Modelli Probabilistici

Luca Panariello

21 settembre 2024

Sommario

Questa dispensa è stata creata per l'insegnamento di Metodi Probabilistici per le Applicazioni (MAT/06) del corso di laurea in Matematica tenuto dal Prof. Stefano Pagliarani e selezionabile come insegnamento a scelta al terzo anno per il corso di laurea in Informatica.

Ho cercato di spiegare definizioni e dimostrazioni in modo dettagliato linkando teoremi e definizioni usate per ogni passaggio.

Info sul Corso:
Questo corso tratta di

- Processi Stocastici - Martingale e Markov
- Applicazioni a Finanza Matematica - Modelli di Mercato e Derivati
- Controllo Ottimo Stocastico - Minimizzazioni di funzioni tramite programmazione dinamica

È adatto a chi è piaciuto il corso di probabilità e statistica, tenete conto che è un corso pensato per matematici e di conseguenza molto teorico.

Purtoppo per mancanza di tempo non ho coperto tutta la parte del controllo ottimo stocastico (3-4 lezioni) e vi è lo stretto necessario per il modello di black-scholes e trinomiale (3-4 Lezioni).

Le lezioni durano 2 ore e si svolgono al secondo semestre due volte a settimana, alla lavagna, sono disponibili dei lucidi del 2020 sul virtuale del corso. È fortemente consigliato seguirle così da capire meglio gli argomenti e le dimostrazioni.

Il libro di riferimento è *Pascucci, Andrea. Calcolo stocastico per la finanza. Springer Science & Business Media, 2008*

Esame:
L'esame è un orale alla lavagna con argomento a scelta dello studente, può essere l'introduzione di una definizione con propritá, oppure una dimostrazione dopodiché il prof passerà a fare 3-4 domande su argomenti correllati se ce ne sono.

Struttura Capitoli:
Il Capitolo 1 non è trattato a lezione, ma sono dei prequisiti acquisiti nel corso di probabilità e statistica a Matematica.
Poi il prof esporrà in ordine capitoli 6, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9.

Contatti:
Per altre domande o errori trovati in questa dispensa potete contattarmi su telegram: @Lukirby.

Indice

Capitolo 1

Teoria della Misura e Probabilità

1.1 Sigma-Algebre

Definizione 1.1.1: Sigma-Algebra

Sia Ω uno insieme non vuoto, con $\mathcal{P}(\Omega)$ suo insieme delle parti, allora si può definire una **$\boldsymbol{\sigma}$-algebra** $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:

- Ω è un evento dunque $\Omega \in \mathcal{F}$
- se A è un evento $\implies A \in \mathcal{F}$ e $A^c \in \mathcal{F}$
- se $A_1, \ldots, A_n$ sono una successione di eventi $\implies \bigcup_{i=1}^{n} (A_i) \in \mathcal{F}$

Definizione 1.1.2: Spazio Misurabile

Sia Ω insieme e sia $\mathcal{F}$ σ-algebra, allora la coppia $(\Omega,\mathcal{F})$ è definita **Spazio Misurabile**.

Definizione 1.1.3: Sigma-Algebra Generata

Sia $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega\}$ famiglia di sottoinsiemi di Ω. Allora si può definire $\sigma(\mathcal{A})$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ come:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap \mathcal{F}_i \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}_i, \forall i \right\}$$

$\sigma(\mathcal{A})$ è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{A}$.

Notazione 1.1.4: Sigma-Algebra di Borel

Sia $\mathcal{B}$ σ-algebra, se essa è la più piccola σ-algebra contente una famiglia di insiemi, $\mathcal{B}$ è chiamata **σ-algebra di Borel**. I suoi elementi sono chiamati boreliani.

Definizione 1.1.5: Spazio Boreliano

Sia Ω spazio compionario e sia $\mathcal{B}$ σ-algebra di Borel, allora la coppia $(\Omega,\mathcal{B})$ è definita **Spazio Boreliano**.

Esempio 1.1.6: Reali Boreliani

Sia $\mathbb{R}$ spazio reale, allora è possibile definite lo spazio boreliano $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dove gli elementi di $\mathcal{B}$ sono i boreliani definiti come l'insieme degli aperti, chiusi, semiaperti, semichiusi e le loro combinazioni di $\mathbb{R}$.
Ad esempio l'intervallo $[a, b]$ è un boreliano.

Notazione 1.1.7: Funzioni Misurabili

Siano $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Psi, \mathcal{G})$ spazi misurabili, allora l'insieme delle **Funzioni Misurabili** su $\mathcal{F}$ è indicato con $m\mathcal{F}$ ed è definito:

$$m\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \Psi \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{G}\}$$

Ovvero l'insieme di quelle funzioni invertibili che per ogni evento A di $\mathcal{G}$ si possa ricavare l'"evento inverso" appartenete a $\mathcal{F}$.

Definizione 1.1.8: Filtrazione di Sigma-Algebre

Sia $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Sia $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di σ-algebre t.c.

$$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F} \quad \forall i, j \in \mathcal{I} \land i < j$$

$(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{I}}$ è chiamata **Filtrazione** su $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}_i$ contiene tutti gli eventi che sono osservati a tempo i.

1.2 Misure di Probabilità

Definizione 1.2.1: Misura

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, allora si può definire una **Misura** $m : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ tale che:

- $m(\emptyset) = 0$
- $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \quad \forall A_i, A_j \in \mathcal{F} \wedge A_i \perp\!\!\!\perp A_j$

Definizione 1.2.2: Misure Assolutamente Continue

Siano $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ misure su $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, allora si può dire che $\mathbb{P}$ è **Assolutamente Continua** rispetto a $\mathbb{Q}$ e indicata con $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ se soddisfa:

$$\mathbb{P}(E) = 0 \implies \mathbb{Q}(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$$

Definizione 1.2.3: Misure Equivalenti

Siano $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ misure su $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, si dice che $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ sono **Misure Equivalenti** indicato con $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ se soddisfa:

$$\mathbb{P} << \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} << \mathbb{P}$$

Inoltre $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.2.4: Funzione Semplice

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, $n \in \mathbb{N}$ e una misura $s : \Omega \to \mathbb{R}$. Si definiscano i seguenti sottoinsiemi $(A_1, \ldots, A_n)$ tali che $A_i \in \mathcal{F}$ e

$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid s(\omega) = a_i \in \mathbb{R}\}$$

Allora s è chiamata **Funzione Semplice** se rispecchia:

$$s(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(E) \quad \forall E \in \mathcal{F}$$

Notazione 1.2.5: Integrale di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, con $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione misurabile, e m misura su $\mathcal{F}$, allora si può definire l'**Integrale di Lebesgue** di f rispetto a m come:

$$\int_\Omega f dm = \int_\Omega f(\omega) dm(\omega)$$

Questo tipo di integrale è la generalizzazione dell'integrale di Riemann per funzioni misurabili e permette di calcolare l'area sottesa da una funzione su un insieme misurabile.

Definizione 1.2.6: Integrazione di Lebesgue Semplice

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, con $s : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione semplice, e m misura su $\mathcal{F}$, allora si può definire l'**Integrazione di Lebesgue Semplice** di s rispetto a m come:

$$\int_E sdm = \int_E s(\omega) dm(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i \cap E) \forall E \in \mathcal{F}$$

Teorema 1.2.7: Teorema del Cambio di Spazio Misurabile

Siano $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Psi, \mathcal{G})$ spazi misurabili, $h : \Omega \longrightarrow \Psi$ tale che $h \in m\mathcal{F}$ e invertibile, e siano f e g misure su $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ rispettivamente tali che:

$$g(\psi) = f(h^{-1}(\psi)) \quad \forall \psi \in \Psi$$

Allora per ogni funzione reale $F \in m\mathcal{G}$ misurabile su $\mathcal{G}$ non negativa, si ha che:

$$\int_\Omega F(h(\omega)) df(\omega) = \int_\Psi F(\psi) dg(\psi)$$

Definizione 1.2.8: Misura di Probabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, allora si può definire una misura $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ chiamata come **Misura di Probabilità** che abbia come aggiunta valgono le seguenti proprietà:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$

Definizione 1.2.9: Spazio di Probabilità

Sia Ω insieme non vuoto, $\mathcal{F}$ σ-algebra e $\mathbb{P}$ misura di probabilità, allora la tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è definita **Spazio di Probabilità**.

1.3 Variabili Aleatorie

Definizione 1.3.1: Variabile Aleatoria Generale

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile e e $(\Psi, \mathcal{B})$ spazio boreliano, allora si può definire una **Variabile Aleatoria Generale** $X : \Omega \to \Psi$ tale che $X \in m\mathcal{F}$.
Inoltre è possibile definire gli eventi associati a X:

$$(X \in H) = X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in H\} \quad \forall H \in \mathcal{B}$$

Definizione 1.3.2: Distribuzione di Probabilità di una VA

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $(\Psi, \mathcal{B})$ spazio boreliano e X variabile aleatoria, allora si può definire la **Distribuzione di Probabilità** di X come funzione $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ t.c.:

$$\mathbb{P}_X(H) = \mathbb{P}(X \in H) = \int_H d\mathbb{P} \quad \forall H \in \mathcal{B}$$

Osservazione 1.3.3: Distribuzione di Probabilità di una VA

Dato una variabile aleatoria generale X e $\mathbb{P}_X$ la sua distribuzione di probabilità su intervallo di valori H si ha che:

$$\mathbb{P}_X(H) = \mathbb{P}(X \in H) = \int_{X \in H} d\mathbb{P}$$

Ovvero la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori in H può essere definita come l'integrale della misura di probabilità su quei valori in H.

In caso X sia una variabile aleatoria discreta allora gli eventi associati a X sono singoletti indicati con $(X = x_i) = \{\omega \mid \mathbf{1}_{X \in H}(\omega) = \delta_H(x_i)\}$, inoltre si può notare come $\mathbf{1}_{(X \in H)}$ è una funzione semplice infatti $\mathbf{1}_{(X \in H)} = \sum_{x \in H} \mathbf{1}_{(X=x)}(\omega) \cdot \delta_H(x)$, dunque usando l'integrazione di Lebesgue Semplice si ha:

$$\int_{X \in H} d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \mathbf{1}_{X \in H}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \overset{1.2.6}{=} \sum_{x_i \in H} \mathbb{P}(X = x_i \cap X \in H) =$$
$$\sum_{x_i \in H} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in H} p_X(x_i)$$

Mentre in caso X sia una variabile aleatoria continua (assolutamente) allora vi è una funzione misurabile su $\mathbb{R}$ indicata con f_X e il cui integrale su $\mathbb{R}$ da 1. Allora si può costruire la misura $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$:

$$d\mathbb{Q}(x) = \mathbb{P}(\mathbf{1}^{-1}_{X \in H}(x)) = f_X(x)dx$$

Dunque per il Teorema del Cambio di Spazio Misurabile si può osservare:

$$\int_{X \in H} d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \mathbf{1}_{X \in H}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \delta_H(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \overset{1.2.7}{=}$$
$$\int_\mathbb{R} \delta_H(x) d\mathbb{Q}(x) = \int_\mathbb{R} \delta_H(x) f_X(x) dx = \int_H f_X(x) dx$$

Definizione 1.3.4: Valore Atteso di una Variabile Aleatoria

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, e X variabile aleaoria allora si può definire il **Valore Atteso** di X rispetto alla misura di probabilità $\mathbb{P}$ come:

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

.

Osservazione 1.3.5: Valore Atteso di una Variabile Aleatoria

Si può osservare come il valore atteso di una variabile aleatoria X rispetto alla misura di probabilità $\mathbb{P}$ sia l'integrale di Lebesgue di X su Ω rispetto a $\mathbb{P}$, ovvero l'area sottesa dalla funzione X su Ω pesata dalla misura di probabilità $\mathbb{P}$.

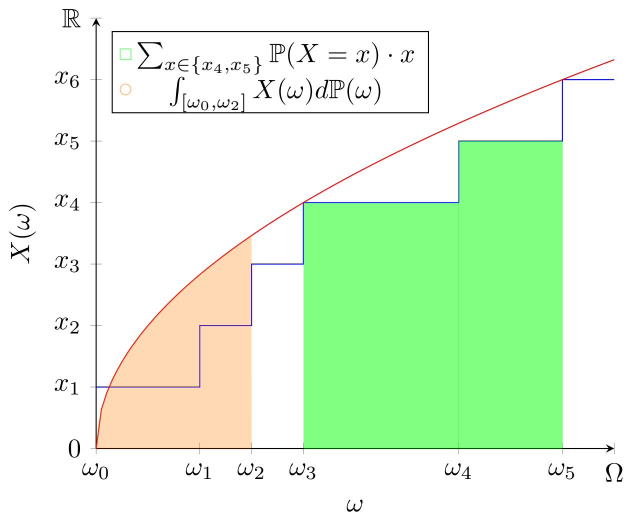
In caso X sia una variabile aleatoria discreta allora sono definiti gli eventi $(X = x_i)$ singoletti, mentre si può notare come $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{1}_{X=x_i}(\omega)$ sia una funzione semplice, il valore atteso di X rispetto a $\mathbb{P}$ è definito come:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \overset{1.2.6}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_X(x_i)$$

In caso X sia una variabile aleatoria continua allora vi è una funzione misurabile su $\mathbb{R}$ indicata con f_X e il cui integrale su $\mathbb{R}$ da 1. Allora si può costruire la misura $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$: analogamente all'osservazione 1.3.3 si ha che:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \overset{1.2.7}{=} \int_{\mathbb{R}} x \cdot d\mathbb{Q}(x) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx$$

Graficamente il valore atteso di una variabile aleatoria può essere visualizzato come:



Definizione 1.3.6: Equivalenza Quasi Certa

Siano X e Y variabili aletorie, esse si dicono **equivalenti quasi certamente** se soddifano:

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1$$

tale equivalenza si indica con $X \overset{q.c.}{=} Y$.

Definizione 1.3.7: Equivalenza in Legge

Siano X e Y variabili aletorie, esse si dicono **equivalenti in legge** o **distribuzione** se soddifano:

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

tale equivalenza si indica con $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.

Definizione 1.3.8: Spazio Lp

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, viene definito **Spazio Lp** su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X|^p] < +\infty\} \quad p \in]0, +\infty[$$

Ovvero la classe delle variabili aleatorie $X \in m\mathcal{F}$ con valore atteso finito entro la potenza p della variabile stessa.

1.4 Misure di Radon-Nikodym

Teorema 1.4.1: Radon-Nikodym

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, sia $\mathbb{Q}$ misura di probabilità t.c. $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ allora $\exists X \in m\mathcal{F}$ variabile aleatoria t.c. $X \overset{q.c.}{\geq} 0$ e

$$X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

X è chimata derivata di Radon-Nikodym di $\mathbb{Q}$ rispetto a $\mathbb{P}$.
Intuitivamente $\mathbb{P}$ è la misura di probabilità che "domina" $\mathbb{Q}$, ovvero se $\mathbb{P}$ assegna probabilità nulla ad un evento allora anche $\mathbb{Q}$ lo fa, così da evitare la forma indefinita $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Osservazione 1.4.2: Cambio di Misura

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, sia $\mathbb{Q}$ misura di probabilità t.c. $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ e sia $X \in m\mathcal{F}$ variabile aleatoria t.c. $X \overset{q.c.}{\geq} 0$ e $\mathbb{E}[X] = 1$ allora si può definire una nuova misura di probabilità usando X infatti prendendo un evento $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}_X(A) \overset{\text{a}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[\mathbf{1}_A] \overset{1.3.4}{=} \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbb{P}_X = \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbb{P}_X \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}} \overset{1.4.1}{=}$$
$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot X d\mathbb{P} \overset{\text{a}}{=} \int_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

In questo caso X funge da derivata di Radon-Nikodym di $\mathbb{P}_X$ rispetto a $\mathbb{P}$.

a. Proprietà della Funzione Indicatrice

Teorema 1.4.3: Radon-Nikodym su Misure Equivalenti

Siano $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ misure di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, allora vale la seguente relazione:

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \iff \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \overset{q.c.}{>} 0$$

Dimostrazione 1.4.3: Radon-Nikodym su Misure Equivalenti

$\Longrightarrow$ Sia $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ allora $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, dunque per il teorema di Radon-Nikodym 1.4.1 $\exists X, Y \geq 0$ t.c. $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ $Y = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$, dunque:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \overset{q.c.}{=} 0 \iff d\mathbb{Q} = 0 \iff \mathbb{P} \not<\not< \mathbb{Q} \iff \text{Assurdo}$$

$$\vee$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \overset{q.c.}{=} 0 \iff d\mathbb{P} = 0 \iff \mathbb{Q} \not<\not< \mathbb{P} \iff \text{Assurdo}$$

Dunque $X, Y \overset{q.c.}{>} 0$.

$\Longleftarrow$ Sia $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \overset{q.c.}{>} 0$, dal Teorema di Radon-Nikodym 1.4.1 si ha che $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ inoltre, ponendo $Y = \frac{1}{X} \overset{q.c.}{>} 0$, si dimostra:

$$\mathbb{P}(E) = \int_E d\mathbb{P} = \int_E \frac{X}{X} d\mathbb{P} = \int_E \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \cdot Y \cdot d\mathbb{P} = \int_E Y \cdot d\mathbb{Q}$$

Dunque per l'osservazione 1.4.2 Y è la derivata di Radon-Nikodym di $\mathbb{P}$ rispetto a $\mathbb{Q}$, dunque $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$. Concludendo $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

$\square$

Capitolo 2

Teoria del Condizionamento

2.1 Condizionamento rispetto a un Evento

Definizione 2.1.1: Misura di Probabilità Condizionata

Sia B un evento di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$ allora si può definire la **Misura di Probabilità Condizionata** a B come $\mathbb{P}_{|B} : \Omega \to [0, 1]$ definita:

$$\mathbb{P}_{|B}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Definizione 2.1.2: Valore Atteso Condizionato

Sia B un evento di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$ sia $\mathbb{P}_{|B}$ misura di probabilità condizionata a B e X variabile aleatoria. Allora si può definire **Valore Atteso Conzionato** a B:

$$\mathbb{E}[X|B] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{|B}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}_{|B}$$

$\mathbb{E}[X|B]$ è una costante.

Osservazione 2.1.3: Valore Atteso Condizionato

Si può osservare il seguende risultato dalla definizione 2.1.2:

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

Con $\mathbf{1}_B$ funzione indicatrice su B. Tale risultato può essere dimostrato ponendo $X = \mathbf{1}_A$ per un generico evento A dunque:

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|B] \overset{2.1.2}{=} \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbb{P}_{|B} = \int_A d\mathbb{P}_{|B} \overset{1.3.2}{=} \mathbb{P}_{|B}(A) \overset{2.1.1}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$$
$$\int_{A\cap B} d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbf{1}_{A\cap B} d\mathbb{P} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \cap \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)} \overset{a}{=} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

---

a. Proprietà della Funzione Indicatrice

2.2 Condizionamento rispetto a una Partizione

Definizione 2.2.1: Probabilità Condizionata a Partizione

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile Sia $\mathcal{P} = (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ partizione di eventi e con evento $\omega \in \Omega$ fissato. Allora si può definire la misura di **Probabilità Condizionata a Partizione** $\mathcal{P}$ come funzione $\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\omega]} : \mathcal{F} \to [0, 1]$

$$\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\omega]}(A) = \mathbb{P}(A|\mathcal{P}) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{B_i}(\omega) \cdot \mathbb{P}(A|B_i) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\omega]}$ è una somma di misure di probabilità condizionate.

Definizione 2.2.2: VA Condizionata a Partizione

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile Sia $\mathcal{P} = (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ partizione di eventi e con evento $A \in \mathcal{F}$ fissato. Allora si può definire una **Variabile Aleatoria Condizionata a Partizione** $\mathcal{P}$ come funzione $A|\mathcal{P} : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(A|\mathcal{P})(\omega) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{B_i}(\omega) \cdot \mathbb{P}(A|B_i) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$A|\mathcal{P}$ è una somma di variabili aleatorie indicatrici.

Definizione 2.2.3: Valore Atteso Condizionato a Partizione

Sia variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{P} = (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ partizione di eventi. Allora viene definito **Valore Atteso Condizionato** di X a **Partizione** $\mathcal{P}$ la funzione $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}] : \Omega \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{P}](\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\omega]}}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\omega]}$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]$ è una variabile aleatoria.

Osservazione 2.2.4: Valore Atteso Condizionato a Partizione

Si può notare che dati una variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{P} = (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ partizione di eventi di Ω.

$$E[X|\mathcal{P}] = \sum_{B_i\in\mathcal{P}} \mathbf{1}_{E_i} \cdot E[X|B_i]$$

Infatti $\forall\overline{\omega}$ eventi di Ω si ha:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{P}](\overline{\omega}) \overset{2.2.3}{=} \int_\Omega X \cdot d\mathbb{P}_{|\mathcal{P}[\overline{\omega}]} \overset{2.2.1}{=} \int_\Omega X \cdot \sum_{B_i\in\mathcal{P}} =$$

$$\sum_{B_i\in\mathcal{P}} \mathbf{1}_{B_i}(\overline{\omega}) \cdot \int_\Omega X d\mathbb{P}_{|B_i} \overset{2.1.1}{=} \sum_{B_i\in\mathcal{P}} \mathbf{1}_{B_i}(\overline{\omega}) \cdot \mathbb{E}[X|B_i]$$

Esempio 2.2.5: Valore Atteso Condizionato a Partizione

Sia $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ su filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e siano X_1 e X_2 variabili aleatorie t.c $X_1 \sim X_2 \sim Unif(\Omega)$. Sono definite le seguenti partizioni di eventi:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \\
&\mathcal{P}_1 = \{E_i = (X_1 = i) \mid i \in \{1, \ldots, 6\}\} \\
&\mathcal{P}_2 = \{E_{ij} = ((X_1, X_2) = (i, j)) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}
\end{aligned}
$$

Possiamo definire le seguenti misure di probabilità:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{|\mathcal{P}_1[\omega]}(A) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}_{|E_i}(A) \cdot \mathbf{1}_{E_i}(\omega) \\
\mathbb{P}_{|\mathcal{P}_2[\omega]}(A) &= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}_{|E_{ij}}(A) \cdot \mathbf{1}_{E_{ij}}(\omega)
\end{aligned}
$$

Vengono definite infine i seguenti valori attesi condizionati:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|\mathcal{P}_1] &= \sum_{E_i \in \mathcal{P}_1} \mathbb{E}[X|E_i] \cdot \mathbf{1}_{E_i} \\
\mathbb{E}[X|\mathcal{P}_2] &= \sum_{E_{ij} \in \mathcal{P}_2} \mathbb{E}[X|E_{ij}] \cdot \mathbf{1}_{E_{ij}}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.2.6: Caratterizzazione di Valori Attesi Cond.

Sia variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathcal{P} = (E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partione di Ω allora il valore attesto condizionato di X dato $\mathcal{P}$ indicato con $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]$ è caratterizzato da:

1. $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \in m\sigma(\mathcal{P})$
2. $\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \mid A] = \mathbb{E}[X|A] \quad \forall A \in m\sigma(\mathcal{P})$

Dimostrazione 2.2.6: Caratterizzazione di Valori Attesi Cond.

