HW4 报告

苏王捷 2300011075

March 29, 2025

1 报告要求

1.1 要求 1

证明 A 的特征多项式 $\varphi(x)$ 即为 p(x).

$$A - xI = \begin{bmatrix} -c_1 - x & -c_2 & ... & -c_{n-1} & -c_n \\ 1 & -x & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ : & : & ... & : & : \\ 0 & 0 & ... & 1 & -x \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x) = det\|(A - xI)\| = (-c_1 - x) \times (-x)^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} [(-1)^{j-1} \times (-c_j) \times 1^{j-1} \times (-x)^{n-j}]$$

$$\varphi(x) = (-1)^n \times (x^n + c_1 x^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} c_j x^{n-j})$$

$$\varphi(x) = (-1)^n \times (x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n) = (-1)^n p(x)$$

故 A 的特征多项式 $\varphi(x)$ 即为 p(x).

1.2 要求 2

利用幂法的降幂。

在计算出最大特征值 λ_1 以及对应的特征向量 u_1 后，定义矩阵

$$A^{(1)} = A$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} - \lambda_1 \frac{u_1 u_1^\top}{u_1^\top u_1}$$

对 $A^{(2)}$ 使用幂法求出次大特征值 λ_2 以及对应的特征向量 u_2，再计算

$$A^{(3)} = A^{(2)} - \lambda_2 \frac{u_2 u_2^\top}{u_2^\top u_2}$$

以此类推，求出 A 的所有的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$，即为 p(x) 的所有的根。

2 代码解释

powerMethod 函数实现以幂法求最大的特征值，即为 p(x) 按模最大的根；本体误差限设为 1e-9，最大迭代次数设为 10000 次，如有需要确可修改。