Mathématiques 3ECG

Cédric Donner

Version 2016-2017

Table des matières

Chapitre 1 : puissances et racines (rappels)

1.1 Corrigés des exercices

information

Les corrigés se trouvent pour le moment sur Dropbox à l'URL suivante :

https://www.dropbox.com/sh/eb4r2oir9dil55s/AABWNYlnk7M2A3qF1XXbb8m3a?dl=0

Chapitre 2 : Exponentielles et logarithmes

2.1 Corrigés des exercices

information

Les corrigés se trouvent pour le moment sur Dropbox à l'URL suivante :

https://www.dropbox.com/sh/u0jr1pj014o4rsr/AAAqvXMEzaFbzVLyC-wK-2sRa?dl=0

Chapitre 3 : Combinatoire

3.1 Corrigés des exercices

information

- Corrigés personnels : https://www.dropbox.com/sh/psuje07ims91gug/AAABWaqXQbiHZVxIBLw5syS8a?dl=0
- Corrigés officiels
  - Exercices 1 - 9 : https://www.dropbox.com/s/lhm9capygn1va21/exercices1_9_corr.pdf?dl=0
  - Exercices 10 à 22 : pas encore disponible
  - Exercices 23 à 24 : pas encore disponible

3.2 Corrigé détaillé de certains exercices

3.2.1 Exercice 14

Pour que le professeur puisse raconter 3 histoires par année sans jamais redire les trois mêmes histoires (on ne tient pas compte de l'ordre), il faut que $C_3^x \geq 40$ où x est le nombre d'histoires dont il dispose.

Il y a deux manières de résoudre ce problème qui revient en fait à résoudre l'inéquation $C_3^x \geq 40$:

1. Par tâtonnement (il est évident qu'il faut que $x > 3$)
   - Pour $x = 4$, on a $C_3^x = C_3^4 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4$, ce qui est trop petit.
   - Pour $x = 5$, on a $C_3^x = C_3^5 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$, ce qui est trop petit.
   - Pour $x = 6$, on a $C_3^x = C_3^6 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$, ce qui est trop petit.
   - Pour $x = 7$, on a $C_3^x = C_3^7 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$, ce qui est trop petit.
   - Pour $x = 8$, on a $C_3^x = C_3^8 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$, ce qui permet de tenir pendant les 40 ans en ne racontant jamais les trois mêmes histoires.
2. Vous savez sans doute qu'on préfère une méthode qui fonctionne à tous les coups plutôt que de devoir se

contenter de tâtonner. On peut y parvenir en résolvant l'inéquation

$$\begin{aligned}
C_3^x &\geq 40, x \in N \\
\frac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} &\geq 40 \\
\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3!} &\geq 40 \\
\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{6} &\geq 40 \\
\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} &\geq 40 \\
x^3 - 3x^2 + 2x &\geq 240 \\
x^3 - 3x^2 + 2x - 240 &\geq 0
\end{aligned}$$

Le problème est que cette inéquation est du troisème degré. Il est cependant possible de la résoudre graphiquement avec vos connaissances pour trouver la réponse :

Fig. 3.1 – Résolution graphique de l'inéquation $x^3 - 3x^2 + 2x - 240 \geq 0$

On voit bien que la courbe passe en-dessus de l'axe Ox entre 7 et 8. Comme x doit prendre des valeurs entières, il faut donc que soit au minimum de 8. Il lui faut donc au minimum 8 histoires.

3.2.2 Exercice 16

1. Comme on ne tient pas compte de l'ordre des cartes dans une main, il faut considérer des combinaisons de 12 cartes choisies parmi 36

$$C_{12}^{36} = 1251677700$$

2. Puisque la main contient les 4 as, ces 4 cartes sont imposées (et ne constituent de ce fait pas un choix). On pourrait dire que l'on doit faire une combinaison de 4 cartes parmi 4, ce qui fait $C_4^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$ possibilités. Une fois ces 4 as mis dans la main, il reste à choisir $12 - 4 = 8$ cartes parmi 32 puisque les as ne peuvent plus être choisis.

Au total
En multipliant toutes ces possibilités (étapes dans la constitution de la main), on obtient $C_4^4 \cdot C_8^{32} = C_8^{32} = 10518300$ possibilités.

---

3. Si la main contient exactement 1 as, il faut les étapes suivantes pour constituer la main :
   (a) Choisir l'as : $C^4 : 1 = 4$ possibilités
   (b) On choisit les 11 autres cartes parmi les 32 cartes restantes (puisque aucun des as ne peut être choisi à cette étape)

Au total
Il y a donc $C_1^4 \cdot C_{11}^{32} = 516097920$ possibilités.

---

4. Comme la main ne contient ni as ni roi, on doit choisir 12 cartes parmi $36 - 2 \times 4 = 28$

$$C_2^{28} = 30421755$$

5. Il faut que la main contienne 1, 2, 3 ou 4 rois. Il est très fastidieux de calculer directement toutes ces cas. Lorsque la donnée contient le mot “au moins”, il faut passer par le cas contraire en calculant le nombre de mains qui ne comportent aucun roi.

— Nombre de mains ne comportant pas de rois : choisir 12 cartes parmi 32 : C_{12}^{32}.
— Nombre de possibilités totales - nombre de possibilités sans roi

Au total
Il y a donc $C_{12}^{36} - C32_{12} = 1025884860$ possibilités.

6. La main doit donc contenir aucun roi ou 1 seul roi. Il suffit d'additionner ces deux cas :
— Aucun roi (12 parmi 32) : C_{12}^{32}
— Exactement 1 roi = comme le c) : $C_1^4 \cdot C_{11}^{32} = 4 \cdot C_{11}^{32} = 516097920$

Au total
Il y a donc $C_{12}^{32} + 4 \cdot C_{11}^{32} = 741890760$ possibilités.

7. étapes dans le choix des cartes
   (a) Comme l'as de trèfle est imposé, cela ne constitue pas un choix ==> 1 possibilité de choix.
   (b) Choix des carreaux : 4 parmi 9 : C_4^9
   (c) Il ne reste plus que 36 - 1 - 9 = 26 cartes parmi lesquelles choisir les 12 - 1 - 4 = 7 cartes restantes : C_7^{26}

Au total
Il y a donc $1 \cdot C_4^9 \cdot C_7^{26} = 82882800$ possibilités.

8. Là encore, il faut procéder par étapes :
   (a) Choisir les 5 piques : C_5^9
   (b) Choisir les 4 coeurs : C_4^9
   (c) Choisir les 2 carreaux : C_2^9
   (d) Choisir les 1 trèfle : C_1^9

Au total
Il y a donc $C_5^9 \cdot C_4^9 \cdot C_2^9 \cdot C_1^9 = 5143824$ possibilités.

9. Cet item est certainement le plus difficile de tout l'exercice. Voici les étapes nécessaires pour constituer la main
   (a) Choix de la couleur parmi laquelle choisir les 5 cartes (attention il y a 4 couleurs : coeur, carreaux, trèfles, piques) : 4 possibilités
   (b) Choisir les 5 cartes de cette première couleur : C_5^9
   (c) Choix de la deuxième couleur dont on prendra 4 cartes : 3 possibilités
   (d) Choisir les 4 cartes de cette deuxième couleur : C_4^9
   (e) Choix de la troisième couleur dont on prendra 2 cartes : 2 possibilités
   (f) Choisir les 2 cartes de cette troisième couleur : C_2^9
   (g) Choix de la quatrième couleur dont on prendra 1 cartes : 1 seul possibilité restante
   (h) Choisir la carte de cette quatrième couleur : $C_1^9 = 9$

Au total
Il y a donc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_5^9 \cdot C_4^9 \cdot C_2^9 \cdot C_1^9 = 4! \cdot C_5^9 \cdot C_4^9 \cdot C_2^9 \cdot C_1^9 = 123451776$ possibilités.

3.2.3 Exercice 18

Lors de la première course, il y a 8 choix possibles. Dans la deuxième course, il y en a 9. Cela fait un total de $8 \cdot 9 = 72$ billets possibles. Pour être certain de parier correctement, il faut donc acheter 72 billets à 2$, ce qui revient à payer 144$ pour être certain de remporter 200$. Bon deal ...

3.2.4 Exercice 19

Pour chacune des 8 lettres, le facteur a 6 possibilités. Il est possible de mettre toutes les lettres dans la même boîte aux lettres et il est possible qu'une boîte ne reçoive aucune lettre.

On a donc $6^8 = 1679616$ possibilités de distribuer les lettres.

3.2.5 Exercice 20

> **Avertissement :** Les personnes au sein d'une délégation sont interchangeables (on ne tient pas compte de l'ordre au sein des délégations) et on ne tient pas non plus compte de l'ordre des délégations.

1. On constitue les délégations de la manière suivante :
   (a) Choisir 3 personnes parmi 9 pour constituer la première délégation ==> C_3^9 possibilités.
   (b) Choisir 3 personnes parmi les 6 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> C_3^6 possibilités.
   (c) Choisir 3 personnes parmi les 3 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> $C_3^3 = 1$ possibilités.