1. Ovvia, poiché se $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]$ è una variabile aleatoria con partizione $\mathcal{P}$ di Ω si può notare come:

$$m\sigma(\mathcal{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid X^{-1}(H) \in \sigma(\mathcal{P}), \forall H \in \mathcal{B}\}$$

2. Si può costruire la seguente equazione: Sapendo che $\mathcal{P} = (E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $A \in \sigma(\mathcal{P}) \implies A = \bigcup_{n\in J} E_n$ t.c $J \subset \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \mid A] \overset{2.1.3}{=} \frac{\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \cdot \mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \cdot \mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} \overset{2.2.3}{=}$$
$$\frac{\mathbb{E}[\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{E}[X|E_n] \cdot \mathbf{1}_{E_n}) \cdot \mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} \overset{J\subseteq\mathbb{N}}{=} \frac{\mathbb{E}[\sum_{n\in J}(\mathbb{E}[X|E_n] \cdot \mathbf{1}_{E_n})]}{\mathbb{P}(A)}$$
$$\overset{2.1.2}{=} \frac{\sum_{n\in J}(\mathbb{E}[X|E_n] \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{E_n}])}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum_{n\in J}(\mathbb{E}[X|E_n] \cdot \mathbb{P}(E_n))}{\mathbb{P}(A)} \overset{2.1.3}{=}$$
$$\frac{\sum_{n\in J}(\frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{E_n}]}{\mathbb{P}(E_n)} \cdot \mathbb{P}(E_n))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum_{n\in J}(\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{E_n}])}{\mathbb{P}(A)} =$$
$$\frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} \overset{2.1.3}{=} \mathbb{E}[X|A]$$

$\square$

2.3 Condizionamento rispetto a Sigma-Algebra

Definizione 2.3.1: Valore Atteso Cond. a Sigma-Algebra

Sia variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sub-σ-algebra. Allora data Y v.a. si ha che:

1. $Y \in m\mathcal{G}$
2. $\mathbb{E}[Y|A] = \mathbb{E}[X|A] \quad \forall A \in \mathcal{G}, \mathbb{P}(A) > 0$

Ovvero si può definire $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ come:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \{Y \in m\mathcal{G} \mid A \in \mathcal{G}, \mathbb{E}[Y|A] = \mathbb{E}[X|A]\}$$

Ovvero $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è la classe di variabili aleatorie i cui valori attesi condizinati a eventi di $\mathcal{G}$ coincidono con il valore atteso condizionato di X.
$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è chiamato **Valore Atteso** di X **Condizionato a Sigma-Algebra** $\mathcal{G}$.

Definizione 2.3.2: Versioni

Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sub-σ-algebra. Le variabili aleaorie Y che appartengono compongono il valore atteso di X condizionato a una σ-algebra $\mathcal{G}$ sono chimate **Versioni** di $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Osservazione 2.3.3: Versione Unica

Sia variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{P} = (E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partizione di eventi di Ω. Sia definita la σ-algebra $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$ allora si può osservare come:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \{\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]\}$$

Ovvero l'unica versione di $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]$: Si osserva che inanzitutto che per 2.2.6:

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}] \in m\sigma(\mathcal{P})$
- $E[\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]|A] = \mathbb{E}[X|A] \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{P})$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]$ è versione, inoltre supponendo un'altra versione Y di $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ si nota che essendo entrambe versioni deve valere:

$$\mathbb{E}[Y|A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{P}]|A] = \mathbb{E}[X|A]$$

Dunque le due versioni si equivalgono e si può segnarne una canonica.

Notazione 2.3.4: Versione Unica

Dato che $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ contiente versione tra loro equivalenti, possiamo utilizzare questa notazione $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ per indicare la versione "canonica" della classe di versione. Dunque si può trattare questo insieme come una singola variabile aleatoria fruttando altre operazioni $(+, \leq, \dots)$.

Osservazione 2.3.5: VA Equivalenti non Versioni

Siano variabile aleatorie $X, Y, Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sia definita la σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ con $Y \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ variazione allora si può osservare che:

$$Z \in m\mathcal{F} \wedge Z \overset{q.c.}{=} Y \not\Rightarrow Z \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$$

Questo poiché nonostante $Z \overset{q.c.}{=} Y$ implichi che $\mathbb{E}[Z|A] = \mathbb{E}[Y|A]$ tale condizione non implica che $Z \in m\mathcal{G}$.

Teorema 2.3.6: Proprietà dei Valori Cond. a Sigma-Algebre

Siano $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sia σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Allora sono soddisfatte le seguenti proprietà sui valori condizionati a $\mathcal{G}$:

1. **Monotonia**:
$$X \leq Y \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$

2. **Linearità**:
$$\mathbb{E}[\lambda X + \psi Y|\mathcal{G}] = \lambda \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \psi \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$

3. **Appartenenza**:
$$X \in m\mathcal{G} \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$$

4. **Indipendenza**:
$$\mathcal{G} \perp\!\!\!\perp \sigma(X) \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$$

5. **Proprietà della Torre**:
$$\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$$
Inoltre visto che $\forall \mathcal{G}$ si ha che $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{G}$:
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$$

6. **Omogeneità**:
$$Y \in bm\mathcal{G} \implies \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \text{(Y già condizionato ad } \mathcal{G}\text{)}$$

7. **Non Vuoto**:
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \neq \emptyset$$

Teorema 2.3.7: Proprietà delle Versioni

Siano variabile aleatorie $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sia σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ con $Y \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ versione. Allora vale il seguente teorema:

$$Z \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \iff Z \in m\mathcal{G} \wedge Z \overset{q.c.}{=} Y \quad \forall Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Dimostrazione 2.3.7: Proprietà delle Versioni

- Caso $\Longleftarrow$:
  $\forall Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si ha che $Z \in m\mathcal{G} \wedge Z \overset{q.c.}{=} Y$. Per dimostrare che Z sia versione di $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ bisogna dimostra i punti 1 e 2 di 2.3.1: $Z \in m\mathcal{G}$ soddisfa il punto 1.

  $Z \overset{q.c.}{=} Y \implies \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \implies \mathbb{E}[Z|A] = \mathbb{E}[Y|A] \quad \forall A \in \mathcal{G}$

  Dato che Y è versione si ha che $\mathbb{E}[Z|A] = \mathbb{E}[X|A] \quad \forall A \in \mathcal{G}$

  Il che soddisfa il punto 2.

- Caso $\implies$: Sapendo che $Z \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ si possono dimostrare: $Z \in m\mathcal{G}$ per via di 2.3.1 Mente per via dimostrare $Z \overset{q.c.}{=} Y$ si può notare che $Z, Y \in m\mathcal{G}$ dunque per 2.3.3 si ha che $Z = Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ dunque $\mathbb{P}(Z = Y) = 1 \implies Z \overset{q.c.}{=} Y$

$\square$

Teorema 2.3.8: Lemma del Congelamento (Freezing Lemma)

Siano $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ v.a, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra t.c.

- $Y \in m\mathcal{G}$ (condizionato)
- $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ (indipendente)

Allora per ogni funzione h tale che $h(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si ha che:

$$g(Y) = \mathbb{E}[h(X, Y)|\mathcal{G}] \text{ dove } g(y) = \mathbb{E}[h(X, y)] \quad \forall y \in S_Y$$

Si può descrivere la funzione g con questa notazione:

$$\mathbb{E}[h(X, Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[h(X, y)]|_{y=Y}$$

Ovvero posso "congelare" il valore di X in uno del suo dominio e ottenere un valore atteso equivalente.

Teorema 2.3.9: Teoremi Limite su Versioni

Siano $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di variabili aleatorie, σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ allora valgono i seguenti teoremi limite su versioni:

1. **Convergenza Monotona**
   Con $X_j > X_i \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $X_1 > 0$
   $$\lim_{n\to\infty}(X_n) = Y \implies \lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$
2. **Lemma di Fatou**
   Con $X_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   $$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty}(X_n)|\mathcal{G}] \le \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}])$$
3. **Convergenza Dominata**
   $\exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.c. $|X_n| \le Z \; \forall n \in \mathbb{N}$ allora :
   $$\lim_{n\to\infty}(X_n) = Y \implies \lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$
4. **Inequalità di Jensen**
   Sia h funzione convessa tale che $h(Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ allora:
   $$h(\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]) \le \mathbb{E}[h(Y)|\mathcal{G}]$$

2.4 Condizionamento rispetto a VA

Definizione 2.4.1: Valore Atteso Condizionato da VA

Siano variabile aleatorie $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sia definita la σ-algebra $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ ovvero la sigma algebra costruita con gli eventi caratterizzanti di Y ovvero:
$$\sigma(Y) = \{(Y \in H) \mid H \in \mathcal{B}\}$$
allora si può definire $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ la **Classe delle Versioni** di X **Generate da** Y e viene dischiarata con la seguente notazione:
$$\mathbb{E}[X|Y]$$

Esempio 2.4.2: Valore Atteso Condizionato da VA

Sia X e Y variabili aleatorie con rispettivi supporti, in particolare $S_Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ è possibile costruire una partizione degli eventi associati a Y in questo modo:

$$\mathcal{P}_Y = \{(Y = y_i) | i \in \{1, \dots, n, \dots\}\}$$

Costruendo la classe delle versioni di X generate da Y si puo notare:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = \{\mathbb{E}[X|\mathcal{P}_Y]\}$$

per via dell'osservazione 2.3.3 che stabilisce che l'unica versione rilevante in una σ-algebra costruita da una partizione è proprio la versione condizionata dalla partizione generatrice. Inoltre si può notare che:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\mathcal{P}_Y] \overset{2.2.4}{=} \sum_{y_i \in S_Y} (\mathbb{E}[X|Y = y_i] \cdot \mathbf{1}_{(Y=y_i)})$$

Teorema 2.4.3: Teorema di Doob

Siano X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F})$ allora vale che:

$$X \in m\sigma(Y) \iff \exists f \in m\mathcal{B} \text{ t.c. } X = f(Y)$$

Osservazione 2.4.4: Funzione di Regressione di una VA

Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $Y \in \mathcal{F}$ variabili aleatorie. Per l'osservazione 2.3.3, abbiamo che $\mathbb{E}[X|Y] \in \sigma(Y)$ e dato il Teorema di Doob 2.4.3 si può definire una funzione $\phi \in m\mathcal{B}$ tale che:

$$\phi(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$$

ϕ è chiamata funzione di regressione di X, inoltre inoltre tale funzione è unica dato che la versione $\mathbb{E}[X|Y]$ è unica.

Definizione 2.4.5: Densità Condizionata di una VAC

Sia (X, Y) vettore aleatorio continuo (assolutamente) e allora viene definita **Densità Condizionata** di X rispetto a Y la funzione $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ come:

$$f_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_y(y)} & \text{se } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{altrimeti} \end{cases}$$

Definizione 2.4.6: Valore Atteso Condizionato da Evento di VA

Sia (X, Y) vettore aleatorio continuo (assolutamente) allora il **Valore Attesto Condizionato** di X rispetto a un **Evento** associato a Y è definito come:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{Sx} x \cdot f_{X|Y}(x, y)\, dx$$

Esempio 2.4.7: Valore Atteso Condizionato da Evento di VA

Si effettuano il lancio di due dati continui con valore da 1 a 6. Sia spazio campionario $\Omega = [0, 6]^2$ con (X_1, X_2) vettore aleatorio continuo con distribuzione $(X_1, X_2) \sim Unif([0, 6]^2)$ ovvero:

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{6}$$

Sia definita una altra variabile aleatoria in questo modo:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X_1 + X_2 \geq 6 \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo sapere il valore atteso di Y se al primo lancio è uscito 6: Si può vedere che il valore di Y è dato da i valori di (X_1, X_2) ovvero $Y = f(X_1, X_2)$ formalmente:

$$\mathbb{E}[Y|X_1 = 5] = \mathbb{E}[f(X_1, X_2)|X_1 = 5] = \int_{[0,6]} f(5, x_2) \cdot f_{X_2|X_1}(x_2, 5) \cdot dx_2$$
$$= \int_{[1,6]} f(5, x_2) \cdot f_{X_2|X_1}(x_2, 5) \cdot dx_2 + \int_{[0,1]} f(5, x_2) \cdot f_{X_2|X_1}(x_2, 5) \cdot dx_2$$
$$= \int_{[1,6]} 1 \cdot \frac{f_{X_2,X_1}(x_2, 5)}{f_{X_1}(5)} \cdot dx_2 + \int_{[0,1]} -1 \cdot \frac{f_{X_2,X_1}(x_2, 5)}{f_{X_1}(5)} \cdot dx_2 \overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=}$$
$$= \int_{[1,6]} \frac{f_{X_2}(x_2) \cdot f_{X_1}(5)}{f_{X_1}(5)} \cdot dx_2 - \int_{[0,1]} \frac{f_{X_2}(x_2) \cdot f_{X_1}(5)}{f_{X_1}(5)} \cdot dx_2$$
$$= \int_{[1,6]} f_{X_2}(x_2) \cdot dx_2 - \int_{[0,1]} f_{X_2}(x_2) \cdot dx_2$$
$$= \left[\frac{x}{6}\right]_1^6 - \left[\frac{x}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Capitolo 3

Processi Stocastici

3.1 Introduzione ai Processi Stocastici

Notazione 3.1.1: Spazio Traiettoria

Sia $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ insieme degl'indici. Lo **Spazio Traiettoria** viene indicato in questo modo:

$$(\mathbb{R}^d)^{\mathcal{I}} = \{f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^d\}$$

Definizione 3.1.2: Processo Stocastico

Sia $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ insieme degl'indici, viene definito **Processo Stocastico** una famiglia di variabili aletorie definite su spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ e viene indicato con:

$$(X_n)_{n \in \mathcal{I}} : \Omega \to (\mathbb{R}^d)^{\mathcal{I}}$$

Con $X_n \in m\mathcal{F}, \forall n \in \mathcal{I}$ (condizione di misurabilità), ovvero X_n è funzione misurabile in $\mathcal{F}$, più precisamente:

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

con $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^{\mathcal{I}})$ spazio boreliano $(\mathcal{B}_1 \times ... \times \mathcal{B}_{|\mathcal{I}|})$ usato nello spazio misurabile $m\mathcal{F}$, dunque il processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathcal{I}}$ calcola:

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_{|\mathcal{I}|}(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

Esempio 3.1.3: Processo Stocastico

Si può creare un processo stocastico che indichi quanto volte è uscito testa o croce da diversi lanci della moneta, indicando croce con 0 e testa con 1.
Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile t.c. $\Omega = \{0,1\}^n$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$
Sia $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ vettore di eventi testa o croce.
Possiamo definire un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathcal{I}}$ t.c.

$$X_n(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_n = 1 \\ -1 & \text{se } \omega_n = 0 \end{cases} \quad X_n \in m\mathcal{F} \text{ e } \forall n \in \mathcal{I}$$

Per esempio per il vettore si ottiene: $\boldsymbol{\omega} = (0,1,1,0)$:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) = (X_1(\boldsymbol{\omega}), X_2(\boldsymbol{\omega}), X_3(\boldsymbol{\omega}), X_4(\boldsymbol{\omega})) = (-1,1,1,-1)$$

Definizione 3.1.4: Processo Stocastico Adattato a Filtrazione

Sia $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ filtrazione di σ-algebre con $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ processo stocastico. Esso si dice **adattato alla filtrazione** se viene soddisfatto $X_n \in m\mathcal{F}_n \ \forall n \in \mathcal{I}$.
Dire che il processo è adattato o **osservabile** è equivalente.

Osservazione 3.1.5: Processo Stocastico Adattato a Filtrazione

Se un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$, si può osservare che:

$$X_n \in m\mathcal{F}_n \implies \{X_n \in H\} \in \mathcal{F}_n \implies \sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$$

Ovvero dato che X_n è misurabile in $\mathcal{F}_n$ allora gli eventi associati a X_n appartengono a $\mathcal{F}_n$ (1.1.7).
Inoltre dato che tutti gli eventi associati a X_n appartengono a $\mathcal{F}_n$ allora $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$ (2.4.1).

Esempio 3.1.6: Processo Stocastico Adattato a Filtrazione

Continuando l'esempio 3.1.3 si aggiunge $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ filtrazione definita:

$$\mathcal{F}_n = \{A \times \{0,1\}^{N-n} \mid A \subset \mathcal{P}(\{0,1\}^N)\}$$

Dove A sono gli eventi fissati, mentre $\{0,1\}^{N-n}$ sono gli eventi liberi. L'evento "il 3° lancio è testa" $= \{0,1\}^2 \times 1 \times \{0,1\}^{N-3}$.
Possiamo definire altri due processi stocastici, $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in questo modo:

$$Y_n(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{n}(X_k(\boldsymbol{\omega})) \quad X_k \in m\mathcal{F}_k \subset m\mathcal{F}_n \text{ con } \forall n \in \mathcal{I}$$

Visto che $\boldsymbol{Y}$ soddisfa $Y_n \in m\mathcal{F}$, $\forall n \in \mathcal{I}$ allora $\boldsymbol{Y}$ è adattabile alla filtrazione $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Mentre se definiamo $\boldsymbol{Z} = (Z_i)_{i\in\mathcal{I}}$ processo stocastico con $M > N$:

$$Z_n(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=n}^{M}(X_k(\boldsymbol{\omega})) \quad X_k \in m\mathcal{F}_k \text{ con } \forall n \in \mathcal{I}$$

Si può notare che $\exists j > n$ t.c. $Z_j \in m\mathcal{F}_j$ e $\mathcal{F}_j \notin (\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$
Dunque $\boldsymbol{Z}$ non è adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Definizione 3.1.7: Processo Stocastico a Tempo Discreto

Sia $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ processo stocastico esso viene detto **Processo Stocastico a Tempo Discreto** (p.s.d.) se lo spazio degli indici $\mathcal{I}$ soddisfa $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ e viene indiato con $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio 3.1.8: Filtrazione Inadeguata

Sia spazio campionario $\Omega = \{1, \dots, 6\}^N$ con σ-algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ si definisce inoltre la filtrazione discreta $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$\mathcal{F}_n = \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \mid \omega_1, \dots, \omega_n \in A \wedge A \subset \{1, \dots, 6\}^n\}$$

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p.s.d. tale che:

$$X_n(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_n \in \{2, 4, 6\} \\ -1 & \omega_n \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Se poniamo un evento $E = \{\text{Faccia pari al 2° lancio}\}$ ovvero:

$$\begin{aligned} E &= \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \mid \omega_2 \in \{2, 4, 6\}\} \\ &= \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 6\} \times \{2, 4, 6\}\} \end{aligned}$$

Si può notare come $E \in \mathcal{F}_2$ o $E \in \mathcal{F}_3$ ma $E \notin \mathcal{F}_1$. La filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è adatta per descrivere il processo stocastico $\boldsymbol{X}$.

Definizione 3.1.9: Filtrazione Naturale

Sia $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ p.s sia allora viene definita la filtrazione $(\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}})_{i \in \mathcal{I}}$ come:

$$\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}} = \sigma\{(X_m \in H) \mid m \leq i \wedge H \in \mathcal{B}\} \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

ovvero viene definita **Filtrazione Naturale** di $\boldsymbol{X}$ la σ-algebra generata dagli eventi associati alle v.a. osservabili fino al tempo i.

Osservazione 3.1.10: Filtrazione Naturale

Sia $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ p.s. e $(\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}})_{i \in \mathcal{I}}$ sua filtrazione naturale, allora si può osservare come $(\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}})_{i \in \mathcal{I}}$ è la più piccola filtrazione che rende $\boldsymbol{X}$ adattato. Inoltre si può osservare che:

$$\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}} = \sigma(X_1, \dots, X_i) \implies \sigma(X_j) \subset \mathcal{F}_i^{\boldsymbol{X}} \quad \forall i, j \in \mathcal{I} \wedge j \leq i$$

Esempio 3.1.11: Filtrazione Naturale

Riprendendo l'esempio 3.1.8, sia definita la filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ come:

$$\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}} = \sigma\{(X_m \in H) \mid m \leq n \wedge H \in \mathcal{B}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In questo caso l'evento $E = \{\text{Faccia pari al 2° lancio}\}$ è definito come $E = (X_2 = 1)$ con $(X_2 = 1) \in \mathcal{B}$ dunque appartente a $\mathcal{F}\boldsymbol{X}_2$.
Inoltre possiamo osservare che generalmente che per ogni insieme o intervallo H si ha:

$$(X_n \in H) = \begin{cases} \Omega & 1, -1 \in H \\ \emptyset & 1, -1 \notin H \\ \{2,4,6\} & 1 \in H \wedge -1 \notin H \\ \{1,3,5\} & -1 \in H \wedge 1 \notin H \end{cases}$$

Per esempio sia l'evento $E_2 = \{\text{1° lancio pari e 4° lancio dispari}\}$ esso è equivalente a:

$$E_2 = \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega; \mid \omega_1 \in \{2,4,6\} \wedge \omega_4 \in \{1,3,5\}\}$$
$$E_2 = (X_1 = 1) \cap (X_4 = -1)$$

con $E_2 \in \mathcal{F}_4^{\boldsymbol{X}}$, si può inoltre osservare come $\boldsymbol{X}$ sia adattato.

3.2 Proprietà dei Processi Stocastici

Notazione 3.2.1: Distribuzione di un Processo Stocastico

Sia $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ p.s. la sua **legge** o **distribuzione** è indicata con $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$.

Definizione 3.2.2: Processi Stocastici Equivalenti in Legge

Siano $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ processi stocastici definiti come funzioni $(\Omega, \mathcal{F}) \to ((\mathbb{R}^d)^{\mathcal{I}}, \mathcal{B})$. Essi si dicono **Equivalenti in Legge** se soddisfano:

$$(X_{i_1}, ..., X_{i_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{i_1}, ..., Y_{i_n}) \quad \forall i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$$

e vengono indicati con $\boldsymbol{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{Y}$.

Osservazione 3.2.3: Equivalenza in Legge non Garantita

Dato due processi stocastici $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$, si può notare che:

$$X_i \overset{\mathcal{L}}{=} Y_i \; \forall i \in \mathcal{I} \not\Rightarrow \boldsymbol{X} \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{Y}$$

Esempio 3.2.4: Equivalenza in Legge non Garantita

Si può dimostrare l'osservazione 3.2.4 con questo esempio.
Siano $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathbb{R}}$ due p.s tali che $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_{\mathbf{0},\mathbf{I}}$ distribuzione normale standard multivariata e (Y_1, Y_2) t.c. $Y_1 \sim \mathcal{N}_{0,1}$ e $Y_1 = Y_2$. Dunque si può notare come

$$X_1 \overset{\mathcal{L}}{=} Y_1 \wedge X_2 \overset{\mathcal{L}}{=} Y_2$$

ma $\boldsymbol{X} \overset{\mathcal{L}}{\neq} \boldsymbol{Y}$ poiché mentre X_1 e X_2 sono indipendenti tra loro, non si può dire lo stesso di Y_1 e Y_2

Definizione 3.2.5: Modificazioni

Siano $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathbb{R}}$ due p.s essi si dicono **Modificazioni** se vale:

$$X_i \overset{q.c.}{=} Y_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Osservazione 3.2.6: Modificazioni su Vettori Aleatori

Siano $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathbb{R}}$ due p.s. allora se $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sono modificazioni si può osservare che $\forall i \in \mathcal{I}$:

$$\begin{gathered}
X_i \overset{q.c.}{=} Y_i \implies \\
\mathbb{P}(X_i = Y_i) = 1 \implies \\
\mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{i} (X_m = Y_m)) = 1 \implies \\
\mathbb{P}((X_1, \dots, X_i) = (Y_1, \dots, Y_i)) = 1 \implies \\
(X_1, \dots, X_i) \overset{q.c.}{=} (Y_1, \dots, Y_i)
\end{gathered}$$

Esempio 3.2.7: Modificazioni

Siano $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathbb{R}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_i)_{i\in\mathbb{R}}$ due p.s tali che $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_{\mathbf{0},\mathbf{I}}$ distribuzione normale standard multivariata e $(Y_1, Y_2) = -(X_1, X_2)$ Si può notare come

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((X_1, X_2) = (Y_1, Y_2)) = \mathbb{P}((X_1, X_2) - (Y_1, Y_2) = (0, 0)) = \\ &\mathbb{P}((2X_1, 2X_2) = (0, 0)) \neq 0 \implies \\ &(X_1, X_2) \text{ e } (Y_1, Y_2) \text{ non sono modificazioni.}\end{aligned}$$

Mentre si puo notare come invece $(X_1, X_2) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y_1, Y_2)$ per via della simmetria della gaussiana.

