

基于POD-TPWL的降阶地下流动模型的约束约简过程

J. 他*, † 还有L.J.杜洛夫斯基

斯坦福大学能源资源工程系, 斯坦福, CA94305, 美国

总结

评价了基于轨迹分段线性化(TPWL)和适当正交分解(POD)的降阶模型的性质和数值性能。目标应用是地下流建模, 尽管我们的发现应该适用于一系列问题。描述了POD-TPWL过程中每一步出现的错误。详细考虑了约束缩减对精度和稳定性的影响。约束约简需要将超定系统投影到一个低维子空间中, 其中系统是可解的。导出了约束约简的最优条件, 即误差最小化。Galerkin和Petrov-Galerkin投影被证明与涉及Jacobian矩阵加权的规范中的最优性相对应。提出了逆投影和加权逆投影两种新的处理方法。这些方法在适当的规范中最小化错误, 尽管它们需要大量的预处理计算。给出了油藏模拟问题的数值结果。Galerkin投影为更简单的油水系统提供了合理的精度, 尽管在更具挑战性的情况下它变得不稳定。观察到Petrov-Galerkin投影在所有考虑的情况下都表现稳定。加权逆投影性能稳定, 精度最高。使用这些POD-TPWL模型实现150-400的运行速度。版权 ©2015年约翰威利和儿子有限公司。

2014年3月14日收到; 2014年11月25日修订; 2014年12月19日接受

关键词: 降阶模型; 适当的正交分解; POD; 轨迹分段线性化; TPWL; 储层模拟; 地下流; 模型阶约简; 稳定性; 代理模型; 代理模型

1. 引言

非线性问题降阶建模程序的发展是许多应用领域的一个重要课题。本文所考虑的问题和方法与广泛的问题有关, 尽管我们这里的重点是地下水流建模-特别是油藏模拟。在这种情况下, 详细的基于有限体积的流动模拟器, 它跟踪多个组分在多个阶段通过多孔地下地层的运动, 通常被用来模拟石油和天然气的生产。这一领域的重要应用, 如生产优化、不确定性评估和数据同化, 需要大量的模拟运行。这些应用程序, 就像其他工程领域的许多应用程序一样, 使用标准的全阶模拟在计算上要求非常高, 并且它们可以从使用快速、准确和健壮的降阶模型(ROM)中获益匪浅。

本质上, 本工作中考虑的ROM包括三个关键组成部分: 状态约简、非线性处理和约束约简。状态约简需要用一个集合表示全阶状态 (即模型中所有网格块中的状态变量向量)

*更正: J. 他, 雪佛龙能源技术公司, 路易斯安那州大街1500号, 休斯顿, 德克萨斯州77002, 美国。

† 电子邮件: n ervhjc@gmail.com

减少的变量。非线性处理涉及非线性效应的近似表示.. 方法包括构造近似/约简非线性项或雅可比矩阵和/或使用某种类型的(分段)线性化过程。约束约简是本工作的重点, 因为在引入状态约简后, 方程比未知数多得多。它是约束约简矩阵, 定义了原始系统的残差被驱动到零的低维子空间。正如我们将看到的, 这个矩阵的选择会对产生的ROM的准确性和稳定性产生很大的影响.. 状态约简的使用基于一个假设, 即全阶系统的状态向量本质上位于一个较低维子空间。这通常是一个合理的假设, 因为可能出现的状态是通过初始条件和系统动力学来定义的, 它们不是无限可变的。利用这个假设, 可以构造子空间的一个基础, 它将全阶(高保真)状态投影到一个低阶表示中。在许多ROM过程中, 包括这里考虑的过程中, 状态约简基矩阵 \tilde{V} 是通过使用适当的正交分解(POD)来构造的。使用这种方法, 首先构造一个数据矩阵, 其中包含在“训练”模拟期间计算的列“快照”(解决方案向量)。数据矩阵奇异值分解的左奇异向量定义了基矩阵 \tilde{V} 的列。[1-5], 6, 7]. 基于POD的ROM已被用于许多应用领域, 包括地下流动模拟[其他方法, 如平衡截断[8-10] [11-14], 克里洛夫子空间方法也得到了成功的应用。

状态约简过程减少了动态模拟中每个时间步骤必须确定的未知数的数量。然而, 对于非线性时变问题, 仅通过使用状态约简实现的加速通常是相当温和的。具体来说, 对于储层模拟问题, 使用这种方法至少实现了10个加速因子]。[6, 7 这是因为一些降阶计算具有与全阶问题的维数相称的计算复杂度。如果这样的计算是在每个时间步骤的每个(非线性)迭代中执行的, 就像[观察到的加速将受到限制的情况一样。6, 7], 提出了各种处理方法来进一步加速非线性问题的ROM。其中包括离散经验插值法(DEIM)和轨迹分段线性化(TPWL)。[15, 16], 首先由Chaturantabut和Sorensen提出的DEIM使用经验导出的基础来降低控制偏微分方程(PDE)中非线性函数的维数。在内联(运行时)阶段, 通过只涉及少量网格块的计算来确定降阶非线性函数, 这大大减少了内联计算需求。

Carlberg等人 [17]进一步扩展了从牛顿方法的应用中得到的非线性代数系统的处理方法。

他们应用压缩张量近似来实现约简雅可比矩阵的快速构造, 然后在内联计算中使用。

[16-18], DEIM已成功地应用于不同的应用程序, 尽管它的实现确实需要在内联处理期间在特定网格块上评估非线性项。这对于全阶模拟器来说是侵入性的, 这可能会给DEIM与通用油藏模拟器的使用带来问题。[19], 最后, 我们注意到, 一个原型DEIM程序已经开发了储层流动, 尽管只有小的二维模型到目前为止已经被考虑过了。

[20], 轨迹分段线性化, 由Rewienski和White提出, 通过在先前模拟的(训练)解周围构造局部(分段)线性化来处理非线性。因为新的(测试)运行需要围绕训练“点”进行线性化, 所以订单减少计算都可以脱机执行(即在预处理步骤中)。因此, 内联计算只涉及低维线性解。TPWL已与POD相结合, 应用于一些地下水流问题。[21-23], [24], [25], 26]. 这些包括油水模型理想化的热模拟案例组成系统和基于集成的数据同化[构造用于储层模拟问题的POD-TPWL模型需要预处理(离线)计算, 相当于大约三到四个全阶模拟, 尽管在前面提到的研究中报告了200-1000的运行时速度。

如前所述, 约束减少需要将超定系统投影到一个低维子空间中, 其中残差被驱动到零。这个子空间是由约束约简矩阵定义的。用于基于Krylov子空间或平衡截断的ROM

27, 28], 29]. (包括平衡POD[其中POD用于平衡截断方法中的Gramians近似), 从理论上提供了适当的约束约简矩阵[对于基于POD的方法, 没有明确的选择, 并且使用了不同的方法。

在储层模拟的初始POD-TPWL方法中[应用了一种Galerkin投影方案, 其中 $\hat{\cdot}$ 是降维矩阵)。21], [30], [23], 然而, 如该方法所示, 在某些情况下会导致数值稳定性问题。[23], 在一个过程中, 设计了一个程序来选择 $\hat{\cdot}$ 中的列, 以提高系统的稳定性。这种方法在考虑的油水情况下表现良好, 但不能保证稳定性。邦德和丹尼尔[提出了约束约简矩阵通过满足李雅普诺夫稳定性准则来保证约简系统的稳定性。31] 然而, 如果只考虑稳定性, ROM可能是不准确的。如果还考虑精度, 则必须解决矩阵优化问题才能获得最优的 $\delta\delta$, 这对于大型系统来说是非常昂贵的。最近, Carlberg等人将Petrov-Galerkin投影方案用于基于POD的DEIM。[17]。这种方法以合理的计算成本提供了数值稳定性(尽管稳定性仍然没有保证)。[32] [25] 采用Petrov-Galerkin方法进行线性模型简化, 最近用于POD-TPWL组成储层模拟。然而, 这种方法还没有在POD-TPWL的背景下进行系统的研究。

在本工作中, 我们评估了POD-TPWL模型各种约束约简处理的准确性和稳定性。所提出的方法应该与POD-TPWL程序在一系列应用领域相关, 尽管我们的实现和数值结果是针对地下流动问题的。在简要评估了状态约简和线性化引起的POD-TPWL误差后, 我们讨论了几种约束约简过程的特点。给出了基于误差最小化的优化条件。所考虑的方法包括Galerkin投影、Petrov-Galerkin投影和两种新方法, 逆投影(IP)和加权IP(WIP)。我们还为POD-TPWL模型提供了线性稳定性准则.. 比较了不同约束还原过程的数值精度和稳定性。我们的结果证明了不同方法的相对优势, 并为今后的研究提出了方向。

2 本文进行如下研究。在这一部分中, 我们简要地讨论了本工作中针对的储层模拟问题。在这一部分中, 导出了POD-TPWL模型, 并讨论了每一步产生的误差。3456 在节中推导了最优约束约简过程, 并在节中讨论了稳定性要求。在这一部分中, 详细研究了Galerkin投影和Petrov-Galerkin投影在三个测试用例中的性能。两种新的约束减少方法, IP和WIP, 是在章节中开发的。还给出了这些方法的数值结果。7 本节概述了我们的调查结果和对未来工作的建议。8

2. 问题描述

我们在这里的具体兴趣是模拟油水和油气组成系统。油水系统通常用于模拟注水驱动的采油(称为水驱), 而组成系统用于模拟增强的采油过程, 这通常涉及注入气体以及CO₂存储操作。我们这里的描述很简短; 有关更多细节, 请参阅, 例如, [21, 29, 33–37].

油水系统的控制方程由油水质量守恒声明组成, 结合达西定律, 将每个流体相的流动与压力梯度联系起来。这些方程包括积累、通量和源/汇项, 可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_j \phi_j p_j S_j^\sigma - \mathbf{r} \cdot \sum_j \sigma_j \mathbf{p}_j \mathbf{h}_j \mathbf{k}_j^\cdot - \sum_j GR D_j^\sigma C_j q^\omega D_0; j D_0; w; \quad (1)$$

其中下标j指定流体相(o表示油和w水)。这里, t是时间, ϕ 是孔隙度(孔隙空间的体积分数), p_j 是相密度, S_j 是相饱和度(孔隙空间内j相的体积分数), h_j 相位迁移率(通常是S的非线性函数) f_j 它是绝对渗透率张量(k本质上是流动电导率, 是岩石的性质), p_j 是相压, g是重力加速度, D是深度, Q^w是源/汇项(上标w表示此项由井驱动)。系统通过添加饱和约束($S_o + S_w = 1$)和毛细管压力关系($p_c = p_o - p_w$)。方程中的主要未知数(通常被认为是油相压力 p_o)和水相饱和 S_w 。其他数量(p_w 和 S_o)可以很容易地按块计算一次 p_o 和 S_w 是确定的。[21] 有关POD-TPWL背景下的油水问题公式的更多细节, 请参阅。1) 请注意, 方程形式的方程(出现在许多涉及流动和运输的问题中)。

对于组合系统, 我们总共跟踪 n_c 组件(而不是油水系统中的两个组件)。1), 油气组成系统的控制方程类似于方程(因为它们包含每个组分的质量守恒声明和每个相的达西定律, 尽管它们由于组分在油气相中的划分而变得复杂。因此, 还需要每个组分的相平衡方程来确定每个组分在每个阶段的分数。对于具有n的等温组成系统 n_c 组件分为两个阶段, 总共有 $2n_c$ [25]。每个网格块中的4个未知变量[实际系统通常用4-10个组件建模, 因此对大型模型的计算需求可能很大。

然而, 在组合模型中, 只有 n_c 主要方程和 n_c 每个网格块的主要未知数。这组方程必须作为一个完全耦合的系统求解。剩下的 n_c 4个未知数解耦, 可以逐块求解。 N_c 主要方程通常是质量守恒方程 各种选择 n [34,35,37]。主要变量是可能的。最常见的是所谓的自然公式, 其中主要变量由油相压力 p_o 和 c 相相关变量(如气相中组分c的摩尔分数)。然而, 当相位消失时, 自然公式需要变量切换。这在降阶建模的背景下引入了并发症, 因为ROM过程在测试和训练模拟中处理相同类型的变量要简单得多。因此, 我们应用不太常用的摩尔公式[其中主要变量是 p 37], p_o 和 c 一个整体摩尔分数。在所有网格块中, 这些量在任何时候都有很好的定义, 因此不需要变量切换。

对于油水和组成问题, 控制方程和详细的离散化是不同的。然而, 对于包括这些问题在内的广泛问题, 完全隐式离散表示可以写成以下形式的非线性代数方程组:

$$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{D} \mathbf{g}^n + \mathbf{F}(\mathbf{x}^{n+1}; \mathbf{u}; \mathbf{p}^{n+1}) \quad (2)$$

这里, g是我们寻求驱动到零的残差向量, n和n+1表示时间级别, u是控制参数的集合, x指定状态向量(每个网格块中的主要变量)。我们表示网格块的数目为 n_b 。状态向量x的维数(即主变量的总数)为 n_v 。在油水系统中, x包含油压p(从这里开始, 我们用p代替 p_o)和水饱和度 w 在每个网格块中, 所以 $n_v = 2n_b$ 。在组成系统中, x包含压力p和总摩尔分数, 指定为 c 例如: c 1个组成部分。在这种情况下, $n_v = n_c n_b$ 。在方程(u)中, 是驱动采油过程的指定控制参数的集合。这些压力被认为是注入井或生产井的压力(称为井底压力或BHPs), 尽管它们也可以是注入或生产流量。在这两种情况下, 这些术语都是通过控制方程中的源项输入的(例如, q^w在方程中(从而强烈地影响数值解。1)) 在所有情况下, \mathbf{x}^n 从上一个时间步骤或初始条件知道, 目标是计算 \mathbf{x}^{n+1} 。

在全阶模拟中, 方程 (用牛顿法求解) .. 2) 这需要在每次迭代时求解高维线性系统.

$$\mathbf{J}\mathbf{d} = \mathbf{g}; \quad (3)$$

其中J是Jacobian矩阵, 由J给出 \mathbf{d} 按 \mathbf{x} 的当前估计进行评估 \mathbf{g}^{n+1} 和 $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{d}$. \mathbf{v} 是更新向量, 其中 \mathbf{v} 指定迭代。收敛一旦达到 \mathbf{g} 的适当范数 $\|\mathbf{g}\|$ 小于指定的公差, 然后将解状态指定为 \mathbf{x}^{n+1} .