   Au total
   Comme l'ordre des délégations ne compte pas, il faut diviser le tout par 3! qui correspond aux permutations possibles d'un ensemble de 3 éléments (les trois délégations).
   Il y a donc

   $$C_3^9 \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 \cdot \frac{1}{3!} = 280 \text{ possibilités}$$

   ---

2. On constitue les délégations de la manière suivante :
   (a) Choisir 2 personnes parmi 9 pour constituer la première délégation ==> C_2^9 possibilités.
   (b) Choisir 3 personnes parmi les 7 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> C_3^7 possibilités.
   (c) Choisir 4 personnes parmi les 4 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> $C_4^4 = 1$ possibilités.

   Au total
   Comme les délégations sont discernables de par leur nombre de participants, on ne peut pas les confondre et il n'est cette fois-ci pas nécessaire de diviser par 3!.
   Il y a donc

   $$C_2^9 \cdot C_3^7 \cdot C_4^4 = 1260 \text{ possibilités}$$

   ---

3. On constitue les délégations de la manière suivante :
   (a) Choisir 2 personnes parmi 9 pour constituer la première délégation ==> C_2^9 possibilités.
   (b) Choisir 2 personnes parmi les 7 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> C_2^7 possibilités.
   (c) Choisir 5 personnes parmi les 5 restantes pour constituer la deuxième délégation ==> $C_5^5 = 1$ possibilités.

   Au total
   Comme les deux délégations comportant 2 personnes ne sont pas discernables (on ne peut pas les distinguer), il faut diviser le tout par $2!$ (2 étant le nombre de délégations qui ne sont pas discernables entre elles).
   Il y a donc

   $$C_2^9 \cdot C_2^7 \cdot C_5^5 \cdot \frac{1}{2!} = 378 \text{ possibilités}$$

> **Avertissement :** S'il y avait plusieurs groupes de délégations qui ne sont pas discernables entre elles, par exemple 2 délégations de deux personnes et 4 délégations de 3 personnes, il faudrait diviser par $2! \cdot 4!$

3.2.6 Exercice 21

1. On constitue les répartitions de la manière suivante : pour chaque boule, il y a deux choix possibles l'urne de gauche ou celle de droite.

   Au total
   Il y a donc $2^{10} = 1024$ dispositions différentes

2. Il faut donc au moins une boule par urne. Pour dénombrer les possibilités où aucune urne est vide, il faut commencer par dénombrer les possibilités pour qu'une urne soit vide. Il y a deux possibilités pour qu'une urne soit vide : soit c'est celle de gauche qui est vide, soit c'est celle de droite.

   Pour que l'urne de gauche soit vide, il faut que toutes les boules soient mises dans l'urne de droite, et il n'y a qu'une seule façon de le faire : pour chaque boule, il n'y a alors qu'un choix possible : l'urne de droite, ce qui fait $1^{10} = 1$ possibilité.

   Pour que l'urne de droite soit vide, c'est pareil et il n'y a qu'une possibilité d'arriver à cette situation : toutes les boules doivent être mises dans l'urne de gauche.

   Bilan des courses
   Il y a donc $1024 - 2 = 1022$ possibilités de placer les boules pour qu'aucune des deux urnes ne soit vide.

3.2.7 Exercice 22

1. On constitue les répartitions de la manière suivante : pour chaque boule, il y a 3 choix possibles :

   Au total
   Il y a donc $3^{10} = 59049$ répartitions différentes

2. Cette partie est plus subtile que dans l'exercice 21 car il y a deux nombreuses façons pour qu'il y ait au moins une urne vide. Les situations suivantes mènent au cas où au moins une urne est vide
   — la première est vide ==> $2^{10} = 1024$ possibilités de placer les boules
   — la deuxième est vide ==> $2^{10} = 1024$ possibilités de placer les boules
   — la troisième est vide ==> $2^{10} = 1024$ possibilités de placer les boules
   — la première et la deuxième sont vides ==> $1^{10} = 1$ possibilités de placer les boules
   — la première et la troisième sont vides ==> $1^{10} = 1$ possibilités de placer les boules
   — la deuxième et la troisième sont vides ==> $1^{10} = 1$ possibilités de placer les boules

   Bilan des courses
   Il y a donc $59049 - 3 \cdot 1024 - 3 = 55974$ possibilités de placer les boules pour qu'aucune des trois urnes ne soit vide.

3.2.8 Exercice 23

1. Si la personne A a salué B, alors B a aussi salué A : la poignée de mains A-B et la poignée de mains B-A sont une seule et même poignée de mains.

   Nombre de poignées de mains X-Y : on choisit une personne à gauche (10 choix possibles), on choisit ensuite une personne à mettre à droite (9 choix possibles) et on divise le tout par deux.

   Il y a donc $10 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 45$ poignées de mains en tout.

2. Lorsque ce sont des couples qui se saluent, Madame ne salue pas Monsieur au sein d'un même couple mais elle salue toutes les autres femmes et tous les autres hommes et idem pour les hommes.

Nombre de poignées de mains X-Y : on choisit une personne à gauche (20 choix possibles), on choisit ensuite une personne à mettre à droite (18 choix possibles) et on divise le tout par deux car la poignée X-Y est la même que Y-X.
Il y a donc $20 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} = 180$ poignées de mains en tout.

3.2.9 Exercice 24

Les carreaux de même couleurs sont indiscernables. Il y a deux façons de voir ce problème

Première méthode

La première méthode consiste à s'imaginer tous les rectangles alignés les uns après les autres dans l'ordre et que l'on va peindre les 5 premiers en rouge, les 7 suivants en bleu, les 3 suivants en jaune et les 3 derniers en noir.

Vu comme ceci, le problème revient alors à déterminer le nombre de permutations qu'il y a de l'ensemble de carreaux, ce qui fait $18!$.

Mais attention, puisque les 5 premiers carreaux seront tous rouges (ce qui les rend indiscernables), leur ordre ne compte pas et il faut diviser par le nombre de permutations de cet ensemble de 5 carreaux, à savoir $5!$. De même, puisque 7 carreaux bleus sont indiscernables entre eux, il faut encore diviser par les permutations de cet ensemble de 7 éléments, à savoir $7!$. Il faut encore faire de même pour les permutations des deux derniers sous-ensembles de carreaux de taille 3.

Au final, le nombre de possibilités différentes de changer l'ordre des carreaux sera

$$\frac{18!}{5! \cdot 7! \cdot 3! \cdot 3!} = 294053760$$

Deuxième méthode

La deuxième méthode consiste à effectuer plusieurs choix successifs :

1. Choisir les 5 carreaux qui seront peints en rouge parmi 18, ce qui fait C_5^{18}.
2. Choisir les 7 carreaux qui seront peints en bleu parmi les 13 restants, ce qui fait C_7^{13}.
3. Choisir les 3 carreaux qui seront peints en jaune parmi 6 restants, ce qui fait C_3^6
4. Choisir les 3 carreaux qui seront peints en noir parmi les 3 derniers carreaux restants, ce qui fait $C_3^3 = 1$

Au final, le nombre de coloriages différents vaut donc

$$C_5^{18} \cdot C_7^{13} \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 = 294053760$$

Note : Remarquez que les deux calculs sont parfaitement équivalents. En effet,

$$\begin{aligned} C_5^{18} \cdot C_7^{13} \cdot C_3^6 \cdot C_3^3 &= \frac{18!}{13! \cdot 5!} \cdot \frac{13!}{6! \cdot 7!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!} \\ &= \frac{18!}{5! \cdot 7! \cdot 3! \cdot 3!} = 294053760 \end{aligned}$$

3.2.10 Exercice 25

Il faut tout d'abord remarquer que le mot `COMBINATOIRE` contient 2 lettres `I` et deux lettres `O`. De ce fait, le nombre d'anagrammes possibles correspond au nombre de permutations possibles des 12 lettres constituant le mot `COMBINATOIRE`. Mais comme il ne faut pas compter à double permutations des deux lettres `I`, il faut diviser par le nombre de permutations des `I` ($2! = 2$). Il faut faire pareil pour les permutations des deux lettres `O`.

On a donc au final le nombre suivant d'anagrammes :

$$\frac{12!}{2! \cdot 2!} = 119750400$$

3.2.11 Exercice 26

Désignons par la lettre P un lancer qui tombe sur "pile" et par F un lancer qui tombe sur "face".

1. Cela revient à se demander combien il y a de possibilités d'obtenir le mot FFFFFFFF. Il y a 8 "choix" à faire, mais à chaque fois, on ne peut choisir que "F". Du coup, le nombre de possibilités vaut

$$1^8 = 1$$

2. Cela revient à se demander combien il y a de possibilités de choisir deux positions parmi 8 dans lesquelles on mettra un F :

$$C_2^8 = 28$$

   Le reste des positions seront remplies par des P, ce qui ne constitue pas un choix : les P sont imposés dans toutes les autres cases

3. Même logique

$$C_3^8 = 56$$

4. Même logique

$$C_4^8 = 70$$

5. Il faut commencer par calculer le nombre de possibilités au total, sans contraintes, à savoir calculer le nombre de mots que l'on peut faire avec les lettres P et F avec répétitions

$$2^8 = 256$$

   Ensuite, il faut soustraire le nombre de mots qui ne contiennent pas de F

$$1^8 = 1$$

   et le nombre de mots qui contiennent exactement un F

$$C_1^8 = 8$$

   Au final, on a donc le nombre suivant de lancers qui contiennent au moins deux faces :

$$256 - 1 - 8 = 247$$

3.2.12 Exercice 27

1. Comme le 25 : il faut diviser le nombre de permutations des 8 lettres par le nombre de permutations des lettres qui reviennent plusieurs fois :

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

2. Ce cas est particulièrement difficile. Il faut commencer à placer le premier E. S'il est au début du mot, il reste 6 possibilités pour le deuxième, s'il est en deuxième position, il reste 5 positions possibles pour le deuxième E, s'il est en 3e position, il reste 4 positions possibles pour le deuxième E, etc ...

