

# 流固耦合模型的适应性 POD 降阶方法研究现状

林谢昭,胡振明

(福州大学 机械工程及自动化学院,福建 福州 350108)

**摘要:**复杂流固耦合结构的仿真优化问题是优化领域的一个难题。其庞大的计算成本需要模型降阶技术来解决,介绍了流固耦合降阶过程中本征正交分解方法的原理,总结了几种适应性 POD 方法,简述了适应性降阶模型在流固耦合结构优化问题中的应用情况。

**关键词:**流固耦合;模型降阶;本征正交分解;适应性 ROM

**中图分类号:**TP391.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2017)04-0078-06

## Present Situation of Adaptive POD Method for Fluid-solid Coupling Model

LIN Xiezhao, HU Zhenming

(The College of Mechanical Engineering and Automation Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** Simulation and optimization of complex fluid-solid coupling structure is an important technology in the structure optimization. Its huge computational cost often needs to be solved by the model order reduction technique. In this paper, the proper orthogonal decomposition (POD) method which is often used for the reduction of fluid-solid coupling structure is presented firstly, then, several adaptive POD methods are summarized and the application of adaptive reduced order model (ROM) in fluid-solid coupling structural optimization is introduced.

**Keywords:** fluid-solid coupling; model order reduction; POD; adaptive ROM

## 0 引言

在工程领域中有着广泛应用的流固耦合系统,因其包含了复杂的流体与结构的相互作用,往往具有很强的非线性特性,这增加了模型的仿真分析难度。其优化问题一直是优化设计领域的一个难题。在优化过程中,反复调用高精度、高自由度的全模型进行优化分析需要耗费高昂的计算成本,甚至使得计算不具有可行性。解决这一问题的有效方法就是采用数据拟合模型和物理降阶模型来替代全网格模型。

数据拟合模型也称为代理模型(surrogate model)或黑箱模型,利用系统样本点的输入、输出数据拟合合成的一个计算量较小的数学表达式来替代原来的复杂模型<sup>[1-2]</sup>,此类方法应用在复杂结构优化问题中时,所需的采样点数量也非常庞大,且所建的代理模型与原系统特征参数没有密切相关。物理降阶模型(reduced order model, ROM)是将原系统的控制微分方程投影到一组基函数所构成的子空间中,通过坐标变换,缩减原系统状态向量的维数,减少模型的自由度数目。与响应面法等数据拟合模型相比,物理降阶模型是直接基于原系统的控制微分方程的基础上变换得到的,也就能更准确地表达出复杂结构的某些特性。

在结构力学和流体力学中,常用于物理降阶模型的子

空间基函数类型有:结构无阻尼振型模态和利用本征正交分解方法获得的本征正交模态(POMs)。本征正交分解方法(proper orthogonal decomposition, POD)作为一种最优线性近似方法,直接从系统仿真数据样本中寻求能最佳表达结构主要特征的基模态,与振型模态相比较,POD模态能从系统的响应结果中直接继承原系统的非线性等特性,因此在解决非线性问题时更准确高效<sup>[3]</sup>。但是,POD降阶模型本质上还是一种线性方法,在初始参数配置条件下构建的POD降阶模型能够在小范围的参数空间中对原模型进行准确地模拟仿真,但是当参数有较大变化时,ROM精度会大大失真。因此,对于非线性结构优化过程中,ROM只能在给定的参数域范围内具有足够精度。如果结构参数变化空间较大,就需要重新求解原结构响应,构造ROM。如果优化问题的规模越大,重分析次数就越多。因此,为了能将POD-ROM应用于结构优化问题中,就要克服其局部近似的缺陷。目前,构建具有自适应性的ROMs的重构技术可大致分成插值类方法<sup>[4-6]</sup>和更新基函数类方法<sup>[7-8]</sup>。这些方法使得ROM具有时变特性,提高了ROMs对设计参数变化时的鲁棒性以及仿真精度,可以从全局意义上对原系统的动力学特性进行近似。本文首先简要介绍了传统POD方法,然后结合目前的ROM重构技术,详细介绍了3种适应性POD方法和它们在复杂流固耦合模型中的应用情况。

**基金项目:**国家自然科学基金项目(51205062);福建省自然科学基金项目(2013J01182)

**作者简介:**林谢昭(1971-),男,福建福州人,副教授,博士,研究方向为CAD/CAE,自由度缩减建模及其在优化设计中的应用。

# 1 POD 方法介绍

## 1.1 快照 POD 方法

本征正交分解法(POD)是基于“快照”的思想,从样本数据中提取出一组能最佳充分描述全系统动力学特性的正交基模态来表达系统的主要特性。从结构的动力学瞬态仿真结果中获得数据集  $\{y_i, i=1, \dots, m\}$  ( $y_i \in R^n$ ), POD 方法就是从  $\{y_i\}$  中找到一组正交基  $\{\varphi_j\}$ , 使得快照集合  $\{y_i\}$  在这组基上的投影最大。数学描述为:

$$\max_{\varphi} \sum_{i=1}^m \frac{\langle y_i, \varphi \rangle^2}{\|\varphi\|^2}, \Phi^T \Phi = I \quad (1)$$

