第 30 卷第 9 期
2010 年 9 月

计算机应用
Journal of Computer Applications

Vol. 30 No. 9
Sep. 2010

文章编号:1001 - 9081(2010)09 - 2449 - 04

# Hu 不变矩的构造与推广

张　伟,何金国
(中央民族大学 理学院,北京 100081)
(jackzhang83@163.com)

**摘　要**:为了更简洁高效地构造指定要求的不变矩,并判断矩组信息冗余性,推导了实复矩反演关系公式并提出了 Hu 不变矩构造定理。不变矩多项式和不变矩多项式空间概念的引入,可以赋予不变矩多项式空间代数结构特征。结合组合计数定理,列出了工程上非常实用且没有信息冗余的全部 3 阶 4 次不变矩,这是对 7 个经典 Hu 不变矩的推广。实验表明,与 Hu 不变矩的代数不变量构造方法和三角函数系构造方法相比,该构造方法更简洁高效且具有一般性,也更适合判断矩组信息冗余。所构造新不变矩具有较好的鲁棒性,用于图像描述取得了较好效果。

**关键词**:几何不变矩;仿射不变矩;复数矩;不变矩多项式空间

**中图分类号**:TP391　　**文献标志码**:A

# Construction and generalization of Hu moment invariants

ZHANG Wei, HE Jin-guo
(*School of Science, Minzu University of China, Beijing* 100081)

**Abstract:** Hu moment invariants play a very critical role in image description. In order to construct moment invariants suitable for certain requirements briefly and verify their information redundancy effectively, a new construction method was presented by inducting the relation formula of real-complex moments. Also some concepts as moment invariants polynomial and moment invariants polynomial space were discussed so as to characterize its algebra structure. Lastly, the author listed overall practical moment invariants based on 3-order moments without informational redundancy. Compared with the typical construction approaches: algebraic theoretic construction method and triangle function construction method, this algorithm is more brief and effective, and also more suitable for discovering information redundancy. Moreover, these new moment invariants are robust and perform well in image description.

**Key words:** geometric moment invariants; affine moment invariants; complex moment; linear space of moment invariants

## 0　引言

基于不变矩方法的区域形状描述在图像分析与模式识别中发挥着非常重要的作用。

文献[1]中,Hu M. K. 在 1961 年利用代数不变矩理论构造出 7 个不变矩(简称 Hu 矩),这种不变矩在平移、约束缩放、旋转下保持不变,并由此引起广大研究者对不变矩的研究兴趣。

文献[2-3]介绍了仿射不变矩的概念,将 Hu 几何不变矩成功推广到任意仿射变换下仍保持不变的仿射不变矩。仿射不变矩的意义不仅仅在于平面对象的特征提取,更重要的是在远距离摄像的条件下,三维空间几何体的旋转可以用二维仿射不变矩近似描述。

文献[4]介绍了单连通封闭区域的不变矩可以用边界链的不变矩描述,提出边界不变矩的概念。

文献[5]介绍了利用三角函数系来解释 Hu 几何不变矩,并构造若干新的不变矩。

对于不变矩的研究工作主要集中在以下几个方面:

1)不变矩的解释和构造[6];

2)不变矩的稳定性和不变性分析;

3)不变矩的快速算法;

4)不变矩的典型应用[7]。

研究目的是对 Hu 不变矩构造方法进行理论研究,并讨论信息冗余性问题,提出了全部 3 阶 4 次不变矩组,这些矩是对 Hu 不变矩的推广,用于图像描述取得较好效果。

## 1　矩理论

### 1.1　矩

矩的定义源于概率理论,是一种重要的数字特征,同时也具有直观的物理意义。对于二维数字图像,文献[1]中介绍了矩的相关定义和性质。

设图像区域 $f(x,y)$ 分段连续,并且在有限区域非零,那么定义原点矩和中心矩为:

$$m_{p,q} = \iint_D x^p y^q f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mu_{p,q} = \iint_D (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $x_c = m_{1,0}/m_{0,0}$, $y_c = m_{0,1}/m_{0,0}$ 为图像重心。

定义归一化中心矩为:$\eta_{p,q} = \dfrac{\mu_{p,q}}{\mu_{0,0}^{(p+q)/2+1}}$

直接按照定义计算可知 $\eta_{p,q}$ 具有如下性质:

1)具有平移和约束缩放不变性;

2)没有非约束缩放不变性;