   Voici les 6 possibles où le premier E se trouve en début de mot

```
E _ E _ _ _ _ _
E _ _ E _ _ _ _
...
E _ _ _ _ _ _ E
```

   Voici les 5 possibilités où le premier E se trouve en deuxième position

```
_ E _ E _ _ _ _
_ E _ _ E _ _ _
...
_ E _ _ _ _ _ E
```

   Voici les 4 possibilités où le premier E se trouve en deuxième position :

```
_ _ E _ E _ _ _
_ _ E _ _ E _ _
...
_ _ E _ _ _ _ E
```

   On peut continuer ainsi jusqu'à la dernière position possible pour le premier E : à savoir la 6e position :

```
_ _ _ _ _ E _ E
```

   Il n'y a alors qu'une seule possibilité de placer le deuxième E : tout à la fin

   Si on fait le bilan des courses, il y a donc 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 façons de placer les E pour qu'ils ne soient pas à côté.

   Comme toutes les autres lettres sont différentes, il suffit de multiplier le nombre de placements possibles pour les E par le nombre de permutations des autres lettres, ce qui fait

$$21 * 6! = 15120$$

Note : Si on est malin, on peut faire le problème beaucoup plus simplement en comptant le nombre de possibilités où les E **sont** côte à côte :

```
E E _ _ _ _ _ _
_ E E _ _ _ _ _
_ _ E E _ _ _ _
...
_ _ _ _ _ _ E E

==> 7 possibilités de mettre les E côté à côté
```

Comme il y a C_2^8 possibilités de placer les lettres E (de choisir les cases où l'on mettre un E parmi les 8), le nombre de placement où les E ne sont pas côté à côté vaut

$$C_2^8 - 7 = 28 - 7 = 21$$

---

3. On peut donc construire le mot selon les étapes suivantes :
   (a) Choisir les 3 voyelles qui seront au début du mot

```
A E U ==> 6 permutations
A E E ==> 3 permutations
U E E ==> 3 permutations
```

   Ce qui fait en tout 12 permtuations pour le choix des 3 premières voyelles

   (b) placer les autres lettres : il y a alors $5!$ permutations possible des 5 dernières lettres qui sont toutes différentes

   Le nombre d'anagrammes vaut donc

$$12 * 5! = 1440$$

Chapitre 4 : Probabilités

4.1 Corrigés des exercices

information

- Corrigés personnels :
- Corrigés officiels

4.2 Théorie

4.2.1 Activité introductive

Lancer d'une pièce de monnaie

Simulation

4.2.2 Axiomes et propriétés du calcul des probabilités

Le calcul des probabilités est fondé sur les axiomes (principes) suivants

Axiomes

Tout le calcul des probabilités découle des trois axiomes ci-dessous

Axiome 1

La probabilité d'un événement E est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axiome 2

La probabilité de l'événement certain $E = \Omega$ est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 3

La probabilité de la réunion de deux événements **incompatibles** est égale à la somme de leur probabilité :

$$\text{Si } E \cap F = \emptyset, \text{alors } P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

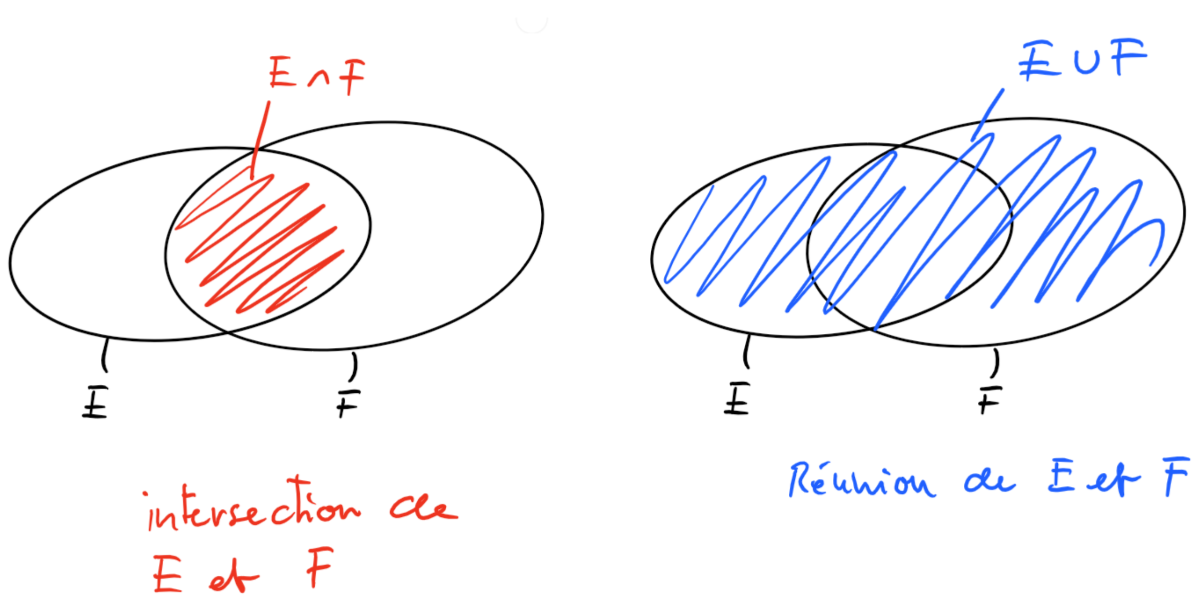
Théorèmes

Théorème 1

Lorsqu'on calcule la probabilité de la réunion de deux événements, on ne peut additionner les probabilités que si les événements sont incompatibles (voir axiome 3). Par contre, si l'intersection des événements n'est pas vide (s'ils possèdent des issues en commun), il faut éviter de les compter deux fois et l'on a

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Illustration



Exemples

Soient les événements
- $E =$ "Avoir une somme paire"
- $F =$ "Avoir une somme supérieure à 10"
- $E \cup F =$ "Avoir une somme supérieure à 10 **ou** une somme paire"
- $E \cup F =$ "Avoir une somme supérieure à 10 **et** une somme paire"

Théorème 2

Si l'on connait la probabilité d'un événement E, on peut calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{E}$ de la manière suivante :

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Théorème 3

La probabilité de l'événement impossible est nulle

$$P(\emptyset) = 0$$

Théorème 4

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des **événements incompatbles**, alors la probabilité de leur réunion est la somme de leur probabilité :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$$

Théorème 5

Soient $E, F \subset \Omega$ deux événements.

$$P(F \cap \overline{E}) = P(F) - P(F \cap E)$$

4.2.3 Probabilités conditionnelles

Exemple d'introduction

Question

On jète deux dés simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6 sachant que l'un des deux dés indique 2 ?

Univers de l'expérience

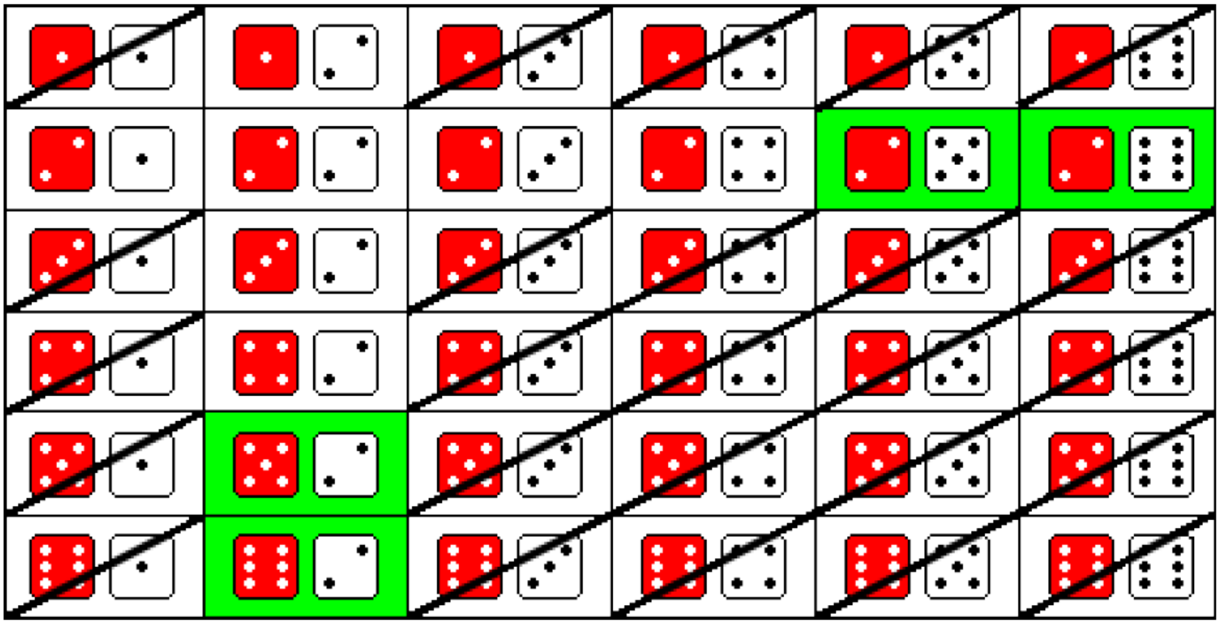
$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1;1);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\\ &(1;2);(2;2);(3;2);(4;2);(5;2);(6;2)\\ &(1;3);(2;3);(3;3);(4;3);(5;3);(6;3)\\ &(1;4);(2;4);(3;4);(4;4);(5;4);(6;4)\\ &(1;5);(2;5);(3;5);(4;5);(5;5);(6;5)\\ &(1;6);(2;6);(3;6);(4;6);(5;6);(6;6)\}\end{aligned}$$

Événements

— $E =$ "La somme des dés est supérieure à 6"
— $F =$ "Un des deux dés indique un 2"

Résolution sans les probabilités conditionnelles

Voici une représentation visuelle des 36 issues.