对于实际的储层模拟问题, $n \approx 10^4$ 到 10^6 。此外, 方程的高度非线性(可以导致大量的牛顿迭代, 小的时间步长, 和频繁的时间步长削减。2) 非线性和高维性的结合导致了非常大的计算需求, 特别是当必须进行数千或数万次模拟时, 生产优化计算可能是如此。我们现在描述的POD-TPWL方法可以提供一个更有效(尽管近似)的方程(2).

3. 吊舱-tpwl模型与误差评估

在本节中, 我们将考虑适用于广泛系统的一般POD-TPWL模型。我们将评估在POD-TPWL过程的每一步发生的错误。其中包括线性化误差、状态约简误差、约束约简误差和从上一个时间步骤传播的误差(这与稳定性有关)。这一讨论的大多数方面都是相当笼统的, 尽管有些是针对正在考虑的特定模型和流体系统的。21, 23] [25] 详细的推导POD-TPWL模型的油水[和组成系统已经提出, 并应咨询更多的细节。

一些调查人员分析了ROM中的错误。[38], 例如, Rathinam和Petzold对基于POD的降阶常微分方程(ODE)系统进行了误差分析。39] Chaturantabut和Sorensen[提供了基于POD-DEIM的非线性模型约简的状态空间误差估计。我们在这里的讨论将集中在POD-TPWL上。

2)) 在下面的讨论中, POD-TPWL方程是从原始方程组(方程(通过引入一系列近似)导出的。与不同近似水平相关的解将表示 $\mathbf{x}^{n, \ell}$ ($\ell = 1; 2; 3; 4$) 随着 ℓ 的增加, 表示一个更近似的解。与此相一致, 我们表示全套非线性代数方程(方程(如 \mathbf{x})的精确解 $\mathbf{x}^{n, \infty}$ 。包含线性化误差的解称为 $\mathbf{x}^{n, 1}$ 包含线性化误差和状态约简误差的解表示 $\mathbf{x}^{n, 2}$ 包含线性化、 $\mathbf{x}^{n, 2}$ 状态约简和约束约简误差的解被指定为 $\mathbf{x}^{n, 3}$ 并且包含所有这些错误加上从上一个时间步骤传播的错误的解决方案被表示为 $\mathbf{x}^{n, 4}$.

4

3.1. 轨迹分段线性化

为了构造POD-TPWL模型, 我们必须首先对一些特定的控制参数进行一个或多个全阶“训练”模拟, 我们指定 $\mathbf{u}^{i, 1}$ 。这对应于生成以下方程的解:

$$\mathbf{g}^{i, 1} = \mathbf{D} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}^{i, 1}; \quad i = 1, \dots, I/D0; \quad I/D0; \quad \ell = 1; \quad (4)$$

的地方 ℓ 是时间步骤的数量。请注意, 我们使用上标 i 和 $i1$ 来表示训练模拟中的顺序‘点’(在时间上); 即 $\mathbf{x}^{i, 1}$ 和 $\mathbf{x}^{i1, 1}$ 是训练模拟在时间步骤 I 和 $I1$ 的解。

为了构造一组新控件(指定的 \mathbf{u})的解决方案 $\mathbf{x}^{n, 2}$, 而不是用牛顿法迭代求解方程, 而是表示新的残差向量 $\mathbf{g}^{n, 2}$

就泰勒系列的扩展而言，围绕训练解决方案。我们将新的模拟称为“测试”模拟。忽略高阶项，我们写。

$$\mathbf{g}^n_{C1} = \mathbf{g}^i_{C1} + \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{x}^i_{C1}} \mathbf{x}^n_{C1} - \mathbf{x}^i_{C1} \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{x}^i_{C1}} \mathbf{x}^i_{C1} + \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{u}^i_{C1}} \mathbf{u}^n_{C1} - \mathbf{u}^i_{C1} \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{u}^i_{C1}} \mathbf{u}^i_{C1}; \quad (5)$$

给你， \mathbf{x}^n 指示测试模拟中前一个时间级别的解， \mathbf{x}^n_{C1} 指示我们希望计算的测试解决方案，以及 \mathbf{x}^i 和 \mathbf{x}^i_{C1} 是训练模拟中的顺序解。

从方程(我们知道g 4)， \mathbf{g}^i_{C1} d 0. 这使我们表达方程(经过一些重排，如下：5)，

$$\mathbf{j}^i_{C1} \mathbf{x}^n_{C1} + \mathbf{j}^i_{C1} \mathbf{x}^i_{C1} - \mathbf{a}^i_{C1} \mathbf{x}^n_{C1} - \mathbf{b}^i_{C1} \mathbf{u}^n_{C1} - \mathbf{u}^i_{C1} \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{u}^i_{C1}} \mathbf{u}^i_{C1}; \quad (6)$$

在哪里

$$\mathbf{j}^i_{C1} = \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{x}^i_{C1}} \mathbf{a}^i_{C1} + \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{x}^i_{C1}} \mathbf{b}^i_{C1} + \frac{\partial \mathbf{g}^i_{C1}}{\partial \mathbf{u}^i_{C1}} \mathbf{u}^i_{C1}; \quad (7)$$

给你， \mathbf{J}^i_{C1} 是时间步骤I的Jacobian矩阵 \mathbf{C} 训练模拟的1（在收敛时进行评估）， \mathbf{A}^i_{C1} 是 $\mathbf{r}^{n_{v-1}}$ 和 \mathbf{B}^i_{C1} 是 $\mathbf{r}^{n_{v-1}}$ ，在哪里 u 是控制向量 \mathbf{u} 的维数（通常，并比网格块少得多，所以 $n_u \ll n_v$ ）。注意 \mathbf{x}^n_{C1} 6)。方程的精确解（在前一个时间步骤中，出现在方程中）（这是因为我们现在考虑的误差对应于单个时间步骤中发生的误差。稍后，在本节中，我们将将从上一个时间步骤传播的错误纳入我们的分析。3.4，我们表示方程的解(如x 6) \mathbf{x}^n_{C1} 。该方程近似方程中的高维非线性系统（作为高维线性系统）..2) 的（线性化）误差。在这一步骤中发生的称为 \mathbf{e}^i_{C1} ， $\mathbf{e}^i_{C1} = \mathbf{D}^i_{C1} \mathbf{e}^{i-1}_{C1} + \mathbf{e}^i_{C1}$ 。

3.2. 适当的正交分解

6) 方程(是线性的，但它仍然在高维空间中表示.. 为了减少未知数，我们现在应用POD。这使我们能够编写 \mathbf{x}^n_{C1} ，其中 $\mathbf{R}^{n_{v-1}}$ 是基础矩阵和 \mathbf{S}^i_{C1} 是还原状态向量。因为我 $\ll n$ 系统状态 \mathbf{x} 可以用相对较少的变量来表示。

一些研究人员(例如，[在POD中，基矩阵列 \mathbf{X} 的主要奇异向量。1-7])。快照矩阵包含在一个或多个训练模拟中计算的解向量，作为它们的列。在这项工作中，我们通常使用两个或三个训练运行来为POD基础结构提供足够数量的快照。

21] 25]，正如在[和我们分别将POD应用于压力快照和含水饱和度快照（在油水问题中)或压力快照和整体摩尔分数快照(在组合问题中)。对于油水系统，我们有

$$\mathbf{x}^n_{C1} = \mathbf{R}^n_{C1} \mathbf{S}^n_{C1}; \quad (8)$$

在那里 \mathbf{R}^n_{C1} 以及 \mathbf{S}^n_{C1} 分别是压力和水饱和度的基础矩阵； \mathbf{S}^i_{C1} 以及 \mathbf{S}^i_{C1} 分别是压力和水饱和度的还原状态向量；和 \mathbf{R}^n_{C1} ，在那里 \mathbf{R}^n_{C1} 是整个状态向量 \mathbf{S} 的基矩阵。注意，一般情况下， \mathbf{R}^n_{C1} 中的列数 p 与 \mathbf{S} 不同 s (即， $1 \leq p \leq s$)。α

同样，对于组合系统，我们有

$$\mathbf{x}^n_{C1} = \mathbf{R}^n_{C1} \mathbf{S}^n_{C1}; \quad (9)$$

$$\begin{matrix} \hat{p}^0 & \$p \\ 0^+ & \$- \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sigma \\ ; \end{matrix} \quad \sigma$$

$$\sigma\zeta$$

在那里 $\hat{\mathbf{r}}^{n \times n}$ 是总体摩尔分数变量的基础矩阵， $\hat{\mathbf{r}}^{l \times l}$ 是相应的还原状态向量， $\hat{\mathbf{r}}^{n \times l}$ 在哪里 \mathbf{I} 是整个状态向量 \mathbf{x} 的基矩阵。指定 \mathbf{I} 的程序 \mathbf{I} 还有我 \mathbf{I} 或者我 \mathbf{I} 还有我 \mathbf{I} 它可以基于“能量”标准或稳定性考虑(后者在章节中讨论，并在章节中说明。4)，在我们最后注意到， $\hat{\mathbf{r}}$ 中子矩阵的所有列以及总体 $\hat{\mathbf{r}}$ 矩阵的列都是正交的(意指 $\hat{\mathbf{r}}^T \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{I}$)。

我们现在将简化表示 \mathbf{x} 引入方程(的右边.6)，它给了我

$$\mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{x}^{n \times i} \mathbf{d} \mathbf{J}^{i \times i} \hat{\mathbf{r}}^{i \times i} = \mathbf{a}^{i \times i} \hat{\mathbf{r}}^{i \times i} \mathbf{b}^{i \times i} \mathbf{u}^{n \times i} \mathbf{J}^{i \times i} \quad (10)$$

方程的解(表示 \mathbf{x} 10) $\mathbf{x}^{n \times i}$ 。在此步骤中产生的额外错误是由于状态减少，可以表示为 $\mathbf{e}^{n \times i}$ $\mathbf{D}^{n \times i} = \mathbf{I}^{n \times i}$ 。注意 \mathbf{e} 是减少的回复 \mathbf{I} \mathbf{x} 的意义 \mathbf{e} ，时间步骤 n 的真解，即 $\mathbf{x}^{n \times i} \mathbf{d} \mathbf{e}^{n \times i}$ (注意下标惯例对于 \mathbf{x} ，对应于用于 \mathbf{x} 的)。因此， $\mathbf{x}^{n \times i}$ 不是在相同的近似水平 $\mathbf{x}^{n \times i}$ 在方程中(这是因为 \mathbf{x} 10)。 \mathbf{e} 是真实解的投影

2) 方程(在时间步骤 n ，而 $\mathbf{x}^{n \times i}$ 包括线性化误差和状态约简误差。为了简单起见，我们表示方程的右边(作为 \mathbf{b} . 10) $\mathbf{b}^{n \times i}$ (此符号将用于随后的分析)。然后方程(变成简单的 \mathbf{J} 10) $\mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{x}^{n \times i} \mathbf{D} \mathbf{b}^{n \times i}$ 。

3.3. 约束减少

(10) 将POD表示应用于方程的左侧，导致了一个超定系统，该系统具有 n \mathbf{r} 方程式，但我未知。这种近似引入了一个残差项 \mathbf{r} ，它显示如下：

$$\mathbf{J}^{i \times i} \hat{\mathbf{r}}^{n \times i} \mathbf{d} \mathbf{J}^{i \times i} \hat{\mathbf{r}}^{i \times i} = \mathbf{a}^{i \times i} \hat{\mathbf{r}}^{i \times i} \mathbf{b}^{i \times i} \mathbf{u}^{n \times i} \mathbf{J}^{i \times i} \quad \text{中华民国:} \quad (11)$$