经过计算,图像 $x$ 伸长 $a$ 倍,$y$ 伸长 $b$ 倍后,$\tilde{\eta}_{p,q}$ =

收稿日期:2010-03-26;修回日期:2010-05-19。

作者简介:张伟(1982-),男,湖北襄樊人,硕士研究生,CCF 会员,主要研究方向:图像处理、模式识别;　何金国(1973-),男,江西上饶人,副教授,博士,主要研究方向:模式识别、医学图像处理、三维建模。

$(\frac{a}{b})^{\frac{p-q}{2}}\eta_{p,q}$。

3）没有旋转不变性。

经过计算，图像旋转角度 $\theta$ 后：

$$\tilde{\eta}_{p,q}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_p^kC_q^l(-1)^k\cos^{p-k+l}\theta\sin^{q-l+k}\theta\eta_{(p+q)-(k+l),(k+l)}$$

归一化中心矩没有旋转不变性，为了构造旋转不变的不变矩多项式，需要特殊构造技巧来构造特殊形式的不变矩多项式，以消去系数中包含的 $\theta$。

### 1.2 Hu 不变矩

Hu M. K. 利用代数不变量理论构造了如下 7 个不变矩：

$$\phi_1=\eta_{20}+\eta_{02}$$

$$\phi_2=(\eta_{20}-\eta_{02})^2+4\eta_{11}^2$$

$$\phi_3=(\eta_{30}-3\eta_{12})^2+(\eta_{03}-3\eta_{21})^2$$

$$\phi_4=(\eta_{30}+\eta_{12})^2+(\eta_{03}+\eta_{21})^2$$

$$\phi_5=(\eta_{30}-3\eta_{12})(\eta_{30}+\eta_{12})[(\eta_{30}+\eta_{12})^2-3(\eta_{03}+\eta_{21})^2]+(3\eta_{21}-\eta_{03})(\eta_{21}+\eta_{03})[3(\eta_{30}+\eta_{12})^2-(\eta_{03}+\eta_{21})^2]$$

$$\phi_6=(\eta_{20}-\eta_{02})[(\eta_{30}+\eta_{12})^2-(\eta_{03}+\eta_{21})^2]+4\eta_{11}(\eta_{30}+\eta_{12})(\eta_{03}+\eta_{21})$$

$$\phi_7=(3\eta_{21}-\eta_{03})(\eta_{30}+\eta_{12})[(\eta_{30}+\eta_{12})^2-3(\eta_{03}+\eta_{21})^2]+(3\eta_{12}-\eta_{30})(\eta_{21}+\eta_{03})[3(\eta_{30}+\eta_{12})^2-(\eta_{03}+\eta_{21})^2]$$

这 7 个不变矩在平移、约束缩放、旋转变换下是不变的。

7 个不变矩的不变性可以直接用定义证明，也可以利用代数不变量方法来证明。

### 1.3 复数矩

文献[10]中介绍了复数矩，这里简要介绍一下相关定义和性质。

复数原点矩定义如下：

$$c_{p,q}=\iint_D(x+\mathrm{i}y)^p(x-\mathrm{i}y)^qf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似 Hu 矩定义，可以定义复数中心矩：

$$\xi_{p,q}=\iint_D(z-z_c)^p(\bar{z}-\bar{z}_c)^qf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定义复归一化中心矩为 $\zeta_{p,q}=\xi_{p,q}/\xi_{0,0}^{(p+q)/2+1}$

通过上述定义，经过计算得到：

1）具有平移和约束缩放不变性；

2）没有非约束缩放不变性。

经过计算，图像 $x$ 伸长 $a$ 倍，$y$ 伸长 $b$ 倍后，$\tilde{\zeta}_{p,q}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_p^kC_q^l\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p-k+l}\left(\frac{a-b}{2}\right)^{q-l+k}\zeta_{(p+q)-(k+l),(k+l)}$ 缩放性并不容易满足，所以需要特殊构造技巧来构造不变矩多项式消去包含 $a$ 和 $b$ 的系数。

3）没有旋转不变性。

经过计算，图像旋转一定角度 $\theta$ 之后的复数归一中心矩，即取 $\tilde{z}=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由于 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$ 故面积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不变，这时与 $\tilde{z}$ 对应的 $\tilde{\zeta}_{p,q}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\theta}\zeta_{p,q}$。