Comme on sait que l'un des deux dés au moins indique un 2, beaucoup d'issues ne sont pas envisageables en tant que "cas possibles". De ce fait, les issues qui ne sont pas envisageables sont biffées et les issues favorables sont en vert. Il y a donc 11 issues possibles (celles qui ne sont pas biffées) et 4 issues favorables. Cela nous donne donc le résultat suivant pour la probabilité d'avoir une somme supérieure à 6 sachant que l'un des deux dés indique un 2, noté $P(E|F)$:

$$P(E|F) = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}} = \frac{4}{11} \approx 36.36\%$$

Définition des probabilités conditionnelles

Définition (probabilité conditionnelle)

Soient E et F deux événements d'un univers Ω. Si $P(F) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de E par F ou "E étant donné F" le nombre noté $P(E|F)$ et tel que

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Résolution avec la Définition

On peut donc également calculer la probabilité d'avoir une somme supérieure à 6 sachant que l'un des deux dés indique un 2 de la manière suivante :

Événements

— $E =$ "La somme des dés est supérieure à 6"

— $F =$ “Un des deux dés indique un 2”
— $E \cap F =$ “La somme des dés est supérieure à 6 et l’un des deux dés indique un 2”

D’après la liste des issues, on voit que

— $P(E \cap F) = \frac{4}{36}$
— $P(F) = \frac{11}{36}$

De ce fait,

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{4}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{4}{11}$$

4.3 Corrigé détaillé de certains exercices

4.3.1 Exercice 4

1. L’événement “obtenir un produit de 12” est composé des issues suivantes

$$A = \{(2;6);(3;4);(4;3);(6;2)\}$$

La probabilité d’obtenir cet événement vaut donc

$$P(A) = \frac{\text{favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2. Voici une liste des 14 issues menant à l’événement B “Obtenir un produit inférieur ou égal à 6” :

```
1 1
1 2
1 3
1 4
1 5
1 6
2 1
2 2
2 3
3 1
3 2
4 1
5 1
6 1
```

La probabilité de l’événement vaut donc $P(B) = \frac{14}{36} = 0.3\overline{8}$.

3. L’événement C = “Obtenir un produit plus grand que 6” est exactement le contraire de l’événement B. On a donc $C = \overline{B}$. De ce fait,

$$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \approx 0.6\overline{1}$$

Pour obtenir un produit pair, il faut qu’au moins un des deux nombres soit pair. De ce fait, en supposant que le premier nombre est pair, il y a $3 \cdot 6 = 18$ possibilités.

```
2 1
2 2
2 3
2 4
2 5
2 6
4 1
4 2
4 3
4 4
4 5
4 6
6 1
6 2
6 3
6 4
6 5
6 6
```

Mais il y a encore d'autres possibilités d'obtenir un nombre pair : toutes celles où c'est le deuxième nombre qui est pair et le premier impair, à savoir

```
1 2
3 2
5 2

1 4
3 4
5 4

1 6
3 6
5 6
```

En tout, il y a donc $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$ issues qui mènent à un produit pair. La probabilité de l'événement $D =$ "obtenir un produit pair" vaut donc

$$P() = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

5. L'événement $E =$ "obtenir un produit impair" est le contraire de D et, de ce fait,

$$P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Remarque

Il aurait été bien plus facile de commencer par calculer la probabilité d'obtenir un produit impair, car les issues sont celles où les deux nombres sont impairs, ce qui fait $3 \cdot 3 = 9$. On aurait ensuite pu calculer la probabilité d'obtenir un produit pair en passant à l'événement contraire.

---

salut

4.3.2 Exercice 5

La taille de l'univers Ω, notée $|\Omega| = 6^3 = 216$

1. Soit A l'événement "Obtenir le même nombre sur les trois dés. On a

$$A = \{111, 222, 333, 444, 555, 666\}$$

et par conséquent $P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0.02\overline{7}$

2. Notons B_i l'événement "Obtenir une somme égale à i. On a alors
— $B_1 = \emptyset$
— $B_2 = \emptyset$
— $B_3 = \{111\}$
— $B_4 = \{211; 121; 112\}$
— $B_5 = \{122; 212; 221; 113; 131; 311\}$

Astuce : De manière générale, on peut déterminer déterminer combien il y a de manière d'obtenir une somme de la manière suivante.

(a) On commence par écrire les décompositions possibles de la somme sans tenir compte de l'ordre
— $5 = 1 + 2 + 2$
— $5 = 1 + 1 + 3$

(b) On détermine le nombre de permutations différentes de ces nombres qu'il est possible de faire. C'est comme si l'on demandait le nombre d'anagrammes possibles avec le mot ABB. Il s'agirait alors de calculer le nombre de permutations de 3 lettres (3!) et de diviser par les répétitions : (2!). Cela donne donc

$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

(a) Additionner le tout. On a donc
— 1-2-2 ==> $\frac{3!}{2!} = 3$ permutations
— 1-1-3 ==> $\frac{3!}{2!} = 3$ permutations
Ce qui donne au total $3 + 3 = 6$ issues possibles pour obtenir la somme 3

---

3. Soit C l'événement "Obtenir une somme supérieure ou égale à 5". Au lieu de faire tout l'inventaire des issues favorables à C, il est préférable de passer par le complément en déterminant la probabilité du contraire, à savoir "Obtenir une somme de 1, 2, 3 ou 4". On a donc

$$\overline{C} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = P_3 \cup P_4$$

Comme les événements P_i sont incompatibles deux à deux, on peut déterminer

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(P_3 \cup P_4) = 1 - \frac{1+3}{216} = \frac{216-4}{216} = \frac{212}{216} = \approx 0.981$$

4. Soit D l'événement "Obtenir un produit inférieur ou égal à 6". Pour déterminer D, considérons les événements P_i "Obtenir un produit égal à i". On a alors
— $P_1 = \{111\}$ ==> $|P_1| = 1$
— P_2 contient toutes les permutations différentes de 112 ==> $|P_2| = \frac{3!}{2!} = 3$
— P_3 contient toutes les permutations différentes de 113 ==> $|P_3| = \frac{3!}{2!} = 3$
— P_4 contient toutes les permutations différentes de 114 et de 122 ==> $|P_4| = \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 6$
— P_5 contient toutes les permutations différentes de 115 $|P_5| = \frac{3!}{2!} = 3$
— P_6 contient toutes les permutations différentes de 116 ==> $\frac{3!}{2!} = 3$ et toutes les permutations de 123 ==> $3! = 6$, ce qui fait en tout 9 possibilités.
Comme les événements P_i sont incompatibles et que $D = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6$, on a $|D| = 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 9 = 25$ cas favorables à l'événement D.
On a donc finalement que $P(D) = \frac{25}{216}$

5. L'événement E "obtenir un produit plus grand que 6" est le contraire de l'événement D. On a donc

$$P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{25}{216} = \frac{216-25}{216} = \frac{191}{216} \approx 0.884$$

6. Soit F l'événement "Le nombre 1 apparaît exactement une fois". Les cas favorables peuvent être dénombrés de la manière suivante
   (a) Choix de la position du 1 ==> 3 possibilités
   (b) 5 choix possibles pour chacune des deux cases restantes ==> 25 possibilités
   Au total, il y a donc $3 \cdot 5^2 = 75$ cas favorables. On a donc $P(F) = \frac{75}{216} \approx 0.347$
7. Soit G l'événement "Le nombre 1 apparaît au moiins une fois". Il est préférable de passer par le contraire "n'obtenir aucun 1". Les cas favorables à $\overline{G}$ peuvent être dénombrés de la manière suivante : $|\overline{G}| = 5^3 = 125$. Il y a donc $216 - 125 = 91$ cas favorables à G et

$$P(G) = \frac{91}{216} \approx 0.421$$

4.3.3 Exercice 6

a) A = " tirer le gros lot (6 corrects)"