式中,  $(\cdot, \cdot)$  表示内积运算;  $\langle \cdot \rangle$  为平均操作符; 向量  $\varphi$  为 POD 正交基, 矩阵  $\Phi$  为 POD 基集合。利用拉格朗日乘子法来分析求解, 可得:

$$(Y Y^H - \lambda I) \Phi = 0 \quad (2)$$

其中,  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  是快照的集合矩阵,  $Y Y^H$  是一个  $n \times n$  阶实对称矩阵, 经典 POD 计算方法直接求解式(2)特征值问题获得特征向量, 即 POD 基模态。但是当空间离散度过大时, 特别是当  $n \gg m$  时, 式(2)是一个规模很大的特征值问题, 求解起来效率较低。

对此, Sirovich<sup>[9]</sup> 提出了快照 POD 方法, 将特征值问题的自由度缩减到  $m$ , 即先求解以下特征值问题:

$$Y^H Y \Phi = \Phi \Lambda \quad (3)$$

然后, POD 基函数集合  $\{\psi_i\}$  可以通过下式求得:

$$\psi_i = Y \Phi_{gi} / \sqrt{\lambda_i} \quad (4)$$

其中,  $\lambda_i = A_{ii}$ , POD 快照方法在解决高自由度问题时, 效率更高。

在获得 POD 基模态之后, 一般要对模态数量进行截断, 以求用最少量的基模态获得最佳的近似效果。通常每个基模态在表达系统信息上的贡献可以通过其对应的特征值来衡量, 假设能取前  $r$  ( $r \ll n$ ) 个基模态时, 其所含“能量”大小占所有基模态“能量”之和的 99.9% 以上, 即:

$$\frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \geq 99.9\% \quad (5)$$

则利用前  $r$  个 POD 基函数就可以构建模型的降阶子空间, 这种截断方法简单有效, 在保证 ROM 近似精度的同时, 减少了 ROM 的计算量。

## 1.2 POD 方法研究概述

POD 方法在不同的学科有着不同的名称, 比如 Karhunen-Loeve 分解(KLD)、主成分分析(PCA)、奇异值分解(SVD)等。文献[10]对于它们之间的等价性做了比较和分析。20 世纪数值仿真技术的快速发展, 为 POD 方法在各领域中的广泛应用提供了可能。Lunley<sup>[11]</sup> 首先将 POD 方法引入到湍流相干结构的研究中, 把 Navier-Stokes 方程投影到 POD 基构建的子空间中, 进而将无限维的流体动力系统变成了低维模型。此后, POD 方法便被广泛应用于复杂流体动力学的研究分析过程中<sup>[12-14]</sup>。

POD 在结构动力学中的应用可以追溯到 20 世纪 90 年代。Liang.Y.C.等<sup>[15]</sup> 结合神经网络方法和 POD 基投影构造了 MEMS 非线性微梁的自由度缩减模型, 并对模型在考虑噪声数据的情况下的响应进行了仿真分析。Jeffrey P.等<sup>[16]</sup> 利用快照技术和 POD 基构造自由度缩减模型对超音速机翼的非定常空气动力学特性进行了仿真分析, 结果表明, 用拥有几十个自由的缩减模型就成功对有近百万自由度的原模型进行了准确的模拟分析。Fitzsimons<sup>[17]</sup> 将 POD 方法用于构造离散系统的低阶模型。Kreuzer 等<sup>[18]</sup> 将 POD 方法应用于控制长杆的自激振动。Hung<sup>[19]</sup> 将 POD 方法引入 MEMS 器件的 ROM 中, 利用快照构建了微开关的流固耦合 ROM。Patrick 等<sup>[20]</sup> 将 POD 方法用于飞机翼型反设计优化过程。此外, POD 方法在气动弹性问题<sup>[21-23]</sup>、结构探伤检测<sup>[24-25]</sup>、结构动态特性分析<sup>[26-28]</sup> 和随机结构动力学<sup>[29-30]</sup> 等方面均有应用。

## 2 适应性 POD 方法

POD 降阶模型在结构的动力学仿真分析中取得了显著的成效, 但其在计算量更大的结构优化设计问题中却不多见, 这主要是因为 POD 降阶模型有局部近似的特点<sup>[4]</sup>。近年来, 研究人员提出了许多适应性 POD 方法来解决这一问题, 从宏观的飞机气动弹性力学领域到微观的微机电(MEMS)领域, 适应性 POD 方法已经广泛应用在了流固耦合模型的优化设计过程中。目前常见的适应性 POD 降阶方法有以下几种。