### 1.4 Hu 不变矩的三角函数系构造方法

文献[5]采用三角函数系的方法构造 Hu 不变矩，指出所构造的不变矩表达通式：$\left\{\cos\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\right)\Big|\sum k_i=0\right\}\cup\left\{\sin\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\right)\Big|\sum k_i=0\right\}$。

这种方法最主要的问题是：1）涉及到三角函数系展开，需要用到三角函数恒等公式，特别是多倍角公式计算较繁琐，不适合程序化计算；2）矩组信息冗余性的判断不是很直观，仅仅从不变矩的三角函数表达式不容易发现 $\phi_5^2+\phi_7^2=\phi_3\phi_4^3$，用三角函数系构造方法更适合"验证"而不是"找出"信息冗余；3）不变矩多项式空间结构表达并非很直观；4）方法不便于推广，难以构造工程实际中指定要求的不变矩。

## 2 不变矩构造定理

### 2.1 实复矩关系反演公式

经过计算得到如下 $\zeta_{p,q}$ 与 $\eta_{p,q}$ 关系反演公式：

$$\zeta_{p,q}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_p^kC_q^l(-1)^l\mathrm{i}^{k+l}\eta_{(p+q)-(k+l),(k+l)}$$

$$\eta_{p,q}=\frac{1}{2^{p+q}\mathrm{i}^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_p^kC_q^l(-1)^l\zeta_{(p+q)-(k+l),(k+l)}$$

如果设矩阵 $\left(\sum_r C_m^{n-r}C_{p+q-m}^r(-1)^r\right)_{mn}$ 为 $\boldsymbol{M}$，则可以得到关系反演公式的简单表达形式：

$$\begin{bmatrix}\zeta_{p+q,0}\\ \vdots\\ \zeta_{0,p+q}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\mathrm{i}^0&0&\cdots&0&0\\0&\mathrm{i}^1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&&\mathrm{i}^{p+q-1}&0\\0&0&\cdots&0&\mathrm{i}^{p+q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{p+q,0}\\ \vdots\\ \eta_{0,p+q}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_{p+q,0}\\ \vdots\\ \eta_{0,p+q}\end{bmatrix}=\frac{1}{2^{p+q}}\begin{bmatrix}(-\mathrm{i})^0&0&\cdots&0&0\\0&(-\mathrm{i})^1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&(-\mathrm{i})^{p+q-1}&0\\0&0&\cdots&0&(-\mathrm{i})^{p+q}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\zeta_{p+q,0}\\ \vdots\\ \zeta_{0,p+q}\end{bmatrix}$$

复数矩具有共轭性质即 $\bar{\zeta}_{p,q}=\zeta_{q,p}$，所以只需要计算 $p\geqslant q$ 情况下的复数归一中心矩，这样可以减少计算量。

实际应用中用得最多的是 4 阶以下不变矩，所以重点列出低阶矩的关系反演公式：

$$(\zeta_{0,0})=(1)(\eta_{0,0})=(1)$$

$$(\eta_{0,0})=(1)(\zeta_{0,0})=(1)$$

$$\begin{bmatrix}\zeta_{1,0}\\ \zeta_{0,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}\\1&-\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{1,0}\\ \eta_{0,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_{1,0}\\ \eta_{0,1}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_{1,0}\\ \zeta_{0,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\zeta_{2,0}\\ \zeta_{1,1}\\ \zeta_{0,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\mathrm{i}&-1\\1&0&1\\1&-2\mathrm{i}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{2,0}\\ \eta_{1,1}\\ \eta_{0,2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_{2,0}\\ \eta_{1,1}\\ \eta_{0,2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2&1\\-\mathrm{i}&0&\mathrm{i}\\-1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_{2,0}\\ \zeta_{1,1}\\ \zeta_{0,2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\zeta_{3,0}\\ \zeta_{2,1}\\ \zeta_{1,2}\\ \zeta_{0,3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\mathrm{i}&-3&-\mathrm{i}\\1&\mathrm{i}&1&\mathrm{i}\\1&-\mathrm{i}&1&-\mathrm{i}\\1&-3\mathrm{i}&-3&\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{3,0}\\ \eta_{2,1}\\ \eta_{1,2}\\ \eta_{0,3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_{3,0}\\ \eta_{2,1}\\ \eta_{1,2}\\ \eta_{0,3}\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ -i & -i & i & i\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ i & -3i & 3i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_{3,0}\\ \zeta_{2,1}\\ \zeta_{1,2}\\ \zeta_{0,3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\zeta_{4,0}\\ \zeta_{3,1}\\ \zeta_{2,2}\\ \zeta_{1,3}\\ \zeta_{0,4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4i & -6 & -4i & 1\\ 1 & 2i & 0 & 2i & -1\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -2i & 0 & -2i & -1\\ 1 & -4i & -6 & 4i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{4,0}\\ \eta_{3,1}\\ \eta_{2,2}\\ \eta_{1,3}\\ \eta_{0,4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_{4,0}\\ \eta_{3,1}\\ \eta_{2,2}\\ \eta_{1,3}\\ \eta_{0,4}\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\ -i & -2i & 0 & 2i & i\\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ i & -2i & 0 & 2i & -i\\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_{4,0}\\ \zeta_{3,1}\\ \zeta_{2,2}\\ \zeta_{1,3}\\ \zeta_{0,4}\end{bmatrix}$$