Osservazione 3.2.8: Processi Stocastici con V.A I.I.D

Sia $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ processo stocastico allora $X_1, \ldots, X_n$ siano variabili aleatorie i.i.d (indipendenti e identicamente distribuite) ovvero:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \wedge \mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_{X_j} \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$$

se e solo se è soddisfatta:

$$\mathbb{P}_{(X_{i_1}, \ldots X_{i_n})} = \prod_{k=i_1}^{i_n} \mathbb{P}_{X_k} \quad \forall i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$$

3.3 Tempi d'Arresto

Definizione 3.3.1: Tempi d'Arresto

Sia $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ filtrazione e sia funzione $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ variabile aleatoria. Essa è definita **Tempo d'Arresto** se vale:

$$\{\tau \leq i\} \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Osservazione 3.3.2: Tempi d'Arresto Complementari

Si può osservare che se τ è tempo d'arresto con filtrazione $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ allora:

$$\{\tau > i\} \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$$
$$\{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Questo perché

$$\{\tau > i\} = \{\tau \leq i\}^c$$

mentre

$$\{\tau = i\} = \{\tau \leq i\} - \{\tau > i\} = \{\tau \leq i\} \cap \{\tau > i\}^c = (\{\tau \leq i\}^c \cup \{\tau > i\})^c$$

entrambe vere per via della difinizione di σ-algebra **??**.

Definizione 3.3.3: Tempo di Entrata e Uscita

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p.s.d con τ_e e τ_u v.a. definiti:

$$\tau_e = \begin{cases} inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in H\} & \exists X_n \in H \\ +\infty & \nexists X_n \in H \end{cases}$$
$$\tau_u = sup\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in H\}$$

Con $H \in \mathcal{B}$ intervallo. Allora si può notare come τ_e e τ_u siano tempi d'arresso su $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione naturale di $\boldsymbol{X}$. τ_e e τ_u vengono definiti rispettivamente: **Tempo d'Entrate** e **Tempo d'Uscita**.

I tempi di arresto sono utilizzati per analizzare i processi stocastici per l'appunto "arrestandoli" in un determinato istante τ.

Capitolo 4

Martingale

4.1 Introduzione alle Martingale

Definizione 4.1.1: Martingala

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico si dice che $\boldsymbol{X}$ è **Martingala** rispetto alla fitrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rispetta le seguenti proprietà:

1. $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La seconda proprietà è chiamata *proprietà di martingalità* e indica che la miglior stima della media al tempo $n+1$ osservando gli eventi fino al tempo n è proprio il valore raggiunto a tempo n.

Osservazione 4.1.2: Martingale

Dato $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala su filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può osservare:

1. $\boldsymbol{X}$ è adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n] = X_n \quad \forall m > n$
3. $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n+k}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge k > 0$

L'osservazione 1 è data dalla *proprietà di martingalità* infatti:

$$X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{2.3.1}{\Longrightarrow} X_n \in m\mathcal{F}_n \overset{3.1.4}{\Longrightarrow} \boldsymbol{X} \text{ è adattato a } (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

L'osservazione 2 invece e data dalla *proprietà della torre* 2.3.6 infatti:

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \overset{\text{Proprietà Torre}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_n]$$

concludendo si dimostra la proprietà con:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] \overset{4.1.1}{=} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_n]$$

In particolare:

$$X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] \quad \forall k > 0$$

Infine si può notare che impostando la σ-algebra $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1$ e usando la proprietà della torre 2.3.6 si ha che:

$$\mathbb{E}[X_1] \overset{\text{Torre}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_1]] \overset{2.}{=} [\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_1]] \overset{\text{Torre}}{=} \mathbb{E}[X_k]$$

Si dimostra il punto 3 dell'osservazione ovvero che il valore atteso delle va sono costanti per tutto il processo.

Osservazione 4.1.3: Processo Stocastico con Media Costante

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico discreto t.c. $\mathbb{E}[X_n] = \mu \ \forall n \in \mathbb{N}$ e adattato alla filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$. Per definizione di filtrazione naturale 3.1.9 si ha che:

$$\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}} = \sigma\{(X_m \in H)|\forall m < n \wedge H \in \mathcal{B}\}$$

Mentre per per difinizione di σ-algebra generata da una variabile aleatoria 2.4.1 si ha che:

$$\sigma(X_{n+1}) = \{(X_{n+1} \in H)|H \in \mathcal{B}\}$$

Da queste due definizione si può notare che $\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}} \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{n+1})$ dunque per proprietà di *Indipendenza* 2.3.6 si ha che:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = \mu$$

Dunque $\boldsymbol{X}$ non può essere martingala manca la *proprietà di martingalità* a meno che essa non sia un processo costante, in formule:

$$X_n \overset{4.1.1}{=} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] = \mu$$

Osservazione 4.1.4: Martingala su Tutte le Filtrazioni

Si può notare come per la proprietà di martingalità un processo stocastico discreto $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è martingala per la filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ allora non lo è per nessuna filtrazione.

Osservazione 4.1.5: Martingala con Incremento Nullo

Siano $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala su filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p.s.d. tale che:

- $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X_n] = \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1}(X_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vogliamo dimostrare che sotto certe condizione anche $\boldsymbol{Y}$ è martingala secondo la definizione 4.1.1:

1. Si dimostra che $Y_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ovvio in quanto Y_n è somma di variabile aleatorie appartenenti a spazio L^1 inoltre si può notare che le loro sigma algebre condividono gli stessi elementi dunque $\mathcal{F}_{n-1}^{\boldsymbol{X}} = \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}$.

   Infatti si può notare che $Y_0 = 0, Y_1 = X_0, Y_2 = X_0 + X_1, \ldots$

2. Per dimostrare la *proprietà di martingalità* si deve tenere conto che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n-1}(X_k) \implies Y_{n+1} - Y_n = X_n \implies Y_{n+1} = Y_n + X_n$$

   Dunque $\boldsymbol{Y}$ è martingala su filtrazione $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}})_{n\in\mathbb{N}}$ se:

$$Y_n = \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}] = \mathbb{E}[Y_n + X_n|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}] \overset{\text{a}}{=} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}] + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}] \overset{\text{b}}{=}$$
$$Y_n + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}] \overset{\text{c}}{=} Y_n + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}^{\boldsymbol{X}}] \overset{\text{d}}{=} Y_n + \mu \iff \mu = 0$$

   Si osserva infine che $\boldsymbol{Y}$ è martingala se e solo se ha **incremento nullo** e $\boldsymbol{X}$ ha media costante nulla.

---

a. Linearità del Valore Atteso Condizionato 2.3.6
b. Appartenenza del Valore Atteso Condizionato 2.3.6

$$Y_n \in m\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}} \implies Y_n = \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}]$$

c. Da punto 1. $\mathcal{F}_{n-1}^{\boldsymbol{X}} = \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}}$
d. Da osservazione 4.1.3

Teorema 4.1.6: Martingala su Sotto-Filtrazione

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sotto-filtrazione di $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ovvero:

- $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $X_n \in m\mathcal{G}_n$

Allora $\boldsymbol{X}$ è martingala rispetto a $\mathcal{G}$.

Dimostrazione 4.1.6: Martingala su Sotto-Filtrazione

Affinché $\boldsymbol{X}$ sia martingala rispetto a $\mathcal{G}$ si deve dimostrare:

1. $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   Ovvio poiché $\boldsymbol{X}$ è martingala.
2. *Proprietà di martingalità* ovvero:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] \overset{a}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_n] \overset{b}{=} X_n$$

---

a. Proprietà della Torre 2.3.6 dato da $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$
b. Appartenenza 2.3.6 dato che $X_n \in m\mathcal{G}_n \implies \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = X_n$ □

4.2 Tipi di Martingale

Definizione 4.2.1: Super-Martingala e Sub-Martingala

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processi stocastici e sia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione allora se valgono le seguente proprietà:

- $X_n, Y_n \in m\mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $X_n, Y_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (proprietà di sub-martingalità)
- $Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (proprietà di super-martingalità)

Allora $\boldsymbol{X}$ viene definita **Sub-Martingala** su $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mentre $\boldsymbol{Y}$ è definita **Super-Martingala** su $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in questo caso il valore atteso condizionato alla σ-algebra è sovra o sottostimato.

Esempio 4.2.2: Gioco Equo

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e sia $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

Dall'osservazione 4.1.5 sappiamo che $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n + \mu_n$ dunque si possono distinguere due casi:

1. $Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \iff \mu_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $Y_n \leq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \iff \mu_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dunque nel primo caso $\boldsymbol{Y}$ è una super-martingala mentre nel secondo una sub-martingala.

Osservazione 4.2.3: Valori Attesi di una Su-Martingala

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sub-martingala e $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ super-martingala, allora si può osservare che:

$$\mathbb{E}[X_i] \leq \mathbb{E}[X_{i+k}] \quad \forall i \in \mathbb{N} \wedge k > 0$$
$$\mathbb{E}[Y_i] \geq \mathbb{E}[Y_{i+k}] \quad \forall i \in \mathbb{N} \wedge k > 0$$

Osservazione 4.2.4: Martingale e Su-Martingale

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico allora vale la seguente osservazione:

$$\boldsymbol{X} \text{ è martingala } \iff \boldsymbol{X} \text{ è sub-martingala e super-martingala}$$

Esempio 4.2.5: Processo Stocastico Assoluto Quadrico

Sia $|\boldsymbol{X}|^2 = (|X|_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico mentre $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala su filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora per la *Disuguaglianza di Jensen* 2.3.9 si può notare come:

$$\mathbb{E}[|X|_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \overset{\text{Jensen}}{\geq} |\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|^2 \overset{\text{martingalità}}{=} |X_n|^2$$

Dunque $|\boldsymbol{X}|^2$ risulta sub-martingala.

Esempio 4.2.6: Processo di Variazione Quadrica

Siano $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{Q} = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processi stocastici definiti:

- $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\boldsymbol{Y}$ è martingala e $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ ovvero $X_n = Y_{n+1} - Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] \wedge Q_n \in \mathcal{F}_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $Z_n = Y_n^2 - Q_n - Y_0^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boldsymbol{Q}$ è chiamato **Processo di Variazione Quadrica**, mentre si può osservare come $\boldsymbol{Z}$ è martingala a media nulla. Infatti dato che $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \implies Z_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall n \in \mathbb{N}$. Mentre si può dimostrare la proprietà di martingalità in questo modo:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 - Q_{n+1} - Y_0^2|\mathcal{F}_n] \overset{a}{=} \\
&\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Q_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Y_0^2|\mathcal{F}_n] \overset{b}{=} \\
&\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - Q_{n+1} - Y_0^2 = \\
&\mathbb{E}[(Y_{n+1} + Y_n - Y_n)^2|\mathcal{F}_n] - Q_{n+1} - Y_0^2 = \\
&\mathbb{E}[(Y_n + X_n)^2|\mathcal{F}_n] - Q_{n+1} - Y_0^2 \overset{a}{=} \\
&\mathbb{E}[(Y_n)^2|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[(X_n)^2|\mathcal{F}_n] - 2\mathbb{E}[X_n Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Q_{n+1} - Y_0^2 \overset{b}{=} \\
&Y_n^2 + Y_n^2 - 2\mathbb{E}[X_n Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Q_{n+1} - Y_0^2 \overset{c}{=} \\
&Y_n^2 - 2\mathbb{E}[X_n Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Q_n - Y_0^2 \overset{d}{=} \\
&Y_n^2 - 2X_n \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Q_n - Y_0^2 \overset{e}{=} \\
&Y_n^2 - 2X_n \cdot 0 - Q_n - Y_0^2 = Y_n^2 - Q_n - Y_0^2 = Z_n
\end{aligned}
$$

---

a. Linearità del Valore Atteso Condizionato 2.3.6

b. Appartenenza del Valore Atteso Condizionato 2.3.6

$$Y_n \in m\mathcal{F} \implies Y_n = \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}]$$

c. Da ipotesi abbiamo che

$$X_n^2 - Q_{n+1} = X_n^2 - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] = -Q_n$$

d. Omogeneità del Valore Atteso Condizionato 2.3.6

$$X_n \in bm\mathcal{F} \implies \mathbb{E}[X_n Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

e. $\forall m > n$ $\mathbb{E}[Y_m|F_n] = \mathbb{E}[Y_m|F_0] = Y_0 = 0$ da osservazione 4.1.2.

Esempio 4.2.7: Urna di Polya

Vi sia un urna con dentro B_0 palline bianche e R_0 palline rosse per un totale di N palline. Ogni turno n si estrae una pallina e la si rinserisce insieme a una sua copia (reimissione con rinforzo). Può essere dunque creato un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che misura quante palline bianche vi sono al tempo n nell'urna. In particolare:

$$X_n = \frac{B_n}{N+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

B_n e R_n contano quante palline bianche e rosse sono nell'urna a tempo n. Si può dimostrare come $\boldsymbol{X}$ sia una martingala. Data la natura dell'esperimento $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Data la reimmizione con rinforzo ci possono essere due eventi ad ogni estrazione n:

- $E = (B_n = B_{n-1}+1)$ viene estratta una pallina bianche e il numero delle suddette aumenta.
- $E^c = (B_n = B_{n-1})$ viene estratta una pallina rossa e il numero delle bianche rimane invariato.

Dunque per dimostrare la proprietà di martingalità:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{a}{=} \mathbb{E}[X_{n+1}\cdot(\mathbf{1}_E + \mathbf{1}_{E^c})|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{a}{=}$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1}\cdot\mathbf{1}_E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] + \mathbb{E}[X_{n+1}\cdot\mathbf{1}_{E^c}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{b}{=}$$
$$c_1\cdot\mathbb{E}[\mathbf{1}_E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] + c_0\cdot\mathbb{E}[\mathbf{1}_{E^c}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{c}{=} c_1\cdot\mathbb{P}(E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) + c_0\cdot\mathbb{P}(E^c|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) =$$
$$c_1\cdot\mathbb{P}(E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) + c_0\cdot[1-\mathbb{P}(E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})] \overset{d}{=} c_1\cdot[X_n] + c_0\cdot[1-X_n] =$$
$$\frac{B_n}{N+n+1}\cdot[X_n] + \frac{B_n}{N+n+1}\cdot[1-X_n] =$$
$$\frac{B_nX_n + X_n}{N+n+1} + \frac{B_n - B_nX_n}{N+n+1} = \frac{X_n + B_n}{N+n+1} = \frac{\frac{B_n}{N+n}+B_n}{N+n+1} \overset{e}{=} X_n$$

---

a. Per la formula delle probabilità totali e l'indipendenza

$$X_n = X_n\cdot(\mathbf{1}_E + \mathbf{1}_{E^c})$$

b. Dato l'evento E sappiamo che alla (n+1)-esima estrazione il suo valore *costante* è dato da $c_1 = \frac{B_{n+1}+1}{N+n+1}$ analogamente per E^c il valore sarà $c_0 = \frac{B_{n+1}}{N+n+1}$
c. Proprietà del Valore Atteso di una v.a. indicatrice
d. Dato che l'unico evento nella σ-algebra $\mathcal{F}_n$ che condiziona è
$E = (B_{n+1} = B_n + 1)$ dunque il problema può essere ridotto in:

$$\mathbb{P}(E|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{P}(E|B_n) = \mathbb{P}(E) = \frac{B_n}{N+n} = X_n$$

e. $\frac{\frac{B_n}{N+n}+B_n}{N+n+1} = \frac{\frac{NB_n+nB_n+B_n}{N+n}}{N+n+1} = \frac{B_n}{N+n}\frac{N+n+1}{N+n+1} = \frac{B_n}{N+n} = X_n$

Esempio 4.2.8: Martingala di Lévy

Sia variabile aleatoria $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico t.c.

$$X_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si può notare come $\boldsymbol{X}$ sia martingala infatti $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] \overset{\text{a}}{=} \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n] = X_n$$

Tale martingala è denotata come **Martingala di Lévy**.

a. Per la proprietà della torre 2.3.6 dato che $F_n \subset F_{n+1}$

4.3 Decomposizioni di Martingale

Definizione 4.3.1: Processo Stocastico Prevedibile

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico e $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione, allora se vale la seguente proprietà:

$$X_{n+1} \in m\mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{X}$ è detto processo stocastico **Prevedibile** rispetto a filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ovvero è possibile prevedere il valore al tempo $n+1$ osservando gli eventi a tempo n.

Esempio 4.3.2: Processo Stocastico Prevedibile

Sia $\Omega = \{0,1\}^N$ spazio campionario e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico discreto definito in questo modo:

$$X_n(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_n = 1 \\ -1 & \omega_n = -1 \end{cases} \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \Omega$$

Sia definito un secondo processo stocastico $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

Dato che $X_k \in m\mathcal{F}_{n-1}$ per ogni k allora $Y_n \in m\mathcal{F}_{n-1}$ il che rende $\boldsymbol{Y}$ processo prevedibile.

Teorema 4.3.3: Decomposizione di Doob

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ allora sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. $\exists(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}) = (M_n, A_n)_{\mathbb{N}}$ vettore di processi stocastici tali che $\boldsymbol{M}$ è martingala e $\boldsymbol{A}$ è prevedibile. Inoltre vale che
$$X_n = M_n + A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
con $A_0 = 0$ dunque $X_0 = M_0$.
2. $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A})$ è unico.
3. $$\boldsymbol{X} \text{ è sub(super)-martingala } \iff \boldsymbol{A} \text{ è non decrescente (crescente)}$$
ovvero
$$\boldsymbol{X} \text{ è sub(super)-martingala } \iff \mathbb{P}(A_n \overset{(\geq)}{\leq} A_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da un processo stocastico si può ottenere una martingala e un processo prevedibile tale decomposizione è denominata **Decomposizione di Doob**.
Si inoltre può osservare come da un qualunque processo stocastico si possa ottenere una martingala rimuovendo i valori prevedibili del processo ($M_n = X_n - A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Dimostrazione 4.3.3: Decomposizione di Doob

2. Supponendo che $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A})$ sia la decomposizione di doob di $\boldsymbol{X}$, possiamo dimostrare che sia unica con la seguente relazione fissando un $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} - X_n = M_{n+1} - M_n + A_{n+1} - A_n \iff \tag{4.1}$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n + A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n] \overset{\text{a,b}}{\iff} \tag{4.2}$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[A_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[A_n|\mathcal{F}_n] \overset{\text{a,c}}{\iff} \tag{4.3}$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n = A_{n+1} - A_n \iff \tag{4.4}$$
$$A_{n+1} = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n + A_n \tag{4.5}$$

Stabilendo una definizione ricorsiva si è dimostrato che il processo $\boldsymbol{A}$ è unicovo in base a $\boldsymbol{X}$ e impostando un valore iniziale A_0. Analogamente per il processo $\boldsymbol{A}$ partendo dall'equazione 4.1 stabiliamo ricorsivamente:

$$M_{n+1} = X_{n+1} - X_n - A_{n+1} + A_n + M_n \tag{4.6}$$

$\boldsymbol{M}$ è unicovo in base a $\boldsymbol{X}$ e impostando un valore iniziale $M_0 = X_0$.

1. Supponendo che $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A})$ sia univoca e esiste, bisogna dimostrare che $\boldsymbol{A}$ sia processo prevedibile e $\boldsymbol{M}$ martingala.
Partendo dall'equazione (4.5) si può notare come $X_n \in \mathcal{F}_n$ per punto **a**, $A_0 \in \mathcal{F}_n$ se impostato correttamente (es $A_0 = 0$), infine $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \in \mathcal{F}_n$ per definizione di valore atteso condizionatoa a σ-algrabra 2.3.1 e all'osservazione sulla versione unica 2.3.3. Dunque anche $A_{n+1} \in \mathcal{F}_n$ dunque $\boldsymbol{A}$ è prevedibile secondo definizione 4.3.1.
Invece partendo dall'equazione (4.6) si ottiene:

$$\begin{aligned} M_{n+1} = X_{n+1} - X_n - A_{n+1} + A_n + M_n &\iff \\ \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n - A_{n+1} + A_n + M_n &\overset{\text{a,c}}{\iff} \\ \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n & \end{aligned}$$

$\boldsymbol{M}$ è martingala.

3. Dall'equazione (4.5) $\boldsymbol{X}$ è sub(super)-martingala se e solo se: 4.2.1:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{(\geq)}{\leq} A_{n+1} - A_n + X_n \iff A_{n+1} \overset{(\geq)}{\leq} A_n$$

---

a. $X_n \in \mathcal{F}_n$ per definizione di processo adattato a filtrazione 3.1.4

b. Poiché $\boldsymbol{M}$ è martingala 4.1.1 e $M_n \in \mathcal{F}_n$ si ha che

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - M_n = 0$$

c. Poiché $\boldsymbol{A}$ è prevedibile 4.3.1 e $A_n \in \mathcal{F}_n$ si ha che

$$\mathbb{E}[A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n] = A_{n+1} - A_n$$

□

Definizione 4.3.4: Alpha-Trasformata

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico adattato a filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e sia $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico prevedibile, allora può essere definito un processo stocastico $\boldsymbol{G} = (G(\alpha, X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$G(\alpha, X)_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X_k - X_{k-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $G(\alpha, X)_n = 0$. Allora $\boldsymbol{G}$ è chiamata **$\boldsymbol{\alpha}$-Trasformata** di $\boldsymbol{X}$ o Trasformata di $\boldsymbol{X}$ attraverso $\boldsymbol{\alpha}$.

Teorema 4.3.5: Proprietà dell'Alpha-Trasformata

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala adattata a filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico con $\alpha_n \in bm\mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora si possono osservare le seguenti proprietà sull' α-trasformata $\boldsymbol{G} = (G(\alpha, X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. se $\boldsymbol{\alpha}$ è prevedibile e $\boldsymbol{X}$ è martingala allora $\boldsymbol{G}$ è martingala a media nulla, ovvero:
$$\mathbb{E}[G(\alpha, X)_n] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
2. se $\boldsymbol{G}$ è martingala a media nulla per ogni $\boldsymbol{\alpha}$ prevedibile allora $\boldsymbol{X}$ è martingala.

Dimostrazione 4.3.5: Proprietà dell'Alpha-Trasformata

2. Supponendo che $\boldsymbol{G}$ sia processo a media nulla allora si può osservare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\forall \boldsymbol{\alpha}$ prevedibile:

$$\mathbb{E}[G(\alpha, X)_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{\text{a}}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_n\right] \overset{\text{b}}{=}$$
$$\mathbb{E}[G(\alpha, X)_n + \alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \overset{\text{c}}{=}$$
$$G(\alpha, X)_n + \alpha_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n]$$

Dato che $\boldsymbol{G}$ è martingala a media nulla ci riduciamo a dimostrare che:

$$\alpha_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0 \overset{\text{c}}{\implies} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n = 0 \implies$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \implies \boldsymbol{X} \text{ è martingala}$$

1. Fissando $n \in \mathbb{N}$ e un evento $E \in \mathcal{F}_n$ allora si può costruire un processo $\boldsymbol{\alpha}$ tale che

$$\alpha_k = \begin{cases} \mathbf{1}_E & \text{se } k = n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\mathbf{1}_E \in \mathcal{F}_{n=k-1}$ e $0 \in \mathcal{F}_{k-1}$ sempre dunque $\alpha_k \in \mathcal{F}_k \implies \boldsymbol{\alpha}$ è prevedibile. Dunque si può osservare che da $\boldsymbol{X}$ martingala si può:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \overset{\text{c}}{\implies} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] \implies$$
$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|E] = 0 \overset{\text{d}}{\implies} \frac{\mathbb{E}[X_{n+1} \cdot \mathbf{1}_E - (X_n \cdot \mathbf{1}_E)]}{\mathbb{P}(E)} = 0 \implies$$
$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_E(X_{n+1} - X_n)] = 0 \implies \mathbb{E}[\alpha_n(X_{n+1} - X_n)] = 0 \overset{\text{b}}{\implies}$$
$$\mathbb{E}[G(\alpha, X)_{n+1} - G(\alpha, X)_n] = 0 \overset{\text{c}}{\implies} \mathbb{E}[G(\alpha, X)_{n+1}] = G(\alpha, X)_n$$

Dato che per definizione $G(\alpha, X)_0 = 0$ si ha che $\boldsymbol{G}$ è martingala a media nulla.