总的来说，没有解决 \mathbf{x} 的办法 $\mathbf{x}^{n \times i}$ 这可以使残差项为零。因此，方程(通常通过要求 \mathbf{r} 在 \mathbf{I} 维子空间中为零来求解，其基矩阵表示为 \mathbf{d} 11) $\mathbf{d}^{i \times i}$ (即。 $\mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{r} = \mathbf{0}$)。矩阵 $\mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{r}^{n \times i}$ 称为约束约简矩阵，也称为左投影矩阵或测试函数。预提方程(由。11) $\mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{r}^{n \times i}$ 结果，经过重新排列，

$$\mathbf{x}^{n \times i} \mathbf{d} \mathbf{J}^{i \times i} = \mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{a}^{i \times i} \mathbf{r}^{n \times i} \mathbf{b}^{i \times i} \mathbf{u}^{n \times i} \mathbf{J}^{i \times i} \quad (12)$$

其中，约简导数矩阵被定义为

$$\mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{J}^{i \times i} = \mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{J}^{i \times i} \quad \mathbf{a}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{a}^{i \times i} = \mathbf{a}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{a}^{i \times i} \quad \mathbf{b}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{b}^{i \times i} = \mathbf{b}^{i \times i} \mathbf{d}^{i \times i} \mathbf{b}^{i \times i} \quad (13)$$

给你， $\mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{r}^{l \times l}$ 是约简雅可比矩阵， $\mathbf{A}^{i \times i} \mathbf{r}^{l \times l}$ 和 $\mathbf{B}^{i \times i} \mathbf{r}^{l \times l}$ 。

的选择 $\mathbf{d}^{i \times i}$ 不是独一无二的。在以往涉及油水系统POD-TPWL模型的工作中，应用了Galerkin投影[这意味着我们采用21,23,26]， $\mathbf{d}^{i \times i} = \mathbf{I}$ [23]。正如前面所讨论的，这可能导致不稳定的POD-TPWL模型。最近的工作表明，Petrov-Galerkin投影，其中 $\mathbf{d}^{i \times i} = \mathbf{J}^{i \times i} \mathbf{J}^{i \times i}$ [17, 25]。 \mathbf{d} 代表了一种可行的(和更稳定的数值)替代方法[在本工作中，我们将研究这些和其他约束约简方法的准确性和稳定性。

方程(定义给定真约化解的POD-TPWL模型(\mathbf{x} 12) \mathbf{x})时间步长。这个方程也可以写成。

我是 i, j 的 n 次

与 b^{n, C_1} 如前所述。我们指的是 b^{n, C_1} 在方程和(作为 $(12) - (14)$ 的 b^{n, C_1})。在这个近似水平上的全阶解，表示 x^{n, C_1} ，可以重建为 $x^{n, C_1} d^{n, C_1}$ 的。³ 在此步骤中发生的错误定义为 $e^{n, C_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n, C_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n, C_1}$ 开被称为约束减少误差。

[illegible]

线性化误差 $e^{n, C1}$ 与问题的非线性和当前解与用于线性化的训练运行中的点之间的距离有关。通过使用额外的线性化训练模拟（或偶尔的再训练），使用更好的点选择方案，或通过建模高阶项，可以减少这个误差分量。方程泰勒级数展开中出现的二阶项(SOTS)涉及稀疏的三阶张量乘以两个差异向量。[40]。（2）例如，关于(x)的SOT $i, C1$ ， $U^{i, C1}$ 可以写成

$$\text{索特d}^{n, C1} = \frac{\partial^2 g^i}{\partial x^i \partial u^i} \quad \text{你} \quad : \quad (20)$$

这些二阶导数通常在地下流动模拟器中是不可用的，尽管应该可以使用基于自动微分的模拟器来构造它们，例如斯坦福大学的基于自动微分的通用研究模拟器(AD-GPRS)[此外，对于特定的应用，一些SOTS消失了。41]。例如，对于储层模拟问题，涉及二阶导数的交叉项相对于(x) i ， $x^{i, C1}$ 和(x) i ， $U^{i, C1}$ 通常为零。此外，对于以井压力(BHPs)为控制参数的标准井处理模型，则是相对于u的二阶导数 $i, C1$ 是零。因此，只需要考虑其中的一些措施。

状态约简误差 $e^{n, C1}$ 结果是将订单减少应用于状态。(10) 6 方程和是具有相同系数矩阵但右手边不同的线性系统。所以， $K^{n, C1} x^{n, C1} = K b^{n, C1}$ 其中n是J的条件数 $i, C1$ b $n, C1$ 是对的

10)，方程的手侧(和OB是方程的右手边和（的大小）之间的区别 由状态约简基矩阵 \hat{A} 确定Ob..(10) 6[42]。因此，在POD框架内，状态约简误差 $e^{n, C1}$ 可以通过提高 \hat{A} 质量来降低。[23]，例如，可以通过从额外的训练模拟中收集更多的快照来实现这一点。提出的另一种方法是将重要网格块中的变量（例如井块）保持在全阶空间中，这意味着这些变量不是通过 $x^{\hat{A}}$ 表示的。这种治疗在许多情况下提供了更准确的结果。

错误不 $e^{n, C1}$ 是引入约束减少之前发生的
12)，方程(因此它们不依赖于矩阵 $i, C1$ 。错误 $e^{n, C1}$ 然而，状态和约束约简在时间步骤nC1中发生，因此它确实依赖于 $i, C1$ 。错误 $e^{n, C1}$ 是从上一个时间步骤传播的错误。这也取决于 $i, C1$ 通过矩阵 $M^{i, C1}$ 。的最优选择 $i, C1$ 应该最小化e的总和 $n, C1$ 和 $e^{n, C1}$ 。

最优的 $i, C1$ 然而，将取决于上一个时间步骤(E)的错误 n)，一般而言，这是不可用的。因此，我们这里的策略是选择约束约简矩阵 $i, C1$ 使一步误差项e最小化 $n, C1$ 同时也保证了所得到的POD-TPWL模型的性能稳定²，这意味着以前的时间步骤的误差不会随着时间的推移而非动态地增长。

4. 最优约束约简过程

我们现在导出最优约束约简矩阵，使一步误差e最小化。 $n, C1$ 在不同的规范中。在我们这里的开发中，由于我们只考虑一个时间步骤，所以我们删除了上标iC1和nC1。

4.1. 一般发展

最优性条件可以写成.

$$\arg \min_{x} \|kx - x\|_2^2; \quad (21)$$

在那里 x 指定最优 \hat{x} （我们将上标x在随后的方程中删除）。给你， $k \cdot k$ 。

正定(SPD)矩阵和 n 是全阶状态 x 的维数。的要求.

要成为SPD, 确保 Kek 的最小值 2 是唯一的ED0。

我们将方程中极问题的目标函数表示为 f 。(21) %/; 那个

是, f . %/德克 $_{23} k^2 d k x_{2-13} k^2$. 从方程(我们有 x_{10}), $_{2} d j^{-1} b$, 而 x_{3} 可能是

从方程的解(如 x)重建 $_{12} _3$ $^{\wedge} \$ _3$ (我们在本节中简单地表示为 $^{\wedge} \$$)。因此, f . %/可以表示为.

$$f: \% /DKX_{2-13} k^2, \quad (22)$$

$$- \quad \quad \quad d j \quad \quad \quad b - ^{\wedge} \$ \quad \quad \quad d. j^{-1} b - ^{\wedge} \$ / ^t \quad \quad \quad j^{-1} b - ^{\wedge} \$ /:$$

方程中极问题的一阶最优性条件(is.21) $^{\wedge} \$$

d0.

从连锁规则和 $^{\wedge} \$$ 的事实.. %/ (因为 $^{\wedge} \$$ 依赖于通过 J , a 和 B), 我们

从 $^{\wedge} \$$ 和 $^{\wedge} \$$ 的事实.. %/ (因为 $^{\wedge} \$$ 依赖于通过 J , a 和 B), 我们

$$^{\wedge} \$ _t, ^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1} b \quad \quad \quad (23)$$

或者, 相当,

$$^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1} b: \quad \quad \quad (24)$$

我们也有一个直接表达式的 $^{\wedge} \$$ 从方程(14):

$$^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1} b: \quad \quad \quad (25)$$

(25) 24) 方程和(必须同时保持任意向量 b 。因此, 下面关于的矩阵方程适用: .

$$^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1} b: \quad \quad \quad (26)$$

方程的解(通过检验), 26)

$$^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1}: \quad \quad \quad (27)$$

注意, $^{\wedge} \$ _t \quad \quad \quad j^{-1}$ 对于任何全等级的 $C \quad \quad \quad$ 也是方程()的解。26 选择 C 不会影响 $^{\wedge} \$$ 的解决方案, 因为 $C^{-1} C$ 立即出现在方程(25)

(这里, 我们选 $C \quad \quad \quad$)。

27) 方程(为提供了一个通解 $^{\wedge} \$$

满足最优性条件

方程(的解21). $^{\wedge} \$$ 在方程中(取决于矩阵, 通常涉及矩阵 J) $^{-1}$ 。在实践中, 消除 J 的特殊选择 $^{-1}$ 经常被雇用。例如Galerkin投影和Petrov-Galerkin投影, 我们将在稍后详细描述。其他选择的, 这不消除 J^{-1} 这将导致更高的计算成本, 但它们可能具有更好的理论性能, 并显示出更好的数值性能。我们将在章节中讨论两种这样的处理方法, IP和

4.2. 加勒金投影

伽辽金投影对应于J的情况。方程然后变成 $\mathbf{d}^T(27) \mathbf{e} \approx \mathbf{e}^T$ 。Galerkin投影已被用于许多以前基于POD的订单减少程序中[4, 6, 16, 21, 23, 43–45]。

Galerkin投影强制所谓的Galerkin正交性，这意味着方程的残差向量(与状态子空间正交 \mathbf{e}^T)也使目标函数最小化。

$\mathbf{e}_{23}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_{23}$ 。当矩阵J为SPD时，这种投影方法在方程中定义的意义上是最佳的(但是，如果J不是SPD，则为最优投影法。21)。 $\mathbf{e}_{23}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_{23}$ 不会是 \mathbf{e} 的规范定义 $_{23}$ 因为它可能是负面的。在涉及多个相的地下流动模拟中，雅可比矩阵通常不是SPD。因此，Galerkin投影通常不是 \mathbf{e} 范数的严格极小值 $_{23}$ 。

然而，尽管这一理论上的限制，POD在地下水流中的应用[使用Galerkin投影往往显示出合理的精度，特别是在油井产量和注入率方面。4, 6, 16, 21, 23, 43–45]这可能是由于Galerkin正交条件要求残差向量与 \mathbf{e} 列正交。回想一下， \mathbf{e} 列捕获状态的变化，因为它们是通过应用POD计算的。

因此，变异较大的变量在基向量中往往具有较大的权重。因此，相应的方程加权更重，从而得到更准确的求解。在储层模拟应用中，变化较大的变量往往对应于井块和近井区的区块。应用于这些块的额外加权可能使Galerkin投影能够提供准确的井率预测。

4.3. 彼得罗夫-加勒金投影

如果被视为J \mathbf{e} 方程(变成*27) $\mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e}$ 。这种投影方法，称为Petrov-Galerkin投影，已被用于高维参数输入的大规模系统的阶约简和在DEIM上下文中的阶约简。彼得罗夫-加勒金投影有一些有趣的特性。[32]17] 第一，因为J \mathbf{e} 是SPD，结果

21) 满足方程(并最小化 \mathbf{e} 的范数) $_{23}$ ，规范定义为 $\mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e}$ 。第二，Petrov-Galerkin投影等价于求解方程中超定系统的正态方程(它使残差向量的2范数最小化)。11)，

Petrov-Galerkin投影的最优性条件也可以用另一种方式来解释。
用Petrov-Galerkin方法，方程(等价于 21)

$$\mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} \quad (28)$$

换句话说，这种方法最小化了 $\mathbf{J} \mathbf{e}$ 的2范数 $_{23}$ 。通过将J的奇异值分解写为 $\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$ ，在哪里 \mathbf{U} 是一个正交矩阵，其列包含J的左单向量 \mathbf{u}_j ， $\mathbf{\Lambda}$ 是一个对角线矩阵，在对角线上有J的奇异值， \mathbf{V} 是一个正交矩阵，其列包含J的右奇异向量(或等效地，J的特征向量) \mathbf{v}_j (28) 方程可以表示为

$$\mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} \quad (29)$$

29) 方程(表示Petrov-Galerkin方法将误差向量转换为由V定义的坐标 \mathbf{v}_j 将新向量的每个元素用相应的奇异值加权，然后最小化加权变换误差向量的2范数。在地下水流模拟中，雅可比矩阵J通常是非常病态的，其奇异值变化很大，跨度高达10个数量级。因此，使用奇异值的加权方案可以高度倾斜。换句话说，错误向量中的一些分量将非常强加权，而另一些分量可能非常弱加权。因此，虽然Petrov-Galerkin方法在方程中定义的意义上是最佳的(该方法中嵌入的倾斜加权可能导致某些量的POD-TPWL模型不准确。21)，

5. 稳定性标准

除了精度和效率方面的考虑外，还应选择约束约简矩阵，以确保所得到的POD-TPWL方法的稳定性。在理论上，我们可以尝试在方程中构造一个SPD矩阵（它也满足李雅普诺夫稳定性准则）。这将提供一个保证稳定和最优准确的。27) 27) 然而，这种方法需要耦合方程（与李雅普诺夫方程和求解得到的矩阵方程）。这种方法不太可能在计算上处理高维地下流动问题。因此，在本工作中，我们从满足方程的约束约简方法开始（然后考虑评估和提高其稳定性的方法）。27)

吊舱-TPWL的约束减少
也提供了POD-TPWL模型。⁶⁷

6. 数值实现和结果

我们现在描述POD-TPWL实现的一些关键方面，以及我们量化错误的方式。然后给出了两个油水模型和一个组成模型的数值结果.. 其他结果和讨论可以在[29].