## 2.2　构造不变矩的基本原理

通过上面的介绍可知: 1) 通过中心化,可以消除平移带来的影响,从而实现矩的平移不变性; 2) 通过归一化,可以消除约束缩放带来的影响,从而实现矩的约束缩放不变性; 3) 通过构造不变矩多项式实现矩的( 非约束) 缩放不变性和旋转不变性。

所以构造不变矩的基本思路就是,直接由归一中心矩构造出对( 非约束) 缩放和旋转不变的矩。

在文献 [1] 中,Hu 借助代数不变矩理论构造出不变矩,计算比较复杂。本文提出了若干构造不变矩的定理,通过这些定理,能够比较简洁地构造出各种实用的不变矩。

## 2.3　不变矩多项式与不变矩多项式空间的概念

本文尝试地提出不变矩多项式和不变矩多项式空间的概念,并引出不变矩多项式空间的基的定义,这些概念将应用于不变矩多项式的构造中。

**定义 1**　如果一个多元多项式,自变量为归一化中心矩,并且这个多元多项式在某种变换( 例如平移、缩放、旋转等) 下保持不变,那么称这个多项式为在这个变换下的不变矩多项式。

**定义 2**　由不变矩多项式所构成的线性空间称为不变矩多项式空间。

**定义 3**　如果存在一组线性无关的不变矩多项式,并且任意不变矩多项式都可以写成它们的线性组合,那么就称这一组不变矩多项式为不变矩多项式空间的基。

为了刻画不变矩的数量级和稳定性,本文给出如下定义。

**定义 4**　给定一个不变矩多项式,其用到的归一化中心矩阶: $r_1 \cdots r_m$,不变矩多项式的次数为 $n$,那么称之为$(r_1 \cdots r_m)$ 阶 $n$ 次不变矩多项式。

## 2.4　不变矩多项式空间基表示定理

利用 $\eta_{p,q}$ 对平移和( 非约束) 缩放不变的性质及生成不变矩的方法,借助本文给出的不变矩多项式空间的概念,可以有如下更强的结论。

**定理 1**　TS 不变性定理。

$\left\{ \prod_{i=1}^{k} \eta_{p_i,q_i} \mid \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i, \forall k \in \mathbf{Z}^+ \right\}$ 组成了对平移和( 非约束) 缩放不变的不变矩多项式空间的基,而且这组基是完备的。

文献 [8] 中提到可以用 $\{\zeta_{p,q}\zeta_{q,p}\}$ 和 $\{\zeta_{r,s}\zeta_{t,u}^{k} + \zeta_{s,r}\zeta_{u,t}^{k} \mid (r-s) + k(t-u) = 0\}$ 生成不变矩,下面的定理给出更一般化的结论。

**定理 2**　TScR 不变性定理。

$\left\{ \prod_{i=1}^{k} \zeta_{p_i,q_i} \mid \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i, \forall k \in \mathbf{Z}^+ \right\}$ 组成了对平移、约束缩放和旋转不变的不变矩多项式空间的基,而且这组基是完备的。