### 2.1 Gappy POD 方法

#### 1) Gappy POD 基本原理

Gappy POD 方法是一种用于修复含有部分未知数据系统的方法, 在已知某个域上的一系列采样解后, 采用 Gappy POD 方法可以填补该域中的任意状态上的数据缺失的解。Gappy POD 方法最先由 Everson 和 Sirovich<sup>[31]</sup> 提出并用于图像的数据重建<sup>[32]</sup>, 流程缺失数据估计<sup>[33-34]</sup> 等问题中。

在运用 Gappy POD 方法之前, 首先需要定义一个“标签”向量, 用以描述每组数据中每个位置上数据是已知还是缺失。对于解向量  $U^k$ , 相应的“标签”向量  $n^k$  中的元素在数据缺失或不正确时  $n_i^k = 0$ , 数据已知时则  $n_i^k = 1$ , 其中  $n_i^k$  对应于第  $k$  个解向量  $U^k$  中的第  $i$  个元素。定义新的向量点乘形式  $(n^k, U^k)_i = n_i^k U_i^k$ , 则 Gappy 内积可以表示为  $(u, v)_n = [(n, u), (n, v)]$ , 对应范数为  $(\|v\|_n)^2 = (v, v)_n$ 。这样就将每组解向量中的不正确元素置为 0, 便于进一步处理。

假设  $\{\Phi^i\}_{i=1}^m$  是从数据快照集合  $\{U^i\}_{i=1}^m$  中获得的一组 POD 基向量, 用  $g$  表示该组瞬时解域中的某个状态下数据有缺失的解, 其对应的“标签”向量为  $n$ 。则由基修正的过渡向量  $\tilde{g}$  可以由筛选后的  $p$  ( $p < m$ ) 个 POD 基表示为:

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi^i \quad (6)$$

其中  $\alpha_i$  是待求的时间系数, 为了求解时间系数, 原始向量

与修正后的向量直接的误差要最小。该误差定义为:

$$E = \|g - \tilde{g}\|_n^2 \quad (7)$$

根据先前提到的 Gappy 范数形式,式(7)只对解向量  $g$  已有的数据进行误差处理。通过微分求解得到以下方程:

$$M\alpha = f \quad (8)$$

其中,  $M_{ij} = (\Phi^i, \Phi^j)_n$ ,  $f_i = (g, \Phi^i)_n$ 。修正的过渡向量  $\tilde{g}$  在求出  $\alpha_i$  后即可得到。再将  $g$  中的缺失数据由修正的过渡向量中的对应元素代替,即:当  $n_i = 0$  时,  $g_i = \tilde{g}_i$ 。

除了能够对不完整的解向量进行修正之外, Gappy POD 方法也可以对有残缺的数据快照本身进行补充修复。假设有一组不完整快照数据  $\{g^k\}_{k=1}^m$ , 与其关联的标签向量为  $\{n^k\}_{k=1}^m$ 。第一步是重新定义快照数据, 将快照中有缺陷的数据用同位置均值数据替换, 过程如下:

$$h_i^k(0) = \begin{cases} g_i^k, & (n_i^k = 1) \\ \tilde{g}_i, & (n_i^k = 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$\tilde{g}_i = \frac{1}{P_i} \sum_{k=1}^m g_i^k, P_i = \sum_{k=1}^m n_i^k$$

原始快照数据被  $\{h^k\}_{k=1}^m$  重新定义, 其中  $h^k(l)$  表示第  $l$  次迭代过程中的快照向量  $h^k$ 。在获得新的数据快照集合  $\{h^k(l)\}_{k=1}^m$  后, 就可以用 POD 方法生成 POD 基向量  $\{\Phi^k(l)\}_{k=1}^m$ , 选取前  $p$  个 POD 基向量来修复  $\{h^k(l)\}_{k=1}^m$ , 过程如下:

$$h_i^k(l+1) = \begin{cases} h_i^k(l), & (n_i^k = 1) \\ \tilde{h}_i^k(l), & (n_i^k = 0) \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{h}^k(l) = \sum_{i=1}^p b_i^k(l) \Phi^i(l) \quad (11)$$

该过程从  $l=0$  开始迭代, 直到获得的 POD 基向量达到收敛或迭代步数达到设定的最大步数。

## 2) Gappy POD 应用概况

Bui-Thanh 和 Damodaran<sup>[35]</sup> 首次将 Gappy POD 方法用于流场数据填补, 提出了对数据快照的迭代修复方法, 并把这一方法用于翼型的反设计, 采用 Hicks Henne 函数<sup>[36]</sup> 作为翼型表面的扰动变量来产生外形各异的翼型, 再求解这些翼型的流场解, 将翼型的外形参数和流场压力数据整合到快照中, 在给定压力数据的情况下, 对快照中缺失的外形参数进行迭代填补, 从而获得满足压力场要求的翼型外形。