6.1. POD-TPWL 实现

[41]. 为了与斯坦福大学的AD-GPRSAD-GPRS兼容，对POD-TPWL方法进行了改进，以输出构建POD-TPWL模型所需的状态和导数信息。

在离线（预处理）阶段，使用AD-GPRS对特定的输入(BHP)控制参数进行两到三次训练模拟。其中一个训练运行被指定为初级训练模拟。此运行提供状态向量和导数矩阵，用于后续（内联）计算。其他（次级）训练运行仅用于为基础矩阵 \hat{V} 的构建提供快照.. 需要进行二次训练运行，因为单个模拟运行的快照数量，对应于该运行中的时间步骤数，通常不足以提供高质量的POD基矩阵。更具体地说，我们发现需要大约300个快照来构建本文所考虑的问题的POD基础。考虑到一个典型的运行需要100-200个时间步骤，这相当于两到三次训练运行。我们不应用任何特殊程序来确定初级或中级培训运行中使用的控件（这些控件都是在感兴趣的范围内随机生成的），尽管通过使用更正式的方法可以实现更好的POD-TPWL精度。

在离线过程的基本实现中，每个训练模拟的每个时间步骤的状态向量，以及导数矩阵 J^i ， a^i 和 B^i 在初级训练模拟的每个时间步骤中，都保存到磁盘中。然后从快照矩阵构造POD基。最后，还原状态 \hat{x}^{i+1} 并形成导数矩阵，后者用方程(13).

如果将全阶导数矩阵写入输出，则预处理计算的存储需求可能很大。[25]，在减少存储离线过程中描述，在

其中只有降阶矩阵 J^i ， a^i 和 B^i 做与 \hat{x} 磁盘。这种方法需要

初级训练模拟运行两次-一次在基础矩阵构建之前提供快照一次之后。然而，第二次运行的计算成本可以大大降低，因为收敛状态已经知道（这意味着不需要迭代或线性解）。有关基本和减少存储离线过程的详细信息，请参见。[25]

15) 在内联阶段，方程(对控制参数 u 进行评估 n^{C2} 这与训练运行中使用的不同。后的还原状态 $\hat{x}^{n^{C2}}$ 计算，全阶状态 $x^{n^{C2}}$ 可以在选定的位置（例如井块）重建，可以计算其他感兴趣的量，例如每口井的相流量。对于组合问题，井流量的计算还要求在井块处进行闪光计算，以确定油饱和度等次要变量。更多细节可以在里面找到[25].

如前所述，除了执行训练模拟外，在离线阶段，我们还必须在初级训练模拟的每个时间步骤输出详细信息，构建POD基础，减少训练状态和导数。状态向量和导数矩阵的约简构成了附加离线开销的大部分。对于Galerkin和Petrov-Galerkin约束减少过程，这种离线成本大约等于额外的全阶模拟的成本。然而，一旦构建了POD-TPWL模型，内联运行通常只需要几秒钟。因此，POD-TPWL最适合用于需要大量具有不同输入控制参数的模拟的应用，生产优化计算也是如此。

6.2. 错误定义

为了评估POD-TPWL模型的准确性，我们计算了全阶AD-GPRS解(Q)之间井流量的失配（误差） $e_{\text{全部}}$ 和POD-TPWL仿真(Q_{TPWL})。在每个时间步长上计算特定井的相流率误差，然后随着时间的推移进行积分，然后用时间积分的流量从全阶解对该井进行归一化。然后对来自同一类型（注入或生产）的所有井的误差进行平均，以提供总体误差值。例如，总体平均误差为产油率，指定 E_o ，计算为

$$e_{\text{全部}} = \frac{1}{n_{pw}} \sum_j \frac{\int_0^T |Q_j^{\text{全部}} - Q_j^{\text{TPWL}}| dt}{\int_0^T Q_j^{\text{全部}} dt}; \quad (36)$$

其中下标o表示油，上标j表示特定的生产井， n_{pw} 是生产井的总数，T是模拟的总时间。使用梯形规则执行积分。

对于油水模型，我们计算了采油速率E的误差 e_o ，产水率 E_w 以及注水速率 E_{iw} 。对于组成模型，我们计算了产油率E的误差 e_o ，产气量 E_g 和气体注入速率 E_{ig} 。这些误差是用类似于方程(36)。

我们还计算了所有时间步骤和所有网格块的平均状态误差。例如，压力E的平均误差 e_p 定义为

$$e_p = \frac{1}{n_t n_b} \sum_{t, b} \frac{\sum_k |p_{k,t}^{\text{全部}} - p_{k,t}^{\text{TPWL}}|}{p_{k,t}^{\text{全部}}}; \quad (37)$$

就是那个地方 t 是模拟中的时间步骤数， n_b 是网格块的数量， $p_{k,t}^i$ 是类似的数量。通过应用x构造POD-TPWL模型。其他变量使用类似的表达式。对于油水模型，我们计算了压力和水饱和度的平均误差(E_p 和 E_s)，对于组成模型，注入组分的压力和摩尔分数的平均误差(E_p 和 E_j)。

6.3. 情况1：相密度相等的油水流动

148]. 图中所示的案例1和2的储层模型是在[该模型代表河流沉积系统，高渗透（砂）通道嵌入在低渗透背景页岩中的所谓斯坦福VI储层模型的一部分。的尺寸。

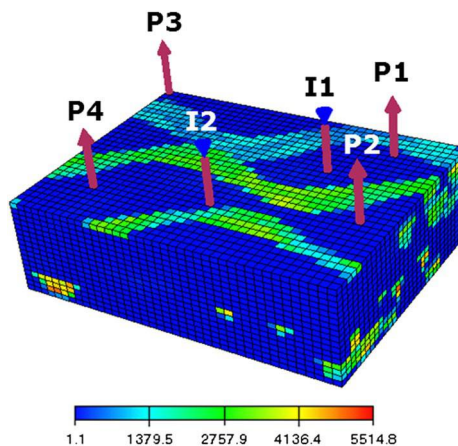


图1. 案例1和2的储层模型(x方向上的渗透率如图所示)。

j. 他和 j.

1网格为304017个,~共20400个单元。该模型包含两个注入井和四个生产井,如图所示。生产井在上五层穿孔(开向流),下三层注入井..井通过时变必和必拓规范进行控制..

相对渗透率函数,它量化了每个网格块中的水和油流量的相对数量,如下所示:

$$\frac{k_{RW}}{d} \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S} ; \frac{k_{ro}}{d} \frac{S_o - S_{or}}{1 - S} \quad (38)$$

其中油饱和度 S_o 和 S_{or} 。参数 S_{wc} 和 S_{or} 分别指定为0.02和0.3,说明这两个阶段停止流动低于某一阈值饱和。油水粘度(μ_o 以及 μ_w)分别为3和1cp。这些函数与相对渗透率函数一起定义了方程中的相位迁移率函数(特别是, $h_o = \mu_o / k_{ro}$ 和 $h_w = \mu_w / k_{RW}$)。油和水相密度均规定为1000公斤/米³。初始储层压力为5880psi(405.4bar),初始含水饱和度为0.1%..

对POD-TPWL模型进行了三次训练仿真,其中一次作为主要训练运行。两个注入器和四个生产者的必和必拓控制如图所示。2井设置每200天变化一次,并在规定的范围内随机生成。在本文的例子中,我们认为这个范围相对较窄,以便重点讨论约束约简误差和稳定性行为。从三个训练模拟中,收集了334个快照来构造基矩阵 \tilde{V} 。我们使用70个减压变量和100个降低水饱和度变量($L_p = 70, L_s = 100$)。图显示了测试用例的随机擦除的BHPs,这与训练运行的BHPs不同。我们注意到 \tilde{V} 训练和测试用例的BHP剖面是为了类似于在计算优化过程中产生的剖面,其中的目标是确定时变的BHP,以最大限度地衡量储层性能。

23], 正如在[相密度相等的油水系统]中所讨论的,具有Galerkin投影的POD-TPWL模型在大多数(L)中趋于稳定 ρ ,我 ρ_4 组合。图显示放大因子“ ρ ”在每个时间步骤I的Galerkin投影(GLK)和Petrov-Galerkin投影(PG)。图例中的标签“GLK_70_100”表示使用Galerkin投影的结果,该投影具有70个减压变量和100个减水饱和变量。其他约束减少方法的标签遵循此格式。从图中可以清楚地看出,时间是变化的“ ρ ”对于这种情况,这两种方法都非常接近1。事实上,它们在整个模拟期间都低于1,这意味着由此产生的POD-TPWL模型总是稳定的。请注意,有小尖峰“ ρ ”每200天。这是由于训练中使用的时间步骤很小

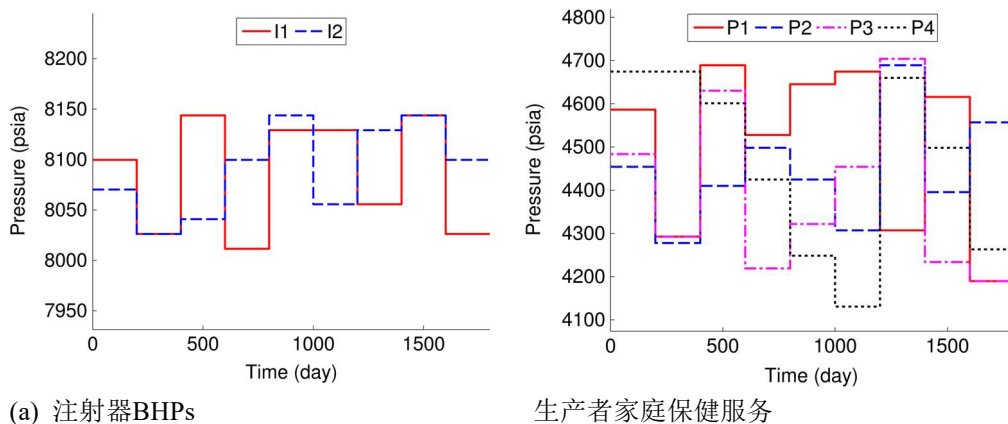


图2. 时变井底压力(BHPs)用于案例1和2的初级训练模拟。

(a) 注射器BHPs。生产者家庭保健服务。

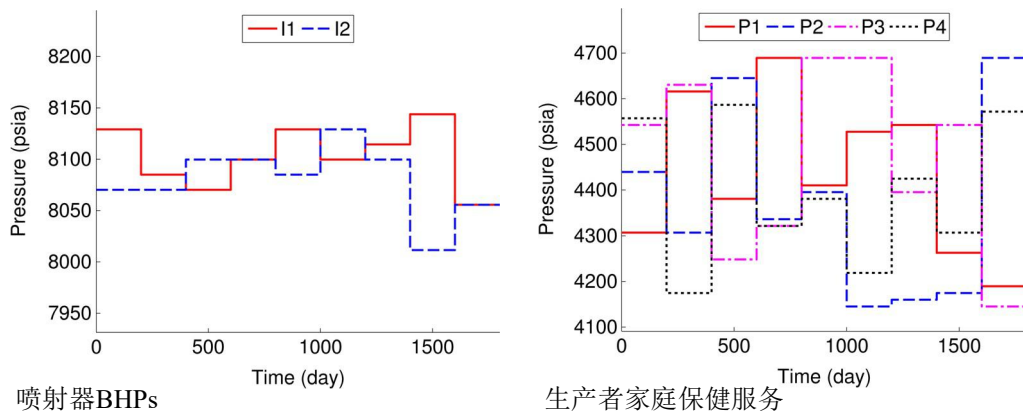


图3时变井底压力(BHPs)用于案例1和2的测试模拟。 喷射器BHPs。 生产者家庭保健服务。

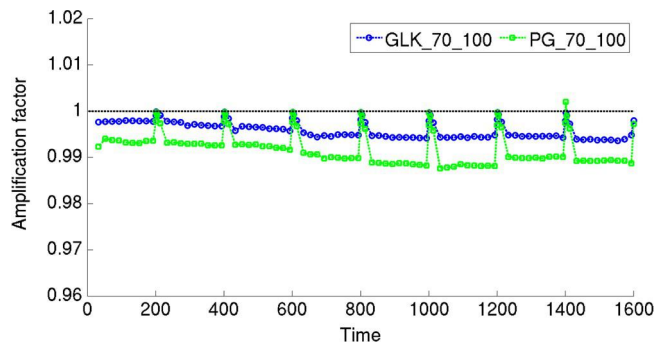


图4 放大系数“ ρ ”对于案例1中的每个时间步骤。GLK, Galerkin投影; PG, Petrov-Galerkin投影。

当BHPs被更改时运行。对于无限小的时间步长,雅可比矩阵J将等于A矩阵的负值,得到的放大矩阵将是恒等矩阵,具有“ ρ ”我们注意到,虽然我们只为1显示结果 ρ_d 和 ρ_s 对于不同的1,可以观察到类似的稳定性能 ρ 还有我 ρ_s 在一个合理的范围内(稍后将说明)。