上述定理可以简洁地构造满足不同要求的不变矩。

## 2.5　Hu 不变矩的验证与信息冗余性

1) Hu 不变矩的验证。

由 $\zeta_{p,q}$ 与 $\eta_{p,q}$ 关系反演公式,直接将关系反演公式代入 7 个 Hu 几何不变矩的表达式得到:

$$\phi_1 = \zeta_{1,1},\ \phi_2 = \zeta_{2,0}\zeta_{0,2}$$
$$\phi_3 = \zeta_{3,0}\zeta_{0,3},\ \phi_4 = \zeta_{2,1}\zeta_{1,2}$$
$$\phi_5 = \mathrm{Re}(\zeta_{3,0}\zeta_{1,2}^3) = \mathrm{Re}(\zeta_{0,3}\zeta_{2,1}^3)$$
$$\phi_6 = \mathrm{Re}(\zeta_{2,0}\zeta_{1,2}^2) = \mathrm{Re}(\zeta_{0,2}\zeta_{2,1}^2)$$
$$\phi_7 = \mathrm{Im}(\zeta_{3,0}\zeta_{1,2}^3) = -\mathrm{Im}(\zeta_{0,3}\zeta_{2,1}^3)$$

观察上述表达式不难验证 TScR 定理的正确性,反之由 TScR 定理也验证了 Hu 矩的平移、约束缩放和旋转不变性。

2) 信息冗余性。

不变矩的冗余性问题是不变矩理论一个重要问题。此前的研究者证明不变矩冗余性的方法比较复杂,而且并不具有一般性。

而本文利用 TScR 定理可以容易地得到 Hu 不变矩的信息冗余性,即 $\phi_5^2 + \phi_7^2 = \phi_3\phi_4^3$,因为所有的几何不变矩都是一个多元多项式,所以这种寻找信息冗余性的方法是具有一般性的。

## 2.6　不变矩的构造、信息冗余性与组合计数定理

1) 不变矩的构造原则。

考虑到计算量和稳定性,实际应用中构造不变矩需要遵循的原则: ①没有信息冗余; ②尽可能用低阶矩,这样可以降低计算离散化误差和计算量; ③尽可能用低次多项式,这样可以降低计算量。所以本文只构造使用 3 阶以下的矩并且次数小于 4 的不变矩多项式。

2) 构造若干新不变矩。

利用 TScR 定理可构造更多实用的 Hu 不变矩:

$$\begin{aligned}\phi_8 = {} & \mathrm{Im}(\zeta_{2,0}\zeta_{1,2}^2) = -\mathrm{Im}(\zeta_{0,2}\zeta_{1,2}^2) = \\ & 2\eta_{11}[(\eta_{30}+\eta_{12})^2 - (\eta_{03}+\eta_{21})^2] - \\ & 2(\eta_{20}-\eta_{02})(\eta_{30}+\eta_{12})(\eta_{03}+\eta_{21})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_9 = {} & \mathrm{Re}(\zeta_{2,0}^2\zeta_{1,2}\zeta_{0,3}) = \mathrm{Re}(\zeta_{0,2}^2\zeta_{2,1}\zeta_{3,0}) = \\ & [(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})^2 - 4\eta_{1,1}^2][(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(\eta_{3,0} - \\ & 3\eta_{1,2})] - [(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})^2 - 4\eta_{1,1}^2][(\eta_{2,1} + \\ & \eta_{0,3})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})] + [4\eta_{1,1}(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})] \\ & [(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})] + [4\eta_{1,1}(\eta_{2,0} - \\ & \eta_{0,2})][(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{10} = {} & \mathrm{Im}(\zeta_{2,0}^2\zeta_{1,2}\zeta_{0,3}) = -\mathrm{Im}(\zeta_{0,2}^2\zeta_{2,1}\zeta_{3,0}) = \\ & [4\eta_{1,1}(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})][(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2})] - \\ & [4\eta_{1,1}(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})][(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})] - \\ & [(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})^2 - 4\eta_{1,1}^2][(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})] - \\ & [(\eta_{2,0}-\eta_{0,2})^2 - 4\eta_{1,1}^2][(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{11} = {} & \mathrm{Re}(\zeta_{2,0}\zeta_{2,1}\zeta_{0,3}) = \mathrm{Re}(\zeta_{0,2}\zeta_{1,2}\zeta_{3,0}) = \\ & (\eta_{2,0}-\eta_{0,2})(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2}) + \\ & (\eta_{2,0}-\eta_{0,2})(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3}) - \\ & 2\eta_{1,1}(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2}) + \\ & 2\eta_{1,1}(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{12} = \mathrm{Im}(\zeta_{2,0}\zeta_{2,1}\zeta_{0,3}) = -\mathrm{Im}(\zeta_{0,2}\zeta_{1,2}\zeta_{3,0}) = \\ 2\eta_{1,1}(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2}) + \\ 2\eta_{1,1}(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3}) + \\ (\eta_{2,0}-\eta_{0,2})(\eta_{2,1}+\eta_{0,3})(\eta_{3,0}-3\eta_{1,2}) - \\ (\eta_{2,0}-\eta_{0,2})(\eta_{3,0}+\eta_{1,2})(3\eta_{2,1}-\eta_{0,3})\end{aligned}$$