Cas favorables : $C_6^6 = 1$

Cas possibles : C_6^{45}

$$P(A) = \frac{1}{C_6^{45}} = \frac{6! \cdot 39!}{45!} \cong 1.23 \cdot 10^{-7}$$

b) B = " cocher 4 numéros corrects"

Cas favorables : $C_4^6 \cdot C_2^{39}$ Numéros incorrects

Cas possibles : C_6^{45}

$$P(B) = \frac{C_4^6 \cdot C_2^{39}}{C_6^{45}} \cong 0.00136$$

4.3.4 Exercice 7

a) A = "tiercé dans l'ordre"

Cas favorables : A_3^3 les trois premiers

Cas possibles : $A_3^{15} = \frac{15!}{12!}$

$$P(A) = \frac{A_3^3}{A_3^{15}} \cong \frac{1}{\frac{15!}{12!}} = \frac{12!}{15!} \cong 0.000366 = 0.037\%$$

b) B = "tiercé dans n'importe quel ordre"

Cas favorables : $C_3^3 = 1$

Cas possibles : C_3^{15}

$$P(B) = \frac{1}{C_3^{15}} \cong 0.0022 \cong 0.22\%$$

4.3.5 Exercice 8

a) $A =$ "4 as"

Cas favorables : $C_4^4 \cdot C_5^{32} = 1 \cdot \frac{32!}{27! \cdot 5!}$

Cas possibles : $C_9^{36} = \frac{36!}{27! \cdot 9!}$

$$P(A) = \frac{C_4^4 \cdot C_5^{32}}{C_9^{36}} = \frac{2}{935} \cong 0.00214 = 0.214\%$$

b) $B =$ "4 rois"

$P(B) = P(A) \cong 0.214\%$

c) $C =$ "4 as et 4 rois"

Cas favorables : $C_4^4 \cdot C_4^4 \cdot C_1^{28} = C_1^{28}$

Cas possibles : C_9^{36}

$$P(C) = \frac{C_1^{28}}{C_9^{36}} \cong 2.97 \cdot 10^{-7}$$

d) $D =$ "Exactement 1 As et 1 Roi"

Cas favorables : $\underbrace{C_1^4}_{\text{1 As parmi 4}} \cdot \underbrace{C_1^4}_{\text{1 Roi parmi 4}} \cdot \underbrace{C_7^{28}}_{\text{Reste 7 cartes à choisir parmi } 36-4-4=28}$

cas possibles : $|\Omega| = C_9^{36}$

$$P(C) = \frac{4 \cdot 4 \cdot C_7^{28}}{C_9^{36}} \cong 0.201 \cong 20.1\%$$

e) $E =$ "Aucune carte rouge"

↳ # cas favorables : C_9^{18} — $18 = 36 - \boxed{9 \text{ carreaux} - 9 \text{ coeurs}}$ (cartes rouges)

possibles : C_9^{36}

$$P(E) = \frac{C_9^{18}}{C_9^{36}} \cong 0.000516 = 0,0516\%$$

4) F = "Suite de 5 cartes d'une couleur + 4 cartes d'une autre couleur"

↳ 4 possibles : Pique, Trèfle, Coeur, Carreau

Cas favorables :

(1) Choisir 1e couleur → $C_1^4 = 4$

(2) Suite de 5 cartes de la 1e couleur : 5

6 7 8 9 10 J Q K A

5 suites possibles dans une couleur

(3) Choix 2e couleur : $C_1^3 = 3$

(4) Suite de 4 cartes 2e couleur : → 6

6 7 8 9 10 J Q K A

6 suites possibles dans une couleur

Cas favorables : $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6$

Donc $P(F) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6}{C_9^{36}} \cong 3.82 \cdot 10^{-6} \cong 3.82 \cdot 10^{-4}\%$

4.3.6 Exercice 9

Astuce :

- Lorsque l'on fait un tirage **simultané**, on ne tient pas compte de l'ordre de tirage puisque toutes les boules sont tirées en même temps.
- Puisque tous les objets sont des entités différentes, il faut imaginer qu'ils ont deux attributs : un couleur et un numéro. On pourrait donc représenter tout le sachet de la manière suivante

$$\{R_1; R_2; R_3; B_1; B_2; B_3; B_4; J_1; J_2; J_3; J_4; J_5\}$$

- Dans tout l'exercice, on tire toujours trois boules dans un sac de 12. Le nombre de possibilités sans contrainte (cas possibles au dénominateur de la probabilité) est donc toujours

$$C_3^{12} = 220$$

1. Soit A l'événement "Les trois objets sont jaunes"

Cas favorables

Nombre de combinaisons différentes de choix de 3 "J" parmi les 5, sans tenir compte de l'ordre C_3^5

$$P(A) = \frac{C_3^5}{C_3^{12}} = 0.0\overline{45}$$

2. Soit B l'événement "tirer un objet de chaque couleur"

Cas favorables
Il y a $C_1^3 = 3$ possibilités de tirer un rouge, $C_1^4 = 4$ possibilités de tirer un bleu et $C_1^5 = 5$ possibilités de tirer un jaune. De ce fait, le nombre de possibilités de tirer les lettres RBJ est, sans tenir compte de l'ordre, $C_1^3 \cdot C_1^4 \cdot C_1^5$.

$$C_1^3 \cdot C_1^4 \cdot C_1^5$$

De ce fait, la probabilité vaut

$$P(B) = \frac{C_1^3 \cdot C_1^4 \cdot C_1^5}{C_3^{12}} = 0.\overline{27}$$

3. Soit C l'événement "Aucun objet n'est rouge".

Attention : Le contraire de "Aucun objet n'est rouge" n'est pas "Tous les objets sont rouges" mais "Au moins un objet est rouge".

Cas favorables
Puisque l'on ne peut pas tirer un objet rouge, il n'y a que 9 objets possibles. Il y a donc 9 objets parmi lesquels choisir les 3 objets, à savoir C_3^9.

De ce fait, la probabilité vaut

$$P(C) = \frac{C_3^9}{C_3^{12}} = 0.3\overline{81}$$

4. Soit D l'événement "Au moins un objet rouge".
Les événements C et D sont contraires. De ce fait, la probabilité vaut

$$P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{C_3^9}{C_3^{12}} = 0.6\overline{18}$$

5. Soit E l'événement "Au moins deux objets bleus".

Cas favorables
Il y a deux cas à traiter

(a) Deux objets bleus et un autre objet : $C_2^4 \cdot C_1^8$

(b) Trois objets bleus : C_3^4

Au final, le nombre de cas favorables est donc

$$C_2^4 \cdot C_1^8 + C_3^4 = 52$$

De ce fait, la probabilité vaut

$$P(E) = \frac{C_2^4 \cdot C_1^8 + C_3^4}{C_3^{12}} = 0.2\overline{36}\overline{3}$$

6. Soit F l'événement "Au moins un objet rouge".
   Les événements E et F sont contraires. De ce fait, la probabilité vaut

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{C_2^4 \cdot C_1^8 + C_3^4}{C_3^{12}} = 0.76\overline{36}$$

4.3.7 Exercice 10

a) $P(JJJ) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cong 0.0723$

Nombre d'anagrames de RBJ

b) $P(1R/1B/1J) = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \boxed{3!} = \frac{5}{24} = 0.208\overline{3}$

c) $P(0R) = \left(\frac{9}{12}\right)^3 \cong 0.422$

d) $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \left(\frac{9}{12}\right)^3 \cong 0.578$

e) $P(E) = 1 - P(0B) - P(1B) = 1 - \frac{8}{27} - \frac{12}{27} \cong 0.259$

↳ $P(0B) = \left(\frac{8}{12}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$P(1B) = \frac{4}{12} \cdot \left(\frac{8}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} \cdot 3$

f) $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{20}{27} \cong 0.741$

4.3.8 Exercice 11

a) $A =$ "1G et 2P"

$P(A) = P(1G \text{ et } 2P) = \dfrac{C_1^5 \cdot C_2^{15}}{C_3^{20}} \cong 0.461$

b) $B =$ "Au moins 1 G" = "1, 2 ou 3 G"

↳ $\overline{B} =$ "tous les lots perdants" = "PPP"

↳ Cas favorables : C_3^{15}

Cas possibles : C_3^{20}

$P(\overline{B}) = \dfrac{C_3^{15}}{C_3^{20}} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{C_3^{15}}{C_3^{20}} \cong 0.601$

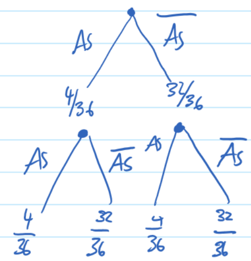
c) $C =$ "Au moins 2 lots" = "2 ou 3 lots"

$$\boxed{\begin{array}{c} C \cup A = B \text{ et } C \cap A = \emptyset \\ P(C) + P(A) = P(B) \end{array}} \Rightarrow P(C) = P(B) - P(A) \cong 0{,}1404$$

4.3.9 Exercice 12

a) • $P(2\,As) = \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \cong 0.0123$

• $P(\text{“1 seul As”}) = P(A\bar{A})\cdot 2! = \frac{4}{36}\cdot\frac{32}{36}\cdot 2! = \frac{16}{81} \cong 0.1975$