5.6 我们现在比较案例1的Galerkin和Petrov-Galerkin方法的性能。图显示了生产者1的产油率,图显示了喷射器1的注水速率。黑色虚线描述了初级训练模拟的结果,我们对此进行了线性化。红色显示的是测试用例的全阶(参考)AD-GPRS解决方案。显然,测试和培训解决方案不同。Galerkin和Petrov-Galerkin投影结果分别以蓝色(开放圆圈)和绿色(开放方块)表示。在这种情况下,这两种方法都提供了准确的结果,尽管可以看到Galerkin投影对注水稍微更准确(例如,见图中早期的结果)。结果在数字和代表的那些其他井。6.5.6

i 表总结了使用这两种约束约简方法的POD-TPWL的流量误差和平均状态误差。对于1的相同值 ρ 还有我 ρ_s 在所有五个误差度量中, Galerkin投影为这种情况提供了比Petrov-Galerkin投影更好的精度。这可能是由于Petrov-Galerkin投影中固有的倾斜加权造成的不准确,如本节所讨论的4.3。

对于这个例子,全阶并行化AD-GPRS模拟需要大约290s在一个具有8个核(双四核Nehalem™的集群节点上运行)。具有Galerkin或Petrov-Galerkin投影的POD-TPWL模型在同一处理器的单个核心上大约需要0.7s。这相当于运行时速度约为400。如前所述,

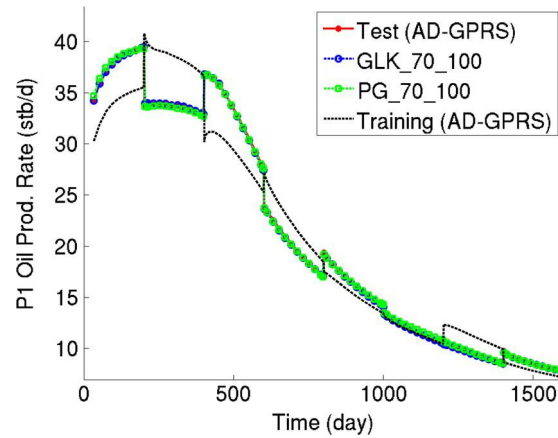


图5 在案例1中，生产者1的石油产量率。测试结果(AD-GPRS)，GLK_70_100和PG_70_100基本上相互叠加。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器；GLK，Galerkin投影；PG，Petrov-Galerkin投影。

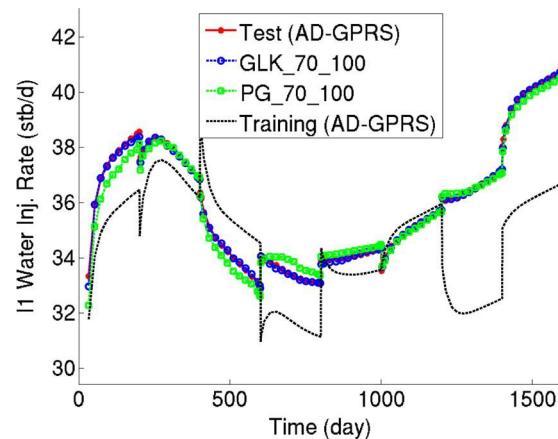


图6. 情况1中喷油器1的注水速率.. 测试结果(AD-GPRS)和GLK_70_100基本上相互叠加。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器；GLK，Galerkin投影；PG，Petrov-Galerkin投影。

表一 案例1错误总结..

	e_o	e_w	e_{iw}	e_p (psi)	e_s
glk_70_100	0.0054	0.0058	0.0015	1.57	0.00066
pg_70_100	0.0113	0.0156	0.0052	7.07	0.00130

GLK，Galerkin投影；PG，Petrov-Galerkin投影。

预处理需要三个训练模拟加上开销计算，等于额外的全阶模拟。

6.4. 情况2：相密度不相等的油水流动

例1，两种投影方法均稳定.. 然而，当引入更复杂的物理时，稳定性可能成为一个问题。这将在案例2中说明，这与案例1相同，只是现在油和水相密度设置为800和1000公斤/米³，分别。密度的差异导致重力驱动逆流（物理），这导致雅可比矩阵的结构由于上游加权而发生变化[如案例1所示，我们进行了三次训练模拟来构造POD-TPWL模型；其中之一是主要的 33]。

训练跑步。训练和测试模拟的时变必和必拓控制与案例1相同(图和从三个训练模拟中, 收集了335个快照。23)。我们再来一次 p_{70} 和 $L_s 100$ 。

7 8 图显示了生产者1的产油率, 图显示了喷油器1的注水速率。可以看出, 使用 Petrov-Galerkin 投影的结果与真实的测试用例解决方案相当接近, 尽管一些差异是明显的。相比之下, 使用 Galerkin 投影的结果在模拟的早期阶段显示出实质性的波动。在其他井的流量中也观察到 Galerkin 投影运行的类似波动 (在这里没有显示)。

在这种情况下, Galerkin 和 Petrov-Galerkin 投影的不同性能可以用图来解释, 图显示了放大因子“ ρ ”在两种方法的每个时间步骤。对于 Petrov-Galerkin 方法, 值为“ ρ ”在整个模拟期间低于或非常接近1。因此, Petrov-Galerkin 方法在整个仿真过程中表现稳定。同样, 每200天可见的峰值是由于BHP控件更改时使用的小时间步骤所致。对于 Galerkin 方法, 值为“ ρ ”在早期时间远大于1, 在某些时间步骤中, 它高达14.5 (注意, 垂直轴只延伸到1.5)。8 这种不稳定性导致图中明显的波动。后期放大系数减小到1左右, 波动消失。

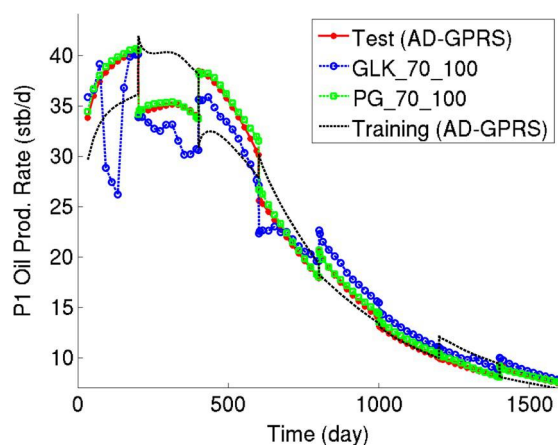


图7 在案例2中, 生产者1的石油产量率。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器; GLK, Galerkin投影; PG, Petrov-Galerkin投影。

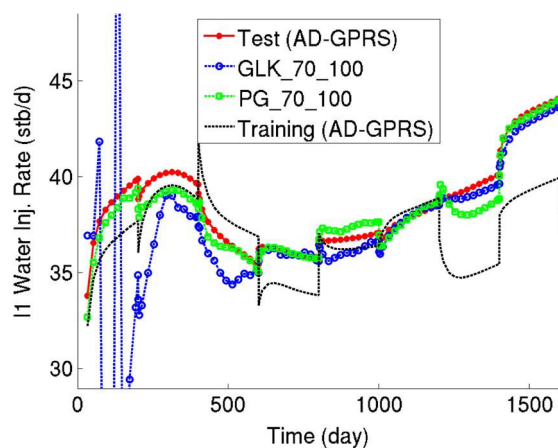


图8 情况2中喷油器1的注水速率。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器; GLK, Galerkin投影; PG, Petrov-Galerkin投影。

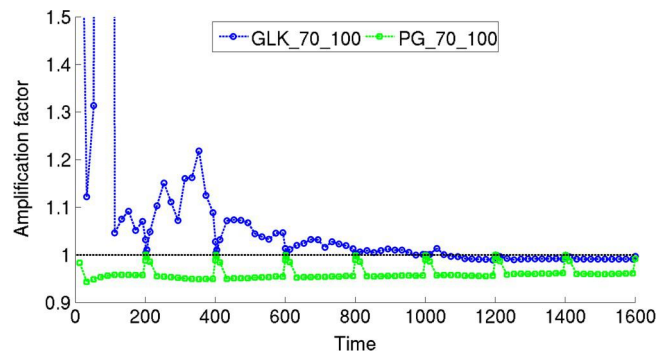


图9 放大系数 σ_i 对于情况2中的每个时间步骤。GLK, Galerkin投影; PG, Petrov-Galerkin投影。

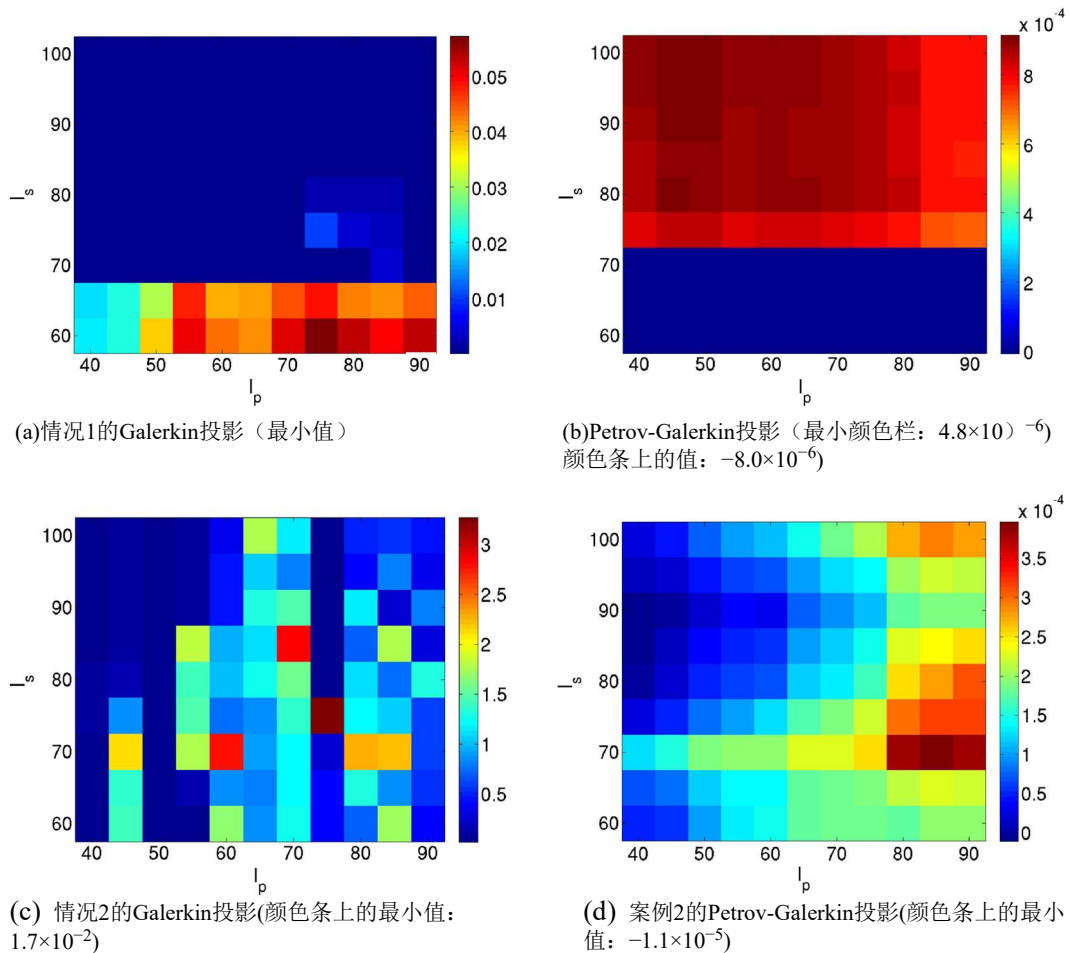


图10. 地图日志 l_0 。 $\max_i \sigma_i$ 案例1和2的 l_0 。(a)情况1的Galerkin投影(色条上的最小值: 4.8×10^{-6})。(b)情况1的Petrov-Galerkin投影 (颜色栏上的最小值: -8.0×10^{-6})。(c)情况2的Galerkin投影(色条上的最小值: 1.7×10^{-2})。(d)情况2的Petrov-Galerkin投影 (彩色条上的最小值: -1.1×10^{-5})。

