



北京大学 力学与工程科学系

Department of Mechanics and Engineering Science (MES)  
Peking University

# 计算方法 (00330050)

---

## 第 2 讲 解线性方程组的直接法, 书面与上机作业

课程: 计算方法 (ID: 00330050)  
讲义: 第 2 讲 解线性方程组的直接法, 书面与上机作业  
作者: 袁子峰 助理教授<sup>1</sup>  
Email: yuanzifeng@pku.edu.cn  
日期: 提交时间不晚于 2025.03.18 下课前<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>单位: 北京大学工学院力学与工程科学系

<sup>2</sup>版本: 1.0 [2025.03.04]



**题 2.1** 用列主元消去法求解方程组:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{P2.1-1})$$



**题 2.2** 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对称正定矩阵, 证明:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} \equiv \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{P2.2-1})$$

是一个向量范数.



**题 2.3** 考察矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 满足

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j \\ -1 & \text{如果 } i < j \\ 0 & \text{如果 } i > j \end{cases} \quad (\text{P2.3-1})$$

验证  $\text{Cond}(\mathbf{B})_{\infty} = n 2^{n-1}$ .



**题 2.4** 水手 9 号是第一颗人造火星卫星, 在轨 349 天, 传送了 7329 张照片, 第一次揭露了太阳系最高的山--奥林帕斯山的图像 (参考 <https://mars.nasa.gov/gallery/atlas/olympus-mons.html>).

在彼时, 图像通过灰度图进行传送. 每个像素占据 6 个比特位, 可以表示 0 - 63 的灰度值. 由于水手 9 号长距离传输信号时较低的信噪比, 直接传送图像的比特值会导致较大的误差. 一种 HADAMARD 码的编码译码方法有效地改善了这一问题.

HADAMARD 码的一个重要的属性为所谓的 HADAMARD 矩阵, 定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= [1] \\ \mathbf{H}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{n-1} & \mathbf{H}_{n-1} \\ \mathbf{H}_{n-1} & -\mathbf{H}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{P2.4-1})$$

例如

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**证明 1:**  $\mathbf{H}_n$  满足

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_n^T, \quad \mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^T = 2^n \mathbf{I}_{2^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{P2.4-2})$$

这里  $\mathbf{I}_{2^n}$  表示为  $2^n$  阶的单位矩阵.

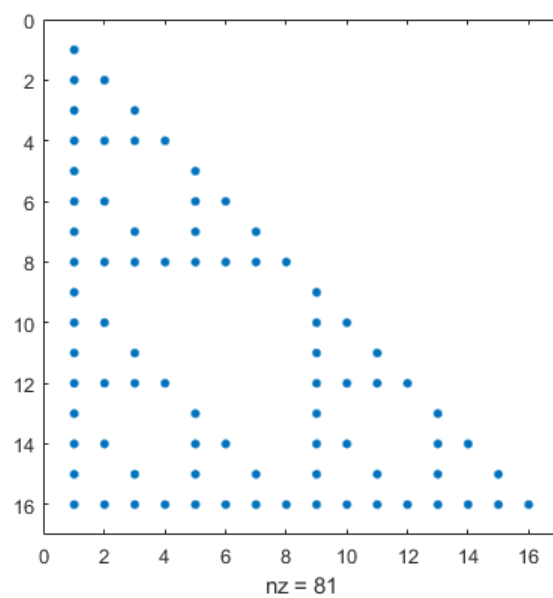
在满足以上性质的条件下, 可以对  $\mathbf{H}_n$  进行  $\text{LDL}^T$  分解, 设其分解可以写成:

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{D}_n \mathbf{L}_n^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{P2.4-3})$$

**证明 2:**  $\mathbf{L}_n$  满足

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= [1] \\ \mathbf{L}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{L}_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{P2.4-4})$$

例如,  $\mathbf{L}_4$  可以表示成 (蓝色圆点处值为 1, 空白处为 0)



并在证明过程中, 计算  $D$  的对角线元素.









## 题 2.5 上机作业 (热身题, 无须作答, 请在课程网查收此题的参考代码)

### 题目说明

给定矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 通过原位存储的方式给出其 LU 分解.