段焰辉<sup>[37]</sup> 将 Gappy POD 方法用于翼型流场分析, 以 NACA0012 为初始翼型, 将迎角在一定范围内变化获得 Snapshot POD 方法的采样解, 使用 Gappy POD 方法对该范围内某一迎角时的流场缺失数据进行填补; 扩展上述方法的扰动变量至翼型的几何外形, 将与初始翼型形状相近翼型的流场解作为缺失数据, 使用 Gappy POD 方法进行填补得到该翼型的近似流场解。结果表明, Gappy POD 方法可以快速求得与初始翼型外形相近翼型的高精度近似流场解。

白俊强等<sup>[38]</sup> 提出了改进型 Gappy POD 方法用于翼型的反设计。在原始方法的基础上, 引入了一种改进的快照生成方法, 用一定数量的扰动外形同时随机扰动初始翼型

的上下表面, 如果该翼型的压力分布与目标压力分布的差异比之前所有已产生的翼型都小, 就用该翼型取代初始扰动翼型, 否则保持初始翼型不变。这种替换采样方法缩小了快照空间与目标快照之间的差距。

## 2.2 子空间主角度插值方法

### 1) 子空间主角度插值方法原理

利用 POD 方法提取的基模态 (POMs) 可以形成系统解空间的最优近似。假设系统的解空间是随着系统参数配置的改变而连续变化的, 那么, 在系统的某一参数配置下构造的 POMs, 可以通过一定的转换方式, 形成另一参数配置下的系统的解空间。

根据以上思路, 引入子空间主角度插值方法<sup>[39-40]</sup>, 其利用了 2 个子空间之间主角度和主向量的概念<sup>[41]</sup>。假设酉空间中 2 个子空间  $M$  (维数  $p$ ) 和  $N$  (维数  $q$ ) 之间的主角度  $\theta_k \in [0, \pi/2]$ ,  $k=1, 2, \dots, q$ , 定义为:

$$\cos \theta_k = \max_{u \in M} \max_{v \in N} u^T v = u_k^T v_k \quad (12)$$

$$\|u\| = 1, \|v\| = 1$$

且对  $j=1, 2, \dots, k-1$ , 有  $u_j^T u_k = 0, v_j^T v_k = 0$ 。  $U = (u_1, \dots, u_q)$  和  $V = (v_1, \dots, v_q)$  称为子空间的主向量,  $V$  形成子空间  $N$  的一个酉基,  $U$  可能需要在补足  $(p-q)$  个酉向量后形成子空间  $M$  的一个完备酉基。主角度  $\theta_k$  可表示一个子空间到另外一个子空间的旋转度量, 那么, 通过主角度间的插值, 就可以求得某个过渡子空间。

结合 POD 方法, 假设  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  分别为 2 个不同参数配置下 ROM 的基模态矩阵, 对矩阵  $\Phi_1^T \Phi_2$  进行奇异值分解:

$$\Phi_1^T \Phi_2 = Y \Sigma Z \quad (13)$$

其中,  $Y$  和  $Z$  分别为奇异值分解的左右正交矩阵, 奇异值对角  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ ,  $1 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0$ , 这一对子空间相关的主角度和主向量可以表示为:

$$\theta_k = \arccos \sigma_k, (k=1, \dots, q), 0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_q \leq \pi/2 \quad (14)$$

$$U = Y \Phi_1, V = Z \Phi_2$$

假设要构造系统参数  $P$  发生变化时候的插值 ROM, 已知系统在  $P_1$  和  $P_2$  参数条件下的 POMs 矩阵分别为  $\Phi_1(P_1)$  和  $\Phi_2(P_2)$ , 要获得  $P_3 (P_1 \leq P_3 \leq P_2)$  参数条件下的 POD 基模态集合  $\Phi_3(P_3)$ , 先线性插值主角度:

$$\tilde{\theta}_k(\Phi_1, \Phi_3) = \frac{P_3 - P_1}{P_2 - P_1} \theta_k(\Phi_1, \Phi_2) \quad (15)$$

根据旋转公式可以获得内插主向量  $w_k$ :

$$w_k = u_k \cos \tilde{\theta}_k + \frac{v_k - (u_k^T v_k) u_k}{\|v_k - (u_k^T v_k) u_k\|_2} \sin \tilde{\theta}_k \quad (16)$$