9 请注意, 图中的稳定性结果专门用于 $p=70$ 和 $L=100$ 。如前所述, p 的选择还有我 s 影响稳定性行为。10 图在日志中描述了最大值的大小 λ_1 对于 p 的不同组合 p 还有我 s 对于Galerkin (左下角) 和Petrov-Galerkin (右下角) 的投影方法, 情况2。这些地块将被称为稳定图。请注意, 两幅图的颜色条的限制是非常不同的(表示每个颜色条的最小值, 它对应于相应地图中的最小值)。如前所述, 对于一个时间趋于无穷大的常数矩阵 M 的问题, 我们需要对数 $\lambda_1 < 0$ 以确保稳定性。然而, 在实践中, POD-TPWL模型中的稳定行为与对数一样 λ_1 接近零(例如, 日志 λ_1 。对于我们的例子, 0: 02; 这个精确的值可能与问题/控制设置有关)。这是两个原因。首先, 因为我们的模型需要 $O(100)$ 时间步长, 非常小的增长率不会导致无界误差。二, 因为放大矩阵($M^{(1)}$ 或 $M^{(2)}$)随着时间的推移而变化, 因为图描述了最大日志 λ_1 在所有时间步骤中, 日志的要求 $\lambda_1 < 0$ 是过于严格的。在下面, 我们因此提到最大值的情况 $\lambda_1 < 1: 05$, 对应于日志 $\lambda_1 < 0: 021$, 表现稳定。

日志 λ_1 图中显示了情况2的Galerkin投影的 λ_1 , 从图中可以看出, 对于Galerkin投影POD-TPWL, 稳定性对 L 的选择非常敏感 10(c)。 p , 我 s), 而且没有明确的趋势。很多人 p 还有我 s 组合导致不稳定

(因为它们对应于最大值 λ_1), 虽然有些我 p 还有我 s 组合的POD-TPWL模型应该表现稳定。10(d), 另一方面, 如图所示, 用于Petrov-Galerkin投影, 日志的值 λ_1 任何 p 还有我 s 非常接近零(最大值为0.0004)。因此, 该方法对 p 的所有组合都表现稳定 p 还有我 s 考虑过。

10 图中还显示了Galerkin (左上) 和Petrov-Galerkin (右上) 的稳定性图, 用于情况1(等相密度)。很明显, 对于情况1, Petrov-Galerkin投影应该对所有的人都表现稳定(L , p , 我 s 考虑到, Galerkin投影应该在很大的 L 范围内稳定运行 p 还有我 s 10(a)。图和(C)的比较表明, 包含更复杂的物理有可能对应用Galerkin投影来减少约束的POD-TPWL模型的性能产生不利影响。这个问题可能与Jacobian矩阵不是SPD的事实有关, 如本节所讨论的4.2。

因为应用Galerkin投影的POD-TPWL模型的稳定性特性对 p 的选择很敏感 p 还有我 s 通过仔细选择 p , 模型可以“稳定”(在实际意义上) p 还有我 s 假设存在(L , p , 我 s)与日志结合 $\lambda_1 < 0: 021$ 。

这种方法在[对于当前示例, 对于 $p=75$ 和 $L=80$, 日志的值 $\lambda_1 < 10(c)$], λ_1 低于这个阈值(图表明所得到的POD-TPWL模型将稳定运行。11 图显示了两种投影方法的喷油器1的注水速率 $p=75$ 和 $L=80$ 。显然, 使用Galerkin投影的结果不再显示波动(比较数字, Petrov-Galerkin结果继续稳定, 如图所示, 这些结果说明了构造POD-TPWL稳定性图的有效性 8 11) 10(d)。

二 表显示了Petrov-Galerkin方法和稳定行为Galerkin方法的误差。结果表明, 稳定的Galerkin投影在这种情况下更准确(E除外) s), 符合个案1的意见。

6.5. 案例3: 构图模拟

案例3涉及一个四分量系统, 在这个系统中, 我们对 CO_2 的注入进行了建模。 CO_2 进入储油层。原来的流体, 就整体摩尔分数而言, 由0.01 CO_2 组成 CO_2 , C的0.11 CO_2 成分, C的0.29 CO_2 组件和C的0.59 CO_2 构成部分。纯 CO_2 是注射的。这种情况下的储层模型是在32408网格上定义的, 该网格转换为10,240个网格块, 因此40,960个主要变量(10,240,4)。12, 图中所示的渗透率场是在SGEM地质建模包中使用顺序高斯模拟地质统计生成的[该模型包含四个在四角的生产者和一个注入器 49]。

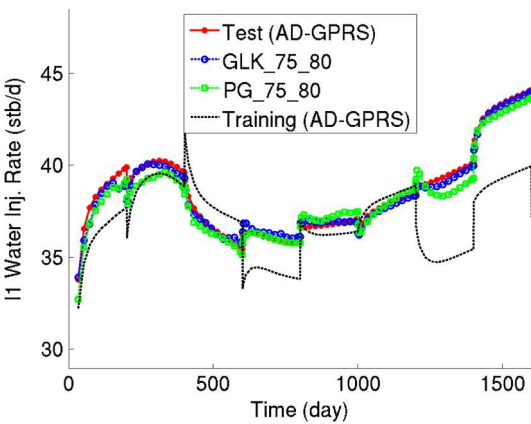


图11 情况2中喷油器1的注水速率，与1. p 还有我,10(c)。基于图ADGPRS，基于自动微分的通用研究模拟器；GLK，Galerkin投影；PG，Petrov-Galerkin投影。

表二 案例2错误总结..

	e_o	e_w	e_{iw}	e_p (psi)	e_s
glk_75_80	0.0216	0.0152	0.0050	13.6	0.00212
pg_75_80	0.0225	0.0255	0.0112	15.0	0.00204

GLK，Galerkin投影；PG，Petrov-Galerkin投影。

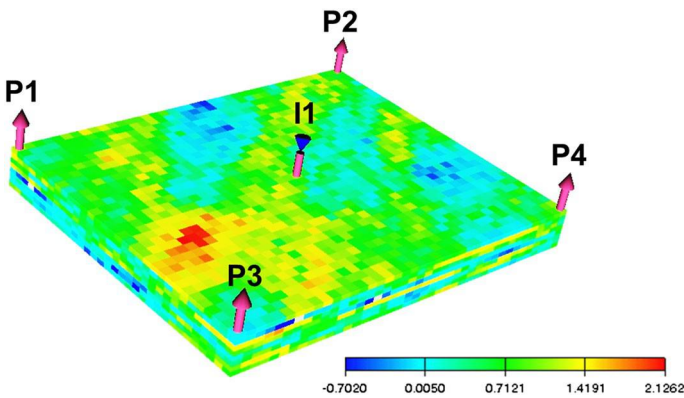


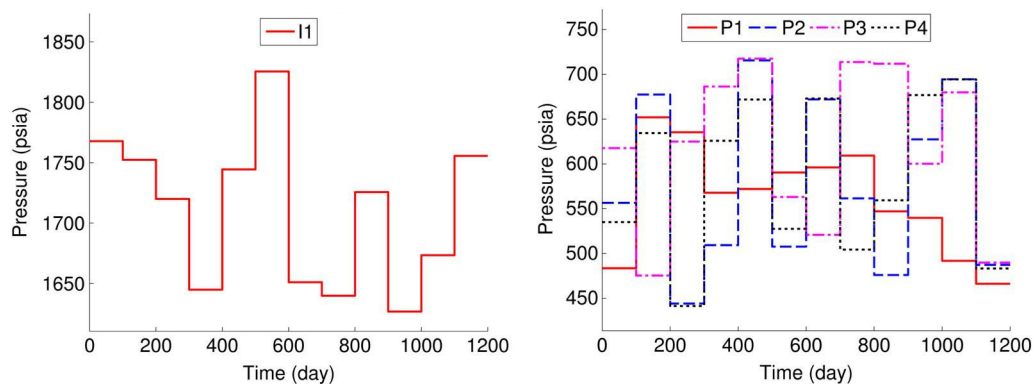
图12. 案例3的储层模型（对数渗透率如图所示）。

中间，形成五点图案。生产者在下四层穿孔，喷油器在上四层穿孔。

我们进行了两次训练运行，其中一次是初级训练模拟，以构建POD-TPWL模型。喷油器和四个生产者的BHP控制如图所示，这些BHP每100天变化一次，并随机生成。13. 从这两个训练模拟中，收集了275个快照来构建基础矩阵 \tilde{A} 。我们指定了1 p 120和 - 150. d

14 图显示了测试用例的BHP，它们也是随机生成的。

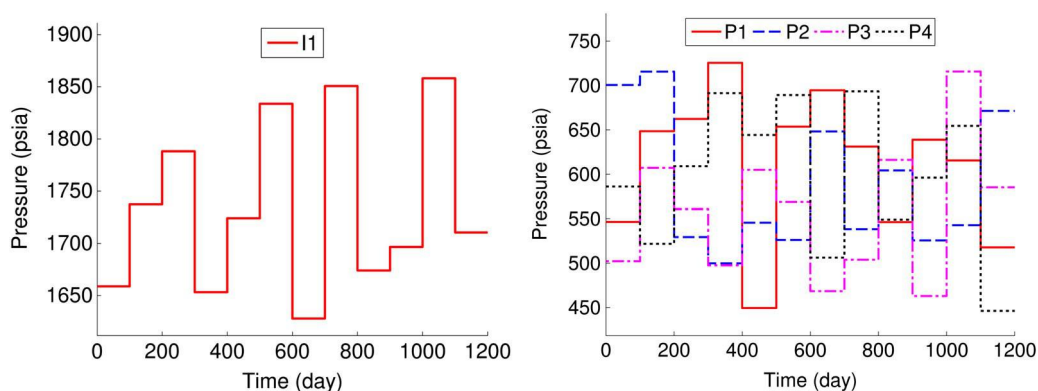
15 图显示了Galerkin和Petrov-Galerkin方法在这种情况下下的稳定性图。请注意，这两个数字的颜色条的比例是非常不同的。对于Petrov-Galerkin投影，全部(L. p ，我 -)组合导致模型的行为稳定。对于Galerkin投影，对于所有人 p ，我 -)组合考虑，日志10。 $\max_i \|i\|$ /总是远远大于0(最低的最大值 i 值约为27)。这意味着对于其中的任何一个(1) p ，我 -)组合，得到的POD-TPWL模型将有一个或多个不稳定步骤。因此，对于这种情况，我们不能申请



(a) 注射器BHPs

生产者家庭保健服务

图13 时变井底压力(BHPs)用于案例3的初级训练模拟。喷射器BHPs。 生产者家庭保健服务。

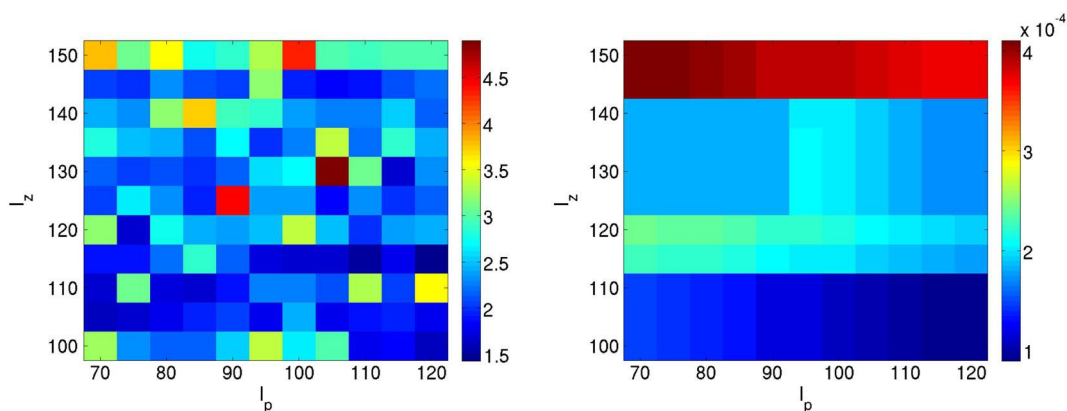


(a) 注射器BHPs

生产者家庭保健服务

图14 时变井底压力(BHPs)用于案例3的测试模拟。喷射器BHPs。

(b) 生产者BHPs。



(a) Galerkin投影 (颜色条上的最小值: 1.43)

(b) 彼得罗夫-加勒金投影(彩色条上的最小值: 8.9×10^{-5})图15 地图日志 $_{I_0}$ 。 $\max_i \text{ } ^i$ 案件3的/。(a)Galerkin投影 (色条上的最小值: 1.43)。(b)Petrov-Galerkin投影(彩色条上的最小值: 8.9×10^{-5})。

用于案例2的基选择过程，利用Galerkin投影构造稳定行为的POD-TPWL模型。

此外，虽然这里没有显示，但对所有(L) ρ ，我 - 考虑到的组合，Galerkin方法显示日志 $10 \cdot \max_i | \dots |$ 所有时间步骤 > 0 。组成系统比具有Galerkin投影的油水系统不稳定的原因并不完全清楚，但可能是由于，

至少在一定程度上，油相和气相之间的大密度差（这导致了强烈的重力驱动逆流）和复杂的相行为引起的高非线性。这一问题应在今后的工作中加以调查。

16 17 18 图并显示了生产者1的油气产量，而图显示了喷油器1的注气率。使用Petrov-Galerkin投影的测试用例结果与使用WIP的结果一起显示，这将在下一节中讨论。只显示了模拟的前600天的结果。这使我们能够把重点放在天然气生产率不断提高和误差最大的时期。POD-TPWL模型具有合理的总体精度，尽管不同时间不同数量的误差是明显的。16 例如，图中的产油率显示了300至400天的一些不准确之处，以及气体注入率（图中的前200天）。然而，该解决方案的性能明显稳定，结果具有足够的准确性，可用于许多应用。18) 这些结果代表了其他井的结果。这种情况下的运行速度大约为150倍，这低于情况1和2。这里的较低速度是由闪存计算得出的，即

