HW7 报告

苏王捷 2300011075

May 14, 2025

1 报告要求

我选择了自适应 Simpson 积分法来计算 π_p 值。

Simpson 积分公式使用二次多项式近似被积函数，对于区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

这种方法对于平滑函数通常有较好的精度，但对于像题目中 $[u^{1-p} + (1-u)^{1-p}]^{1/p}$ 这样在端点处可能趋于无穷的函数，需要更精细的处理。

因而，我们需要使用自适应 Simpson 积分法，使用递归方式将区间不断细分，直到满足给定的误差容限。具体实现中，我设置了一个小的正数 δ 来避免在奇异点处计算，从而提高了数值稳定性；同时设置了一个 maxDepth 作为递归上限防止无限递归并保证能得到返回的数值结果。

1. 将积分区间 $[a, b]$ 分为两个子区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$，其中 $c = (a + b)/2$；
2. 分别计算这两个子区间的 Simpson 积分值 S_L 和 S_R；
3. 比较 $S_L + S_R$ 与整个区间 $[a, b]$ 的 Simpson 积分值 S 的差异；
4. 如果差异小于给定的误差容限，则使用 $S_L + S_R$ 作为结果；
5. 否则，递归地对子区间应用相同的过程，直到满足给定的误差容限或达到给定的递归上限。
6. 公式中的系数 15 来自于 Simpson 公式的误差分析。当区间减半时，Simpson 公式的误差理论上会减少约 16 倍，所以我们使用 15 作为一个保守的估计。表达式 $(total - whole)/15$ 是一个误差校正项，可以提高积分结果的精度。

此外，我利用了题目提示的对偶性质：当 1/p + 1/q = 1 时，π_p=π_q，将大于 2 的 p 值转换为较小的 q 值进行计算，提高了计算大 p 值时的稳定性和效率。

该实现将积分误差控制在非常小的范围内，保证了计算结果的准确性，满足误差小于 5% 的要求。