---

a. Per definizione di α-trasformata 4.3.4

b.

$$G(X, \alpha)_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (X_k - X_{k-1}) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k (X_k - X_{k-1})] + \alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n) =$$
$$G(X, \alpha)_n + \alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$$

c. Per definizione di processo stocastico 3.1.2, processo prevedibile 4.3.1 e linearità del valore atteso condizionato 2.3.6.

d. Per osservazione sui valori attesti condizionati 2.1.3 □

Capitolo 5

Processi di Markov

5.1 Proprietà dei Processi di Markov

Definizione 5.1.1: Proprietà di Markov

Un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con filtrazione $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice avere la **Proprietà di Markov** se soddisfa:

1. $\boldsymbol{X}$ è adattato a $\boldsymbol{\mathcal{F}}$
2. $\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall \varphi \in bm\mathcal{B}$

Dove $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$.

Osservazione 5.1.2: Proprietà di Markov

Dato un processo stocastico $\boldsymbol{X}$ allora si può osservare che:

$$\boldsymbol{X} \text{ ha la proprietà di Markov} \iff \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = g_n(X_n)$$

Con g_n una funzione di regressione. Infatti si può dimostrare che:
$\implies$)

$$5.1.1 \implies \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n] \overset{2.4.4}{=} g_n(X_n)$$

$\impliedby$)

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n] \overset{2.3.6.5}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}]|X_n] \overset{\text{ipotesi}}{=}$$
$$\mathbb{E}[g_n(X_n)|X_n] \overset{2.3.6.3 \text{ e } 2.4.3.}{=} \Longleftarrow \quad g_n(X_n) \overset{\text{ipotesi}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]$$

Esempio 5.1.3: Processi Stocastico di Costanti e Markov

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ per ogni i, j, dunque $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}$ allora si può notare:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}] \overset{2.3.6.4}{=} \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})] = c_n$$

Dato che è possibile costruire una funzione $g_n(X_n) = c_n$ allora per l'osservazione 5.1.2 $\boldsymbol{X}$ possiede la proprietà di Markov.

Esempio 5.1.4: Gioco Equo e Martingala

Siano $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processi stocastici tali che

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Dunque si può notare che con $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$ e $Y_n \in m\mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(Y_n + X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &\overset{2.3.8}{=} \\ \mathbb{E}[\varphi(y + X_{n+1})|\mathcal{F}_n]|_{y=Y_n} &= g(Y_n)\end{aligned}$$

Dato il Lemma del Congelamento dunque esiste una funzione $g(Y_n) = \mathbb{E}[\varphi(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n]$ dunque $\boldsymbol{Y}$ possiede la probabilità di Markov oltre a essere una Martinagala dall'esempio 4.2.2.

Teorema 5.1.5: Probabilità Condizionata e Markov

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora vale per ogni intervallo boreliano $H \in \mathcal{B}$ e $A = (X_{n+1} \in H)$:

$$\boldsymbol{X} \text{ ha la proprietà di Markov} \iff \mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(A|X_n)$$

Ovvero la probabilità di ogni evento in $\mathcal{F}_n$, è condizionata solo agli eventi della sigma-algebra $\sigma(X_n)$.

Dimostrazione 5.1.5: Probabilità Condizionata e Markov

$\Longrightarrow$) Supponendo dunque la Proprietà di Markov 5.1.1 su $\boldsymbol{X}$ e fissando $\mathbf{1}_H = \varphi$ con $H \in \mathcal{B}$ tenendo conto $A = (X_{n+1} \in H)$ si dimostra che:

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_H(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_H(X_{n+1})|X_n] \iff \mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(A|X_n)$$

Ovvio per proprietà della variabile aleatoria indicatrice. $\longrightarrow$

Dimostrazione 5.1.5: Probabilità Condizionata e Markov

$\Longleftarrow$) Siano $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia di funzioni semplici (1.2.4) tale che $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n) = \varphi$ e $\varphi \in bm\mathcal{B}$ e:

$$\varphi_n(A) = \sum_k c_j^{(n)} \cdot \mathbf{1}_{H_k^{(n)}}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Dunque si può utilizzare la proprietà di convergenza dominata (CD) sui valori attesi condizionati (2.3.9) e si può dimostrare:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \overset{\text{CD}}{=}$$
$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}[\varphi_n(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]) = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}[\sum_k c_j^{(n)} \cdot \mathbf{1}_{H_k^{(n)}}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]) =$$
$$\lim_{n\to\infty}(\sum_k c_j^{(n)}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{H_k^{(n)}}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]) = \lim_{n\to\infty}(\sum_k c_j^{(n)}\mathbb{P}(X_{n+1} \in H_k^{(n)}|\mathcal{F}_n))$$

Analogamente si può dimostrare usando gli stessi passaggi che

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n] = \lim_{n\to\infty}(\sum_k c_j^{(n)}\mathbb{P}(X_{n+1} \in H_k^{(n)}|X_n))$$

Supponendo infine la proprietà di markov su $\boldsymbol{X}$ Si dimostra

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_k c_j^{(n)}\mathbb{P}(X_{n+1} \in H_k^{(n)}|\mathcal{F}_n)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_k c_j^{(n)}\mathbb{P}(X_{n+1} \in H_k^{(n)}|X_n))$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X_{n+1} \in H^{(n)}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in H^{(n)}|X_n)$$

$\square$

Teorema 5.1.6: Proprietà di Markov a più Passi

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico allora

$$\boldsymbol{X} \text{ ha la proprietà di Markov} \iff \mathbb{E}[\varphi(X_{n+k})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+k})|X_n]$$

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ e $\varphi \in bm\mathcal{B}$.

Dimostrazione 5.1.6: Proprietà di Markov a più Passi

$\Longleftarrow$) Ovvio per l'osservazione 5.1.2 con $k = 1$.

$\longrightarrow$

Dimostrazione 5.1.6: Proprietà di Markov a più Passi

$\Longrightarrow$) Si procede per induzione su k:

- $k = 1$) Dato che $\boldsymbol{X}$ ha la proprietà di Markov allora:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n]$$

- $k > 1$) Supponendo che $\boldsymbol{X}$ abbia la proprietà di Markov per k ovvero $\mathbb{E}[\varphi(X_{n+k})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+k})|X_n]$ allora:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+k+1})|\mathcal{F}_n] \overset{\text{b}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_{n+k+1})|\mathcal{F}_{n+k}]|\mathcal{F}_n] \overset{5.1.2}{=}$$
$$\mathbb{E}[g_{n+k}(X_{n+k})|\mathcal{F}_n] \overset{\text{a,ipotesi}}{=} \mathbb{E}[g_{n+k}(X_{n+k})|X_n] \overset{5.1.2}{=}$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_{n+k+1})|\mathcal{F}_{n+k}]|X_n] \overset{\text{b}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X_{n+k+1})|X_n]$$

---

a. La funzione di regressione g_{n+k} appartine a $bm\mathcal{B}$ per l'osservazione 5.1.2, dunque si può porre $g_{n+k} = \varphi$.

b. Si può notare come $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+k}$ e $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$ per via dell'osservazione 3.1.5 dunque è possibile applicare la proprietà della torre 2.3.6.5 □

Teorema 5.1.7: Proprietà di Markov e Sottofiltrazioni

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico che ha la proprietà di Markov rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e sia $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sottofitrazione di $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cui $\boldsymbol{X}$ è adattato, allora $\boldsymbol{X}$ ha la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dimostrazione 5.1.7: Proprietà di Markov e Sottofiltrazioni

Supponendo dunque che:

1. $\boldsymbol{X}$ ha la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (5.1.1)
2. $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottofiltrazione di $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\boldsymbol{X}$ è adattato a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (3.1.4 e 3.1.5)

Si può dimostrare:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{G}_n] \overset{\text{2. e 2.3.6.5}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]|\mathcal{G}_n] \overset{1.}{=}$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n]|\mathcal{G}_n] \overset{\text{3. e 2.3.6.5}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n]$$

□

Osservazione 5.1.8: Proprietà di Markov e Filtrazione Naturale

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico allora si può osservare che:

$$\boldsymbol{X} \text{ ha P.M su } (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \boldsymbol{X} \text{ ha P.M su } (\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$$

L'implicazione è data dal fatto che $\boldsymbol{X}$ è adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dunque per l'osservazione 3.1.5 si ha $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$ mentre per l'osservazione 3.1.10 si ha $\sigma(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}$. allora si ha che $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si dimostra la proprietà di markov per il teorema 5.1.7. Il viceversa non è vero in generale, a seguire vi è un controesempio.

Esempio 5.1.9: Proprietà di Markov e Filtrazione Naturale

Sia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ per ogni n, e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico che ha la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$.
Se $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_k^{\boldsymbol{X}}$ per almeno un k, allora non è possibile utlizzare la proprietà della torre 2.3.6.5 per dimostrare che $\boldsymbol{X}$ ha la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.2 Catene di Markov

Definizione 5.2.1: Processo Stocastico a Valori Discreti

Un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ si dice **a Valori Discreti** se è composto da variabile aleatorie discrete.

Definizione 5.2.2: Processo Discreto

Un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ si dice **Discreto** se è a valori discreti e a tempo discreto.

Definizione 5.2.3: Catena di Markov Discreta

Un processo discreto $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **Catena di Markov Discreta** se ha la proprietà di Markov, rispetto alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 5.2.4: Proprietà delle Catene di Markov

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo discreto allora $\boldsymbol{X}$ è una Catena di Markov se e solo se soddisfa:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$$

Con $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, \dots, x_{n+1} \in S_{\boldsymbol{X}}$.

Dimostrazione 5.2.4: Proprietà delle Catene di Markov

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può fissare $A_{\mathbf{X}} = (X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$, e $\varphi = \mathbf{1}_{(x_{n+1})}$ così che $\varphi(X_{n+1}) = (X_{n+1} = x_{n+1})$, bisogna dimostrare che:

$$\begin{aligned}
&5.2.3 \overset{5.1.5}{\iff} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n) \overset{a.}{\iff} \\
&(X_{n+1} = x_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})(\omega) = (X_{n+1} = x_{n+1}|X_n)(\omega) \quad \forall \omega \in A_{\mathbf{x}} \overset{b.}{\iff} \\
&(X_{n+1} = x_{n+1}|\sigma(X_n, \dots, X_0))(\omega) = (X_{n+1} = x_{n+1}|\sigma(X_n))(\omega) \overset{2.2.2}{\iff} \\
&\sum_{(\mathbf{X}_n = \mathbf{x}_n)\in\sigma(X_n,\dots,X_0)} \mathbf{1}_{(X_i = x_i)}(\omega) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|\mathbf{X}_n = \mathbf{x}_n) = \\
&\sum_{(X_i = x_i)\in\sigma(X_n)} \mathbf{1}_{(X_i = x_i)}(\omega) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_i = x_i) \overset{c.}{\iff} \\
&\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)
\end{aligned}$$

---

a. Poiché le probabilità condizionate si equivalgono quasi certamente allora anche i valori delle variabili aleatorie si equivalgono quasi certamente per ogni evento compatibile con le σ-algebre compatibili.
b. Per 2.4.1 e 3.1.9
c. Gli unici eventi che rendono le v.a indicatrici diverse da zero sono $(\mathbf{X}_n = \mathbf{x}_n) = A_{\mathbf{x}}$ e $(X_i = x_i) = (X_n = x_n)$ questo perché $\omega \in A_{\mathbf{x}}$ e $A_{\mathbf{x}} \subset (X_n = x_n)$.

$\square$

Osservazione 5.2.5: Proprietà delle Catene di Markov

Si può notare che la proprietà di Markov vale per il processo stocastico $\boldsymbol{X}$ allora è ovvio che valga anche per la proprietà del teorema 5.2.4, anche se $\boldsymbol{X}$ è a valori continui.
Mentre il viceversa non è vero in generale, infatti, Si assume che $\mathbb{P}(A_{\mathbf{x}}) > 0$, ovvero che l'evento $(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$ sia una partizione dell'intero spazio degli stati. Se il processo stocastico $\boldsymbol{X}$ è a valori continui, allora l'evento $(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$ ha probabilità nulla dato $\mathbb{P}(X_n = x_n) = 0$ per ogni n.

Definizione 5.2.6: Catena di Markov Omogenea

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov discreta allora $\boldsymbol{X}$ si dice **Omogenea** se soddisfa:

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = x_i|X_n = x_j) = \mathbb{P}(X_{m+k} = x_i|X_m = x_j)$$

Per ogni $n, m, k \in \mathbb{N}$ con $k > 0$ e $x_i, x_j \in S_{\boldsymbol{X}}$.
Ovvero la probabilità condizionata è indipendente dal tempo.

Definizione 5.2.7: Probabilità di Transizione

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov discreta allora la si può definire la **Probabilità di Transizione** come:

$$\pi_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_j|X_n = x_i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge x_i, x_j \in S_{\boldsymbol{X}}$$

Essa descrive la probabilità di passare dallo stato x_i allo stato x_j al passo n. Nel caso di catene di Markov omogenee si ha che $\pi_{ij}^{(n)} = \pi_{ij}$.

Definizione 5.2.8: Matrice di Transizione

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una Catena di Markov Omogenea allora si può definire la **Matrice di Transizione** come:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \dots & \pi_{nn} \end{pmatrix}$$

Osservazione 5.2.9: Matrice di Transizione

La matrice di transizione Π è una matrice stocastica, ovvero dei valori delle colonne è una distribuzione di probabilità, dunque:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_j|X_n = x_i) = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Questo poiché $B = \{X_n = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ dove B è una partizione la cui unione è l'intero spazio degli stati, dunque la somma delle probabilità condizionate deve essere uguale a 1.

Esempio 5.2.10: Processo Bernoulliano Indipendente

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico tale che $X_n \perp\!\!\!\perp X_m$ per ogni n, m e $X_n \sim B(p)$ allora si può notare che oltre ad avere la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ per l'osservazione 5.1.3 si può notare come:

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = p = \pi_{00} = \pi_{10}$
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 1 - p = \pi_{01} = \pi_{11}$

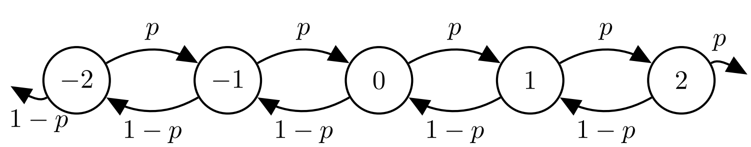
Dunque si può notare che $\boldsymbol{X}$ è una catena di Markov omogenea con matrice di transizione .

Esempio 5.2.11: Gioco Equo e Markov

Sia $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processi stocastici tali che $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ e $X_n \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ allora si può notare che $\boldsymbol{Y}$ ha la proprietà di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{Y}})_{n\in\mathbb{N}}$ per l'esempio 5.1.4 inoltre si può notare che:

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i+1|Y_n = i) = \mathbb{P}(Y_n + X_{n+1} = i+1|Y_n = i) = \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p = \pi_{i,i+1}$$

Dunque si può notare che $\boldsymbol{Y}$ è una catena di Markov omogenea ed è rappresentata da:



Osservazione 5.2.12: Prob. Congiunta su Catena di Markov

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora si può notare che:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = p_{X_0}(x_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} \pi_{x_{i-1},x_i}$$

Questo perché la probabilità di passare da uno stato all'altro è indipendente dal tempo.

Esempio 5.2.13: Prob. Congiunta su Catena di Markov, n=1

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\ &= p_{X_0}(x_0) \cdot \pi_{x_0, x_1}\end{aligned}$$

Usando la definizione di probabilità di transizione e la regola della catena.

Esempio 5.2.14: Prob. Congiunta su Catena di Markov, n=2

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \\ &\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = \\ &\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdot \mathbb{P}(X_0 = x_0) \overset{5.2.4}{=} \\ &\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdot \mathbb{P}(X_0 = x_0) = \\ &\pi_{x_1, x_2} \cdot \pi_{x_0, x_1} \cdot p_{X_0}(x_0)\end{aligned}$$

Usando la definizione di probabilità di transizione e la regola della catena.

5.3 Distribuzioni delle Catene di Markov

Definizione 5.3.1: Distribuzione della Catena di Markov

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora si può definire la **Distribuzione della Catena di Markov** a tempo n come:

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = x_1) \\ \mathbb{P}(X_n = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = x_n) \end{pmatrix}$$

Teorema 5.3.2: Distribuzione della Catena di Markov

Dato $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora la distribuzione della catena di Markov a tempo n è calcolabile tramite la formula:

$$\mathbf{p}_n = \Pi^n \cdot \mathbf{p}_0$$

Dimostrazione 5.3.2: Distribuzione della Catena di Markov

Si può calcalcolare il vettore tramite induzione:
Passo 0:

$$\mathbf{p}_0 = \Pi^0 \cdot \mathbf{p}_0 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{p}_0$$

Passo n: Supponendo

$$\mathbf{p}_n = \Pi^n \cdot \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{X_{n+1}}(x_1) \\ p_{X_{n+1}}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_{n+1}}(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = x_n) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_1) | \mathbb{P}(X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_2) | \mathbb{P}(X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_n) | \mathbb{P}(X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \pi_{x,x_1} \cdot \mathbf{p}_n(x) \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \pi_{x,x_2} \cdot \mathbf{p}_n(x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \pi_{x,x_n} \cdot \mathbf{p}_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \Pi(x, x_1) \cdot \mathbf{p}_n(x) \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \Pi(x, x_2) \cdot \mathbf{p}_n(x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{x \in S_{\boldsymbol{X}}} \Pi(x, x_n) \cdot \mathbf{p}_n(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Pi(x_1)^T \cdot \mathbf{p}_n \\ \Pi(x_2)^T \cdot \mathbf{p}_n \\ \vdots \\ \Pi(x_n)^T \cdot \mathbf{p}_n \end{pmatrix} = \Pi \cdot \mathbf{p}_n = \Pi \cdot \Pi^n \cdot \mathbf{p}_0 = \Pi^{n+1} \cdot \mathbf{p}_0$$

$\square$

Osservazione 5.3.3: Distribuzione della Catena di Markov

Dunuque ogni catena di Markov omogenea è completamente descritta dalla sua matrice di transizione Π e dalla sua distribuzione iniziale $\mathbf{p}_0$.

Osservazione 5.3.4: Passato e Futuro Indipendenti da Presente

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea e siano i seguenti eventi:

$$\begin{aligned}
P &= (X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\
R &= (X_n = x_n) \\
F &= (X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k})
\end{aligned}$$

Rappresentano rispettivamente passato, presente e futuro, allora si può osservare che:

$$\mathbb{P}(F|(R,P)) \overset{5.2.4}{=} \mathbb{P}(F|R)$$

$$\mathbb{P}((F\cap P)|R) \overset{F \perp\!\!\!\perp P}{=} \mathbb{P}(F|R)\cdot\mathbb{P}(P|R)$$

Ovvero passato e futuro sono indipendenti condizionatamente al presente.

Teorema 5.3.5: Catene di Markov Omogenee su VA IID

Sia $\boldsymbol{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico indipendente e identicamente distribuito a valori in spazio misurabile $(\mathcal{G}, E)$ e sia $f : E\times\mathcal{G} \to E$ funzione $m(\mathcal{P}(E)\times\mathcal{G})$.
Allora per ogni processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

- $X_0 \perp\!\!\!\perp Z_1$
- $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$

$\boldsymbol{X}$ è una catena di Markov omogenea con probabilità di transizione:

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i) = \mathbb{P}(f(x_i, Z_k) = x_j) \quad \forall x_i, x_j, k \in E$$

Dimostrazione 5.3.5: Catene di Markov Omogenee su VA IID

Dobbiamo dimostrare che $\boldsymbol{X}$ tale che $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ possiede la proprietà di markov e che scelto opportunamente E è anche una catena di Markov omogenea. Dunque per ogni $A \in E$ si ha:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{f(X_n,Z_{n+1})\in A}|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{\text{a}}{=}$$
$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(f(X_n, Z_{n+1}))|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{\text{b}}{=} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(f(x_n, Z_{n+1}))|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}]|_{x_n=X_n} =$$
$$\mathbb{E}[f(x_n, Z_{n+1}) \in A|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}]|_{x_n=X_n} \overset{2.3.8}{=} g(X_n) \overset{\text{c}}{\Longrightarrow}$$
$\boldsymbol{X}$ ha la proprietà di Markov 5.1.1

Si può notare che il passaggio b. è possibile per qualsiasi scelta di Z_k dato che $\sigma(Z_k) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}$ per ipotesi. Ponendo E discreto e $A = x_j$ si ha:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_j|X_n = x_i) = \mathbb{P}(f(x_i, Z_{n+1}) = x_j) = \pi_{ij}$$

---

a. Per la proprietà delle variabili aleatorie indicatrici.

b. Dato che $X_n \in m\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}$ e $\sigma(Z_{n+1}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}$ per ipotesi allora è possibile sfruttare il Freezing Lemma 2.3.8.

c. Ponendo $\varphi = \mathbf{1}_A$ e usando l'osservazione 5.1.2. □

Questo risultato è dato dal fatto che:

- **Indipendenza** garantische la proprietà di Markov della catena.
- **Distribuzione Identica** garantisce l'omogeneità della catena.

Osservazione 5.3.6: Processo IID e Omogeneità

Sia $\boldsymbol{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico e $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico definito come nel teorema 5.3.5 allora si può notare che

- se $\boldsymbol{Z}$ è un processo stocastico i.i.d allora $\boldsymbol{X}$ è una catena di Markov omogenea.
- se $\boldsymbol{Z}$ è un processo stocastico solamente indipendente allora $\boldsymbol{X}$ è una catena di Markov non omogenea.

Esempio 5.3.7: Processo a Somma di Valori

Sia $\boldsymbol{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico i.i.d tale che $Z_n \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ con funzione $f(x,z) = x + z$ allora si può notare che $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico tale che $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}) = X_n + Z_{n+1}$ essa è una catena di Markov omogenea con probabilità di transizione:

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i) = \mathbb{P}(X_n + Z_{n+1} = x_j | X_n = x_i) = \\ &= \mathbb{P}(x_i + Z_{n+1} = x_j) = \mathbb{P}(f(x_i, Z_{n+1}) = x_j)\end{aligned}$$

Esempio 5.3.8: Urna di Ehrenfest

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico tale che X_n rappresenta il numero di palline in una delle due urne di Ehrenfest, ad ogni tempo n si sceglie una delle N palline a caso e la si sposta nell'altra urna. Dunque l'esperimento può essere modellato in questo modo:

- $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$
- $\mathbb{P}(Z_{n+1} = -1) = \frac{n}{N}$
- $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = \frac{N-n}{N}$

Con $Z_{n+1} \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ allora si può notare che $\boldsymbol{Z}$ è un processo stocastico **non indipendente** questo perché la probabilità di scegliere una pallina dipende dal numero di palline presenti nelle urne.
Dunque non è possibile applicare il teorema 5.3.5.

Osservazione 5.3.9: Proprietà di Markov e Intervalli

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea allora si può notare che la proprietà di markov non è valida se si condiziona rispetto a un intervallo di stati. Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{P}(S_{\boldsymbol{X}})$ si ha che:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0) \neq \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n \in A_n)$$

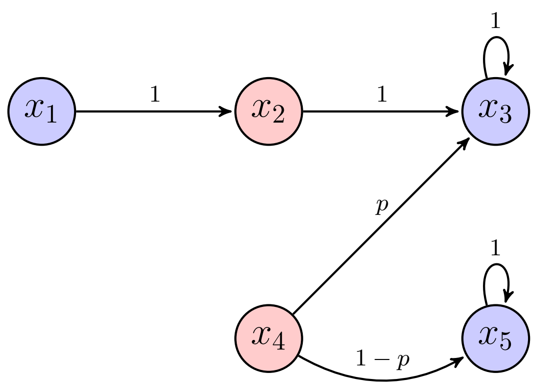
A seguire un esempio che mostra come la proprietà di markov non sia valida se si condiziona rispetto a un intervallo di stati.