其中,  $u_k$  和  $v_k$  分别是  $P_1$  和  $P_2$  参数条件下子空间的主向量, 将内插主向量  $W = \{w_1, \dots, w_q\}$  从主向量坐标变换回来, 得到  $P_3$  参数条件下的 POMs:

$$\Phi_3 = WZ \quad (17)$$

### 2) 子空间主角度插值方法应用概况

子空间主角度插值方法最先是 Lieu T<sup>[42]</sup> 提出用于计算气动弹性力学的研究, 该方法能较好地保留正交模态的正交性, 在跨音速区域获得了较好的效果。Lieu T.<sup>[43]</sup>



将其应用在 F-16 战斗机的气动弹性分析过程中。选取自由流马赫数和迎角作为变化参数,利用子空间主角度插值法成功插值构造了特定参数下的 ROM,并用 ROM 预测模型的气动弹性频率和阻尼系数,将其结果同全阶非线性气动弹性模拟和飞行试验数据产生的结果进行比较,验证了该适应性 ROM 的精度。同时,Lieu T. 还指出运用该方法构造适应性 ROM 比运用常规方法快了许多。

子空间主角度插值法作为一种线性插值方法,能够简单快速地构造结构的适应性 ROM,但是美中不足之处是该方法是一种低阶插值方法,在推广到 2 个以上 POD 基时遇到了困难,在参数间隔相距较远的情况下,ROM 精度较差,而当参数间隔相距较近时,其计算效率又很低<sup>[39]</sup>。

## 2.3 EROM 方法

G. Weickun<sup>[7]</sup> 提出的扩展 ROM (Extended-ROM, EROM) 法,是将 POD 降阶方法与 Kirsch<sup>[44-46]</sup> 提出的组合近似法 (combined approximations) 相结合,利用基向量对参数的灵敏度信息快速重组 POD 基,构建适应模型参数变化的适应性 ROM。该方法避免了对全模型进行重分析来获得模型修改后的基函数,提高了重分析效率。

### 1) POD 模态灵敏度

构造 POD-EROM, G. Weickun 首先引入了 POD 模态灵敏度的概念。针对优化系统的设计变量  $p$ , POD 模态对变量  $p$  的灵敏度可以用其一阶导数表示,求解过程如下:

$$\frac{d}{dp}(C - \omega_i^2 I) \varphi_i = 0 \quad (18)$$

$$C = \frac{u^T M u}{N} \quad (19)$$

其中,  $u$  是从系统响应中提取的数据快照矩阵,  $M$  是结构的单位质量矩阵,  $C$  是用快照信息构造的协方差矩阵,  $\omega_i^2$  是特征值,  $\varphi_i$  是特征向量。按照文献<sup>[47-48]</sup> 中的方法对式 (18) 展开求解, 获得  $d\varphi_i/dp$ 。利用前面提到的快照 POD 方法, 即可求得 POD 模态  $\phi$  对参数变量  $p$  的灵敏度, 如下:

$$\psi_i = u \varphi_i \quad (20)$$

$$\frac{d\phi_i}{dp} = \frac{du}{dp} \varphi_i + u \frac{d\varphi_i}{dp} \quad (21)$$

### 2) 组合近似 (CA) 方法

组合近似 (combined approximations, CA) 方法是由 Kirsch 提出的一种快速重分析方法, 能够对基函数快速重组更新。CA 方法已成功应用于线性、非线性、静力学和动力学模型的快速重分析中。其基本原理就是用一组缩减基函数线性表示参数变化后的基向量。

$$\tilde{\phi}_i(p) = y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots + y_n r_n \quad (22)$$

其中,  $y_i$  是待求的常数,  $r_i$  是用于组合近似的基函数。文献<sup>[44-45]</sup> 中均用二项级数展开来定义基函数, 在 EROM 方法中, 将利用 POD 基向量和其一阶导数向量作为 CA 方法的基函数, 如下:

$$\tilde{\phi}_i(p) = y_1 \phi_0 + y_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial p_1} + \cdots + y_{n+1} \frac{\partial \phi_0}{\partial p_n} \quad (23)$$

其中,  $p_i$  为系统的参数变量,  $\phi_0$  为初始参数下的 POD 基

向量,  $\tilde{\phi}_i$  为参数变化后的 POD 基向量。要求得式 (23) 中的常数  $y_i$ , 需要求解以下特征值问题。

$$K_{CA} y = \lambda M_{CA} y \quad (24)$$

其中,  $M_{CA} = r^T M r$ ,  $K_{CA} = r^T K r$ , 矩阵  $M$  和  $K$  分别为系统的质量矩阵和刚度矩阵, 系数向量  $y$  是式 (24) 特征值问题的第 1 列特征向量。