### 程序要求

从文件中依次读入问题规模  $n$ , 矩阵  $A$ , 计算  $A = LU$  的值.

### 输入说明

第 1 行, 问题规模  $n$ ,  $2 \leq n \leq 50$ ,

4

第 2 至  $n + 1$  行, 每行  $n$  个实数, 为矩阵  $A$  的元素:

```
9.157355252E-01 3.571167857E-02 7.577401306E-01 1.711866878E-01
7.922073296E-01 8.491293059E-01 7.431324681E-01 7.060460880E-01
9.594924264E-01 9.339932478E-01 3.922270195E-01 3.183284638E-02
6.557406992E-01 6.787351549E-01 6.554778902E-01 2.769229850E-01
```

### 输出说明

**屏幕**输出.

共  $n$  行, 包含  $n$  个数, 采用原位存储. 要求采用科学记数法输出, 保留 9 位小数:

```
9.157355252E-01 3.571167857E-02 7.577401306E-01 1.711866878E-01
8.651049433E-01 8.182349562E-01 8.760773546E-02 5.579516382E-01
1.047783339E+00 1.095742903E+00 -4.977160191E-01 -7.589052605E-01
7.160808783E-01 7.982581284E-01 -8.627627679E-02 -3.565254795E-01
```

(输出无须对符号进行对齐)



## 题 2.6 上机作业

### 题目说明

### 题目说明

给定**上三角矩阵**  $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 实数  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 以及右端项  $b \in \mathbb{R}^n$ , 定义  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵. 求解线性方程组

$$(S T - \lambda I_n) x = b \quad (\text{P2.6-1})$$

这里我们确保方程有唯一解.

**备注 1** 题目来源: **数值线性代数 (第二版)**, 徐树方, 高立, 张平文著, 北京大学出版社; 第 1 章 习题 2.

### 程序要求

从文件中依次读入问题规模  $n$ , 矩阵  $S, T$ , 实数  $\lambda$ , 右端项  $b$ , 设计算法, 计算  $x$  的值.

### 输入说明

在输入文件, 我们将给出  $S, T$  的所有元素的值, 包括零元素.

第 1 行, 问题规模  $n$ ,  $2 \leq n \leq 3200$ , 与实数  $\lambda$  的值

---

2 0.25

---

第 2 至  $n + 1$  行, 每行  $n$  个数, 为矩阵  $S$  的元素:

---

2.0 1.2  
0.0 3.0

---

第  $n + 2$  至  $2n + 1$  行, 每行  $n$  个数, 为矩阵  $T$  的元素:

---

1.5 0.2  
0.0 0.4

---

第  $2n + 2$  行, 包含  $n$  个数, 为右端项  $b$  的元素:



---

-1.0 1.0

---

## 输出说明

**屏幕**输出.

共 1 行, 包含  $n$  个数, 依次为  $x$  的值. 要求采用科学记数法输出, 保留 9 位小数:

---

-7.004784689E-01 1.052631578E+00

---

## 报告要求

**备注 2** 给出程序的时间复杂度证明.

## 评分准则

本次上机作业共 10 分, 具体评分标准如下:

针对  $n = 200, 400, 800, 1600, 3200$  等五个规模的算例, 如果程序得到的解与 MatLab 参考解相对误差在 1% 以内 (用 2-范数计), 即

$$\text{err} \equiv \frac{\|x - x_{\text{ref}}\|}{\|x_{\text{ref}}\|} < 1\% \quad (\text{P2.6-2})$$

则判为准确; 每个准确的算例得 1 分;

1. 程序的时间复杂度在  $O(n^2)$  以内 (包括  $O(n^2)$ ), 证明准确, 得 5 分;
2. 实际时间复杂度超过  $O(n^2)$ , 但对应的证明准确, 得 2 分;
3. 实际时间复杂度超过  $O(n^2)$ , 且对应的证明有错误, 得 1 分或不得分.

## 源代码命名

---

XXXXXXXXXX\_Practical02.cpp

---

XXXXXXXXXX 为学号, 这里后缀 02 表示第二章的意思.