Esempio 5.3.10: Proprietà di Markov e Intervalli

Sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea tale che

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In forma di grafo si ha:



Dunuqe si possono calcolare le seguenti probabilità:

$$\mathbb{P}(X_2 = x_3 | X_1 \in \{x_2, x_4\}) < 1$$
$$\mathbb{P}(X_2 = x_3 | X_1 \in \{x_2, x_4\}, X_0 = x_1) = 1$$

Questo tipo di evento non rispetta la proprietà di Markov per le catene di markov discrete.

Teorema 5.3.11: Catene di Markov e Congelamento

Sia $\boldsymbol{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico i.i.d e $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea tale che:

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in m\mathcal{B}$ vale:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] = \mathbb{E}[\varphi(f(x, Z_{n+1}))]|_{x=X_n}$$

Dimostrazione 5.3.11: Catene di Markov e Congelamento

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in m\mathcal{B}$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] \overset{5.2.3}{=} \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n] \overset{\text{a}}{=} \\
&\sum_{(X_n=i)\in\sigma(X_n)} \mathbf{1}_{X_n=i} \cdot \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n = i] \overset{\text{b}}{=} \\
&\sum_{i\in E} \mathbf{1}_i(X_n) \cdot \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|X_n = i] \overset{\text{c}}{=} \\
&\sum_{i\in E} \mathbf{1}_i(X_n) \cdot \sum_{j\in E} \varphi(j) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) \overset{5.3.5}{=} \\
&\sum_{i\in E} \mathbf{1}_i(X_n) \cdot \sum_{j\in E} \varphi(j) \cdot \mathbb{P}(f(i, Z_k) = j) \overset{\text{c}}{=} \\
&\sum_{i\in E} \mathbf{1}_i(X_n) \cdot \mathbb{E}[\varphi(f(i, Z_k))] \overset{\text{d}}{=} \mathbb{E}[\varphi(f(i, Z_k))] = g(i) \overset{2.3.8}{\Longrightarrow} \\
&\mathbb{E}[\varphi(f(X_n, Z_k))|\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{X}}] = g(X_n) = \mathbb{E}[\varphi(f(i, Z_k))]|_{i=X_n}
\end{aligned}$$

---

a. Dato che X_n è discreta allora $\sigma(X_n) = \{X_n = i\}_{i\in E}$ forma una partizione di eventi, dunque e possibile usare l'osservazione 2.2.4.

b. In questo caso dato che $\sigma(X_n)$ è una partizione di eventi allora si può sommare rispetto ai valori che X_n può assumere, e sfruttando le proprietà delle variabili aleatorie indicatrici.

$$\mathbf{1}_i(X_n(\omega)) = \mathbf{1}_{X_n=i}(\omega)$$

c. Usando la definizione di valore atteso condizionato a un evento (2.1.2), nel caso discreto.

d. Anche in questo caso si può sfruttare il fatto che X_n è discreto e dunque $\sigma(X_n)$ è una partizione di eventi, dunque solo per un evento ω si ha che $\mathbf{1}_i(X_n(\omega)) = 1$. $\square$

Capitolo 6

Teoria dell'Arbitraggio

6.1 Titoli Finanziari

La **teoria dell'arbitraggio** si occupa di studiare la valutazione e copertura dei *derivati*.

Definizione 6.1.1: Asset

Un Asset è un bene sottostante a un titolo finanziario il cui valore può variare nel tempo. Tale valore nel tempo t è indicato con S_t.

Definizione 6.1.2: Derivato

Un **derivato** è un contratto il cui valori dipende da un **asset**.

Esempi di asset sono: materie prime, beni reali o beni finanziari.

Definizione 6.1.3: Opzione

Un'**opzione** è un derivato che *permette* di esercitare il diritto di comprare o vendere un bene sottostante a un prezzo fissato in anticipo, ad un certo tempo futuro. Il valore dell'asset è indicato con S_t a tempo t.

Un'opzione ha diverse proprietà:

- **Stike** k (prezzo fissato in anticipo)
- **Scadenza** T (tempo futuro)
- **Tipologia**: *Call* o *Put* (diritto di comprare o vendere)
- **Classificazione**:
  - **Americana**: diritto esercitato al tempo t t.c. $t \leq T$
  - **Europea** diritto esercitato al tempo t t.c. $t = T$
- **Valore** C_t o P_t al tempo t (tipo call o put)

Il **Valore** di una Call nel tempo t è dato da:

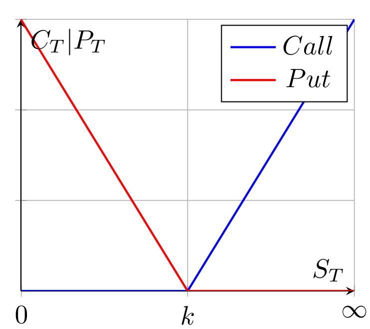
$$C_t = (S_t - k)^+ = \begin{cases} 0 & \text{if } S_t - k \leq 0 \\ S_t - k & \text{else} \end{cases}$$

Dualmente, il **Valore** di una Put nel tempo t è dato da:

$$P_t = (k - S_t)^+ = \begin{cases} 0 & \text{if } k - S_t \leq 0 \\ k - S_t & \text{else} \end{cases}$$

L'opzione dunque ti permette o meno di esercitare il diritto. In caso non lo si eserciti il valore dell'opzione è da considerarsi C_T o $P_T = 0$

Grafico 6.1.4: Valori Call e Put



Esempio 6.1.5: Opzione Caso Call e Put

Il problema ha i seguenti dati:

- S_t il valore di un'azione Apple al tempo t
- $S_0 = 200$ euro
- $T = 1$ mese
- $k = 310$ euro
- Tipologia Europea

Bisogna stabile se eserciate il proprio diritto di opzione oppure no.

Caso Opzione Call

Sia $S_1 = 350$ dunque usando la definizione si può calcolare il valore dell'opzione data da:

$$C_1 = (S_1 - k)^+ = (350 - 310)^+ = 40$$

Dato che $C_1 > 0$ è conveniente esercitare il diritto di vendita.
Si può intuire come il valore del bene (S_t) sia *maggiore* del prezzo al quale lo si acquista (k), dunque alla successiva vendita verrà realizzato un guadagno.

Caso Opzione Put

Sia $S_1 = 290$ dunque usando la definizione si può calcolare il valore dell'opzione data da:

$$P_1 = (k - S_1)^+ = (310 - 290)^+ = 20$$

Dato che $P_1 > 0$ è conveniente esercitare il diritto di vendita.
Si può intuire come il valore del bene (S_t) sia *minore* del prezzo al quale lo si vende (k), dunque al successivo acquisto verrà realizzato un guadagno.

Definizione 6.1.6: Straddle

Uno **Straddle** è un opzione che ha valore:

$$D_t = C_t + P_t = |S_t - k|$$

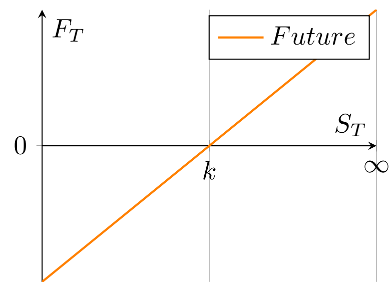
Definizione 6.1.7: Future

Un **Future** è un opzione di tipo Call, che ha *obbligo* di effettuare l'acquisto alla scadenza T, dunque il suo valore è definito:

$$F_T = S_T - k$$

Può quindi presentare casi di perdita, ma sono molto più remunerativi.

Grafico 6.1.8: Valori Future



Esempio 6.1.9: Effetto Leva

Sono definiti i seguenti dati per un opzione call di tipo europeo:

- $C_0 = 1$ euro
- $K = S_0 = 10$ euro
- $T = 1$ anno

Caso Guadagno

Si ha che il valore del bene dopo un anno sia $S_1 = 13$ mentre il valore dell'opzione è $C_1 = (13 - 10)^+ = 3$.
Il guadagno totale è dato dall'aumento da C_0 a C_1, che corrisponde a +300%.

Caso Perdita

Si ha che il valore del bene dopo un anno sia $S_1 = 10$ mentre il valore dell'opzione è $C_1 = (10 - 10)^+ = 0$.
Il guadagno (in questo caso perdita) totale è dato dall' aumento da C_0 a C_1, che corrisponde a -100%.

Con la manipolazione dei derivati possono sorgere due problemi:

- **Valutazione**: trovare il valore iniziale di un derivato, dipende dal valore dell'asset sottostante.

- **Copertura**: trovare una strategia d'investimento, che copra la vendita o compravendita di un derivato che può avere perdita illimitata.

6.2 Leggi di Capitalizzazione

Con **Leggi di Capitalizzazione** intendiamo tutte quelle *funzioni* che consentono di determinare il valore di un capitale C_T al tempo T.

Definizione 6.2.1: Capitalizzazione Semplice

Sia T tempo o durata, C_0 capitale iniziale, r tasso d'interesse, la **legge di capitalizzazione semplice** definisce il capitale a tempo T:

$$C_T = C_0(1 + rT)$$

Dove $1 + rT$ è detto *montante* o *interesse*.

Teorema 6.2.2: Capitalizzazione Composta a Tempo C.

Sia T tempo o durata, C_0 capitale iniziale, r tasso d'interesse, la **legge di capitalizzazione composta a tempo continuo** definisce il capitale a tempo T:

$$C_T = C_0 \cdot e^{rT}$$

Dimostrazione 6.2.2: Capitalizzazione Composta a Tempo C.

Divido il tempo T in N parti uguali, usando la Definizione 6.2.1 ottengo:

$$\begin{aligned}
&C_{\frac{T}{N}} = C_0(1 + r\frac{T}{N}) \\
&C_{\frac{2T}{N}} = C_{\frac{T}{N}}(1 + r\frac{T}{N}) \\
&\dots \\
&C_T = C_{\frac{(N-1)T}{N}}(1 + r\frac{T}{N}) = [C_0(1 + r\frac{T}{N})]^N
\end{aligned}$$

Usando la definizione di limite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e \\
&\lim_{N\to\infty}[C_0(1 + r\frac{T}{N})]^N = C_0 \cdot e^{rT}
\end{aligned}$$

$\square$

Definizione 6.2.3: Sconto Semplice

Sia T tempo o durata, C_0 capitale iniziale, r tasso d'interesse, la **legge di sconto semplice** definisce il capitale a tempo T:

$$C_T = \frac{C_0}{(1 + rT)}$$

Teorema 6.2.4: Sconto Composto a Tempo Continuo

Sia T tempo o durata, C_0 capitale iniziale, r tasso d'interesse, la **legge di sconto semplice** definisce il capitale a tempo T:

$$C_T = \frac{C_0}{e^{rT}}$$

Dimostrazione analoga a 6.2.2.

6.3 Principi di Arbitraggio

Notazione 6.3.1: Arbitraggio

Un'operazione di compravendita di asset che genera un guadagno con rischio nullo (≥ 0) viene definita **arbitraggio**.

Definizione 6.3.2: Principio di Non Arbitraggio (PNA)

Siano due asset X e Y con valori X_T e Y_T con T tempo t.c. $X_T \leq Y_T$ **certamente** allora:

$$X_t \leq Y_t \quad \textbf{certamente} \quad \forall t < T$$

Osservazione 6.3.3: PNA Negato

Supponiamo che il PNA non valga, dunque per due asset X e Y osserviamo che $X_T \leq Y_T$ ma $X_0 > Y_0$. Possiamo osservare che:

- Vendendo X e comprando Y $(X_0 - Y_0 > 0)$ a tempo 0.
- Comprando X e vendendo Y $(-X_T + Y_T \geq 0)$ a tempo T.

In totale osserviamo che il guadagno complessivo è dato da:

$$(X_0 - Y_0) + (Y_T - X_T) > 0$$

Ovvero si sta effettuando un'**arbitraggio**.

Osservazione 6.3.4: PNA e Valori Uguali

Siano due asset X e Y con valori X_T e Y_T con T tempo t.c. $X_T = Y_T$ **certamente** e sia valido il PNA, allora si può osservare che

$$X_t = Y_t \quad \textbf{certamente} \quad \forall t < T$$

Questo poiché $X_T = Y_T \iff X_T \leq Y_T \wedge X_T \geq Y_T$.

Teorema 6.3.5: Put-Call Parity

Siano:

- S titolo o asset rischioso (aletorio)
- B titolo o asset non rischioso (deterministico) [obbligazione]
- C e P opzioni Call e Put con S, T, k in comune.

Se vale il PNA allora è valida la seguente relazione:

$$C_t - P_t = S_t - k\frac{B_t}{B_T} \quad \forall t \in [0, T]$$

Si suppone che il titolo B abbia capitalizzazione composto a tempo continuo. Dunque ha valore $B_T = e^{rT}$ che ha come risultato:

$$C_t - P_t = S_t - ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]$$

Dimostrazione 6.3.5: Put-Call Parity

Dato S_t e le definizioni di Call e Put, si può osservare la seguente relazione:

$$\begin{cases} C_T = (S_T - k)^+ \\ P_T = (k - S_T)^+ \end{cases} \implies C_T - P_T = S_T - k$$
$$\implies C_T - P_T = S_T - k\frac{B_T}{B_T}$$

Uso il PNA, in particolare l'osservazione 6.3.4 con $X_T = C_T - P_T$ e $Y_T = S_T - k \cdot B_T$, fissando $\frac{1}{B_T}$ $(= e^{-rT})$:

$$Y_T = \frac{X_T}{B_T} \overset{\text{PNA}}{\implies} Y_t = \frac{X_t}{B_T} \implies C_t - P_t = S_t - k\frac{B_t}{B_T}$$

$\square$

Questo teorema ci indica che in un mercato dove vige il **PNA** la differenza tra due opzioni Call e Put vincolate dallo stesso bene sottostante (S) segue la relazione di differenza tra il valore del bene (S_t) e lo strike (k) moltiplicato per il fattore di sconto ($\frac{B_t}{B_T}$).

Teorema 6.3.6: Disuguaglianze Put-Call

Siano:

- S titolo o asset rischioso (aletorio)
- B titolo o asset non rischioso (deterministico)
- C e P opzioni Call e Put con S, T, k in comune.

Se vale il PNA allora valgono le seguenti disuguaglianze $\forall t \in [0, T]$:

1. $(S_t - k\frac{B_t}{B_T})^+ \leq C_t \leq S_t$
2. $(-k\frac{B_t}{B_T} - S_t)^+ \leq P_t \leq -k\frac{B_t}{B_T}$

Dimostrazione 6.3.6: Disuguaglianze Put-Call

Dimostrazione di 1.

- Caso $C_t \leq S_t$:
  Si suppone che valga il PNA 6.3.2, allora se $\exists t$ t.c. $C_t > S_t$ si potrebbe effettuare un arbitraggio, acquito il bene sottostante S a un prezzo inferiore di mercato in t, rivendendolo otterò un guadagno sicuro senza rischio, assurdo in quanto il PNA vale.
  Oppure:
  Usando la definizione di Call 6.1.3 si osserva che:
  $C_T = (S_T - k)^+ \leq S_T$ usando il PNA si ottiene $C_t \leq S_t \ \forall t \in [0, T]$.

- Caso $(S_t - k\frac{B_t}{B_T})^+ \leq C_t$: Usando la la definizione di Call e Put 6.1.3 e il PNA si ottiene: $C_t \geq 0$ e $P_t \geq 0$ $(*)$, che, insieme al Teorema di Put-Call Parity 6.3.5 presenta la seguente relazione:

$$S_t - k\frac{B_t}{B_T} = C_t - P_t \overset{*}{\Longrightarrow} S_t - k\frac{B_t}{B_T} \leq C_t$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} (S_t - k\frac{B_t}{B_T})^+ \leq C_t \quad \forall t \in [0, T]$$

La Dimostrazione di 2 è analoga. $\square$

6.4 Modelli Uniperiodali

Definizione 6.4.1: Modello Uniperiodale

Un **Modello Uniperiodale** è definito con i seguenti dati e principi:

- $T > 0$ (tempo)
- Principio di Uniperiodalità: no compravendita in $t \in]0, T[$
- $r \geq 0$ (tasso d'interesse)
- B titolo non rischioso (bond)
- S titolo rischioso (stock)
- S_T variabile aleatoria t.c. $S_T \sim B(p)$ con supporto $S_{S_T} = \{g_S, l_S\}$.
- E_1, E_2 eventi disgiunti t.c. $\mathbb{P}(E_1) = p$ e $\mathbb{P}(E_2) = 1 - p$

Tabella 6.4.2: Valori Modello Uniperiodale

In un mercato con modello uniperiodale l'obbiettivo è trovare i seguenti valori:

$t \setminus$ Titoli	B	S
0	B_0	S_0
T	B_T	S_T

Sapendo che B è determinato da una legge di capitalizzazione (esempio $B_t = e^{rt}$), S_T è una variabile *aleatoria* mentre S_0 è definito in modo *deterministico* all'inizio del periodo.

Ecco alcuni principi di valutazione del derivato S_0 in mercato uniperiodale:

Definizione 6.4.3: Prezzo Iniziale Non Osservato

Sia in vigore il modello uniperiodale con S_0 **non osservato**, il suo valore può essere calcolato usando S_T:

$$S_0 = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}[S_T]$$

Dove $\mathbb{E}[S_T]$ è la stima di S_T, mentre $\frac{B_0}{B_T}$ rappresenta il fattore di sconto che porta il valore futuro a quello iniziale. Infatti si può notare come $S_T = S_0 \cdot \frac{B_T}{B_0}$.

Osservazione 6.4.4: Valutazione Neutrale al Rischio

Si può osservare che ad S_0 viene aggiunto una penalità $(\frac{1}{B_T})$, questo per evitare che $S_0 \geq S_T$ prevenendo operazioni di arbitraggio.

Inoltre si può notare che mediamente il valore di più S_T equivale a quello di B_T in particolare se acquisto $\frac{1}{S_0}$ titoli S:

$$\mathbb{E}[\frac{S_T}{S_0}] = (\frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}[S_T])^{-1}\mathbb{E}[S_T] = \frac{B_T}{B_0 \cdot \mathbb{E}[S_T]}\mathbb{E}[S_T] = \frac{B_T}{B_0} = \mathbb{E}[\frac{B_T}{B_0}] \quad (6.1)$$

Questa particolare valutazione di S_0 è chiamata, **Valutazione Neutrale al Rischio**, ovvero investire in un titolo sicuro B o investire in più titoli non sicuri S genera in media lo stesso guadagno.

Si deve comunque tenere conto che le persone non sono neutrali al rischio, ovvero in presenza di una grande perdita eviteranno di rischiare anche se in media la perdita è nulla.

Definizione 6.4.5: Prezzo Iniziale Osservato

Sia in vigore il modello uniperiodale con S_0 **osservato**, si introduce un nuovo titolo rischioso R con valore R_T v.a. t.c. $R_T \sim B(p)$ e supporto $S_{R_T} = \{g_R, l_R\}$ e R_0 ignoto e calcolabile.

$$R_0^{\mathbb{P}} = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}[R_T] = \frac{B_0}{B_T}\sum_{x \in S_{R_T}} x\mathbb{P}(R_T = x) = \frac{B_0}{B_T}(pg_R + (1-p)l_R)$$

Tabella 6.4.6: Nuovi Valori Modello Uniperiodale

t \ Titoli	B	S	R
0	B_0	S_0	R_0
T	B_T	S_T	R_T

Vi sono alcuni problemi riguardo questi tipi di valutazioni:

- Risulta difficile trovare la probabilità p
- Il rischio non è preso in considerazione.
- La valutazione è scollegata dal **problema** della copertura, ovvero trovare una strategia d'investimento su titoli scambiabili (B e S) t.c. il valore del nuovo titolo R venga replicato.

Si può introdurre una nuova *funzione di misura di probabilità* che sia **neutrale al rischio**.

Definizione 6.4.7: Misura di Probabilità Neutrale al Rischio

Sia in vigore un mercato uniperiodale con titolo sicuro B e titoli rischiosi S e R con R_0 non definito. Sia una misura di probabilità $\mathbb{Q} : \Omega \to [0, 1]$ con Ω spazio campionario t.c. $\mathbb{Q}(E_1) = q$ e $\mathbb{Q}(E_2) = 1 - q$ Possiamo ridefinire $S_0^{\mathbb{Q}}$ con la nuova misura:

$$S_0^{\mathbb{Q}} = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}[S_T] = \frac{B_0}{B_T}\sum_{x \in S_{S_T}} x \cdot \mathbb{Q}(S_T = x) = \frac{B_0}{B_T}(qg_S + (1 - q)l_S)$$

Risolvendo per q si ottiene:

$$q = \frac{(B_T \cdot S_0) - l_S}{B_0(g_S - l_S)}$$

Con $l_S \leq S_0 \cdot B_T \leq g_S$ che garantisce che $q \in [0, 1]$, questo vincolo è chiamato **vincolo di non arbitraggio**. Mentre $\mathbb{Q}$ è chiamata **Misura di Probabilità Neutrale al Rischio**.

Con la misura $\mathbb{Q}$ definita in 6.4.7 si può definire $R_0^{\mathbb{Q}}$, risolvendo il problema di determinare q e l'indifferenza al rischio.

Definizione 6.4.8: Valore di Portafoglio Uniperiodale

Sia in vigore un modello uniperiodale con titolo sicuro B e titolo rischioso S e sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ strategia d'investimento, ovvero numero quote/titoli acquistati di S e B rispettivamente. Allora si può definire:

$$V = \alpha S + \beta B$$
$$V_0 = \alpha S_0 + \beta B_0$$
$$V_T = \alpha S_T + \beta B_T$$

Dove V è chiamato **Valore di Portafoglio**. Con V_0 valore certo e V_T variabile aleatoria.

Di seguito è presentao una prima istanza di problema di replicazione, ovvero trovare una strategia d'investimento (α, β) t.c. il valore del portafoglio V sia uguale al valore del titolo R.

Teorema 6.4.9: Problema di Copertura

Sia in vigore un modello uniperiodale con titoli sicuri B e titolo rischioso S e R sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ strategia d'investimento. Si suppone che sia in vigore la misura di probabilità neutrale al rischio $\mathbb{Q}$ allora si può dimostrare che:

$$\begin{aligned} V &= R \\ \alpha &= \frac{g_R - l_R}{g_S - l_S} \\ \beta &= \frac{g_S l_R - g_R l_S}{B_T(g_S - l_S)} \\ V_t &= R_t = \alpha S_t + \beta B_t \end{aligned}$$

Dimostrazione 6.4.9: Problema di Copertura

Per dimostrare che $V = R$ basta mostrare che $V_T = R_T$.

$$V_T = R_T \overset{6.4.8}{\Longrightarrow} \alpha S_T + \beta B_T = R_T \implies$$

$$\begin{cases} \alpha g_S + \beta B_T = g_R & (\mathbb{Q}(E_1) = q) \\ \alpha l_S + \beta B_T = l_R & (\mathbb{Q}(E_2) = 1 - q) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{g_R - l_R}{g_S - l_S} \\ \beta = \frac{g_S l_R - g_R l_S}{B_T(g_S - l_S)} \end{cases}$$

□

Se viene introdotto il principio di non arbitraggio 6.3.2 si può notare che risolvere il problema di copertura equivale a trovare una giusta valutazione del titolo R, che non permetta arbitraggi.

Non è detto che tutti i derivati siano "replicabili", ovvero si riescano a trovare (α, β) che risolvano il probelma della copertura.