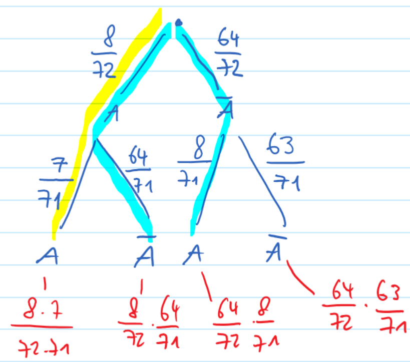
b) • $P(\text{“2As”}) = P(AA) = \frac{8}{72}\cdot\frac{7}{71} = \frac{7}{639} \cong 0.011$

• $P(\text{“1 seul As”}) = \frac{8\cdot 64}{72\cdot 71}\cdot \boxed{2!}$

$= \frac{128}{639}$

$= 0.201$

Anagrammes de $\bar{A}A$
= Nombre de chemins dans l'arbre avec A et $\bar{A}$



Variante pour le b)

Comme dans le b), on peut considérer que le tirage est simultané, il est également possible de le faire comme l'exercice 9 ou 11 :

b) Variante

• “2 As” → AA
- favorables : C_2^8
- possibles : C_2^{72}

$P(\text{“2 As”}) = \frac{C_2^8}{C_2^{72}} = \frac{7}{639} \cong 0.011$

8 As dans les 72 cartes
72 − 8 = 64

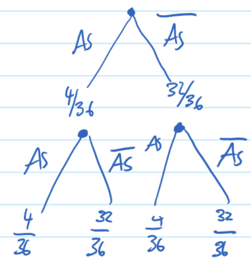
• “Exactement 1 As”
- favorables : $C_1^8 \cdot C_1^{64}$
- possibles : C_2^{72}

$P(\text{Exact. 1 As}) = \frac{C_1^8 \cdot C_1^{64}}{C_2^{72}} = \frac{8\cdot 64}{C_2^{72}} = \frac{128}{639}$

4.3.10 Exercice 12

a) • $P(2\,As) = \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \cong 0.0123$

• $P(\text{"1 seul As"}) = P(A\bar{A})\cdot 2! = \frac{4}{36}\cdot\frac{32}{36}\cdot 2! = \frac{16}{81} \cong 0.1975$



b) • $P(\text{"2 As"}) = P(AA) = \frac{8}{72}\cdot\frac{7}{71} = \frac{7}{639} \cong 0.011$

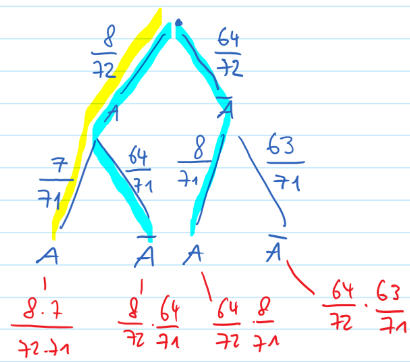
• $P(\text{"1 seul As"}) = \frac{8\cdot 64}{72\cdot 71}\cdot \boxed{2!}$

$= \frac{128}{639}$

$= 0.201$

Anagrammes de $\bar{A}A$

= Nombre de chemins dans l'arbre avec A et $\bar{A}$



4.3.11 Exercice 14

a) $P(VDC) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50} = 0.18$

b) $P(\bar{V}\bar{D}\bar{C}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400} = 0.0475$

c) $\bar{V} \cap D \cap C =$ " Écouter toute l'émission sauf la variété "

d) $P($Au moins 2 émissions$)$

$$= P(VDC) + P(VD\bar{C}) + P(V\bar{D}C) + P(\bar{V}DC)$$

$$= \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}_{} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{18}{400} + \frac{7}{50}$$

$$= 0.635 = 63.5\% \Rightarrow \text{Va continuer}$$

e) i. $VDC \rightarrow 200'000 \cdot 18\% = 36'000$

ii. $P(VD\bar{C} \cup V\bar{D}C \cup \bar{V}DC) = \frac{27}{100} + \frac{18}{400} + \frac{7}{50} = \frac{91}{200} = 45.5\%$

$\hookrightarrow 200'000 \cdot P(\text{"Exactement 2"}) = 200'000 \cdot 45.5\% = 91'000$

iii. $P(\text{"Exactement 1 partie"}) =$

$= P(V\bar{D}\bar{C} \cup \bar{V}D\bar{C} \cup \bar{V}\bar{D}C)$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20}\right)$

$= \frac{102}{400} + \frac{12}{200} + \frac{1}{400} = 0.3175 = 31.75\%$

$\Rightarrow 200'000 \cdot 31.75\% = 63500$

iv. $P(\bar{V}\bar{D}\bar{C}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400} = 9'500$ personnes

4.3.12 Exercice 15

a) A = Alain touche la cible $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

$\bar{A}$ = Alain manque la cible $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

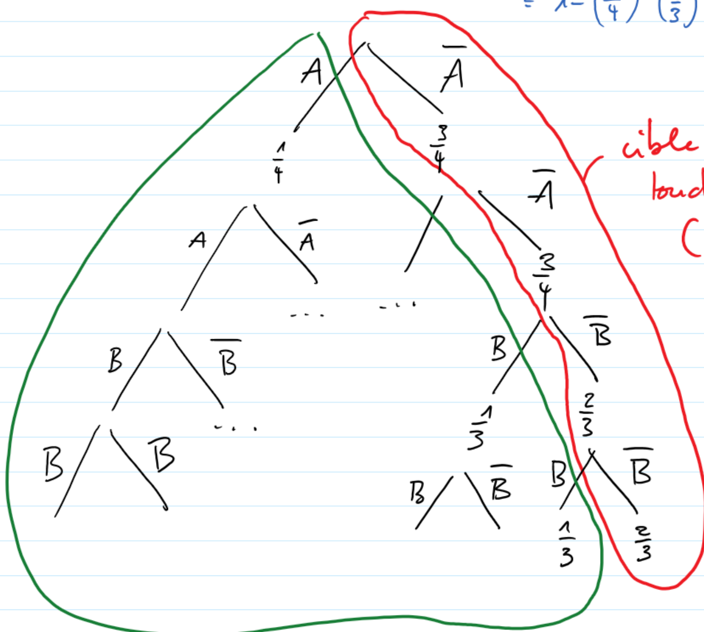
B = Boris touche la cible $\rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

$\bar{B}$ = Boris manque la cible $\rightarrow P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

P("cible pas touchée") $= P(\bar{A}\bar{A}\bar{B}\bar{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\Rightarrow$ P("cible touchée au moins 1 fois") $= 1 - P(\bar{A}\bar{A}\bar{B}\bar{B})$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.75 = 75\%$

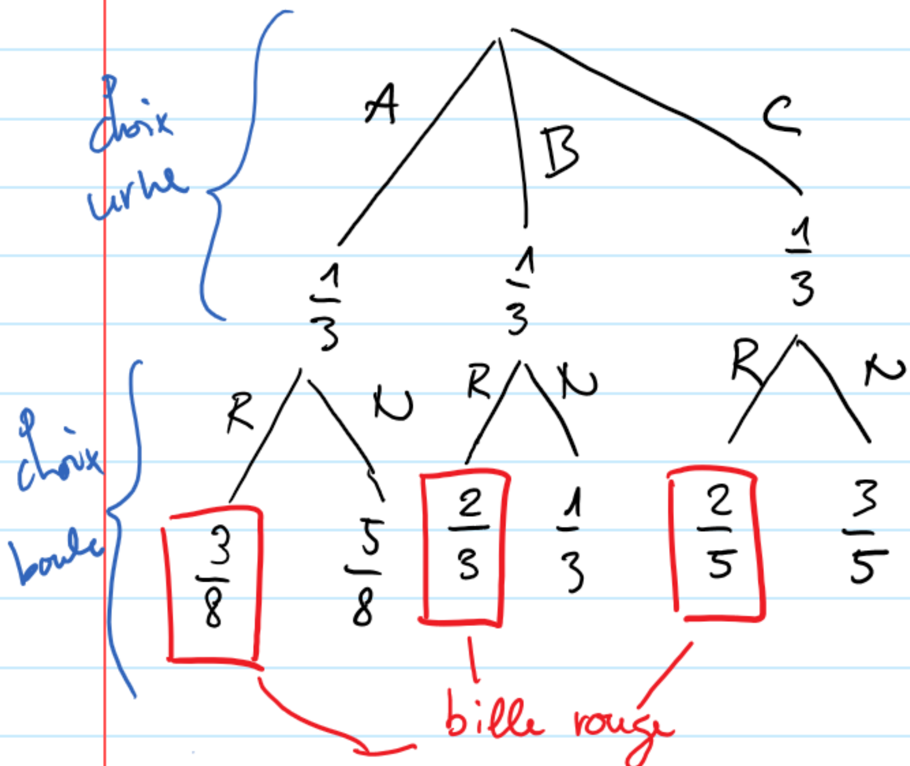


cible jamais touchée ($\bar{A}\bar{A}\bar{B}\bar{B}$)

