苏玉捷 2300011075

1. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}$, $f''(x)=\frac{6}{(1+x)^4}$, $f'(0.5)=-\frac{16}{27}$

① 两点公式 取 $x_0=0.5$, $x_1=0.6$ 则 $f(x_0)=\frac{4}{9}$. $f(x_1)=\frac{25}{64}$

$$\varphi_1(x)=\frac{x-0.6}{0.5-0.6}f(0.5)+\frac{x-0.5}{0.6-0.5}f(0.6)$$

$$\Rightarrow f'(0.5)=\varphi_1'(0.5)=\varphi'(x_0)=\frac{f(0.6)-f(0.5)}{0.6-0.5}=-0.538$$

误差 $|R_1'(0.5)|\le\left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|\le 0.059$

$R_1'(0.5)=f'(0.5)-\varphi_1'(0.5)=-0.055$

② 三点公式 取 $x_0=0.4$, $x_1=0.5$, $x_2=0.6$ 则 $f(x_0)=\frac{25}{49}$, $f(x_1)=\frac{4}{9}$. $f(x_2)=\frac{25}{64}$

$$\varphi_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}f(x_2)$$

$$\Rightarrow f'(0.5)=\varphi_2'(0.5)=\varphi_2'(x_1)=-\frac{1}{2h}f(x_0)+\frac{1}{2h}f(x_2)=-0.598$$

误差 $|R_2'(0.5)|\le\left|\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi)\right|\le 7.9\times10^{-3}$

$R_2'(0.5)=f'(0.5)-\varphi_2'(0.5)=5.4\times10^{-3}$

2. $I=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{1}{e}=0.63212$

① 梯形公式 $x_0=0$. $x_1=1$. $f(x)=e^{-x}\Rightarrow f(x_0)=1$, $f(x_1)=\frac{1}{e}$

则 $I_1=\frac{x_1-x_0}{2}[1+\frac{1}{e}]=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})=0.68394$

误差 $|R_1(f)|\le\left|\frac{1^3}{12}f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}$

$R_1(f)=(1-\frac{1}{e})-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})=-0.05182$

② Simpson 公式 $x_0=0$, $\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{1}{2}$. $x_1=1\Rightarrow f(x_0)=1$, $f(\frac{x_0+x_1}{2})=\frac{1}{\sqrt{e}}$. $f(x_1)=\frac{1}{e}$

则 $I_2=\frac{1}{6}[1+4\times\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{e}]=0.63233$

误差 $|R_2(f)|\le\left|\frac{1^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{1}{2880}=3.47\times10^{-4}$

$R_2(f)=(1-\frac{1}{e})-\frac{1}{6}(1+\frac{4}{\sqrt{e}}+\frac{1}{e})=-2.1\times10^{-4}$

3. ① $f(x)=1\Rightarrow 2h=A_1+A_2+A_3$

② $f(x)=x\Rightarrow 0=-\frac{h}{2}A_1+\frac{h}{2}A_3$

③ $f(x)=x^2\Rightarrow \frac{2}{3}h^3=\frac{h^2}{4}A_1+\frac{h^2}{4}A_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{4}{3}h\\A_2=-\frac{2}{3}h\\A_3=\frac{4}{3}h\end{cases}$$

对 $f(x)=x^3$ 有 $\int_{-h}^{h}f(x)dx=0=A_1f(-h/2)+A_2f(0)+A_3f(h/2)=0$

对 $f(x)=x^4$ 有 $\int_{-h}^{h}f(x)dx=\frac{2}{5}h^5\neq A_1f(-h/2)+A_2f(0)+A_3f(h/2)=\frac{1}{6}h^5$

则具有3次代数精度

4. $l_k(x)=\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$ 有 $l_k(x_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & , i=k\\0 & , i\neq k\end{cases}$ 则

若积分格式 $\int_a^b f(x)dx=\sum_k A_kf(x_k)$ 至少有 $n-1$ 次代数精度 则对任意 $n-1$ 次多项式成立 不妨令 $f(x)=l_j(x)$ 为 $n-1$ 次多项式 则

$$\int_a^b l_j(x)dx=\sum_k A_k l_j(x_k)=A_k\delta_{jk}=A_j\Rightarrow$$

对 $\forall j=1,2,\cdots,n$ 有 $A_j=\int_a^b l_j(x)dx$ 证毕