北京大学 力学与工程科学系
Department of Mechanics and Engineering Science (MES)
Peking University

计算方法 (00330050)

第 3 讲 解线性方程组的迭代法, 书面与上机作业

课程: 计算方法 (ID: 00330050)
讲义: 第 3 讲 解线性方程组的迭代法, 书面与上机作业
作者: 袁子峰 助理教授 [1]
Email: yuanzifeng@pku.edu.cn
日期: 提交时间不晚于 2025.03.28 下课前 [2]

[1]单位: 北京大学工学院力学与工程科学系
[2]版本: 1.0 [2025.03.14]

题 3.1 (课本第三章习题 1, 有修改) 采用 JACOBI 迭代法与 GAUSS-SEIDEL 迭代法求解下列方程组

$$\begin{cases} 10\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 = 3 \\ -2\,x_1 + 10\,x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2\,x_2 + 5\,x_3 = 10 \end{cases} \tag{P3.1-1}$$

要求: 初值选择 $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, 两种方法均只需要计算至 $\boldsymbol{x}^{(2)}$.

题 3.2 (课本第三章习题 6) 求证用 JACOBI 迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{cases}, \qquad (a_{11}a_{22} \neq 0) \tag{P3.2-1}$$

迭代收敛的充分必要条件是

$$\left|\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right| < 1 \tag{P3.2-2}$$

题 3.3 (课本第三章习题 13, 有修改) 分别采用最速下降法和共轭梯度法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} \tag{P3.3-1}$$

要求: 初值选择 $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, 最速下降法仅需要计算至 $\boldsymbol{x}^{(3)}$, 共轭梯度法仅需要计算至 $\boldsymbol{x}^{(2)}$, 并各自与精确解 $\boldsymbol{x} = [3, 4, -5]^{\mathrm{T}}$ 进行对比.

题 3.4 上机作业

题目说明

考察如下的迭代格式:

$$(1)\begin{cases}\tilde{x}_1^{(k)} = & b_{12}\, x_2^{(k)} + b_{13}\, x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}\, x_n^{(k)} + g_1 \\ \tilde{x}_2^{(k)} = b_{21}\, \tilde{x}_1^{(k)} & + b_{23}\, x_3^{(k)} + \cdots + b_{2n}\, x_n^{(k)} + g_2 \\ \vdots \quad \vdots & \ddots \quad \vdots \\ \tilde{x}_n^{(k)} = b_{n1}\, \tilde{x}_1^{(k)} + b_{n2}\, \tilde{x}_2^{(k)} & + b_{n3}\, \tilde{x}_3^{(k)} + \cdots + g_n\end{cases} \tag{P3.4-1}$$

$$(2)\begin{cases}x_n^{(k+1)} = b_{n1}\, \tilde{x}_1^{(k)} + b_{n2}\, \tilde{x}_2^{(k)} + b_{n3}\, \tilde{x}_3^{(k)} + \cdots & + g_n \\ \vdots \quad \vdots & \ddots \quad \vdots \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}\, \tilde{x}_1^{(k)} & + b_{23}\, x_3^{(k+1)} + \cdots + b_{2n}\, x_n^{(k+1)} + g_2 \\ x_1^{(k+1)} = & b_{12}\, x_2^{(k+1)} + b_{13}\, x_3^{(k+1)} + \cdots + b_{1n}\, x_n^{(k+1)} + g_1\end{cases} \tag{P3.4-2}$$

这里 b_{ij} 与 g_i 的定义为: $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}, \boldsymbol{g} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{b}$, 其中 $\mathbf{A}$ 为线性方程组的系数矩阵, $\mathbf{D}$ 为 $\mathbf{A}$ 对角元素构成的对角矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为右端项. 此外, 可能用到的矩阵表达式还有:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} \tag{P3.4-3}$$

其中 $\mathbf{L} = L_{ij}$ 以及 $\mathbf{U} = U_{ij}$ 定义为:

$$L_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}, \quad U_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases} \tag{P3.4-4}$$

程序要求

从文件中依次读入问题规模 n, 矩阵 $\mathbf{A}$, 右端项 $\boldsymbol{b}$, 分别采用 GAUSS-SEIDAL 迭代法, 以及式. P3.4-1, 式. P3.4-2 所示的迭代法, 计算线性方程组的解 $\boldsymbol{x}$, 并进行迭代效率比较.

为保证计算结果的统一, 迭代法的初值均为 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

迭代收敛采用如下准则:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_2 \leqslant 1.0 \times 10^{-9} \tag{P3.4-5}$$

当 式. P3.4-5 满足时, $k+1$ 的值即为迭代步的数量 (即输出的值).

输入说明

输入 1 第 1 行, 问题规模 n, $2 \leqslant n \leqslant 3200$

输入 2 第 2 至 $n+1$ 行, 每行 n 个数, 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素:

输入 3 第 $n+2$ 行, 包含 n 个数, 为右端项 $\boldsymbol{b}$ 的元素:

具体数据可以参考 `Practical03_sample_input1.dat` 等输入样例文件.

输出说明

屏幕输出.

输出 1 第 1 行, 为 Gauss-Seidal 迭代法的迭代数;

输出 2 第 2 行, 为 Gauss-Seidal 迭代法的结果, 包含 n 个实数.

输出 3 第 3 行, 为式. P3.4-1, 式. P3.4-2 所示的迭代法的迭代数;

输出 4 第 4 行, 为式. P3.4-1, 式. P3.4-2 所示的迭代法的结果, 包含 n 个实数.

以上实数部分要求采用科学记数法输出, 保留 8 位小数:

具体数据可以参考 `Practical03_sample_output1.dat` 等输出样例文件.

报告要求

要求 1 按照迭代形式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}\,\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$, 证明 式. P3.4-1, 式. P3.4-2 所示迭

代法对应的 $\mathbf{M}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 的形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= (\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\\ \boldsymbol{f} &= (\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{g}\end{aligned} \tag{P3.4-6}$$

评分准则

本次上机作业共 10 分, 具体评分标准如下:

针对 $n = 200, 400, 800, 1600, 3200$ 等五个规模的算例, 如果程序得到的解与参考解相对误差在 1% 以内 (用 2-范数计), 即

$$\mathrm{err} \equiv \frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{ref}}\|}{\|\boldsymbol{x}_{\mathrm{ref}}\|} < 1\% \tag{P3.4-7}$$

并且同时两种方法的迭代数与参考值一致, 则判为准确; 每个准确的算例得 1 分. 否则不得分.

报告占 5 分.

源代码命名

```
XXXXXXXXXX_Practical03.cpp
```

xxxxxxxxxx 为学号, 这里后缀 03 表示第三章的意思.