3）信息冗余性。

上面列出的 12 个不变矩组具有冗余性：

$\phi_5^2 + \phi_7^2 = \phi_3\phi_4^3$，$\phi_6^2 + \phi_8^2 = \phi_2\phi_4^2$

$\phi_9^2 + \phi_{10}^2 = \phi_2^2\phi_3\phi_4$，$\phi_{11}^2 + \phi_{12}^2 = \phi_2\phi_3\phi_4$

4）不变矩的组合计数定理。

根据组合数学计数理论，在 TScR 定理约束条件下，使用 3 阶以下的矩，次数小于 4 次，而且要求没有信息冗余的不变矩多项式的基，就只有上面列出的这些，即：

$\{\phi_1$、$\phi_2$、$\phi_3$、$\phi_4$、$\phi_5$（或 $\phi_7$）、$\phi_6$（或 $\phi_8$）、$\phi_9$（或 $\phi_{10}$）、$\phi_{11}$（或 $\phi_{12}$）$\}$

也就是说这些矩是完全基组，即符合要求的多项式就只需要这 8 个即可生成。

### 2.7 构造指定要求的不变矩多项式

依据 TScR 定理可以方便地构造指定要求的不变矩，比如构造使用 $r$ 阶的 $k$ 次不变矩多项式，可以按照下面的思路来实现。设 $\zeta_{p_i,q_i}$ 为阶小于 $r$ 的复数矩，即 $p_i + q_i \leq r$，下面的公式给出了一般化的构造方法：$\left\{ \prod_{i=1}^{k} \zeta_{p_i,q_i} \mid \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i, p_i + q_i \leq r \right\}$。

## 3 仿真实验与结果分析

下面通过仿真实验来验证所构造的不变矩的不变性，并简要分析所构造的不变矩的理论和应用价值。

前面所得到的各不变矩都是在连续情况下证明的，对于实际应用中离散图像而言，由于离散图像经过旋转和缩放后可能产生像素信息损失，从而图像产生一定的失真，称之为离散化误差，实验所得的不变矩并不是随源图像的几何变换严格恒定不变，而是在小范围内波动。大量实验表明离散图像不变矩的不稳定性会随着不变矩多项式的次数和所用矩的阶数增加而增大。

仿真实验随机选取 6 幅图片，为了具有代表性并且有说服力，选取的图片尺寸和灰度级各不同。

### 3.1 平移不变性

根据不变矩的相关性质，几何不变矩对平移保持不变，不会产生离散化误差。

### 3.2 旋转不变性

根据不变矩的相关性质，几何不变矩对旋转 90°整倍数保持不变。在离散情况下，文献[5]中证明了，旋转 90°的整数倍不会产生离散误差，所以是严格保持不变的，这一点通过仿真实验得到验证。这个性质表明，几何不变矩以 90°为周期。所以，需要重点讨论的是旋转角度在 0～90°的旋转变换下的不变性。