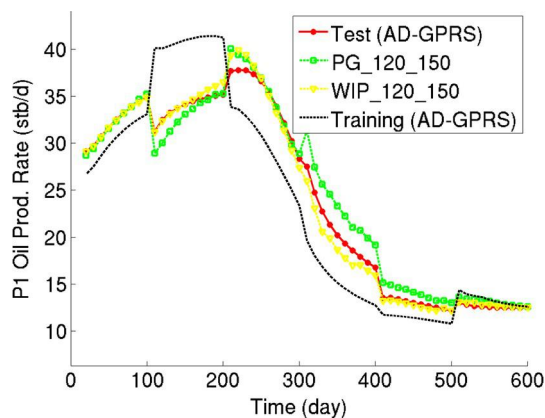


图16 在案例3中，生产者1的石油产量率。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器；PG，Petrov-Galerkin投影；WIP，加权逆投影。

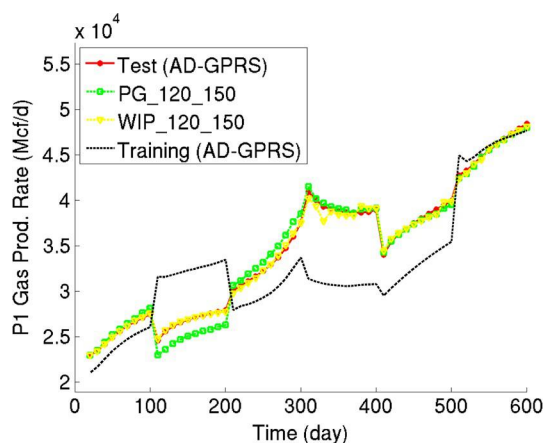


图17 在案例3中，生产者1的气体生产率。基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器；PG，Petrov-Galerkin投影；WIP，加权逆投影。

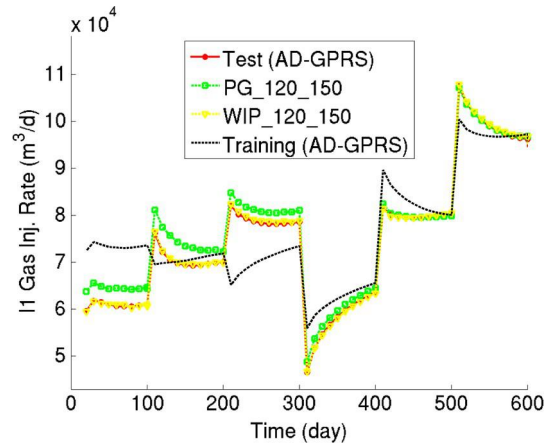


图18 情况3中喷油器1的注气速率.. 基于AD-GPRS的自动微分通用研究模拟器; PG, Petrov-Galerkin 投影; WIP, 加权逆投影。

在我们目前的POD-TPWL模型中没有有效地处理。但是，通过有效执行，可以大大减少这一费用。

7. IP和WIP约束约简方法

4 在部分中，我们证明了，为了最小化约束约简误差 e_{23} 最优约束约简方法应采用形式 $\delta \delta$ $t \sim t_j^{-1}$ 。我们用，在Galerkin投影和J的情况下 t^d 在Petrov-Galerkin投影的情况下。这两种选择都消除了 J^{-1} 术语，因此非常有效的计算。然而，的其他选择也存在。虽然它们通常需要更高的计算成本，但它们可能具有理论优势，并显示出优越的性能。在本节中，我们考虑两种这样的投影方法，IP和WIP。

7.1. 方法开发

的一个直观选择是恒等矩阵。进而给出最优投影矩阵。

$\%_0 t \sim t_j^{-1}$ 。我们将这种方法称为IP方法。

该IP方法的一个重要特性是它最小化了约束约简误差 e 的2-范数 $_{23}$ 。即满足。

$$\%_0 \times \text{阿格明克}_{23} k^2_{\mathcal{Z}} \quad (39)$$

与Galerkin和Petrov-Galerkin方法在最优条件下出现的规范相比，这里出现的2范数更好，因为它不依赖于J的特定结构。

在许多油藏模拟应用中，如生产优化，我们对井块中的状态特别感兴趣，因为这些值直接影响注入和生产速率。我们可以为方程中与这些块对应的误差向量的元素分配更大的权重(通过定义DW 21) t 其中W是对角加权矩阵.. 得到的投影矩阵为 $t^d \sim t^w t^w j^{-1}$ 。我们将此方法称为WIP。当WDI时，WIP退化为IP。WIP最小化2范数中的加权误差向量，

$$\%_0 \times \text{我们}_{23} k^2_{\mathcal{Z}} \quad (40)$$

在本工作中涉及WIP的示例中，我们将值5分配给WIP的对角线元素对应井块状态的W和对应剩余对角线元素的1。这个5比1的比例。

是通过有限的数值实验确定的。可以进一步调整W的值，以提高特定网格块的精度。

IP和WIP方法由于其最优性条件而具有理论优势。然而，实现这一效益需要额外的计算努力。这是因为，对于IP和WIP方法， J^{-1} 表达式中的术语不乘以J，因此它不会像Galerkin和Petrov-Galerkin过程中那样取消。

在实践中， J^{-1} 不需要显式计算。矩阵只出现在方程中的约简导数的计算中(代入方程(并删除上标iC1)，我们有 13)。 27)13)

$$\mathbf{j}^T \mathbf{d}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{a}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{d}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{a}^T; \quad \mathbf{b}^T \mathbf{d}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{b}^T; \quad (41)$$

有趣的是，J的计算现在不涉及J。术语 J^{-1} 矩阵A中的 \mathbf{A}^T 可以通过求解 $\mathbf{J}\mathbf{x}$ 来计算 \mathbf{A}^T ，这是一个 $n_p \times n_p$ 系统具有 \mathbf{I} 右侧，其中 \mathbf{I} 是减少变量的总数。同样，术语 J^{-1} 矩阵B中的 \mathbf{B}^T 可以通过求解 $\mathbf{J}\mathbf{x}$ 来计算 \mathbf{B}^T ，这是一个 $n_p \times n_p$ 系统与 \mathbf{n}_u 右手边，其中 \mathbf{n}_u 是控制参数u的维数。总之，我们需要用 \mathbf{I} 来求解高维线性系统 \mathbf{n}_u 右手边在每个时间步骤。对于一个200和n的案子 n_u 10、建造A的费用 n_p 和 \mathbf{B}^T 对于IP或WIP方法，相当于一个组合问题的大约10-20个全阶模拟和油水问题的20-40个全阶模拟（这种差异是因为全阶组合模拟通常需要比油水问题更多的牛顿迭代和时间步长的削减）。因此，IP和WIP的预处理比Galerkin和Petrov-Galerkin方法要昂贵得多（尽管运行时间，因此运行时速度，是可比的）。然而，在POD-TPWL模型可以代替数百次全阶运行的应用程序中，IP和WIP方法可能是可行的选择。

最后，我们注意到，通过近似J，IP和WIP的计算成本可能会显著降低 J^{-1} 用另一个矩阵Q，这样我们就可以用Q代替 J^{-1} 。对于Q的潜在选择是用于求解 $\mathbf{J}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的各种预条件。这一点应在今后的工作中加以考虑。

7.2. 使用IP和WIP的数值结果

IP和WIP方法现在将应用于案例1-3。问题设置与前面描述的相同。

在稳定性方面，IP和WIP方法在所有三种情况下都表现稳定，其稳定性特征对 \mathbf{I} 的选择不敏感，还有我 \mathbf{J} (或 \mathbf{I})。19 例如，图显示了情况3的IP和WIP方法的稳定性映射，这是最具挑战性的情况

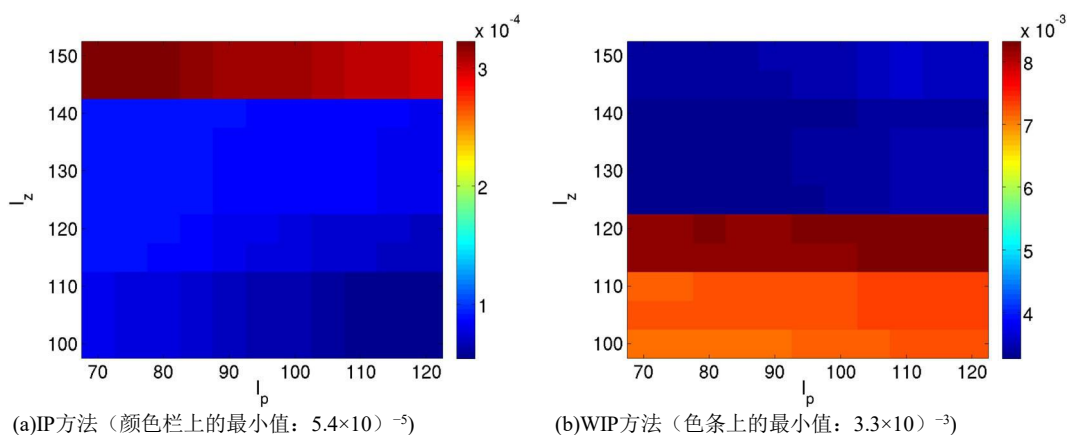


图19 地图日志 l_0 。 $\max_i \lambda_i$ /情况3的逆投影(IP)和加权逆投影(WIP)。 (a)IP方法(色条上的最小值: 5.4×10^{-5})。 (b)WIP方法(色条上的最小值: 3.3×10^{-3})。

加勒金方法。可以看出，对于这两种方法，日志 $_{10} \max_i |e_i|$ 对于1的所有组合，/非常接近于零，还有我-考虑过。

为了评估它们的准确性，现在将使用IP和WIP的结果与使用Galerkin和Petrov-Galerkin方法处理1-3例的结果进行比较。三 表总结了案例1的错误。在这种情况下，使用IP的注射和生产速率结果比使用Galerkin方法的结果不准确。然而，IP方法在压力和水饱和度的平均状态误差方面提供了更好的结果。这是因为通过设计，IP方法在全局最小化约束约简误差方面是最优的，而不是在井块上。在WIP上增加了井块的重量，改善了IP注入和生产速率的结果(特别是对于E) $_{iw}$)，同时保持与IP方法相似的状态错误。

四 v 表并给出案例2和3的错误。对于案例2，IP方法在所有五个度量中提供了比Galerkin和Petrov-Galerkin方法更准确的结果。在测试的所有方法中，WIP方法提供了最准确的井率预测，并导致平均状态误差，与IP方法的误差再次相当。对于案例3，IP和WIP方法继续提供比使用Petrov-Galerkin投影获得的更准确的结果。

16–18 图显示了WIP方法相对于Petrov-Galerkin方法在案例3中的性能。显然，与Petrov-Galerkin预测相比，WIP导致了更好的结果，最显著的是石油产量从300天到400天，天然气产量从100天到200天，以及300天前的注气率。

本节的结果表明，使用（加权）IP进行约束约简导致POD-TPWL模型比使用Galerkin或Petrov-Galerkin投影生成的模型更准确。此外，与Petrov-Galerkin投影一样，IP和WIP提供了稳定运行的POD-TPWL模型。像目前实现的那样，IP和WIP方法比Petrov-Galerkin过程需要更多的预处理，因此它们的总体速度水平

表三 情况1的错误摘要，具有IP和WIP。

	e_o	e_w	e_{iw}	e_p (psi)	e_s
glk_70_100	0.0054	0.0058	0.0015	1.57	0.00066
pg_70_100	0.0113	0.0156	0.0052	7.07	0.00130
ip_70_100	0.0059	0.0064	0.0044	0.62	0.00057
wip_70_100	0.0050	0.0062	0.0013	0.58	0.00060

GLK，Galerkin投影；IP，逆投影；PG，Petrov-Galerkin投影；WIP，加权逆投影。

表四 情况2的错误摘要，有IP和WIP。

	e_o	e_w	e_{iw}	e_p (psi)	e_s
glk_75_80	0.0216	0.0152	0.0050	13.6	0.00212
pg_75_80	0.0225	0.0255	0.0112	15.0	0.00204
ip_75_80	0.0058	0.0077	0.0041	1.43	0.00084
wip_75_80	0.0055	0.0076	0.0013	0.759	0.00085

GLK，Galerkin投影；IP，逆投影；PG，Petrov-Galerkin投影；WIP，加权逆投影。

表五.情况3的错误摘要，包括IP和WIP。

	e_o	e_g	e_{ig}	e_p (psi)	e_s
pg_120_150	0.0400	0.0160	0.0187	5.68	0.00894
ip_120_150	0.0239	0.0103	0.0081	1.50	0.00393
wip_120_150	0.0219	0.0085	0.0077	1.41	0.00395