### 3) 多点 EROM

结合上述的 POD 灵敏度和 CA 方法就可以扩展 POD-EROM。式 (23) 是在某一设计点处构造 EROM, 又称单点 EROM。单点 EROM 的精度范围是有限的, 通常要结合信赖域方法<sup>[49]</sup> 才能保证在优化问题中获得全局收敛。为了改善这一问题, G. Weickun 又提出了多点 EROM 方法, 假设对设计空间进行采样获得  $k$  个样本点, 获得数据快照和其响应的 POD 基集合。则多点 EROM 的 POD 基向量可以通过式 (25) 求得。

$$\tilde{\phi}_i(p) = (y_1 \phi_i^{(1)} + \cdots + y_{j+1} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial p_j}) + \cdots + (y_m \phi_i^{(k)} + \cdots + y_{m+j} \frac{\partial \phi_i^{(k)}}{\partial p_j}) \quad (25)$$

上述过程要进行  $k$  次 CA 特征值问题的求解以获得所有的系数  $y$ 。实际优化过程中, 设计空间较大时, 所需样本点的数目要足够大才能保证 EROM 的精度。所以多点 EROM 适合设计空间不太大的优化问题。

### 4) POD-EROM 应用概况

M. Allen 等<sup>[50]</sup> 首次提出了利用 CA 方法构造 EROM, 用于一个双孔连杆的结构优化和参数随机性优化分析。M. Allen 分别介绍了结构的无阻尼振型模态和 POD 两种模态基函数的特点, 针对连杆的线弹性特性, 选用了结构的无阻尼振型模态作为 ROM 的基函数。在对基函数进行了灵敏度分析后, 结合 CA 方法构造单点 EROM。然后选取连杆 2 个内孔的半径作为设计参数, 将连杆在受拉力载荷作用下耗散的能量作为优化目标, 对连杆进行了确定性优化设计。结果表明, 使用单点 EROM 的优化结果和使用全模型进行优化的结果相差无几, 但是单点 EROM 的效率还有待提高。

G. Weickun<sup>[7]</sup> 在 M. Allen 的基础上, 提出了多点 EROM 方法, 并将其用于 MEMS 微谐振器的优化设计, MEMS 微谐振器是静电-结构-流体耦合器件, 具有较强的非线性特性, 其中谐振器微梁下方的空气挤压膜阻尼对微器件的品质因子有很大的影响, 在微器件的设计过程中要充分考虑。G. Weickun<sup>[51]</sup> 以微谐振梁的长度和厚度作为几何变化参数, 在给定电压激励下, 寻求微梁的最大振幅。研究表明, 用 3 个样本点构造的 POD-EROM 就能对微梁的设计空间准确近似, 大大缩减了器件优化分析过程的计算量。

随后, G. Weickun 又对该方法进行了一些改进<sup>[52]</sup>, 在求取 CA 基函数系数  $y$  的过程中, 不仅只取第一列特征向量, 而是选取所有特征向量作为 CA 基函数系数矩阵来构造新的 POD 基, 以获得更多的特征信息。这种扩展方式使 POD 基数量大大增多, 为了提高 EROM 质量, G. Weickun 引入了瑞利-里茨截断方法对 POD 基进行筛选, 筛选后的 POD 基函数更全面地表达了结构参数的变化特征, 优化结果与全模型对比, 更加接近。

### 3 结语

POD-ROM 本质上的线性特性阻碍了其在参数空间变化较大的优化问题中的应用。采用适应性 POD 方法能够大幅降低构造 ROMs 的计算费用,使得 ROMs 能够在整个参数优化空间内都具有相当的计算精度。在 3 种常用的构造适应性 POD-ROM 方法中,Gappy POD 方法是一种数据填补技术,利用已知数据来构造出未知参数处的 ROM,在气动弹性领域应用广泛。但是 Gappy POD 方法的数据填补对缺失的数据量有很大限制。子空间主角度插值方法是一种线性空间插值方法,利用酉空间主角度和主向量的原理,对 2 个不同参数条件下的 ROM 进行插值获得中间参数的 ROM。其在非线性耦合结构中的成功应用证明了该方法的效率和精确度,但是该方法不能应对结构较大的参数变化;EROM 方法是利用基函数快速更新技术的 ROM 方法,将 POD 模态灵敏度和 CA 方法结合构造 EROM,ROM 的适应性强,该方法所需计算量稍大,还需研究更高效的算法。