Esempio 6.4.10: Derivati Non Replicabili

Sia in vigore un mercato a modello uniperiodale. Siano E_1, E_2, E_3 eventi disgiunti con probabilità $\mathbb{P}(E_1) = p_1, \mathbb{P}(E_2) = p_2, \mathbb{P}(E_3) = p_3$, B titolo sicuro e S e R titoli rischiosi dove il loro valori al tempo T sono definiti come variabili aleatorie:

$$S_T = \begin{cases} g_S & \mathbb{P}(E_1) = p_1 \\ l_S & \mathbb{P}(E_2 \cup E_3) = 1 - p_1 = p_2 + p_3 \end{cases}$$

$$R_T = \begin{cases} g_R & \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = 1 - p_3 = p_2 + p_1 \\ l_R & \mathbb{P}(E_3) = p_3 \end{cases}$$

Se si prova a trovare una misura di probabilità neutrale al rischio $\mathbb{Q}$ si può notare che:

$$S_0^{\mathbb{Q}} = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}[S_T] = \frac{B_0}{B_T}(q_1 g_S + (1 - q_1) l_S)$$

Dove $1 - q1 = q_2 + (1 - q_1 - q_2) = q_2 + q_3$, dunque vi sono infinite soluzioni di q_2 che risolvono l'equazione, non è possibile trovare $\mathbb{Q}$.

Inoltre se si cerca una strategia di replicazione (α, β) per replicare R si nota che per soddisfare $V_T = \alpha S_T + \beta B_T = R_T$:

$$\begin{cases} \alpha g_S + \beta B_T = g_R & \mathbb{P}(E_1) = p_1 \\ \alpha l_S + \beta B_T = g_R & \mathbb{P}(E_2) = p_2 \\ \alpha l_S + \beta B_T = l_R & \mathbb{P}(E_3) = p_3 \end{cases}$$

Le uniche soluzioni (α, β) esitono per $g_R = g_S$, ma se vale questa uguaglianza allora vi esisterebbe un'operazione di albitraggio, assurdo per PNA. Dunque $\nexists(\alpha, \beta)$ per replicare R.

Questo esempio ci mostra che:

- Esistono infinite misure di probabilità neutrali al rischio
- Non esistano strategie di mercato per la replicazione

Riassumenodo:

- Bisogna trovare una misura di probabilità neutrale al rischio che permetta di valutare tutti i titoli e non introdurre opportunità di arbitraggio.
- Bisogna trovare strategie di mercato che permettano di replicare tutti i titoli di mercato per non rendere i derivati inacquisibili.

Capitolo 7

Derivati, Mercati e Strategie

7.1 Tipi di Derivati

Definizione 7.1.1: Derivato Americano

Dato un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$, un derivato si dice **Americano** se il diritto di esercizio può essere esercitato in qualsiasi momento tra la data di contrattazione e la data di scadenza.
Dunque, il suo payoff può essere espresso come un processo stocastico $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adattato a filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ovvero il diritto può essere esercitato in tempo $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 7.1.2: Derivato Europeo

Un derivato si dice **Europeo** se il diritto di esercizio può essere esercitato solo alla data di scadenza. Dunque, il suo payoff può essere espresso come una variabile aleatoria X t.c. $X \in m\mathcal{F}_N$ dove N è il tempo in cui si sceglie se esercitare il diritto.

Definizione 7.1.3: Derivato Path-Independent

Dato un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$, un derivato si dice **Path-Independent** se il suo payoff dipende unicamente dal valore dell'asset al tempo in cui si esercita il diritto. Questo derivato $\boldsymbol{X}$ può essere espresso come

$$X_N = f(S_N)$$

con $X_N \in m\sigma(S_N) \wedge f \in m\mathcal{B}$.

Definizione 7.1.4: Derivato Path-Dependent

Dato un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$, un derivato si dice **Path-Dependent** se il suo payoff dipende dal percorso seguito dal prezzo dell'asset. Questo derivato $\boldsymbol{X}$ può essere espresso come

$$X_N = f(S_1, \dots, S_N)$$

con $X_N \notin m\sigma(S_N) \wedge f \in m\mathcal{B}$.

Esempio 7.1.5: Opzioni Asiatiche

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, si definisce un **Opzione Asiatica** come un derivato path-dependent $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il cui payoff X_N a tempo N dipende da una media dei prezzi dell'asset definita come:

$$A_N = f(S_1, \dots, S_N) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i & \text{Media Aritmetica} \\ \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} S_i} & \text{Media Geometrica} \end{cases}$$

Il payoff dell'opzione asiatica può essere calcolata in due modi:

- Con Strike Fisso:

$$X_N = \begin{cases} (A_N - K)^+ & \text{Opzione Asiatica Call} \\ (K - A_N)^+ & \text{Opzione Asiatica Put} \end{cases}$$

- Con Strike Variabile:

$$X_N = \begin{cases} (S_N - A_N)^+ & \text{Opzione Asiatica Call} \\ (A_N - S_N)^+ & \text{Opzione Asiatica Put} \end{cases}$$

Esempio 7.1.6: Opzioni Lookback

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, si definisce un **Opzione Lookback** come un derivato path-dependent $\boldsymbol{L} = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il cui payoff L_N a tempo N dipende dal massimo o dal minimo valore dell'asset definito come:

$$S_{\max} = \max_{i\in\{1,\dots,N\}} S_i \quad \wedge \quad S_{\min} = \min_{i\in\{1,\dots,N\}} S_i$$

Il payoff dell'opzione lookback può essere calcolata in due modi:

- Con Strike Fisso:

$$L_N = \begin{cases} (S_{\max} - K)^+ & \text{Opzione Lookback Call} \\ (K - S_{\min})^+ & \text{Opzione Lookback Put} \end{cases}$$

- Con Strike Variabile:

$$L_N = \begin{cases} (S_N - S_{\min})^+ & \text{Opzione Lookback Call} \\ (S_{\max} - S_N)^+ & \text{Opzione Lookback Put} \end{cases}$$

Esempio 7.1.7: Opzioni con Barriera

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, si definisce un **Opzione con Barriera** come un derivato path-dependent $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il cui payoff X_N a tempo N dipende dal fatto che il prezzo dell'asset abbia raggiunto o meno un certo livello di barriera b. Può essere costruiti gli eventi barriera H_{up} e H_{dw} come:

$$H_{up} = \{(S_i \geq b) | 1 \leq i \leq N\}$$
$$H_{dw} = \{(S_i \leq b) | 1 \leq i \leq N\}$$

Il payoff dell'opzione con barriera può essere calcolata in due modi:

$$X_N = \begin{cases} f(S_N) \cdot \mathbf{1}_{H_{up}} & \text{Opzione Up} \\ f(S_N) \cdot \mathbf{1}_{H_{dw}} & \text{Opzione Down} \end{cases}$$

7.2 Modelli di Mercato

Definizione 7.2.1: Modello di Mercato Discreto

• Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità discreto e finito ($|\Omega| < \infty$) con σ-algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, siano fissati $N \in \mathbb{N}$ numero di tempi e $T \in \mathbb{N}$ scadenza.

• La sequenza di tempi è discreta e finita ed è rappresentato da un vettore $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N)$ t.c. $t_1 = 0$, $t_N = T$ e $t_i < t_j$ per $i < j \in \{1, \ldots, N\}$.

• Una sequenza di tassi di interesse è rappresentata da un vettore $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ t.c. $r_n \in \mathbb{R}$, $r_n > 1$ per $n \in \{1, \ldots, N\}$ e $r_1 = 0$.

• Un titolo non rischioso è rappresentato da $\boldsymbol{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $B_n \in \mathbb{R}$ e

$$B_{n+1} = (1 + r_{n+1})B_n \quad \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

Dato che i tassi di interesse $\mathbf{r}$ sono scelti deterministicamente, allora $\boldsymbol{B}$ è un processo deterministico (vettore).

• Sia $d \in \mathbb{N}$ numero di titoli rischiosi preseneti sul mercato essi sono rappresentati da $\boldsymbol{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico vettoriale discreto tali che $S_n \in \mathbb{R}^d$ ovvero $S_n = (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)})$ definito come:

$$S_{n+1}^{(i)} = (1 + R_n^{(i)})S_n^{(i)} \quad \forall n \in \{0, \ldots, N-1\} \wedge i \in \{1, \ldots, d\}$$

Dove $\boldsymbol{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p.s vettoriale discreto che rappresenta i rendimenti dei titoli rischiosi. Essi sono chiamati **ritorni** e hanno proprietà di essere ≥ -1, fissiamo a questi processi una **filtrazione di mercato** $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{R}})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazioni naturali.

Tale modello è chiamato **Modello di Mercato Discreto** $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$.

Notazione 7.2.2: Titolo Rischioso Singolo

Quando il numero di titoli rischiosi è $d = 1$ si usa la notazione $S = S^{(1)}$.

Esempio 7.2.3: Filtrazioni non di Mercato

Sia $\boldsymbol{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ritorno e $(\boldsymbol{H}^{(1)}, \boldsymbol{H}^{(2)}) = (H_n^{(1)}, H_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ processi stocastici tali che $R_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$ si può notare come la filtrazione di mercato $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{R}})_{n\in\mathbb{N}}$ sia diversa dalla filtrazione $(\mathcal{F}_n^{(\boldsymbol{H}^{(1)}, \boldsymbol{H}^{(2)})})_{n\in\mathbb{N}}$ generata da $(\boldsymbol{H}^{(1)}, \boldsymbol{H}^{(2)})$.

Osservazione 7.2.4: Filtrazione di Mercato Finita

Sia $\{1, \ldots, N\}$ insieme finito di tempi, con $\boldsymbol{S}$ titolo rischioso, allora la filtrazione di mercato $(\mathcal{F}_n^{\boldsymbol{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ è finita ma non è detto che si riescano a osservare tutti gli eventi di una σ-algebra fissata $\mathcal{F}$ ovvero $\mathcal{F}_N^{\boldsymbol{S}} \neq \mathcal{F}$.
Si può sempre assumere che lo sia però.

Esempio 7.2.5: Modello di Mercato Binomiale

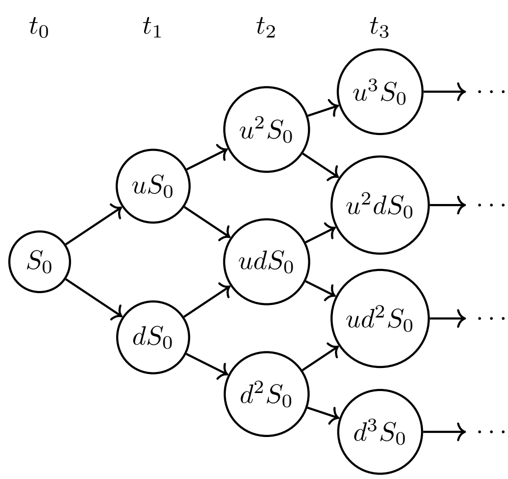
Si vuole rappresentare un modello di mercato discreto il cui valore del titolo rischioso $\boldsymbol{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può crescere di u o decrescere di d ad ogni tempo n. Sia $N \in \mathbb{N}$ numero di tempi con $\Omega = \{u, d\}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, e titolo non rischioso $\boldsymbol{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $B_{n+1} = (1 + r_{n+1})B_n$ per $n \in \{0, \dots, N\}$.

La probabilità di crescita di $\boldsymbol{S}$ è p e la probabilità di decrescita è $1 - p$ con $p \in [0, 1]$. Dunque i ritorni $\boldsymbol{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono ha distribuzione:

R_n	$u-1$	$d-1$
p_{R_n}	p	$1-p$

Il titolo rischioso $\boldsymbol{S}$ è definito come:

$$S_{n+1} = \begin{cases} uS_n & \text{se } R_n = u-1 \\ dS_n & \text{se } R_n = d-1 \end{cases}$$



In questo caso il supporto e la distribuzione di $\boldsymbol{S}$ per ogni S_n è:

$$S_{S_n} = \{u^k d^{n-k} S_0 | 0 <= k <= n \wedge k \in \mathbb{N}\}$$
$$p_{S_n}(u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ovvero $S_n \sim B(n, p)$ distribuzione binomiale e $\boldsymbol{S}$ è un processo binomiale. Questo modello di mercato è indicato come **Modello di Mercato Binomiale**.

7.3 Strategie di Mercato

Definizione 7.3.1: Strategia di Investimento

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, si può definire:
$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(d)}, \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ processi stocastici discreti che descrivono quanti titoli rischiosi e non rischiosi si detengono per conseguire un guadagno. In particolare $\alpha_{k+1}^{(i)}$ e β_{k+1} sono il numero di titoli rischiosi $\boldsymbol{S}^{(i)}$ e non rischiosi $\boldsymbol{B}$ detenuti nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ di un modello di mercato discreto.
$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ è definita **Strategia di Investimento**.

Definizione 7.3.2: Posizione Lunga e Corta

Sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento, allora si può dire che:

- Se $\alpha_n^{(i)} > 0$ ($\beta_n > 0$) si ha una **Posizione Lunga** sul titolo rischioso $\boldsymbol{S}^{(i)}$ (titolo non rischioso $\boldsymbol{B}$).
- Se $\alpha_n^{(i)} < 0$ ($\beta_n < 0$) si ha una **Posizione Corta** sul titolo rischioso $\boldsymbol{S}^{(i)}$ (titolo non rischioso $\boldsymbol{B}$).

Osservazione 7.3.3: Strategia di Investimento Predicibile

Data una strategia di investimento $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, i valori di α e $\boldsymbol{\beta}$ devono essere noti in anticipo, ovvero a tempo k bisogna poter osservare $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ e β_{k+1}. Dunque $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ sono processi stocastici predicibili.

Definizione 7.3.4: Valore di Portafoglio

Siano $\boldsymbol{B}$ titolo non rischioso e $\boldsymbol{S} = (S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$ titoli rischiosi,e sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento, allora si può definire il **Valore di Portafoglio** come un processo stocastico discreto $\boldsymbol{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definito come:

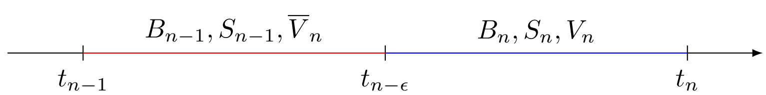
$$V_n = V_n^{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} = \alpha_n^T S_n + \beta_n B_n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_n^{(i)} + \beta_n B_n$$

V_n indica il valore del portafoglio al tempo $t_n^- = [t_n - \epsilon, t_n]$.
Analogamente si può definire il seguente valore:

$$\overline{V}_n = \overline{V}_n^{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} = \alpha_n^T S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)} + \beta_n B_{n-1}$$

$\overline{V}_n$ indica il valore del portafoglio al tempo $t_{n+1}^+ = [t_{n-1}, t_n - \epsilon]$ con $\overline{V}_0 = V_0$ e fissando un ϵ t.c. $0 < \epsilon < t_n - t_{n-1}$.

Grafico 7.3.5: Valore di Portafoglio

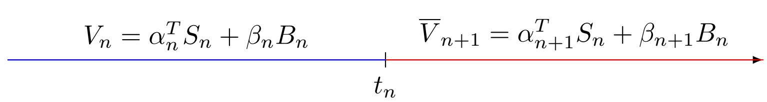


Definizione 7.3.6: Strategia Autofinanziante

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, e sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento, essa è **Strategia Autofinanziante** se è soddisfatta:

$$V_n = \overline{V}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Grafico 7.3.7: Strategia Autofinanziante



Ovvero il valore del portafoglio rimane invariato alla modifica della strategia di investimento nel tempo, ovvero si esegue un *ribilanciamento*.

Definizione 7.3.8: Strategie Ammissibili

Sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento, tale strategia è **Ammissibile** se è autofinanziante e prevedibile.
L'insieme delle strategie ammissibili è indicato con $\mathcal{A}$.

Osservazione 7.3.9: Strategie Ammissibili

Sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}$ strategia ammissibile allora si può osservare il seguente risultato sul valore di portafoglio $\boldsymbol{V}$:

$$
\begin{aligned}
&V_{n+1} - V_n \overset{7.3.6}{=} V_{n+1} - \overline{V}_{n+1} \overset{7.3.4}{=} \\
&\alpha_{n+1}^T(S_{n+1}) - \alpha_{n+1}^T(S_n) + \beta_{n+1}(B_{n+1}) - \beta_{n+1}(B_n) = \\
&\alpha_{n+1}^T(S_{n+1} - S_n) + \beta_{n+1}(B_{n+1} - B_n)
\end{aligned}
$$

Esempio 7.3.10: Strategia non Ammissibile

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto con un solo titolo rischioso $d = 1$ e sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento tale che $\alpha_n = n$ e $\beta_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si può osservare che:

$$
\begin{aligned}
&n \cdot S_{n+1} + n \cdot B_{n+1} < (n+1) \cdot S_{n+1} + (n+1) \cdot B_{n+1} \implies \\
&\alpha_n \cdot S_{n+1} + \beta_n \cdot B_{n+1} < \alpha_{n+1} \cdot S_{n+1} + \beta_{n+1} \cdot B_{n+1} \overset{7.3.4}{\implies} \\
&V_n < V_{n+1} \implies (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \text{ non è strategia ammissibile}
\end{aligned}
$$

Teorema 7.3.11: Strategia di Copertura

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, e sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia di investimento, allora vale la seguente relazione sul valore di portafoglio $\boldsymbol{V}$:

$$
V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)} (R_{n-1}^{(i)} - r_n) \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}
$$

Con $V_0 = \alpha_0^T S_0 + \beta_0 B_0$ valore iniziale.

$V_{n-1}(1 + r_n)$ è la parte investita in titoli non rischiosi anche detta "ricchezza propria".

$(R_n^{(i)} - r_n)$ è lo **spread** ovvero la differenza tra i ritorni dei titoli rischiosi e il tasso di interesse.

Dunque $\sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_n^{(i)} (R_n^{(i)} - r_n)$ è la parte investita in titoli rischiosi, più precisamente il ritorno dei titoli rischiosi tolti quelli non rischiosi.

Dimostrazione 7.3.11: Strategia di Copertura

Dato $\boldsymbol{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valore di portafoglio su strategia ammissibile $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ in modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ si può impostare la seguente relazione:

$$
\begin{aligned}
&V_n - V_{n-1} \overset{7.3.9}{=} \alpha_n^T(S_n - S_{n-1}) + \beta_n(B_n - B_{n-1}) \overset{7.2.1}{=} \\
&\alpha_n^T((\mathbf{1} + R_{n-1})S_{n-1} - S_{n-1}) + \beta_n((1 + r_n)B_{n-1} - B_{n-1}) = \\
&\sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} R_{n-1}^{(i)} S_{n-1}^{(i)} + \beta_n B_{n-1} r_n \overset{a}{=} \\
&\sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} R_{n-1}^{(i)} S_{n-1}^{(i)} + (V_{n-1} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)}) r_n
\end{aligned}
$$

Da questo risulato si può dimostrare l'equazione:

$$
\begin{aligned}
&V_n - V_{n-1} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} R_{n-1}^{(i)} S_{n-1}^{(i)} + (V_{n-1} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)}) r_n \iff \\
&V_n = V_{n-1} + V_{n-1} r_n + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} R_{n-1}^{(i)} S_{n-1}^{(i)} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)} r_n \iff \\
&V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)} (R_{n-1}^{(i)} - r_n)
\end{aligned}
$$

---

a. Data la definizione di valore di portafoglio 7.3.4 si ha che

$$V_n = \alpha_n^T S_n + \beta_n B_n \implies \beta_n B_n = V_n - \alpha_n^T S_n$$

$\square$

Teorema 7.3.12: Funzione di Portafoglio

Dato dunque un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$, il valore di portafoglio $\boldsymbol{V}$ e una strategia di investimento $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ si può notare come $\boldsymbol{\beta}$ sia un processo stocastico discreto di funzioni di $\boldsymbol{V}$ e $\mathbf{A}$.

Dimostrazione 7.3.12: Funzione di Portafoglio

Data la definizione di valore di portafoglio 7.3.4 si può definire $\boldsymbol{\beta} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come processo stocastico discreto di funzioni di $\boldsymbol{V}$ e α ovvero:

$$\beta_n = \beta_n(V_n, \alpha_n) = \frac{V_n - \alpha_n^T S_n}{B_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

Definizione 7.3.13: Numerario

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, allora si può definire il un processo stocastico discreto $\boldsymbol{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\boldsymbol{Y} \in \{\boldsymbol{S}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{S}^{(d)}, \boldsymbol{B}\}$ e $Y_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Tale processo è chiamato **Numerario** ed è usato per scontare o normalizzare gli altri titoli.

Definizione 7.3.14: Titoli e Valori Scontati

Dato un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ e un numerario $\boldsymbol{Y}$, allora si possono definire i **Titoli Scontati** $(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = (\widetilde{S}_n, \widetilde{B}_n)_n \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{Y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\widetilde{B}_n = \frac{B_n}{Y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre è possibile definire i **Valori Scontati**

$$\widetilde{V}_n = \frac{V_n}{Y_n} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^T S_n + \beta_n B_n}{Y_n} = \alpha_n^T \widetilde{S}_n + \beta_n \widetilde{B}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia ammissibile.

Esempio 7.3.15: Titoli e Valori Scontati

Fissando un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ con $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ strategia ammissibile e un numerario $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$ allora il valore di portafoglio scontato $\widetilde{V}_n$ è:

$$\widetilde{V}_n = \frac{\alpha_n^T S_n + \beta_n B_n}{B_n} = \alpha_n^T S_n + \beta_n$$

Dato che la strategia è ammissibile e quindi autofinanziante si ha che $\widetilde{V}_n = \widetilde{\widetilde{V}}_{n-1}$ ovvero $\alpha_n^T S_n = \alpha_n^T S_{n-1}$.

Osservazione 7.3.16: Guadagno Totale

Dato un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ e una strategia ammissibile $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}$ allora si può osservare che il **Guadagno Totale** della strategia è:

$$V_N - V_0 \overset{\text{a}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} (V_{n+1} - V_n) \overset{7.3.9}{=}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n+1}^T (S_{n+1} - S_n) + \beta_{n+1}(B_{n+1} - B_n)$$

Invece si sconta il guadagno totale usando come numerario $\boldsymbol{B}$ si ha:

$$\widetilde{V}_N - \widetilde{V}_0 \overset{\text{a}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} (\widetilde{V}_{n+1} - \widetilde{V}_n) \overset{7.3.9}{=}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n+1}^T (\widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n) + \beta_{n+1}(\widetilde{B}_{n+1} - \widetilde{B}_n) \overset{\text{b}}{=}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n+1}^T (\widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n) \overset{4.3.4}{=} G(\alpha, \widetilde{S})_n$$

Ovvero il guadagno totale scontato può essere visto come l'alpha-trasformata di $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ titoli rischiosi.

a. Fare la differenza tra V_N e V_0 equivale a fare la somma delle differenze tra V_{n+1} e V_n per ogni n, questo perché entrambi i metodi rappresentano il guadagno totale della strategia.

b. Si può osservare dalla definizione 7.3.14 che, scegliendo come numerario $\boldsymbol{B}$ si ha $\widetilde{B}_n = 1$ per ogni n dunque $\widetilde{B}_{n+1} - \widetilde{B}_n = 0$.

Capitolo 8

Operazioni su Derivati

Valutare un derivato significa determinare il suo prezzo in modo da evitare opportunità di arbitraggio, mentre coprire un derivato consiste nel trovare una strategia di investimento che replichi (uguagli) il payoff del derivato stesso, ovvero trovare $V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} = X_N$.

8.1 Arbitraggi e Misura Martingala Equivalente

Definizione 8.1.1: Arbitraggio

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, e sia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}$ strategia ammissibile, allora si può dire che essa può presentare un'opportunità di **Arbitraggio** se valgono le seguenti condizioni per un $\overline{n} \in \{1, \ldots, N\}$:

- $V_0^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} = 0$
- $V_{\overline{n}}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \overset{q.c}{\geq} 0$
- $\mathbb{P}(V_{\overline{n}}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} > 0) > 0$

Ovvero esiste un tempo $t_{\overline{n}}$ in cui il valore di portafoglio ha probabilità certa di essere è maggiore o uguale a zero (nessuna perdita), e con probabilità positiva di generare un guadagno sicuro dalla compravendita di titoli.