IP，逆投影；PG，Petrov-Galerkin投影；WIP，加权逆投影。

提供是有限的。今后的工作应以简化矩阵A的快速构造为目标 ρ 和 \mathbf{b} ρ 。这方面的进展将使IP和WIP能够有效地用于大型型号。

8. 结束语

在本文中，我们评估了POD-TPWL模型中出现的各种错误。这些误差来源于状态约简、非线性处理（在这里使用分段线性化完成）和约束约简。我们的重点是约束约简，它被应用于将超定的高维方程组投影到一个低维子空间中。一旦应用约束约简和状态约简(通过使用POD在这里完成)，就完全确定了低维方程组。结果表明，约束约简过程的选择会影响POD-TPWL的误差和稳定性行为。在以往关于使用POD-TPWL进行地下流动的工作中，Galerkin投影主要被应用，尽管最近的工作使用Petrov-Galerkin投影进行组成储层模拟[这里，我们表明Galerkin和Petrov-Galerkin投影方法都可以从约束约简误差的最优性条件中得到，尽管Galerkin方法不满足Jacobian矩阵不是SPD时的最优性条件（它问题中）时的最优性条件。25]。

比较了两种油水情况和一种油气组成情况下Galerkin和Petrov-Galerkin方法的性能。对于重力驱动逆流的油水系统，观察到Galerkin投影的稳定性行为对减少变量的数量(L)很敏感 ρ ，我 ρ)使用。然而，在这些情况下，可能可以找到一个(l) ρ ，我 ρ 加勒金投影稳定的组合。对于成分模拟，Galerkin方法对任何(L)都是不稳定的 ρ ，我 ρ)组合测试。[25]。相反，Petrov-Galerkin方法被证明在所有考虑的情况下（无论是在这里还是在这里）都是稳定的。此外，它的稳定性特性没有发现对使用的减少变量的数量敏感.. 因此，对于复杂的储层模拟问题，Petrov-Galerkin投影似乎比Galerkin投影更可靠。[17]，这一观察结果与Galerkin和Petrov-Galerkin投影对湍流和非线性结构动力学问题的ROM进行比较的结果是一致的。然而，我们注意到，关于Petrov-Galerkin投影对非线性问题的稳定性的理论保证，据我们所知，并不存在。

有其他方法满足约束约简的最优条件，并考虑了两个这样的过程。IP最小化约束约简误差的2-范数，而WIP最小化在选定块上具有额外权重的误差向量的2-范数。在制品法是通过设计最佳的井流量计算（当井块加权更重时），并证明它提供了最佳的整体精度在所有考虑的约束减少方法。然而，因为它们涉及逆雅可比矩阵 \mathbf{J}^{-1} 在POD-TPWL模型的构建中，IP和WIP方法产生了较高的计算成本。具体来说，这些方法的预处理（开销）成本相当于大约10-40个全阶模拟.. 提高这些方法的效率应该是未来研究的一个课题。

虽然我们在本文中的具体重点是地下流，但各种问题都受到类似于方程的守恒定律的控制(因此，我们的许多详细发现应该更广泛地相关。1)，此外，由于本文提出的开发的大多数方面都不是特定于特定应用程序的，我们期望我们的一般方法和发现适用于使用POD-TPWL建模的一系列问题。更具体地说，一步的误差评估、各种约束约简处理的最优性结果、稳定性分析和低维稳定性图构建的应适用于POD-TPWL方法。我们关于Petrov-Galerkin投影相对于Galerkin投影的稳定性优势的发现应该适用于Jacobian矩阵不是SPD的其他问题。我们还认为，减少约束的IP和WIP方法可以为一系列应用程序提供更高的精度（尽管它们需要提高效率，如前所述）。然而，有几种治疗方法是具体的。其中包括选择训练运行次数和在这些运行中应用的控件，所需快照的数量，

基础矩阵 $\hat{\gamma}$ 的详细构造, 以及用于确定最近保存状态的“距离”的具体定义。

未来的工作应该考虑开发最优精确和保证稳定的约束约简方法, 例如, 将本工作中提出的最优性条件与李雅普诺夫稳定性方程相结合。还应处理POD-TPWL模型中出现的其他错误的量化和减少。线性化处理可以通过在选定的位置和时间加入(或估计)高阶校正来改善。对于地下水流的应用, 考虑更多井的情况(例如, 10-100)也将是令人感兴趣的。随着井数的增加, 模型中可能出现的状态具有更大的变异性。这表明, 将需要更多的快照, 从更多的培训运行, 以代表系统。开发系统设计训练运行的技术可以使POD-TPWL模型在实际情况下提供足够的准确性和合理的开销。

感谢

我们感谢美国能源部国家能源技术实验室(通过巴特利纪念研究所管理的DE-FE0009051奖)、斯坦福大学(通过斯坦福研究生奖学金)和斯坦福智能领域联盟的工业分支机构为这项工作提供资金。我们感谢Hamdi Tchelepi的有益讨论和建议。

参考资料

1. 利用经验本征函数分析湍流流动。 *流体动力学研究*, 1991年; 8(1-4):85-100.
2. Bui-Thanh T, Damodaran M, Willcox K. 利用适当的正交分解进行气动数据重建和逆设计。 *AIAA杂志* 2004; 42 (8): 1505-1516.
3. Vermeulen PTM, Heemink AW, Stroet CBMT. 利用经验正交函数简化了线性地下水流动模型。 *水资源进展*, 2004年; 27: 57-69.
4. 蔡L, 白RE. 基于适当正交分解的锂离子电池模拟模型阶数的降低。 *电化学学会杂志* 2009; 156 (3): A154-A161.
5. 解放E, Hamdouni A. 通过适当的正交分解(POD)对振荡圆柱周围的流动进行降阶建模方法。 *流体和结构杂志* 2010; 26 (2): 292-311.
6. 范多伦JFM, 马尔可夫R, 詹森JD. 采用适当的正交分解对水驱进行降阶优化控制。 *计算地球科学* 2006年; 10: 137-158.
7. 卡多索MA, 杜洛夫斯基LJ, Sarma P. 地下水流模拟降阶建模程序的开发与应用。 *国际工程数值方法杂志* 2009; 77 (9): 1322-1350.
8. Moore B. 线性系统的主成分分析: 可控性、可观测性和模型约简。 *IEEE自动控制交易* 1981; 26: 17-31.
9. 海金T, 马尔可夫R, 詹森JD. 利用系统理论概念生成低阶储层模型。 *2004年SPE期刊*; 9 (2): 202-218.
10. 康登M, 伊万诺夫R. 非线性系统的经验平衡截断。 *非线性科学杂志* 2004; 14(5):405-414.
11. Gallivan K, Grimme E, Dooren PV. 一种用于模型约简的合理Lanczos算法.. 1996年; 12(1):33-63.
12. 瓦西里耶夫D, 雷维斯基M, 怀特J. 一种基于TBR的轨迹分段线性算法, 用于生成非线性模拟电路和MEMS的精确低阶模型。 *Dac'03: 40届设计自动化会议记录*, 美国加利福尼亚州阿纳海姆, 2003年; 490-495.
13. 杨永杰, 沈凯. MEMS热器件的非线性传热宏观建模。 *微观力学与微观工程杂志* 2005; 15 (2): 408-418.
14. Vasilyev D, Rewienski M, White J. Macromodel生成生物MEMS组件使用稳定平衡截断加轨迹分段线性方法。 *IEEE集成电路和系统计算机辅助设计交易* 2006; 25 (2): 285-293.
15. 查图兰塔布特S, 索伦森DC. 通过离散经验插值的非线性模型约简。 *2010年SIAM科学计算杂志*; 32 (5): 2737-2764.
16. 查图兰塔布特S, 索伦森DC. POD和DEIM在多孔介质中非线性混相粘性指法降维中的应用。 *动力系统的数学和计算机建模*, 2011年; 17 (4): 337-353.
17. Carlberg K, Bou-Mosleh C, Farhat C. 有效的非线性模型约简通过最小二乘Petrov-Galerkin投影和压缩张量近似。 *国际工程数值方法杂志* 2011; 86 (2): 155-181.

18. 凯莱姆斯A, ChaturantabutS, SorensenDC, CoxSJ. 形态学上精确的尖峰神经元降阶模型。 *计算神经科学杂志*2010; 28: 477-494。
19. Gildin E, Ghasemi M, Romanovskay A, Efendiev Y.非线性复杂度降低, 用于快速模拟非均质多孔介质中的流动(SPE论文163618)。 *SPE水库模拟研讨会, 林地, 美国得克萨斯州, 2013年2月*。
20. Rewiński M, White J. 一种轨迹分段线性方法, 用于非线性电路和微机械器件的模型阶约简和快速仿真。 *IEEE集成电路和系统计算机辅助设计交易*2003; 22 (2): 155-170。
21. 卡多索MA, 杜洛夫斯基LJ. 用于地下水流模拟的线性简化模型。 *计算物理学杂志*2010; 229 (3): 681-700。
22. 卡多索MA, 杜洛夫斯基LJ. 使用降阶建模程序进行生产优化.. *SPE期刊* 2010; 15(2):426-435。
23. 何杰, Sætrum J, 杜洛夫斯基. 用于地下水流模拟的增强线性化降阶模型。 *计算物理学杂志*2011; 230: 8313-8341。
24. 罗塞特MAH, 黄CK, KlieH, DurlofskyLJ. 热回收过程的降阶建模。 *计算地球科学*2014年; 18: 401-415。
25. 何杰, 杜洛夫斯基. 利用轨迹分段线性化对组合仿真进行降阶建模。 *2014年SPE期刊*; 19 (5): 858-872。
26. 他J, SarmaP, DurlofskyLJ. 基于集合的数据同化的降阶流动建模和地质参数化。 *计算机和地球科学, 2013年*; 55: 54-69。
27. Lall S, Marsden JE, Glavaski S. 非线性控制系统模型简化的平衡截断子空间方法。 *国际鲁棒与非线性控制杂志*2002; 12 (6): 519-535。
28. Willcox K, Peraire J. 通过适当的正交分解, 平衡模型还原。 *AIAA期刊, 2002年*; 40(11):2323-2330。
29. 他J.油水和组成系统的降阶建模, 应用于数据同化和生产优化。 *Ph. D. 论文, 2013年*。
30. Berkooz G, Titi EZ. 等变量方程的伽辽金投影和适当的正交分解。 *物理字母A*1993; 174 (1-2): 94-102。
31. 对于不定和不稳定的线性系统, 保证了基于投影的稳定模型约简。 *IEEE/ACM计算机辅助设计国际会议论文集, 美国加利福尼亚州圣何塞, 2008年*; 728-735。
32. Bui-Thanh T, Willcox K, Ghattas O. 具有高维参数输入空间的大型系统的模型约简。 *科学计算杂志* 2008; 30 (6): 3270-3288。
33. Aziz K, Settari A. 石油储层模拟。 闪电印花公司; 加拿大卡尔加里, 2002年。
34. 外套KH. 态组成模型的方程.. *SPE杂志*1980; 20 (5): 363-376。
35. 年轻的LC, 斯蒂芬森RE. 储层模拟的广义组合方法。 *SPE杂志, 1983年*; 23(5):727-742。
36. Gerritsen MG, Durlofsky LJ. 油藏流体流动建模。 *2005年流体力学年度评论*; 37: 211-238。
37. Voskov DV, Tchelepi HA. 两相多分量EoS模拟非线性公式的比较。 *石油科学与工程杂志, 2012年*; 82-83: 101-111。
38. 拉辛纳姆M, 佩佐尔德LR. 正确正交分解的新观点。 *SIAM数值分析杂志* 2003; 41(5):1893-1925。
39. 查图兰塔布特S, 索伦森DC. 一种用于POD-DEIM非线性模型约简的状态空间误差估计.. *2012年SIAM数值分析杂志*; 50 (1): 46-63。
40. 陈勇, 白J. 非线性模型降阶的二次方法.. *微系统建模和仿真国际会议记录, 圣地亚哥, 加利福尼亚州, 2000年*; 477-480。
41. 周勇. 并行通用油藏模拟与耦合油藏模型和多段井。 *Ph. d. 论文, 2012年*。
42. 切尼·EW, 金凯德博士. *数值数学与计算. 挑战学习: 波士顿, 马萨诸塞州, 2012年*。
43. 马尔可夫'R, JansenJD. 加速迭代求解方法, 使用降阶模型作为求解预测因子.. *国际工程数值方法杂志* 2006; 68 (5): 525-541。
44. 拉文德兰党卫军. 利用适当的正交分解对流体进行优化控制的降阶方法。 *国际流体数值方法杂志*2000; 34 (5): 425-448。
45. 曹勇, 朱杰, 纳文IM, 罗Z. 一种利用适当正交分解的四维变分数据同化的降阶方法。 *国际流体数值方法杂志*, 2007; 53 (10): 1571-1583。
46. 格尔芬德·祖尔的理论是: 德·查拉克特雷·德·阿贝尔申·托洛辛·格鲁彭。 *马特马切斯基*1941年; 9 (51): 49-50。
47. 邦德BN, 丹尼尔L. 通过分段线性逼近和投影, 建立了非线性描述符系统的稳定简化模型。 *IEEE集成电路和系统计算机辅助设计交易*2009; 28 (10): 1467-1480。
48. Castro SA. 一种联合集成三维/4D地震、生产数据和地质信息的概率方法, 用于建立储层模型。 *Ph. D. 论文, 2007年*。
49. 雷米N, 鲍彻A, 吴杰. 应用地理统计与SGEMS: 用户指南。 剑桥大学出版社: 英国剑桥, 2008年。