



北京大学 力学与工程科学系

Department of Mechanics and Engineering Science (MES)
Peking University

计算方法 (00330050)

第 6 章 函数逼近, 书面作业, 上机作业

课程: 计算方法 (ID: 00330050)
讲义: 第 6 章 函数逼近, 书面作业, 上机作业
作者: 袁子峰 助理教授¹
Email: yuanzifeng@pku.edu.cn
日期: 提交时间不晚于 2025.05.13 下课前²

¹单位: 北京大学工学院力学与工程科学系

²版本: 1.0 [2025.04.29]



题 6.1 给定数据表

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	0.333	0.400	0.429	0.444	0.455

用最小二乘法求符合如下表达式的拟合函数:

$$y = \frac{x}{ax + b}$$



题 6.2 采用最小二乘法计算

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 = 10 \end{cases} \quad (\text{P6.2-1})$$

的解.



题 6.3 对如下数据点 (x_i, y_i)

$(1, 5.43), (2, 6.28), (4, 10.32), (6, 14.86), (8, 19.51).$

寻找形如

$$y = \frac{a}{x} + bx \tag{P6.3-1}$$

的最佳平方逼近.



题 6.4 利用前三阶 LEGENDRE 正交多项式计算 $\cos \pi x$ 关于权函数 $\omega(x) = 1$ 在区间 $[-1, +1]$ 的最佳平方逼近.



题 6.5 上机作业

题目说明

考虑 n 次多项式 $p(x)$:

$$p(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n \quad (\text{P6.5-1})$$

现希望构造 $n-1$ 次多项式 $q(x)$:

$$q(x) = d_1x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}x + d_n \quad (\text{P6.5-2})$$

使其在降低计算量的同时, 与 $p(x)$ 的误差足够小.

例如, 对于

$$p(x) = 3x^4 + 5x^3 - x + 1, \quad x \in [-1, +1]$$

对应的 $q(x)$ 为

$$q(x) = 5x^3 + 3x^2 - x + \frac{5}{8}, \quad x \in [-1, +1]$$

又例如

$$\cos x = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{\equiv p(x)} + O(x^8), \quad x \in [-1, +1]$$

可以通过

$$q(x) = \frac{23039}{23040} - \frac{639}{1280}x^2 + \frac{19}{480}x^4, \quad x \in [-1, +1]$$

近似.

一个简单的实现方法为: 将 $p(x)$ 中最高项 x^n 写成 CHEBYSHEV 多项式的和:

$$x^n = c_n T_n(x) + c_{n-2} T_{n-2}(x) + c_{n-4} T_{n-4}(x) + \cdots \quad (\text{P6.5-3})$$

例如

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_2(x) + T_0(x)) \quad (\text{P6.5-4})$$



$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)) \quad (\text{P6.5-5})$$

将式. P6.5-3 代入 式. P6.5-1 后, 删去 $T_n(x)$ 项, 剩下项重新组合, 即得到 $q(x)$ 的形式.

程序要求

计算 式. P6.5-3 中的系数.

输入说明

共 1 行, 为 CHEBYSHEV 多项式的阶数.

输出说明

共 1 行, 依次为 $2^{n-1}c_n, 2^{n-1}c_{n-2}, 2^{n-1}c_{n-4}, \dots$ 的值. 根据理论推导, 这些值为正整数, 因此可以按照正整数方式输出.

样例

输入: 4

输出: 1 4 3

报告要求

要求 1 给出计算过程说明;

要求 2 在报告中给出 $n = 6, 7, 11, 12, 15$ 的结果.

评分准则

本次上机作业共 10 分, 具体评分标准如下:

计算过程准确, 并且与程序实现方式一致, 占 5 分; $n = 6, 7, 11, 12, 15$ 的结果, 每个占 1 分.



源代码命名

XXXXXXXXXX_Practical06.cpp

XXXXXXXXXX 为学号, 这里后缀 06 表示第六章的意思.