1985、1986、1987各月（不含季节变动的）销售预测值 $\hat{x}^{(0)}(t)$ （此处 $t=1, 2, \dots, 36$ ），见表4的第4行。

第5步：用“季节—灰色”模型以及由第3、4步得到的季节指数和灰色预测值，计算出（包含季节变动的）销售预测值 \hat{F} （也叫“季节—灰色”预测值）。其结果见表4的第7行，由该表可看出，未来年，即1987年1月份销售预测值为1794万元，2月份为1930万元、…、11月份为2751万元、12月份为5596万元。

表4 预测值与预测误差(1985、86年为本期,1987年为未来期)

1985年	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(0)(t)	2107	2100	2093	2052	2014	1994	2119	2165	2213	2299	2382	2446
$\hat{X}(0)(t)$	2107	2043	2067	2090	2112	2134	2157	2180	2203	2227	2251	2274
灰色预测误差(%)	0.0	2.7	1.2	1.9	4.9	7.0	1.8	0.7	0.5	3.1	5.5	7.0
F(t)	1434	1427	2106	1974	1851	1979	2938	1522	1607	2130	2293	4785
$\hat{F}(t)$	1437	1451	2096	2017	1949	2111	3050	1537	1654	2107	2138	4437
“季一灰”预测误差(%)	0.2	1.7	0.6	2.2	5.3	6.6	3.8	1.0	3.0	1.1	6.7	8.0
1986年	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
t	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X(0)(t)	2362	2362	2357	2341	2301	2277	2405	2443	2491	2516	2591	2653
$\hat{X}(0)(t)$	2299	2324	2349	2373	2399	2425	2450	2477	2503	2530	2557	2585
灰色预测误差(%)	2.7	1.6	0.3	1.4	4.3	6.5	1.9	1.4	0.5	0.6	1.3	2.6
F(t)	1594	1702	2437	2197	2064	2071	3274	1662	1906	2377	2436	5216
$\hat{F}(t)$	1575	1659	2398	2290	2221	2413	3459	1746	1897	2381	2424	4966
“季一灰”预测误差(%)	1.2	2.5	1.6	4.2	7.6	16.5	5.7	5.1	0.5	0.2	0.5	4.8
1987年	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
t	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
X(0)(t)	2554	2551	2539	2524	2485	2463	2607	2670	2765	2914	3110	3384
$\hat{X}(0)(t)$	2612	2640	2668	2697	2725	2755	2784	2814	2844	2875	2905	2936
灰色预测误差(%)	2.3	3.5	5.1	6.9	9.7	11.9	6.8	5.4	2.9	1.3	6.6	13.2
F(t)	1739	1952	2530	2396	2325	2372	3662	1885	2069	2568	2784	5540
$\hat{F}(t)$	1794	1930	2735	2603	2529	2749	3931	1984	2167	2700	2751	5596
“季一灰”预测误差(%)	3.2	1.1	8.1	8.6	8.8	15.9	7.3	5.2	4.7	5.1	1.2	1.0

三、预测误差分析

所用的公式：

$$\text{灰色预测误差} = \frac{|\hat{x}(0) - x(0)|}{x(0)} \times 100\%$$

$$\text{"季一灰"预测误差} = \frac{|\hat{F} - F|}{F} \times 100\%$$

影响“季节一灰色”模型的预测精度主要有以下几方面：

(一) 来自灰色预测方面

灰色预测精度高低是“季一灰”预测误差大小的主要产生原因之一。灰色预测精度越高，“季一灰”预测误差就越小；反之，就越大。

通过分析，我们不难发现，在灰色预测中所用的时间序列数据量的多少是引起其精度高低的主要原因。相对而言，在一般情况下，所用的时间数据越多，对未来的预测，其精度就越高，反之，对未来的预测，其精度就越低。这种看法也许与参考文献〔1〕、〔3〕、〔4〕有所不同。从这三个文献的例子来看，共同的特点都认为用少量的历史数据资料，就能得到满意（或比较满意）的预测精度。下面我们用本例来说明。我们分四种情况来预测未来年，即1987年各月的灰色预测值 $\hat{x}(0)$ 和“季一灰”预测值 \hat{F} ，并进行相应的误差分析：

第一种，用24个时间序列数据，即1985、1986年各月的F值来预测（对灰色模型是用消除F中的季节变动后的 $x(0)$ 值来预测，下同）。由表4可以看出，1985年1月—1986年12月的灰色预测误差范围是0.0—7.0%，“季一灰”预测误差范围是0.2—16.5%；而1987年各月的灰色预测误差范围是1.3—11.9%，“季一灰”预测误差范围是1.0—15.9%，且呈波峰形，误差峰值在6月份。