$P(\bar{A}\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

cible touchée au moins une fois

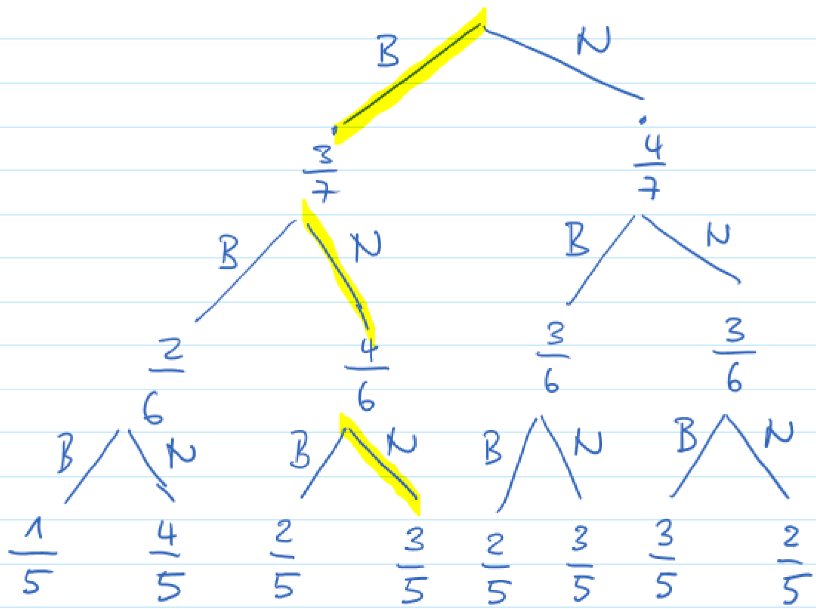
4.3.13 Exercice 16



$$P(\text{"bille rouge"}) = P(AR) + P(BR) + P(CR)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) = 0.480\overline{5}$$
$$\simeq 48.06\,\%$$

4.3.14 Exercice 17

total : 3+4=7 boules



a) $P(BNN) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35} \cong 0.1714$

b) $P(\underbrace{1B \text{ et } 2N}_{\text{dans n'importe quel ordre}}) = P(BNN) + P(NBN) + P(NNB)$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$

$= P(BNN) \cdot \boxed{\frac{3!}{2!}} = 3 \cdot \frac{6}{35} = \frac{18}{35} \cong 0.5143$

Nombre d'anagrammes de BNN = # chemins avec 1 B et 2N dans l'arbre

c) $P(3 \text{ même couleur}) = P(BBB) + P(NNN)$

$= \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}_{\frac{C_3^3}{C_3^7}} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6+24}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$

Alternative $\begin{cases} P(BBB) = \dfrac{C_3^3}{C_3^7} \\ P(NNN) = \dfrac{C_3^4}{C_3^7} \end{cases}$ $\dfrac{C_3^3}{C_3^7} + \dfrac{C_3^4}{C_3^7} = \dfrac{C_3^3 + C_3^4}{C_3^7} = \dfrac{1}{7}$

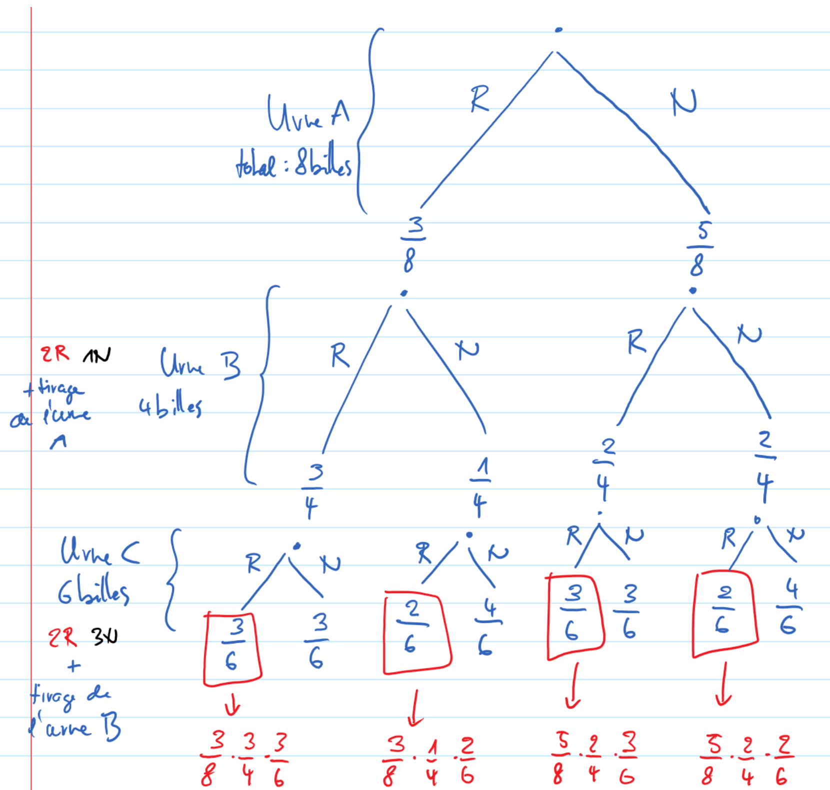
d) $P(\text{"Au moins une boule blanche"}) = 1 - P(NNN)$

$= 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{\ldots} = \frac{31}{\ldots}$

Alternative pour le b)

$$P(\text{"1 blanche et 2 Noirs"}) = \frac{C_1^3 \cdot C_2^4}{C_3^7} = \frac{18}{35}$$

4.3.15 Exercice 18

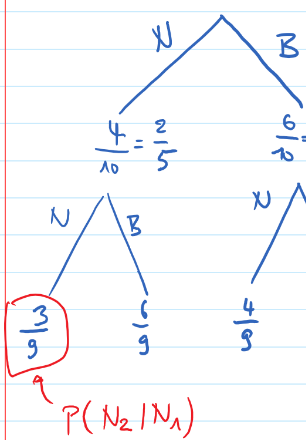


$$P(\text{tirer une rouge à la fin}) = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{64} + \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{48} = 0.4323 = \underline{\underline{43.23\%}}$$

4.3.16 Exercice 19

Soit N_i l'événement "tirer Noir au tirage i"
$B_i = \overline{N_i}$ — " — Blanc — "



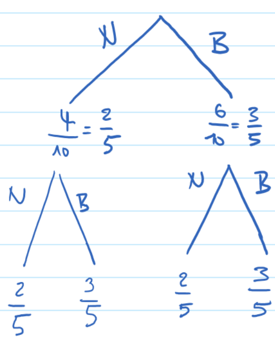
a) $P(N_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$

b) $P(N_2) = P(N_2 \cap N_1) + P(N_2 \cap B_1)$
$= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5}$
$= \frac{6 + 12}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 40\%$

c) $P(N_1 \cap N_2) = P(NN) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \cong 13.3\%$

4.3.17 Exercice 20

Soit N_i l'événement "tirer Noir au tirage i"
$B_i = \overline{N_i}$ — " — Blanc — "



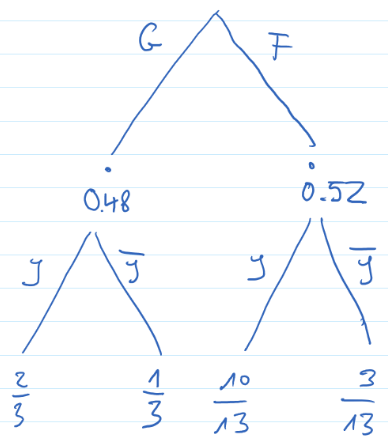
a) $P(N_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$ → Ne change pas

b) $P(N_2) = P(N_2 \cap N_1) + P(N_2 \cap B_1)$
$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$
$= \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 40\%$ → Ne change pas!

c) $P(N_1 \cap N_2) = P(NN) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$
$= \frac{4}{25} = 0.16 = 16\%$

4.3.18 Exercice 21

Résolution avec arbre



$P(F) = 0.52 = \frac{x}{500} \Rightarrow x = \boxed{260}$

nombre de filles

$P(J \mid F) = \frac{200}{260} = \frac{10}{13}$

a) $P(J) = P(G \cap J) + P(F \cap J) = 0.48 \cdot \frac{2}{3} + 0.52 \cdot \frac{10}{13} = 0.72$

b) $P(G \cap J) = 0.48 \cdot \frac{2}{3} = 0.32$

c) $P(G \mid J) = \frac{P(G \cap J)}{P(J)} = \frac{0.32}{0.72} = 0.\bar{4}\ \%$

d) $P(J \mid G) = \frac{P(G \cap J)}{P(G)} = \frac{0.32}{0.48} = \frac{2}{3}$

Résolution avec tableau

Événements

G = "choisir un garçon"

F = $\bar{G}$

J = "la personne choisie fait du jogging"

a) $P(J) = \frac{360}{500} = 0.72 = \underline{\underline{72\%}}$

b) $P(G \cap J) = \frac{160}{500} = 0.32 = \underline{\underline{32\%}}$

c) $P(G \mid J) = \frac{160}{360} = \frac{P(G \cap J)}{P(J)} = \frac{0.32}{0.72} = 0.\bar{4} = \underline{\underline{44.\bar{4}\%}}$

d) $P(J \mid G) = \frac{160}{240} = \frac{P(G \cap J)}{P(G)} = \frac{0.32}{0.48} = \frac{2}{3} = 0.\bar{6} = \underline{\underline{66.\bar{6}\%}}$