Definizione 8.1.2: Mercato Libero da Arbitraggio

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, allora si può dire che esso è **Libero da Arbitraggio** se non esistono strategie ammissibili che presentano opportunità di arbitraggio.

Definizione 8.1.3: Misura Martingala Equivalente

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, sia $\boldsymbol{Y} \in \{\boldsymbol{S}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{S}^{(d)}, \boldsymbol{B}\}$ numerario, con $\mathbb{P}$ misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile. Si dice che $\mathbb{Q}$ misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ è una **Misura Martingala Equivalente** rispetto a $\mathbb{P}$ se:

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ misure equivalenti
2. $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}$ sono Martingale rispetto a $\mathbb{Q}$

Osservazione 8.1.4: Misura Martingala Equivalente

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, e sia $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente e fissando il numerario $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$ allora si può osservare:

$$\begin{aligned}&\widetilde{S}_n^{(i)} \overset{7.3.14}{=} \frac{S_n^{(i)}}{B_n} \overset{4.1.1}{=} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{n+1}^{(i)}|\mathcal{F}_n]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_{n+1}|\mathcal{F}_n]} \overset{\text{a}}{=} \\ &\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_{n+1}^{(i)}|\mathcal{F}_n\right]}{B_{n+1}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_{n+1}^{(i)}}{B_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \overset{7.3.14}{=} \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S}_{n+1}^{(i)}|\mathcal{F}_n\right] \overset{4.1.2}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S}_N^{(i)}|\mathcal{F}_n\right] \quad \forall N > n\end{aligned}$$

Ovvero il valore scontato di un titolo rischioso $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ è una martingala rispetto a $\mathbb{Q}$.
Inoltre per induzione si può notare:

$$\begin{aligned}&\widetilde{S}_0^{(i)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(i)}}{B_1}|\mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(i)}}{B_1}|\{\Omega, \emptyset\}\right] \overset{4.1.2}{=} \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(i)}}{B_1}\right] \overset{4.1.2}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_k^{(i)}}{B_k}\right] \overset{\text{a}}{=} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_k^{(i)}\right]}{B_k} \quad \forall k \in \{1, \ldots, N\}\end{aligned}$$

Ovvero il titolo rischioso scontato $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ è martingala se e solo se equivale il suo valore iniziale equivale alla media del suo valore scontato per un $k \in \{1, \ldots, N\}$.

a. Dato che $\boldsymbol{B}$ è un processo deterministico, allora esso non è influenzato dal condizionamento di una σ-algebra, dunque può essere trattato come costante.

Teorema 8.1.5: Misure Equivalenti rispetto a Numerari

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto con $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente allora se $\exists \mathbb{W}$ misura di probabilità e $\boldsymbol{W}$ numerario t.c.

$$\frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Q}} = \frac{W_n}{W_0} \cdot \left(\frac{Y_n}{Y_0}\right)^{-1} > 0$$

si ha :

$$Y_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z}{Y_{n+k}}|\mathcal{F}_n\right] = W_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\frac{Z}{W_{n+k}}|\mathcal{F}_n\right] \quad \forall Z \in \mathcal{F} \wedge \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

Teorema 8.1.6: M.M.E rispetto a Numerari

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto con $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente e sia $\mathbb{W}$ misura di probabilità con $\boldsymbol{W}$ numerario allora si può dire che se:

$$\frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Q}} = \frac{W_n}{W_0} \cdot \left(\frac{Y_n}{Y_0}\right)^{-1} > 0 \implies \mathbb{W} \text{ è misura martingala equivalente}$$

Dimostrazione 8.1.6: M.M.E rispetto a Numerari

Per dimostrare che $\mathbb{W}$ è misura martingala equivalente basta dimostrare le proprietà delle misure martingale equivalenti 8.1.3

1. Dato che per ipotesi

$$\frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Q}} > 0 \overset{1.4.3}{\Longrightarrow} \mathbb{W} \sim \mathbb{Q} \overset{1.2.3}{\Longrightarrow} \mathbb{W} \sim \mathbb{P}$$

2. Dall'osservazione 8.1.4 ci si riduce a dimostrare che $\widetilde{\boldsymbol{S}}^W$ Martingala rispetto a $\mathbb{W}$, fissando un $N > n$:

$$\begin{aligned}
8.1.5 \quad \Longrightarrow Y_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_N^{(i)}}{Y_N}|\mathcal{F}_n\right] &= W_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\frac{S_N^{(i)}}{W_N}|\mathcal{F}_n\right] \overset{7.3.14}{\Longrightarrow} \\
Y_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),Y}|\mathcal{F}_n\right] &= W_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),W}|\mathcal{F}_n\right] \overset{4.1.2}{\Longrightarrow} \\
Y_n \cdot \widetilde{S}_n^{(i),Y} &= W_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),W}|\mathcal{F}_n\right] \Longrightarrow \\
S_n &= W_n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),W}|\mathcal{F}_n\right] \Longrightarrow \\
\frac{1}{W_n} \cdot S_n &= \frac{W_n}{W_n} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),W}|\mathcal{F}_n\right] \Longrightarrow \\
\widetilde{S}_n^{(i),W} &= \mathbb{E}_{\mathbb{W}}\left[\widetilde{S}_N^{(i),W}|\mathcal{F}_n\right] \overset{4.1.2}{\Longrightarrow} \widetilde{\boldsymbol{S}}^W \text{ è Martingala}
\end{aligned}$$

□

Teorema 8.1.7: Valore di Portafoglio Martingala

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto con $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente. Sia $\boldsymbol{V}$ valore di portafoglio con strategia ammissibile $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}$ allore si ha che

$$\widetilde{V_n} = \frac{V_n}{B_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\widetilde{\boldsymbol{V}}$ è *martingala* rispetto a $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione 8.1.7: Valore di Portafoglio Martingala

Dall'osservazione 7.3.16 si ha che:

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 + G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n$$

Dato che $\widetilde{V}_0$ è una costante essa non influeisce sulla proprietà di martingala.
Con $\boldsymbol{\alpha}$ ammissibile per cui osservabile e $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ martingala per 8.1.4 allora per la preposizione 4.3.5 si ha che $\boldsymbol{G}$ è una martingala che implica che anche $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ è una martingala. $\square$

Osservazione 8.1.8: Guadagno Totale e Assenza di Arbitraggi

Dall'osservazione 7.3.16 si ha che:

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 + G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n$$

Nel caso in cui $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ sia una strategia ammissibile che presenta un'opportunità di arbitraggio allora si ha che $\widetilde{V_0} = 0$ (8.1.1) dunque si ha che $\widetilde{V_n} = G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n$. Inoltre la trasformazione soddisfa le seguenti proprietà:

- $G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n \overset{\text{q.c}}{\geq} 0$
- $\mathbb{P}(G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n > 0) > 0$

Questo poiché $\widetilde{V_n} = \frac{V_n}{B_n}$ e per via delle proprietà dell'arbitraggio (8.1.1).
Se i valori di $G^{\boldsymbol{\alpha}} = G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\boldsymbol{S}})_n$ sono rappresentati come un vettore $\mathbf{g} = (G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_1), \ldots, G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_m))$, tale vettore soddisfa le condizioni di arbitraggio se e solo se $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$ con $G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_i) > 0$ per almeno una componente i.

Esempio 8.1.9: M.M.E su Modello di Mercato Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto binomiale 7.2.5 e si assuma che esista una misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ rispetto a numerario $\boldsymbol{B}$. Allora deve valere la proprietà di martingalità su $\widetilde{\boldsymbol{S}}$:

$$\widetilde{S}_{n-1} \overset{4.1.1}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_n|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{7.3.14}{\Longrightarrow} S_{n-1} \cdot B_{n-1}^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_n \cdot B_n^{-1}|\mathcal{F}_{n-1}\right] \overset{\text{a}}{\Longrightarrow}$$
$$S_{n-1} \cdot B_{n-1}^{-1} = B_n^{-1} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] \overset{7.2.5}{\Longrightarrow}$$
$$S_{n-1} \cdot (1+r)^{-1\cdot(n-1)} = (1+r)^{-1\cdot(n)} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_{n-1}(1+R_n)|\mathcal{F}_{n-1}\right] \Longrightarrow$$
$$S_{n-1} \cdot (1+r)^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_{n-1}(1+R_n)|\mathcal{F}_{n-1}\right] \overset{\text{b.1}}{\Longrightarrow}$$
$$S_{n-1} \cdot (1+r)^{-1} = S_{n-1} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1+R_n)|\mathcal{F}_{n-1}\right] \Longrightarrow$$
$$(1+r)^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1+R_n)|\mathcal{F}_{n-1}\right] \overset{\text{c}}{\Longrightarrow}$$
$$(1+r)^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[u \cdot \mathbf{1}_{(1+R_n=u)} + d \cdot \mathbf{1}_{(1+R_n=d)}|\mathcal{F}_{n-1}\right] \overset{\text{b.2}}{\Longrightarrow}$$
$$(1+r)^{-1} = u \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{(1+R_n=u)}|\mathcal{F}_{n-1}\right] + d \cdot \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{(1+R_n=d)}|\mathcal{F}_{n-1}\right]\right) \overset{\text{d.1}}{\Rightarrow}$$
$$(1+r)^{-1} = u \cdot C + d \cdot (1-C) \Longrightarrow C = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Si può dunque osservare che tale modello si basa sulla variabile aleatoria costante C che rende $\mathbb{Q}$ unica infatti:

$$C = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{(1+R_n=u)}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{(1+R_n=u)}] \overset{\text{d.2}}{=} \mathbb{Q}(1+R_n=u) = q$$

Inoltre, dato che $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{(1+R_n=u)}|\mathcal{F}_{n-1}]$ è costante allora $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono e devono essere i.i.d. $(R_i \perp\!\!\!\perp R_i \perp\!\!\!\perp F_{n-1}\ \forall i,j \in \mathbb{N})$
Infine vale la proprietà di equivalenza tra misure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ devono essere soddisfatta $q \in [0,1] \iff d \leq 1+r \leq u$, in particolare:

1. $p \in]0,1[\iff q \in]0,1[\iff d < 1+r < u$
2. $p = 1 \iff q = 1 \iff 1+r = u$
3. $p = 0 \iff q = 0 \iff 1+r = d$

---

a. Dato che $\boldsymbol{B}$ è un processo deterministico, allora esso non è influenzato da condizionamento di una σ-algebra.

b. $S_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$ usando la proprietà di Omogeneità(1.) e Linearità(2.) 2.3.6.

c. Costruendo gli eventi $E = (1+R_n = u)$ e $E^c = (1+R_n = d)$ allora, usando le variabili aleatorie indicatrici si ha:

$$1 + R_n \overset{\mathcal{L}}{=} u \cdot \mathbf{1}_{(1+R_n=u)} + d \cdot \mathbf{1}_{(1+R_n=d)} = \begin{cases} u & \text{se } E \\ d & \text{se } E^c \end{cases}$$

d. Proprietà delle v.a Indicatrici: (1.) $\mathbf{1}_{E^c} = 1 - \mathbf{1}_E$ e (2.) $\mathbb{E}[\mathbf{1}_E] = \mathbb{P}(E)$

Esempio 8.1.10: Arbitraggi su Modello Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale 7.2.5 e sia $\mathbb{Q}$ misura martingala, se essa non è equvalente a $\mathbb{P}$ allora si può avere un'opportunità di arbitraggio.

Caso $d < 1 + r \wedge p = 0$:
Si può costruire la seguente strategia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$:

$$\begin{cases} \alpha_n = -1 & \text{Vendo il titolo rischioso} \\ \beta_n = S_0 & \text{Compro B pari al valore di } S_0 \end{cases}$$

Dato che $p = 0$ vi è una probabilità certa che il titolo rischioso scenda di valore infatti:

$$\mathbb{P}(R_n = d - 1) = 1 - p = 1$$

Allora si ha che il valore di portafoglio è:

$$\begin{aligned} V_n &= \alpha_n \cdot S_n + \beta_n \cdot B_n = -S_n + S_0 \cdot B_n = -S_n + S_0 \cdot (1 + r)^n \\ &= -d^n \cdot S_0 + S_0 \cdot (1 + r)^n = S_0 \cdot ((1 + r)^n - d^n) > 0 \end{aligned}$$

Si può osservare che il valore di portafoglio è sempre positivo dato che $d < 1 + r$ per ipotesi. Dunque si ha un'opportunità di arbitraggio rappresentato da $\mathbb{P}(V_n > 0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Caso $p \in]0, 1[\wedge 1 + r = u$:
Si può costruire la seguente strategia:

$$\begin{cases} \alpha_n = -1 & \text{Vendo il titolo rischioso} \\ \beta_n = S_0 & \text{Compro B pari al valore di } S_0 \end{cases}$$

Il valore di portafoglio è dato da:

$$\begin{aligned} V_n &= \alpha_n \cdot S_n + \beta_n \cdot B_n = -S_n + S_0 \cdot B_n = -S_n + S_0 \cdot (1 + r)^n \\ &\overset{\text{a}}{=} -\prod_{k=1}^{n} (1 + R_k) + S_0 \cdot (1 + r)^n \geq 0 \end{aligned}$$

Il massimo valore che puo raggiungere la produttoria è u^n e dato che $u = 1 + r$ si ha che il valore di portafoglio è sempre non-negativo dunque si ha un'opportunità di arbitraggio rappresentato da $\mathbb{P}(V_n \geq 0) = 1$, vi è guadagno certo se si investe solamente in $\boldsymbol{B}$.

Caso $u < 1 + r \ \vee \ d > 1 + r$: Vi è uno squilibrio tra i tassi di interesse e il rendimento del titolo rischioso, dunque si può costruire una strategia di arbitraggio che favorisca l'uso di uno dei due titoli rispetto all'altro ($\boldsymbol{B}$ nel primo caso e $\boldsymbol{S}$ nell'altro).

Teorema 8.1.11: Teorema di Separazione dei Convessi

Sia V spazio vettoriale reale e siano C insieme convesso e compatto su V e W sottospazio vettoriale di V tali che $C \cap W = \emptyset$. Allora $\exists \mathbf{v} \in V$ che soddisfa:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{c} > 0 & \forall \mathbf{c} \in C \\ \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = 0 & \forall \mathbf{w} \in W \end{cases}$$

Teorema 8.1.12: 1° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, allora il modello è *libero da arbitraggio* se e solo se esiste una *misura martingala equivalente* $\mathbb{Q}$ rispetto a un numerario $\boldsymbol{Y}$. Se tale misura esiste, allora $\mathbb{Q}$ è *misura martingala equivalente* per ogni numerario $\boldsymbol{W}$.

Dimostrazione 8.1.12: 1° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto bisogna dimostrare che:

$$\nexists \text{ arbitraggi} \iff \exists \mathbb{Q} \text{ misura martingala equivalente}$$

$\Longleftarrow$) Per assurdo si supponga che esista un'opportunità di arbitraggio, ovvero una strategia $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}$ ammissibile t.c. $V_0 = 0$,$V_n \geq 0$, $\mathbb{P}(V_n > 0) > 0$ da 8.1.1. Dato che $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ si ha una un'opportunità di arbitraggio anche rispetto a $\mathbb{Q}$ per via della definizione 1.2.3 dunque:

$$\mathbb{Q}(V_n > 0) > 0 \wedge V_n \overset{\text{q.c}}{\geq} 0 \overset{\text{a}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_n] > 0 \Longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{V_n}{B_n}] > 0 \tag{8.1}$$

Inoltre, dato che $\mathbb{Q}$ è misura martingala equivalente allora $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ è una martingala dunque:

$$\widetilde{V_0} = 0 \overset{4.1.2}{\Longrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V_1}|\{\Omega, \emptyset\}] = 0 \overset{4.1.2}{\Longrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V_n}] = 0$$

Assurdo per la relazione (6.1).

---

a. Data una va $X \overset{\text{q.c}}{\geq} 0$ quasi certamente non-negativa ($\Omega = [0, \infty]$) si può notare che:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{Q} > 0 = \int_0^{\infty} X d\mathbb{Q} > 0 = \mathbb{Q}(X > 0) > 0$$

Proprietà del valore atteso di una v.a. non-negativa. $\longrightarrow$

Dimostrazione 8.1.12: 1° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

$\Longrightarrow$) Si assuma uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ t.c $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ e $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Bisogna trovare una misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ rispetto a $\boldsymbol{B}$ che soddisfi:

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ misure equivalenti, ovvero $\mathbb{Q}(\omega_i) > 0$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

2. $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}$ sono martingale rispetto a $\mathbb{Q}$, dall'osservazione 8.1.4 equivale a dimostrare $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ è martingala $\overset{4.3.5}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{E}[G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\mathbf{S}})_n] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\alpha}$ prevedibili.

Data la variabile aleatoria $G^{\boldsymbol{\alpha}} = G(\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{\mathbf{S}})_n$, si può definire il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{w} = (G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_1), \dots, G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_m)) \wedge \boldsymbol{\alpha} \text{ prevedibile}\}$$

E dato $\mathbb{R}^m_+ = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{c} \geq 0 \wedge \exists i \ c_i > 0\}$ si può definire l'insieme convesso e compatto su $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m_+ \mid \mathbf{c} = (Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m)) \wedge \sum_{j=1}^{m} Y(\omega_j) = 1 \wedge Y \text{ v.a.}\}$$

Da ipotesi $\nexists \boldsymbol{\alpha}$ t.c $\mathbf{w} \in \mathcal{C} \subset \Gamma$ dato l'osservazione 8.1.8 quindi $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e per il Teorema di Separazione dei Convessi 8.1.11 $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{c} > 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C} \tag{8.2}$$
$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \tag{8.3}$$

Costruendo la matrice identità $\mathbf{I}$ con righe $\mathbf{e}_i = (\mathbf{1}_{\omega_1}(\omega_i), \dots, \mathbf{1}_{\omega_m}(\omega_i))$ tali che $\mathbf{e}_i \in \mathcal{C}$, deve valere la proprietà descritta in (5.2):

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e}_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \iff \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{I} > \mathbf{0} \iff \mathbf{v}^T > \mathbf{0}$$

Dunque gli elementi di $\mathbf{v}$ sono strettamente positivi, allora si può costruire la misura di probabilità $\mathbb{Q}$ t.c:

$$\mathbb{Q}(\omega_i) = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^m v_j} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Questo consegue che $\mathbb{Q}(\omega_i) > 0$ e $\mathbb{Q}(\Omega) = \sum_{j=1}^m \frac{v_j}{v_j} = 1$ per ipotesi $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ e per 1.2.3 si dimostra il punto 1. della dimostrazione.
Infine si dimostra il punto 2. osservando che $\forall \boldsymbol{\alpha}$ prevedibile:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G^{\boldsymbol{\alpha}}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\omega_i) \cdot G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{v_i}{\sum_{j=1}^m v_j} \cdot G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_i) =$$
$$\frac{1}{\sum_{j=1}^m v_j} \cdot \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot G^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m v_j} \cdot \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = 0$$

$\square$

Teorema 8.1.13: PNA sul Valore di Portafoglio

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto libero da arbitraggi, e sia valore di portafoglio $\boldsymbol{V}$ con strategie ammissibili $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ e $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ t.c.

$$V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \leq V_N^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')} \implies V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \leq V_n^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')} \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

Ovvero dato che il mercato è libero da arbitraggi allora vale il principio di non-arbitraggio 6.3.2 sul valore di portafoglio.

Dimostrazione 8.1.13: PNA sul Valore di Portafoglio

Dato che $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è un modello libero da arbitraggi per il 1° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing 8.1.12 esiste una misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ rispetto a numerario $\boldsymbol{B}$, dunque si può notare che se vale $V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \leq V_N^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')}$ allora:

$$\widetilde{V}_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \overset{8.1.7}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} | \mathcal{F}_n] \overset{\text{a}}{\leq} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_N^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')} | \mathcal{F}_n] \overset{8.1.7}{=} \widetilde{V}_n^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')}$$

Infine si può concludere che:

$$\widetilde{V}_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \leq \widetilde{V}_n^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')} \implies \frac{V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}}{B_n} \leq \frac{V_n^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')}}{B_n} \implies V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \leq V_n^{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')}$$

a. Proprietà di Monotonia del Valore Atteso condizionato 2.3.6 □

8.2 Valutazione dei Derivati

Definizione 8.2.1: Prezzo Neutrale al Rischio

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, $X \in m\mathcal{F}_N$ un derivato e la misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ allora si può definire il **Prezzo Neutrale al Rischio** sotto $\mathbb{Q}$ come $\boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}} = (H_n^{\mathbb{Q}})_{n \in \mathbb{N}}$ definito:

$$H_n^{\mathbb{Q}} = \frac{B_n}{B_N} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | \mathcal{F}_n]$$

Osservazione 8.2.2: Prezzo Neutrale al Rischio

Al tempo N si può notare che il prezzo neutrale al rischio $\boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}}$ risulta:

$$H_N^{\mathbb{Q}} = \frac{B_N}{B_N} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | \mathcal{F}_N] \overset{2.3.6.3}{=} X_N$$

Definizione 8.2.3: Mercato Esteso

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente con $\boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}}$ prezzo neutrale al rischio allora si può definire il **Mercato Esteso** come tripla $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}})$.

Tale mercato introduce questo prezzo neutrale al rischio, utile per valutare il prezzo di un derivato in modo indipendente dal rischio, dunque non consente opportunità di arbitraggio.

Osservazione 8.2.4: Prezzi Neutrali al Rischio Differenti

Si può osservare che dato due misure martingale equivalenti $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}'$ allora i prezzi neutrali al rischio risultano $\boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}} \neq \boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}'}$.

Esempio 8.2.5: Prezzi Neutrali al Rischio Differenti

Usando un modello di mercato giocattolo $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ monoperiodale da un solo titolo rischioso (d=1) e i titoli sono regolati dagli eventi $\Omega = \{E_1, E_2, E_3\}$ allora si possono costruire diverse misure martingale equivalenti.
Dato che $\mathbb{Q}(E_1), \mathbb{Q}(E_2), \mathbb{Q}(E_3)$ hanno infinte soluzioni dunque anche $H_0^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ sarà diverso in base alla misura scelta.

Osservazione 8.2.6: Prezzo Neutrale al Rischio Scontato

Defininendo il prezzo neutrale al rischio scontato $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathbb{Q}}$ come:

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{Q}} = \frac{H_n^{\mathbb{Q}}}{B_n}$$

Si può notare che

$$\mathbb{E}[\widetilde{H}_N^{\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{E}[H_N^{\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_n]}{B_N} \overset{8.2.2}{=} \frac{\mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_n]}{B_N} =$$
$$\frac{B_n}{B_n \cdot B_N} \cdot \mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_n] \overset{8.2.1}{=} \frac{H_n^{\mathbb{Q}}}{B_n} = \widetilde{H}_n^{\mathbb{Q}}$$

Ovvero il prezzo neutrale al rischio scontato $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathbb{Q}}$ è una martingala. Solo per il prezzo neutrale al rischio $\boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}}$ dunque, è l'unico prezzo che rende $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente. Inoltre si può notare che per il primo teorema fondamentale dell'asset pricing (8.1.12) il mercato esteso $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}^{\mathbb{Q}})$ è libero da arbitraggi.

8.3 Copertura dei Derivati

Definizione 8.3.1: Derivato Replicabile

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un derivato, esso si dice **Replicabile** se esiste una strategia d'investimento $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ t.c.

$$V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} = X_N$$

Teorema 8.3.2: Prezzo di Arbitraggio

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto libero da arbitraggi e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un derivato replicabile, allora vale la seguente relazione:

$$H_n^{\mathbb{Q}} = V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \quad \forall\mathbb{Q} \text{ EMM } \wedge \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

In questo caso il valore di portafoglio è chiamato **Prezzo di Arbitraggio** del derivato $\boldsymbol{X}$.