第二种，用12个时间序列数据，即1986年12个月的F值来预测。其结果是：1986年各月的灰色预测误差范围是0.0—5.2%（较第一种小），“季一灰”预测误差范围是0.1—15.1%（较第一种小）；而1987年各月的灰色预测误差范围是0.4—13.9%（较第一种大），“季一灰”预测误差范围是0.9—18.1%（较第一种大），且仍呈波峰形，误差峰值仍在6月份。

第三种，用9个时间序列数据，即1986年4—12月的F值来预测。其结果是：1986年4—12月的灰色预测误差范围在0.0—2.2%（继续减小），“季一灰”预测误差范围是0.4—11.8%（继续减小）；而1987年各月的灰色预测误差范围是1.2—22.2%（继续增大），“季一灰”预测误差范围是3.5—26.7%（继续增大），并且仍呈波峰形，误差峰值仍在6月份。

第四种，用3个时间序列数据，即1986年10—12月的F值来预测。其结果是：1986年10—12月的灰色预测误差均为0.0（误差继续下降到0），“季一灰”预测误差范围是0.4—2.3%（继续减小）；而1987年各月的灰色预测范围是4.1—24.2%（继续增大），“季一灰”预测误差范围是4.1—28.7%（继续增大），而且仍呈波峰形，误差峰值仍在6月份。

由此可见，时间序列数据量用得越少，历史数据所在月的灰色预测误差范围就越小；而

（下转64页）

实施，对这些投资方面的决策，是由乡级政府领导根据审报单位提供的报告和乡“企管办”提供的有关数字资料进行审批的。虽然也需县企业局签字和盖章通过，但由于乡政府审批在前，作为同乡政府同级的县企业局，由于处在不直接审批的位置，对类似投资决策可以原则通过而不进行深入的分析研究。其结果是意见一致时尚可，不一致时，往往会延误投资项目实施机遇和导致无利投资项目盲目上马。这不但是政企不分，也是责权不清，都负责又都不负责。理顺乡镇企业的管理机制，应按照“纵向减少层次，横向减少交叉，纵横协调一致，按乡镇企业特点办事”的原则，实施具体的管理机制。这里仅提几点建议：

1. 乡镇一级“企管办”应独立于乡政府行政管理之外，而作为县企业局的一个派出机构，直接接受县企业局行政和业务方面

的领导。它的人事、业务、财务管理全部归属县企业局，使县企业局真正发挥其直接领导和管理乡镇企业的作用。2. 应赋予县企业局固定资产等投资方面的审批、监督权。由县企业局进行业务把关和审批，然后送乡政府备案。县企业局既然有审批决策权，就要对企业投资效果负有经济责任和行政责任。投资效果按计划实施效果好的，应反馈给县企业局一定的报酬。投资效果不好的，县企业局则应给企业一定的补偿。这样互相制约，可以调动企业和主管局双方的责任感和积极性。3. 为支持县企业局很好地开展工作，县政府应做好各管理部门的协调工作。可组织由银行、税务、物资、工商行政管理局和县乡镇企业参加的乡镇企业领导小组，定期开会研究，协调主管部门与各有关管理部门的关系。使县领导通过该专门小组来实施对乡镇企业宏观上的控制管理。

（上接81页）

未来（1987年）各月的灰色预测误差范围就越大，其结果使得历史数据所在月的“季一灰”预测误差范围也越小，而未来（1987年）各月的“季一灰”预测误差范围却越大。这说明：①用少量的数据资料对未来预测不利，对数据资料所在期的预测有利，但这种有利没有多少意义，因为数据所在期的销售行为已过去；②用少量数据资料时，不能用数据所在期的满意的预测精度来说明预测期的精度也是满意的。

（二）来自原数据方面

我们用时间序列数据分析法对1979—1987年各月销售额进行分析时，不难发现，本例来自实际的原数据不仅包含趋势和季节变动，而且还包含周期和不规则变动。后两者的变动也是影响“季节一灰色”模型预测精度的主要原因。

（三）来自季节指数的预测

由表3可以看出，1987年各月的季节指数预测值与其实际值之间存在一定的误差，这种误差尽管不大，但是，或多或少也影响了“季节一灰色”模型的预测精度。

参 考 文 献

- 〔1〕王中昭：《折扣灰色系统模型》，《预测》1990第3期。
- 〔2〕参见美国哈佛大学教案中应用的反复移动平均法。
- 〔3〕傅金水：《江西省能源“灰一归”预测模型》，《预测》，1990第2期。
- 〔4〕李正最：《洞庭八里港的灰色预测》，《预测》1990第2期。

（责任编辑 纪良纲）