北京大学 力学与工程科学系
Department of Mechanics and Engineering Science (MES)
Peking University

计算方法 (00330050)

第 7 章 数值微分与数值积分, 书面作业, 上机作业

课程: 计算方法 (ID: 00330050)
讲义: 第 7 章 数值微分与数值积分, 书面作业, 上机作业
作者: 袁子峰 助理教授 [1]
Email: yuanzifeng@pku.edu.cn
日期: 提交时间不晚于 2025.05.27 下课前 [2]

[1]单位: 北京大学工学院力学与工程科学系
[2]版本: 1.0 [2025.05.13]

题 7.1 (教材课后习题 3) 设 $f(x) = 1/(1+x)^2$, 取步长 $h = 0.1$, 分别采用二点与三点公式计算 $f'(0.5)$, 并估计误差.

题 7.2 (教材课后习题 4-(1)) 分别采用梯形与 Simpson 公式计算

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{P7.2-1}$$

的近似值, 并估计误差.

题 7.3 (教材课后习题 16-(1), 有修改) 确定下式中的系数, 使其具有尽可能高的代数精确度, 并给出代数精确度的值:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(-h/2) + A_2 f(0) + A_3 f(h/2) \tag{P7.3-1}$$

的近似值, 并估计误差.

题 7.4 (教材课后习题 20) 证明: 若求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{P7.4-1}$$

的代数精确度不小于 $n-1$, 则必有

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x, \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{P7.4-2}$$

其中 $l_k(x)$ 是以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数.

题 7.5　上机作业

题目说明

$\pi = 3.1415926\cdots$ 定义为圆周长与直径的比值, 而计算周长的方法采取欧氏距离:

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \equiv \left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2} \tag{P7.5-1}$$

定义 p-距离范数:

$$d_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \equiv \left[|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p\right]^{1/p} \tag{P7.5-2}$$

这里 $p \geqslant 1$; 特别地, 如果 $p=\infty$, 有

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \equiv \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \tag{P7.5-3}$$

因此, 单位圆上的点集可以写成:

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_p((x,y),(0,0))=1\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|^p+|y|^p=1\right\} \tag{P7.5-4}$$

特别地, 如果 $p=\infty$, 有

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y),(0,0))=1\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}=1\right\} \tag{P7.5-5}$$

如果距离范数发生改变, 那么 π 值也会随之变化. 在 p-距离范数下, 单位圆的弧长微元:

$$\mathrm{d}s_p=\left[\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right|^p+\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|^p\right]^{1/p}\mathrm{d}u=\frac{1}{p}\left[u^{1-p}+(1-u)^{1-p}\right]^{1/p}\mathrm{d}u \tag{P7.5-6}$$

从而 p-距离范数下的圆周长表示为

$$s_p=\frac{4}{p}\int_0^1\left[u^{1-p}+(1-u)^{1-p}\right]^{1/p}\mathrm{d}u \tag{P7.5-7}$$

因此, 在 p-距离范数下圆周率为

$$\pi_p=\frac{s_p}{2}=\frac{2}{p}\int_0^1\left[u^{1-p}+(1-u)^{1-p}\right]^{1/p}\mathrm{d}u \tag{P7.5-8}$$

可以验证当 $p=2$ 时

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right]^{1/2} \mathrm{d}u = \int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= B(1/2,1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi\end{aligned} \tag{P7.5-9}$$

这里 $B(x,y)$ 为 β 函数, $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数.

当 $p=1$ 时,

$$\pi_1 = 2\int_0^1 2\,\mathrm{d}u = 4 \tag{P7.5-10}$$

当 $p=\infty$ 时, 从定义出发, 此时圆退化成一个边长为 2 的正方形, 因此 $\pi_\infty = 8/2 = 4$.

提示: 请验证当 $1/p+1/q=1$ 时, $\pi_p=\pi_q$.

程序要求

作业要求对给定的实数 p, $1<p\leqslant 10000$, 利用数值积分方法计算 p-范数下的 π_p 值.

输入说明

屏幕输入, 仅一行, 实数 p, $1<p\leqslant 10000$, 例如

输出说明

输出采用 d_p 距离范数下的 π_p 值, 采用小数输出格式, 保留 10 位有效数字.

样例

输入: 2

输出: 3.141592654

报告要求

在报告中, 请简述你选择的数值积分方法, 及其理由.

评分准则

本次上机作业共 10 分, 具体评分标准如下:

报告占 5 分; 6 个测试案例, 每个 1 分.

源代码命名

```
XXXXXXXXXX_Practical07.cpp
```

xxxxxxxxxx 为学号, 这里后缀 `07` 表示第七章的意思.