#### 参考文献:

- [1] KNILL D L, GIUNTA AA, BAKER C A. Response surface models combining linear and Euler aerodynamics for supersonic transport design[J]. Aircraft, 1999, 36(1): 75-86.
- [2] 熊俊涛, 乔志德, 韩忠华. 基于响应面法的跨声速机翼气动优化设计[J]. 航空学报, 2006, 27(3): 399-403.
- [3] 蒋耀林. 模型降阶方法[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [4] Amsallem D, Farhat C. Interpolation Method for Adapting Reduced-Order Models and Application to Aeroelasticity[J]. AIAA Journal, 2012, 46(7): 1803-1813.
- [5] Murray N E, Ukeiley L S. An application of Gappy POD[J]. Experiments in Fluids, 2007, 42(1): 79-91.
- [6] Lieu, T., Farhat, C. and Lesoinne, M., POD-based Aeroelastic Analysis of a Complete F-16 Configuration: ROM Adaptation and Demonstration[J]. AIAA Paper, 2005: 2295-2300.
- [7] G. Weickum, M. Eldred and K. Maute, Multi-point Extended Reduced Order Modeling For Design Optimization and Uncertainty Analysis [C]. AIAA Paper 2006-2145, 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport, RI, May, 2006.
- [8] Kirsch, U. Combined approximations—a general reanalysis approach for structural optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2000, 20(2): 97-106.
- [9] Sirovich L. Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures: Part I. Coherent Structures [J]. Quart. Appl. Math. 1987(11): 1250-1280.
- [10] Liang Y. C., Lin W. Z., Lee H. P., et al. Proper orthogonal decomposition and its applications Part I: theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(3): 527-544.
- [11] HOLMES P., LUMLEY J., BERKOOZ G. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998: 86-127.
- [12] Ravindran, S. Proper Orthogonal Decomposition in Optimal Control of Fluids [J]. Tech. rep., NASA TM, 1999: 209-213.
- [13] Thomas, J., Dowell, E., and Hall, K., Three-Dimensional Transonic Aeroelasticity Using Proper Orthogonal Decomposition Based Reduced Order Models [J]. Journal of Aircraft, 2012, 40(40): 544-551.
- [14] Willcox, K. and Peraire, J. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition [J]. AIAA 2001-2611. 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, 2001(6): 11-14.
- [15] Liang, Y. C., Lin, W. Z., Lee, H. P., Lim, S. P., Lee, K. H., and Sun, H., Proper orthogonal decomposition and its applications, Part II: Model reduction for MEMS dynamical analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 256: 515-532.
- [16] Thomas, J. P., Dowell, E. H., and Hall, K. C. Three-Dimensional Transonic Aeroelasticity Using Proper Orthogonal Decomposition-Based Reduced-Order Models [J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(3): 551-556.
- [17] Fitzsimons, P. M. and Rui, C., Determining low dimensional models of distributed systems [D]. in Advances in Robust and Nonlinear Control Systems, ASME DSC 53, 1993.
- [18] Kreuzer, E. and Kust, O., Analysis of long torsional strings by proper orthogonal decomposition [J]. Archive of Applied Mechanics, 1996, 67: 68-80.
- [19] Hung E. S., Generating efficient dynamical models for micro-electro-mechanical systems from a few finite-element simulations runs [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 1999, 8: 280-289.
- [20] Patrick, A., Legresley, P., Alonso, J. Airfoil design optimization using reduced order models based on proper orthogonal decomposition [J]. AIAA, 2000, 18: 120-128.
- [21] Benguedouar, A., Proper Orthogonal Decomposition in Dynamical Modeling: A Qualitative Dynamic Approach [D]. Ph.D. thesis, Boston University, Boston, MA, 1995.
- [22] Epureanu, B. I., Tang, L. S., and Paidoussis, M. P., Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2004, 39: 977-991.
- [23] Legresley, P. and Alonso, J. Investigation of nonlinear projection for POD based reduced order models for aerodynamics [C]. AIAA, 39th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 8-11, 2001(10): 167-173.
- [24] DeBoe, P. and Golinval, J. C. Principal component analysis of a piezo-sensor array for damage localization [J]. Structural Health Monitoring, 2003(2): 137-152.
- [25] Feldmann, U., Kreuzer, E., and Pinto, F., Dynamic diagnosis of railway tracks by means of the Karhunen-Loeve transformation [J]. Nonlinear Dynamics, 2000, 22: 183-193.
- [26] Georgiou, I. T. and Schwartz, I. B., Dynamics of large scale coupled structural-mechanical systems: A singular perturbation proper orthogonal decomposition approach [J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1999, 59: 1178-1207.
- [27] Kappagant, R. and Feeny, B. F., Part 2: Proper orthogonal modal modeling of a frictionally excited beam [J]. Nonlinear Dynamics, 2000, 23: 1-11.
- [28] Rega, G. and Alaggio, R., Spatio-temporal dimensionality in the overall complex dynamics of an experimental cable/mass system [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38: 2049-2068.
- [29] Ghanem, R. and Spanos, P., Stochastic Finite Elements: A

