IMP Formal Semantics

May 20, 2024

Syntax

$$\begin{aligned}
\mathit{boolean} &::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \\
b &::= \mathit{boolean} \\
i &::= \mathsf{int}\ \mathit{int} \\
\mathit{skip} &::= \mathsf{skip} \\
\mathit{vals} &::= b \mid i \\
x &::= \mathsf{var}\ x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{aexp} &::= x \mid i \mid \mathsf{plus}\ \mathit{aexp}\ \mathit{aexp} \mid \mathsf{times}\ \mathit{aexp}\ \mathit{aexp} \\
\mathit{bexp} &::= b \mid \mathsf{le}\ \mathit{aexp}\ \mathit{aexp} \\
\mathit{com} &::= \mathit{skip} \mid \mathsf{assn}\ x\ \mathit{aexp} \mid \mathsf{seq}\ \mathit{com}\ \mathit{com} \mid \mathsf{if}\ \mathit{bexp}\ \mathsf{then}\ \mathit{com}\ \mathsf{else}\ \mathit{com} \mid \mathsf{while}\ \mathit{bexp}\ \mathsf{do}\ \mathit{com} \\
\mathit{expr} &::= \mathit{aexp} \mid \mathit{bexp} \mid \mathit{com}
\end{aligned}$$

Configurations

$$\begin{aligned}
\mathit{aconfig} &::= \{\mathsf{store}\ \mathit{store}, \\
&\qquad \mathsf{aexp}\ \mathit{aexp}\} \\
\mathit{bconfig} &::= \{\mathsf{store}\ \mathit{store}, \\
&\qquad \mathsf{bexp}\ \mathit{bexp}\} \\
\mathit{cconfig} &::= \{\mathsf{store}\ \mathit{store}, \\
&\qquad \mathsf{com}\ \mathit{com}\} \\
\mathit{map} &::= \{\mathsf{var}\ x, \\
&\qquad \mathsf{value}\ \mathit{vals}\} \\
\mathit{store} &::= \mathit{map}^*
\end{aligned}$$

Arithmetic Expressions Big Step

$$\boxed{\mathit{aconfig} \hookrightarrow i}$$

$$\begin{array}{lllll}
[\textsc{aEval-i}] & \{\mathsf{store}\ \mathit{store},\ \mathsf{aexp}\ i\} & \hookrightarrow & i & \\
[\textsc{aEval-x}] & \{\mathsf{store}\ \mathit{store},\ \mathsf{aexp}\ x\} & \hookrightarrow & n & \text{if } n = \mathrm{lookup}(x, \mathit{store}) \\
[\textsc{aEval-add}] & \{\mathsf{store}\ \mathit{store},\ \mathsf{aexp}\ \mathsf{plus}\ a_1\ a_2\} & \hookrightarrow & n & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_1\} \hookrightarrow n_1 \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_2\} \hookrightarrow n_2 \\
 & & & & \wedge\ n = \mathrm{iadd}(n_1, n_2)
\end{array}$$

Boolean Expressions Big Step

$$\boxed{\mathit{bconfig} \hookrightarrow b}$$

$$\begin{array}{lllll}
[\textsc{bEval-true}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ \mathsf{true}\} & \hookrightarrow & \mathsf{true} & \\
[\textsc{bEval-false}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ \mathsf{false}\} & \hookrightarrow & \mathsf{false} & \\
[\textsc{bEval-le_t}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ \mathsf{le}\ a_1\ a_2\} & \hookrightarrow & \mathsf{true} & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_1\} \hookrightarrow n_1 \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_2\} \hookrightarrow n_2 \\
 & & & & \wedge\ \mathsf{true} = \mathrm{le}(n_1, n_2) \\
[\textsc{bEval-le_f}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ \mathsf{le}\ a_1\ a_2\} & \hookrightarrow & \mathsf{false} & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_1\} \hookrightarrow n_1 \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a_2\} \hookrightarrow n_2 \\
 & & & & \wedge\ \mathsf{false} = \mathrm{le}(n_1, n_2)
\end{array}$$

Commands Big Step

$$\boxed{\mathit{cconfig} \hookrightarrow \mathit{store}}$$

$$\begin{array}{lllll}
[\textsc{cEval-skip}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathit{skip}\} & \hookrightarrow & st & \\
[\textsc{cEval-assgn}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{assn}\ x\ a\} & \hookrightarrow & st_0 & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{aexp}\ a\} \hookrightarrow n \\
 & & & & \wedge\ st_0 = \mathrm{append}(st, x, n) \\
[\textsc{cEval-seq}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{seq}\ c_0\ c_1\} & \hookrightarrow & st_1 & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ c_0\} \hookrightarrow st_0 \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st_0,\ \mathsf{com}\ c_1\} \hookrightarrow st_1 \\
[\textsc{cEval-If-T}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{if}\ be\ \mathsf{then}\ c_0\ \mathsf{else}\ c_1\} & \hookrightarrow & st_0 & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ be\} \hookrightarrow \mathsf{true} \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ c_0\} \hookrightarrow st_0 \\
[\textsc{cEval-If-F}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{if}\ be\ \mathsf{then}\ c_0\ \mathsf{else}\ c_1\} & \hookrightarrow & st_0 & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ be\} \hookrightarrow \mathsf{false} \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ c_1\} \hookrightarrow st_0 \\
[\textsc{cEval-While-F}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{while}\ be\ \mathsf{do}\ c\} & \hookrightarrow & st & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ be\} \hookrightarrow \mathsf{false} \\
[\textsc{cEval-While-T}] & \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ \mathsf{while}\ be\ \mathsf{do}\ c\} & \hookrightarrow & st_1 & \text{if } \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{bexp}\ be\} \hookrightarrow \mathsf{true} \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st,\ \mathsf{com}\ c\} \hookrightarrow st_0 \\
 & & & & \wedge\ \{\mathsf{store}\ st_0,\ \mathsf{com}\ \mathsf{while}\ be\ \mathsf{do}\ c\} \hookrightarrow st_1
\end{array}$$