$P(G) = \frac{240}{500} = 0.48$

Alternative

$P(F) = 0.52 \Rightarrow P(G) = P(\bar{F}) = 1 - 0.52 = 0.48$

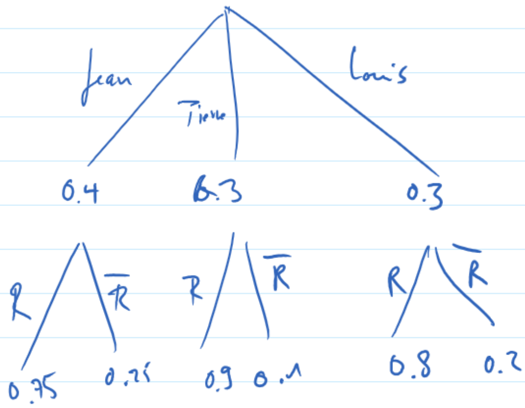
	G	F	total
J	$\frac{2}{3} \cdot 240 = 160$	200	
$\bar{J}$			
total	$48\% \cdot 500$ 240	$52\% \cdot 500 = 260$	500

Compléter les cases manquantes

	G	F	total
J	$\frac{2}{3} \cdot 240 = 160$	200	360
$\bar{J}$	80	60	140
total	240	260	500

filles = $52\% \cdot 500 = 260$

4.3.19 Exercice 22



a) $P(J\,|\,\overline{R}) = \dfrac{P(J \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.4 \cdot 0{,}25}{0.19} = \dfrac{10}{19}$

↳ $P(\overline{R}) = 0.4 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.19$

b) $P(\text{Pierre}\,|\,\overline{R}) = \dfrac{P(\text{Pierre} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.3 \cdot 0.1}{0.19} = \dfrac{0.03}{0.19} = \dfrac{3}{19}$

c) $P(\text{Louis}\,|\,\overline{R}) = \dfrac{P(\text{Louis} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.3 \cdot 0.2}{0.19} = \dfrac{6}{19}$

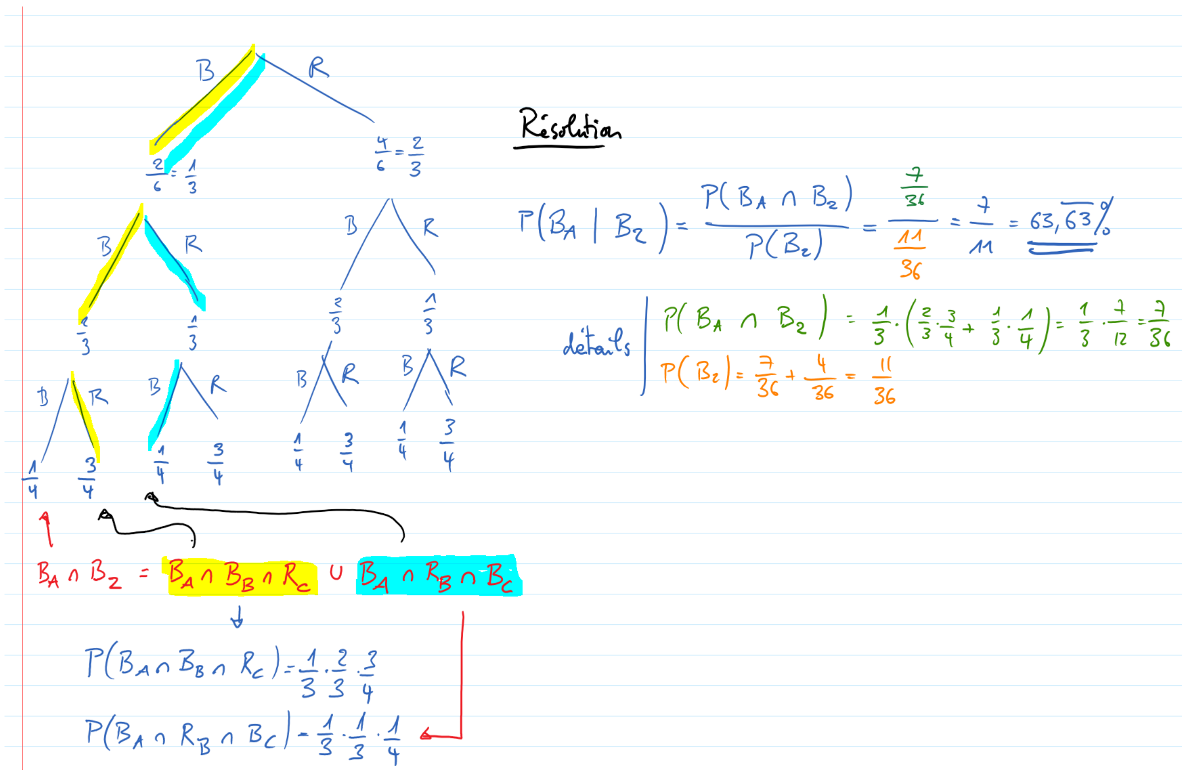
4.3.20 Exercice 23

Définition des événements

Soient les événements suivants

- B_i => “Tirer une boule blanche dans l’urne i“
  - Exemple : B_A => “Tirer une boule blanche dans l’urne A“
- $R_i = \overline{B_i}$ => “Tirer une boule rouge dans l’urne i“
- B_2 => “Tirer exactement deux boules sur l’ensemble du tirage”

Résolution



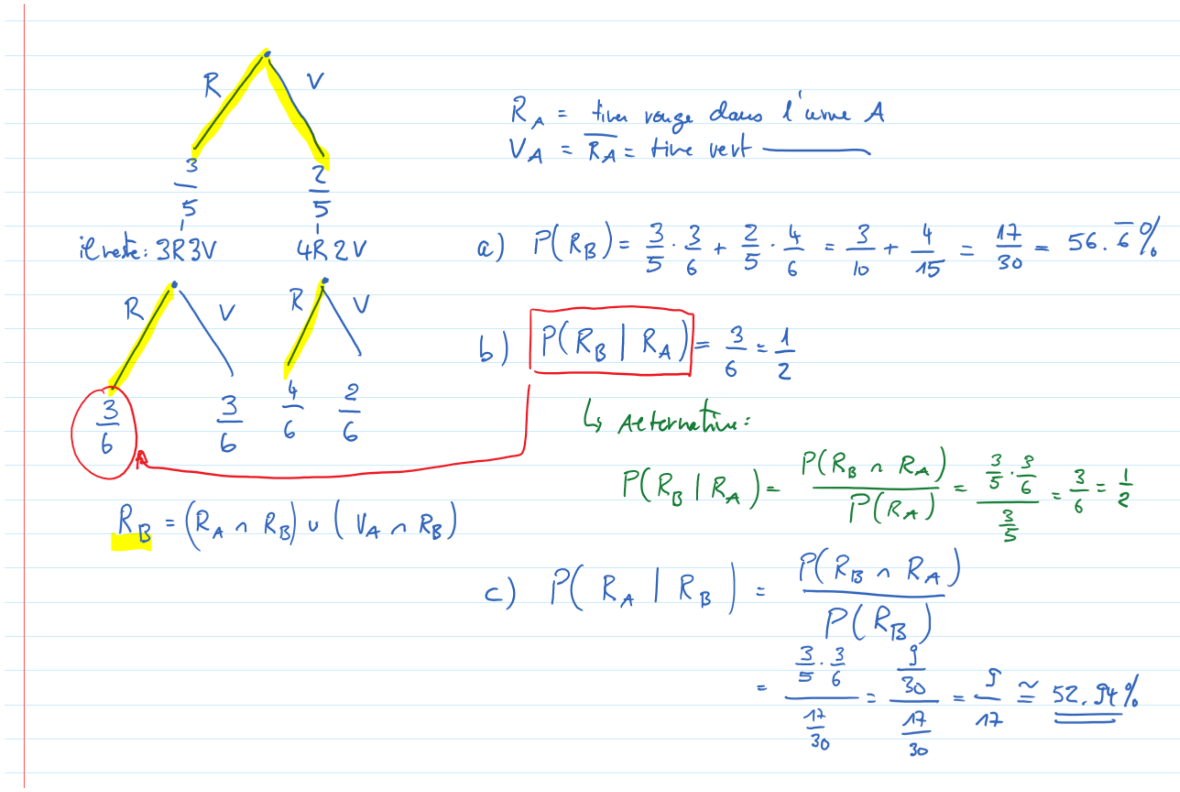
4.3.21 Exercice 24

Définition des événements

Soient les événements suivants

- B_i => “Tirer une boule blanche dans l’urne i“
  - Exemple : B_A => “Tirer une boule blanche dans l’urne A“
- $V_i = \overline{B_i}$ => “Tirer une boule rouge dans l’urne i“

Résolution



4.4 Corrigé des exercices 6 et suivants

Le corrigé des autres exercices se trouvent pour l'instant sur le lien suivant : https://paper.dropbox.com/doc/Corrigs-probabilits-M6sWH09jDaSxxdVbI2opQ