- Spectral Approach[J]. Springer, Heidelberg, Germany, 1991, 12:110-118.
- [30] Schenk, C. A. and Schueller, G. I., Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2003(38):1119-1132.
- [31] Everson, R. and Sirovich, L., The Karhunen-Loeve Procedure for Gappy Data[J]. Journal of the Optical Society of American, 1995, 12:1657-1664.
- [32] Kirby M., Sirovich L. Application of the karhunen-loeve procedure for the characterization of human faces [J]. Proc. IEEE, 1990, 12(1):103-108.
- [33] Nathan. E. M., Lawrence. S. U. An application of gappy POD for subsonic cavity flow PIV data[J]. Experiments in Fluids, 2007, 42(1):79-91.
- [34] Daniele. V., Georg. E. K. Gappy data and reconstruction procedures for flow past a cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2004, 519:315-336.
- [35] Bui-Thanh T., Damodaran M., Willcox K. Aerodynamic data reconstruction and inverse design using proper orthogonal decomposition[J]. AIAA Journal, 2004, 42(8):1501-1516.
- [36] Hicks, R., and Henne, P., Wing Design by Numerical Optimization[J]. Journal of Aircraft, 1978, 15:407-412.
- [37] 段焰辉, 蔡晋生. 基于 Gappy POD 方法的翼型流场分析[J]. 航空工程进展, 2010, 1(1):40-44.
- [38] 白俊强, 邱亚松, 华俊. 改进型 Gappy POD 翼型反设计方法[J]. 航空学报, 2013, 34(4):762-771.
- [39] Lieu, T. and Lesoinne, M., Parameter Adaptation of Reduced Order Models for Three-Dimensional Flutter Analysis[C]//AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2004, 16(4):929-955.
- [40] Lieu, T. and Farhat, C., Adaptation of Aeroelastic Reduced-Order Models and Application to an F-16 Configuration, [J]. AIAA Journal, 2007, 45:1244-1257.
- [41] Björck, Å., and Golub, G. H., Numerical Methods for Computing Angles Between Linear Subspaces[J]. Mathematics of Computation, 1973, 27:579-594.
- [42] Lieu T. POD-based Aeroelastic Analysis of a Complete F-16 Configuration: ROM Adaptation and Demonstration[J]. Aiaa Journal, 2000, 15:379-484.
- [43] Lieu, T. and Farhat, C., Adaptation of POD-based Aeroelastic ROMs for Varying Mach Number and Angle of Attack: Application to a Complete F-16 Configuration[J]. Chinese Journal of Medical Library, 2006, 386:76-86.
- [44] Kirsch, U. A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2002, 25(1): 67-85.
- [45] Kirsch, U. Approximate vibration reanalysis of structures [J]. AIAA Journal, 2003, 41(3): 504-511.
- [46] Kirsch, U. Exact and accurate solutions in the approximate reanalysis of structures [J]. AIAA Journal, 2001, 39(11): 2198-2205.
- [47] Adelman, H. and Haftka, R. Sensitivity analysis of discrete structural systems [J]. AIAA Journal, 1986, 24: 823-832.
- [48] Dailey, R., Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. [J] AIAA Journal, 1989, 27: 486-491.
- [49] Giunta, A. and Eldred, M., Implementation Of A Trust Region Model Management Strategy in the DAKOTA Optimization Toolkit [C]. Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA, AIAA/USA/NASA/ISSMO, September 2000.
- [50] M. Allen, G. W. and Maute, K., Application of Reduced Order Models for the Stochastic Design Optimization of Dynamic Systems [C]. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, AIAA/ISSMO, 2004.
- [51] Gary G. Weickum. Design Optimization Using Reduced Order Modeling. [D]. University of Colorado, 2005.
- [52] Gary G. Weickum, Reduced Order Models for Design Optimization Under Uncertainty. [D]. University of Colorado, 2009.

收稿日期: 2015-10-29

(上接第 42 页)

通过对齿轮副进行测绘, 所得的基本参数见表 2。

表 2 测绘实例

齿数 $z$	小轮 29	大轮 35
齿制	格里森弧线收缩齿	
螺旋角 $\beta/(\circ)$	35	
刀具齿形角 $\alpha/(\circ)$	22.5	

## 4 结语

本文介绍的测量方法可以针对格里森制弧齿锥齿轮

进行测绘。经过实际应用证明该方法能够较为精确地测量出齿轮的固件参数, 为仿制和设计提供较好的帮助。

参考文献:

- [1] 北京齿轮厂. 螺旋锥齿轮[M]. 北京: 科学出版社, 1974.
- [2] 齿轮手册编委会. 齿轮手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [3] 朱孝录. 齿轮传动设计手册[M]. 北京: 化学工业出版社, 2010.
- [4] 肖石林. 渐开线齿轮在 CATIA 中的三维参数化建模与应用[J]. 起重运输机械, 2004(10): 19-21.
- [5] The Gleason Works. Calculating instructions format spiral bevel gears[M]. New York: Gleason Work, 1971.

收稿日期: 2015-11-23