Dimostrazione 8.3.2: Prezzo di Arbitraggio

Supponiamo che $H_n^{\mathbb{Q}} \neq V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$ e che $H_N^{\mathbb{Q}} = V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$ si ha un'opportunità di arbitraggio in caso $(H_n^{\mathbb{Q}} > V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})})$, vendo a prezzo maggiore e compro la strategia. In questo modo si ha un guadagno certo a tempo N:

$$(V_N^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} - H_N^{\mathbb{Q}}) + (H_n^{\mathbb{Q}} - V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}) > 0$$

Questo per l'ossevazione 6.3.3.
Allora per il 1° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing (8.1.12) si ha che il modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ non è libero da arbitraggi, dunque non esiste $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente, assurdo.

$\square$

Osservazione 8.3.3: Prezzo di Arbitraggio Equivalente

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto libero da arbitraggi e sia $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un derivato replicabile, allora il prezzo di arbitraggio $H_n^{\mathbb{Q}}$ è unico per ogni misura martingala equivalente $\mathbb{Q}'$, ovvero:

$$H_n^{\mathbb{Q}} = H_n^{\mathbb{Q}'} = V_n^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \quad \forall\mathbb{Q}, \mathbb{Q}' \text{ EMM } \wedge \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

Questo per il teorema precedente 8.3.2.

Definizione 8.3.4: Mercato Completo

Un modello di mercato discreto $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ si dice **Completo** se ogni derivato $X \in m\mathcal{F}_N$ è replicabile.

Teorema 8.3.5: 2° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato discreto, allora

$$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}) \text{ è completo} \iff \exists! \mathbb{Q} \text{ misura martingala equivalente}$$

Dimostrazione 8.3.5: 2° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

$\Longleftarrow$) Si assuma uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ t.c $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ e $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$ e una misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ rispetto a numerario $\boldsymbol{B}$.
Per dimostrare l'implicazione basta dimostrare che se il mercato non è completo allora esistono diverse misure martingale.

Si può vedere $\mathbb{R}^m$ come spazio vettoriale, dei supporti delle variabili aleatorie $X \in m\mathcal{F}_N$, ovvero $\mathbb{R}^m = \{X(\omega_1), \dots, X(\omega_m)\}$, è possibile costruire il seguente spazio vettoriale:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{v} = (\widetilde{V}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}(\omega_1), \dots, \widetilde{V}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}(\omega_m)) \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{A}\}$$

Inoltre, è possbile fissare il prodotto scalare su $\mathbb{R}^m$ rispetto a $\mathbb{Q}$ in questo modo:

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{Q}} = \sum_{k=1}^{m} X(\omega_i) Y(\omega_i) \mathbb{Q}(\omega_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[XY]$$

Esso rispetta le proprietà di simmetria e linearità.

Supponiamo che il mercato non sia completo, ovvero esiste un derivato $X \in m\mathcal{F}_N$ non replicabile, allora $\mathcal{V} \neq \mathbb{R}^m$, ovvero esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ t.c. $\mathbf{x} \notin \mathcal{V}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e che soddisfi:

$$\mathbf{x}^T \perp \mathbf{v} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[XV] \quad \forall \mathbf{v} = V \in \mathcal{V} \tag{8.4}$$

Infine fissiamo un paramentro $\delta > 1$ e costruiamo la seguente misura:

$$\mathbb{Q}_\delta(\omega_i) = \left(1 + \frac{x_i}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right) \mathbb{Q}(\omega_i)$$

Si può notare che $\mathbb{Q}_\delta$ è una misura equivalente a $\mathbb{Q}$ per 1.2.3, infatti data la norma infinito definita come $\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} |x_i|$ si ha che:

$$\frac{x_i}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty} \in]-1, 1[\implies \left(1 + \frac{x_i}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right) > 0 \implies \mathbb{Q}_\delta(\omega_i) > 0$$

Inotre $\mathbb{Q}_\delta$ è misura di probabilità 1.2.8 infatti:

$$\mathbb{Q}_\delta(\Omega) = \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{x_i}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right) \mathbb{Q}(\omega_i) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\omega_i) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right) \mathbb{Q}(\omega_i) = 1 + \frac{1}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty} \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{Q}(\omega_i) =$$
$$1 + \frac{1}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\|} (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X \cdot \mathbf{1}]) = 1 + \frac{1}{\delta \left\|\mathbf{x}\right\| 0} = 1$$

$\longrightarrow$

Dimostrazione 8.3.5: 2° Th. Fondamentale dell'Asset Pricing

L'ultima uguaglianza è data dal fatto che $\mathbf{1} \in \mathcal{V}$ questo per via dell' osservazione 7.3.16 che ci indica che $\widetilde{V}_n = V_0 + G(\alpha, \widetilde{S})_n$, quindi impostando $V_0 = 1$ e $\alpha_n = 0$ per ogni n per 4.3.4 si ha $\boldsymbol{V} = \mathbf{1}$.

Infine si dimostra che $\mathbb{Q}_\delta$ soddisfa la proprietà di martingalità, per 4.3.5 usando $\boldsymbol{G} = (G(\alpha, \widetilde{S})_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\delta}[G] = \sum_{k=1}^{m} G(\omega_i)\mathbb{Q}_\delta(\omega_i) = \sum_{k=1}^{m} G(\omega_i)\left(1 + \frac{x_i}{\delta\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right)\mathbb{Q}(\omega_i) =$$
$$\left(1 + \frac{1}{\delta\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right)\sum_{k=1}^{m} G(\omega_i)x_i\mathbb{Q}(\omega_i) = \left(1 + \frac{1}{\delta\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G\cdot\mathbf{x}] =$$
$$\left(1 + \frac{1}{\delta\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty}\right)0 = 0$$

Per 8.1.3, si evince dunque che esiste una misura martingala equivalente $\mathbb{Q}_\delta$ diversa da $\mathbb{Q}$ questo poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$\Longrightarrow$) Supponiamo che il mercato sia completo, ci si riduce a dimostrare che esiste un'unica misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$.

Sia $A \in \mathcal{F}_N$ e $X = \mathbf{1}_A$ dunque $X \in m\mathcal{F}_N$ derivato replicabile per ipotesi di mercato completo. Sia $\mathbb{Q}'$ una seconda misura martingala equivalente arbitraria. Allora si può notare che:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A] \overset{8.2.1}{=} \frac{B_N}{B_0}H_0^{\mathbb{Q}} \overset{8.3.3}{=} \frac{B_N}{B_0}H_0^{\mathbb{Q}'} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{Q}'(A)$$

Questo dimostra l'equivalenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}'$.

$\square$

Capitolo 9

Applicazioni su Modelli di Mercato

9.1 Modello di Mercato Binomiale

In questa sezione di fa riferimento al modello binomiale definito in 7.2.5.

Si può dimostrare che il modello binomiale è un modello di mercato libero da arbitraggio se vengono rispettate le condizioni indicate nell'esempio 8.1.9.

Teorema 9.1.1: Modello Binomiale Libero da Arbitraggi

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale, allora $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è libero da arbitraggi se e solo se esiste un'**unica** misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ e valogono le sequenti condizioni:

1. $q \in]0, 1[\iff d < 1 + r < u$
2. $q = 1 \iff 1 + r = u$
3. $q = 0 \iff 1 + r = d$

Senza queste condizioni il modello di mercato binomiale presenta opportunità di arbitraggio come descritto nell'esempio 8.1.10.

Si può notare inoltre il seguente risultato:

Teorema 9.1.2: Modello Binomiale e Catena di Markov

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale, allora $\boldsymbol{S}$ è una catena di markov omogenea.

Dimostrazione 9.1.2: Modello Binomiale e Catena di Markov

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale definito come in 7.2.5 ovvero:

- $\boldsymbol{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\boldsymbol{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è processo stocastico i.i.d
- $S_{n+1} = f(S_n, R_{n+1}) = (1 + R_{n+1})S_n$

Allora per il teorema 5.3.5 $\boldsymbol{S}$ è una catena di Markov omogenea. □

Teorema 9.1.3: Completezza del Mercato Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale e $d \leq 1 + r \leq u$ allora $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è completo.

Dimostrazione 9.1.3: Completezza del Mercato Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale e $d \leq 1 + r \leq u$ dunque per il teorema 9.1.1 esiste un'unica misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$. Quindi per il secodo teorema fondamentale dell'asset pricing 8.3.5 si ha che $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è completo. □

Bisogna notare che l'impliazione inversa non è vera, ovvero se $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è completo non implica che $d \leq 1 + r \leq u$.

Esempio 9.1.4: Completezza e Arbitraggi su Modello Binomiale

Si può osservare come calcolare il prezzo di arbitraggio di un derivato in un modello di mercato binomiale.

Esempio 9.1.5: Prezzo di Arbitraggio in Mercato Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale come in 7.2.5 e sia valida la condizione $d < 1+r < u$, per il teorema 9.1.1 e il teorema 9.1.3 si ha che $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è libero da arbitraggi e completo, dunque per il teorema 8.3.5 si ha che esiste un'unica misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$.
Si consideri un derivato $X = F(S_N)$ path-indipendent con N scadenza. Per calcolare $\boldsymbol{H} = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il prezzo di arbitraggio di X si ha che:

$$
\begin{aligned}
&H_n \overset{8.2.1}{=} (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|\mathcal{F}_n] \overset{9.1.2}{=} (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_n] \\
&\overset{5.2.6}{=} (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_{N-n})|S_0] \overset{2.3.8}{=} \\
&(1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_{N-n})|S_0 = s]|_{s=S_0} = \\
&(1+r)^{-(N-n)}\sum_{k=0}^{N-n}\mathbb{Q}(F(S_{N-n} = u^k \cdot d^{N-n-k} \cdot S_0)|S_0 = s) = \\
&(1+r)^{-(N-n)}\sum_{k=0}^{N-n}\mathbb{Q}(F(S_{N-n} = u^k \cdot d^{N-n-k} \cdot s)) = \\
&(1+r)^{-(N-n)}\sum_{k=0}^{N-n}\binom{N-n}{k}q^k(1-q)^{N-n-k}F(u^k \cdot d^{N-n-k} \cdot s)
\end{aligned}
$$

In generale questo calcolo è molto costoso, ha complessità $O(\frac{(N-n)!}{(N-n-k)!})$,

Si può infine mostrare come viene calcolato il prezzo neutrale al rischio di un derivato e come replicarlo tramite una stradegia d'investimento.

Esempio 9.1.6: Replicazione nel Mercato Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale come in 7.2.5 e sia valida la condizione $d < 1 + r < u$, per il teorema 9.1.1 e il teorema 9.1.3 si ha che $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è libero da arbitraggi e completo.
Si consideri un derivato $X = F(S_N)$ path-indipendent con N scadenza.
Dato che $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ è completo si ha che il prezzo di un derivato è uguale al portafoglio che lo replica, ovvero:

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n = H_n = (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_n]$$

Si può notare che H_n dipende dal valore del derivato al tempo n, dunque si può rappresentare H_n come una funzione di S_n: $H_n = h_n(S_n)$.
Dunque per calcolare una strategia di investimento bisogna fare in modo che $V_n = H_n$, ma dato che S_n è una variabile casuale si deve avere che α_n e $\beta_n = h_n(S_n)$ ad ogni evento possibile, ovvero:

$$\begin{cases} \alpha_n u S_{n-1} + \beta_n B_n = h_n(uS_{n-1}) & R_n = u \\ \alpha_n d S_{n-1} + \beta_n B_n = h_n(dS_{n-1}) & R_n = d \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che:

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{h_n(uS_{n-1}) - h_n(dS_{n-1})}{(u-d)S_{n-1}} \\ \beta_n = \frac{uh_n(dS_{n-1}) - dh_n(uS_{n-1})}{(u-d)(1+r)^n} \end{cases}$$

Anche qui si nota che α e β dipendono da S_{n-1}, dunque si può rappresentare α e β come funzioni di S_{n-1}: $\alpha_n = a_n(S_{n-1})$ e $\beta_n = b_n(S_{n-1})$.

Osservazione 9.1.7: Calcolo del Prezzo Neutrale al Rischio

Si può notare che il calcolo del prezzo neutrale al rischio di un derivato europeo path-indipendent $X = F(S_N)$ in un modello di mercato binomiale $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{b})$, con $F \in m\mathcal{B}$ funzione payoff, può essere calcolato in modo ricorsivo, partendo dal prezzo del derivato al tempo N, infatti nel caso N si ha $H_N = F(S_N)$ per osservazione 8.2.2, mentre per il caso induttivo sapendo che:

$$H_{N-1} = (1+r)^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_N|S_{N-1}]$$
$$H_{n+1} = (1+r)^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_{n+2}|S_{n+1}]$$

$$H_n \overset{8.2.1}{=} (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|\mathcal{F}_n] \overset{\text{Torre}}{=}$$
$$(1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_{n+1}]|S_n] \overset{\text{Torre Multipla}}{=}$$
$$\frac{(1+r)^n}{(1+r)^N}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_{N-1}]\dots|S_n] =$$
$$\frac{(1+r)^n}{(1+r)^{n+1}}\frac{(1+r)^{n+}}{(1+r)^{n+2}}\cdots\frac{(1+r)^{N-2}}{(1+r)^{N-1}}\frac{(1+r)^{N-1}}{(1+r)^N}$$
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_{N-1}]\dots|S_n] =$$
$$(1+r)^{-1}(1+r)^{-1}(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_N)|S_{N-1}]\dots|S_n] =$$
$$(1+r)^{-1}(1+r)^{-1}\dots(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots H_{N-1}\dots|S_n] =$$
$$(1+r)^{-1}(1+r)^{-1}\dots(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{N-1}|S_{N-2}]\dots|S_n] =$$
$$\dots$$
$$(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{n+1}|S_n]$$

Dato questa osservazione e il fatto che le strategie possono essere calcolate date i valori possibili dei prezzi dei titoli e il prezzo del derivato, allora si può costruire un algoitmo che non solo valuta il prezzo di un derivato ma anche le strategie di investimento.

Tale algoritmo è chiamato **Algoritmo Binomiale**.

Definizione 9.1.8: Algoritmo Binomiale

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ modello di mercato binomiale come in 7.2.5 e sia valida la condizione $d \leq 1 + r \leq u$.
Allora è possibile costruire le seguenti variabili:

- $S_{n,k}$ prezzo del titolo al tempo n con k passi verso l'alto e $n - k$ passi verso il basso.
- $H_{n,k} = h_n(S_{n,k})$ prezzo del derivato al tempo n con k passi verso l'alto e $n - k$ passi verso il basso.
- $\alpha_{n,k} = a_n(S_{n,k})$ e $\beta_{n,k} = b_n(S_{n,k})$ è la strategia di investimento al tempo n con k passi verso l'alto e $n - k$ passi verso il basso.

Dati valori sono calcolati in tre passaggi:

1. Si calcola il prezzo del derivato per ogni tempo n e per ogni k partendo da S_0,

$$S_{0,0} = S_0 \text{ e } S_{n,k} = u^k d^{n-k} S_0$$

Ricavabile ricorsivamente da $S_{n-1,k-1}$ e $S_{n-1,k}$ in base al nodo che si vuole calcolare.

2. Si calcola il prezzo del derivato per ogni tempo n partendo da $H_{N,k}$ per ogni k, fino ad arrivare a $H_{0,k}$. Questa operazione è chiamata **Backward**.

$$\begin{aligned}
&H_{N,k} = F(S_{N,k}) \\
&H_{n,k} = h_n(S_{n,k}) \overset{9.1.7}{=} (1+r)^{-1}\mathbb{E}[h_{n+1}|S_{n,k}] = \\
&(1+r)^{-1} h_{n+1}(uS_{n-1,k})\mathbb{P}(S_{n,k} = uS_{n-1,k}) + \\
&h_{n+1}(dS_{n-1,k})\mathbb{P}(S_{n,k} = uS_{n-1,k}) = \\
&(1+r)^{-1} h_{n+1}(S_{n,k+1})q + h_{n+1}(S_{n,k})(1-q) = \\
&(1+r)^{-1} H_{n+1,k+1}q + H_{n+1,k}(1-q)
\end{aligned}$$

3. Si calcolano le strategie di investimento per ogni tempo n e per ogni k partendo da $\alpha_{0,0}$ e $\beta_{0,0}$ fino ad arrivare a $\alpha_{N,k}$ e $\beta_{N,k}$. Questa operazione è chiamata **Forward**.

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,k} &\overset{9.1.6}{=} \frac{H_{n,k+1} - H_{n,k}}{(u-d)S_{n,k}} \\
\beta_{n,k} &\overset{9.1.6}{=} \frac{uH_{n,k} - dH_{n,k+1}}{(u-d)(1+r)^n}
\end{aligned}$$

9.2 Modello di Mercato Black-Scholes

Si è sempre assunto che il tempo in cuio esercitare il diritto di un derivato in un mercato fosse suddiviso in N intervalli di tempo $(t_1, \ldots, t_N)$ cosa succede se N tende a infinito? Si deve ricavare i parametri del modello, tale ricerca è chiamata **Calibrazione** del modello.

Prendiamo in considerazione il caso del mercato binomiale, e stabiliamo i parametri r_N,d_N e u_N, fissando il numero di intervalli N.

Esempio 9.2.1: Calibrazione del Mercato Binomiale

Dalla definizione di mercato binomiale 7.2.5 si pone per ogni N:

- $\delta_N = \frac{T}{N}$
- $r_n = e^{\rho\delta_N} - 1$
- $u_N = e^{\sigma\sqrt{\delta_n}+\mu_\alpha\delta_n}$
- $d_N = e^{-\sigma\sqrt{\delta_n}+\mu_\beta\delta_n}$

Dove ρ è il tasso d'interesse a capitalizzazione composta, σ è la volatilità o varianza di mercato, μ_α e μ_β sono la media dei ritorni. Tutti questi valori sono determinati statisticamente a priori.
Ponendo dunque la misura martingala equivalente:

- $q_N = \frac{1+r_N-d_N}{u_N-d_N}$
- $\mathbb{Q}_N(1 + R_n^N = u_N) = q_N$

Si può porre il prezzo del derivato X^N in questo modo:

$$X^N = \ln(\prod_{k=1}^{N}(1 + R_k^N)) = \sum_{k=1}^{N}\ln(1 + R_k^N)$$

E calcolando il prezzo neutrale al rischio al tempo iniziale:

$$H_0^N \overset{8.2.1}{=} (1 + e^{\rho\delta_N} - 1)^{-N}\mathbb{E}[F(S_N)|\mathcal{F}_0] = (e^{\rho\frac{T}{N}})^{-N}\mathbb{E}[F(S_N)] =$$
$$(e^{-\rho N})\mathbb{E}[F(S_0\prod_{k=i}^{n}(1 + R_k^N))] = (e^{-\rho N})\mathbb{E}[F(S_0e^{\ln(\prod_{k=i}^{n}(1+R_k^N))})] =$$
$$(e^{-\rho N})\mathbb{E}[F(S_0e^{X^N})]$$

Dunque H_0^N risulta una funzione di X^N.

Si può studiare la distribuzione di X^N nel caso $N \to \infty$.

Teorema 9.2.2: Convergenza dei Derivati in Mercati Binomiali

Sia X un derivato nel mercato binomiale $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ con $N \to \infty$ allora vale il seguente risultato:

$$X^N \xrightarrow{d} X \sim \mathcal{N}_{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T}$$

Ovvero X^N tende ad avere distribuzione normale con media $(\rho - \frac{\sigma^2}{2})T$ e varinza $\sigma^2 T$.

In questo modo è possibile calcolare il prezzo neutrale al rischio per $N \to \infty$.

Teorema 9.2.3: Convergenza dei PNR in Mercati Binomiali

Sia in vigore un modello di mercato binomiale $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$, e sia $F \in C_b$ funzione payoff di un derivato europeo X continua e limitata. Allora vale il seguente risultato:

$$\lim_{N \to \infty} H_0^N = H_0 = (e^{-\rho N})^{-N} \mathbb{E}[F(S_0 e^{X^N})] X^N \xrightarrow{d}$$

Con $X \sim \mathcal{N}_{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T}$.

Da questi teoremi è possibile costruire le **Formule di Black-Scholes** per dei precisi derivati.

Teorema 9.2.4: Formule di Black-Scholes

Sia $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B})$ mercato binomiale e X derivato europeo. Allora si può calcolare il prezzo di un opzione Put con strike K in questo modo.

$$P_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S_0 e^X)^+] = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

Usando la Put-Call Parity 6.3.5, si può determinare il prezzo di un opzione Call con strike K:

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_0 e^X - K)^+] = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

Con Φ CDF normale e d_1 e d_2 definiti:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K} + (r + \sigma^2)T)}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Si può inoltre notare che la strategia di investimento (α, β) è uguale a $\alpha = \pm \Phi(d_1)$ e $\beta = \pm K \Phi(d_2)$

9.3 Modello di Mercato Trinomiale

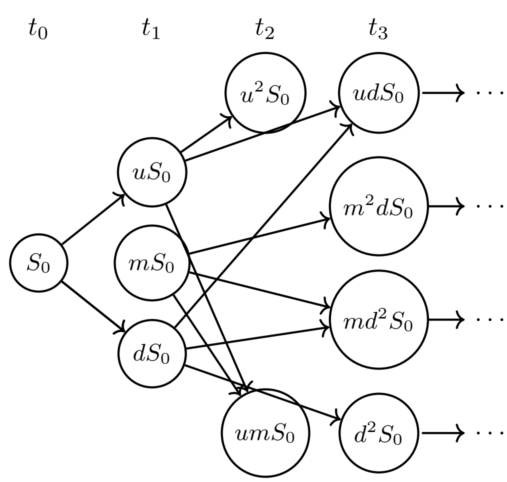
Si può definire un altro modello di mercato molto utilizzato che prevede tre eventi per ogni ritorno.

Definizione 9.3.1: Modello di Mercato Trinomiale

Siano v titoli rischiosi $\boldsymbol{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può crescere di u,decrescere di d o variare di m ad ogni tempo n. Sia $N \in \mathbb{N}$ numero di tempi con $\Omega = \{u, m, d\}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, e titolo non rischioso $\boldsymbol{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $B_{n+1} = (1 + r_{n+1})B_n$ per $n \in \{0, \dots, N\}$.

La probabilità di crescita di $\boldsymbol{S}$ è p_1 e la probabilità di decrescita è p_2, mentre la probabilità di stazionarità è di $1 - p_1 - p_2$ con $p_1, p_2 \in [0, 1]$. Dunque i ritorni $\boldsymbol{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno distribuzione dipendente da $\boldsymbol{L} = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con distribuzione $p_1\delta_u + p_2\delta_d + (1 - p_1 - p_2)\delta_m$

$$S_{n+1} = \begin{cases} uS_n & \text{se } R_n = u - 1 \text{se } L_n = u \\ mS_n & \text{se } R_n = m - 1 \text{se } L_n = m \\ dS_n & \text{se } R_n = d - 1 \text{se } L_n = n \end{cases}$$



In questo caso il supporto e la distribuzione di $\boldsymbol{S}$ per ogni S_n è:

$$S_{S_n} = \{u^i d^j m^k S_0 | i + j + k = n\}$$
$$p_{S_n}(u^i d^j m^k S_0) = \binom{n}{ijk} p_1^i p_2^j (1 - p_1 - p_2)^k = \left(\frac{n!}{i!j!k!}\right) p_1^i p_2^j p_3^k$$

Ovvero $S_n \sim B(n, (p_1, p_2))$ distribuzione trinomiale e $\boldsymbol{S}$ è un processo trinomiale. Questo modello di mercato è indicato come **Modello di Mercato Trinomiale**.

A differenza del Mercato Binomiale, quello trinomiale può presentare diverse versioni di completezza, che variano in base al numero di titoli presenti.