本仿真实验中依次将原图旋转 1°，计算不变矩，然后计算变异系数（即标准差/均值），得到的数据如表 1 所示。

### 3.3 约束缩放不变性

在离散情况下，约束缩放会导致像素点信息损失，特别是大比例缩小变换更明显，所以，与旋转变换相比，缩放变换下不变矩波动稍大。

本仿真实验中依次将原图缩放 0.1～5 倍，然后计算变异系数（即标准差/均值），得到的数据如表 2 所示。

表 1 12 不变矩旋转稳定性 %

| 样本 | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_6$ | $\phi_7$ | $\phi_8$ | $\phi_9$ | $\phi_{10}$ | $\phi_{11}$ | $\phi_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 1.2 | 2.0 | 4.7 | 12.2 | 4.8 | 8.5 | 15.2 | 7.9 | 3.1 | 6.8 | 2.8 |
| 2 | 0.1 | 0.8 | 0.6 | 0.9 | 1.5 | 1.7 | 6.6 | 1.6 | 12.7 | 1.1 | 1.1 | 0.9 |
| 3 | 0.2 | 2.9 | 3.4 | 3.8 | 6.8 | 5.5 | 8.6 | 5.2 | 6.2 | 5.2 | 4.0 | 10.5 |
| 4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 2.4 | 6.7 | 14.1 | 2.6 | 2.2 | 2.1 | 1.5 | 1.0 | 2.6 |
| 5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.9 | 2.0 | 1.1 | 1.4 | 0.8 | 0.7 | 0.8 | 0.7 | 0.8 |
| 6 | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 0.6 | 0.4 | 5.3 | 1.2 | 0.7 | 0.7 | 0.5 | 0.6 |

表 2 12 不变矩缩放稳定性 %

| 样本 | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_6$ | $\phi_7$ | $\phi_8$ | $\phi_9$ | $\phi_{10}$ | $\phi_{11}$ | $\phi_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.2 | 5.5 | 9.9 | 10.5 | 75.9 | 17.0 | 46.5 | 10.9 | 41.2 | 14.0 | 52.1 | 11.3 |
| 2 | 0.1 | 1.5 | 1.4 | 1.8 | 2.8 | 2.5 | 8.7 | 1.8 | 5.5 | 2.0 | 2.4 | 2.4 |
| 3 | 0.7 | 3.2 | 6.2 | 7.3 | 8.8 | 6.6 | 15.6 | 11.8 | 6.1 | 8.3 | 3.9 | 14.8 |
| 4 | 0.9 | 3.1 | 3.4 | 8.6 | 21.2 | 53.9 | 13.3 | 9.2 | 8.2 | 8.8 | 6.3 | 10.8 |
| 5 | 0.9 | 2.8 | 4.2 | 5.3 | 10.3 | 6.5 | 9.8 | 5.9 | 6.8 | 6.1 | 5.5 | 6.4 |
| 6 | 0.9 | 1.9 | 3.7 | 5.3 | 9.5 | 5.9 | 12.1 | 5.8 | 4.6 | 5.8 | 4.6 | 7.1 |

表 1 和表 2 数据显示，新构造的 5 个不变矩对旋转和缩放变换的波动范围比较小，与 Hu 构造的 7 个不变矩效果相当，部分新构造的矩实验效果甚至优于 Hu 构造的部分不变矩，从而说明新构造的 5 个不变矩确实在一定程度上保持旋转和缩放不变性，与 Hu 的 7 个不变矩可以组成不变矩组。

## 4 结语

本文提出的不变矩多项式构造定理可以用于简洁地构造符合特定要求的不变矩，解释经典不变矩的信息冗余问题，用于图像特征提取取得了较好的效果。

本文的工作是对 Hu 不变矩进行定量理论研究。实际应用中，运用 Hu 不变矩还需要重点考虑计算速度等问题，但总的来说，Hu 不变矩作为图像区域描述仍发挥着重要作用。

**参考文献：**


[1] HU MING-KUEI. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. IRE Transactions on Information Theory, 1962, IT-8(2): 179 -187.

[2] FLUSSER J, SUK T. Pattern recognition by affine moment invariants [J]. Pattern recognition, 1993, 26(1): 167 -174.

[3] FLUSSER J, SUK T. A moment-based approach to registration of images with affine geometric distortion [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1994, 32(2): 382 -387.

[4] CHEN CHAUR-CHIN. Improved moment invariants for shape discrimination [J]. Pattern Recognition, 1994, 26(5): 683 -686.

[5] 刘进，张天序. 图像不变矩的推广[J]. 计算机学报，2004，27(5)：668 -673.

[6] 邵泽明，朱剑英. RSTC 不变矩图像特征点匹配新方法[J]. 华南理工大学学报：自然科学版，2008，36(8)：37 -40.

[7] 袁海军，文玉梅，李平，等. 不变矩系数拟合的步态识别[J]. 计算机应用，2007，27(4)：922 -924.

[8] MOSTAFA A Y S, PSALTIS D. Recognitive aspects of moment invariants [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 698 -706.

[9] MOSTAFA A Y S, PSALTIS D. Image normalization by complex moments [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1985, 7(1): 46 -55.

[10] ROTHE I, SUSSE H, VOSS K. The method of normalization to determine invariants [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(4): 366 -376.