APR 29TH, 2014

LAS 4-Similarity Matrix

线性代数那些事 Things of Linear Algebra
逸夫图书馆, 2014/4/27

相似矩阵

什么是相似矩阵?

相似矩阵 on wiki在线性代数中，相似矩阵是指存在相似关系的矩阵。相似关系是两个矩阵之间的一种等价关系。两个n×n矩阵A与B为相似矩阵当且仅当存在一个n×n的可逆矩阵P，使得下面的式子成立，P被称为矩阵A与B之间的相似变换矩阵。

$P^{-1}AP = B$ 或 $AP = PB$

这种定义没人能看懂其中的内在含义，那么到底相似矩阵是什么?

wiki 网址链接上的表达是：**矩阵是线性变换f在特定“角度”（基底）下的“素描”。不同的“角度”下，描述f 的矩阵是不同的，但这些矩阵都是相似矩阵。**

同样还是先借用下小苏的解释供大家理解下，简而言之就是，**相似矩阵其实是在不同的坐标系中对同一个线性变换的不同的表达而已**!

> *“矩阵是线性空间中的线性变换的一个描述。在一个线性空间中，只要我们选定一组基，那么对于任何一个线性变换，都能够用一个确定的矩阵来加以描述。” 同样的，对于一个线性变换，只要你选定一组基，那么就可以找到一个矩阵来描述这个线性变换。换一组基，就得到一个不同的矩阵。所有这些矩阵都是这同一个线性变换的描述，但又都不是线性变换本身。所有这些同一个线性变换的描述的矩阵互为相似矩阵。*

Part 1

首先来一个比较物理的理解：矩阵A描述了向量x到向量y的一个运动，即$y = Ax$；但是，这仅仅是在直角坐标系下测量的，在一个新的坐标系P之下，假设测量结果为$y' = Bx'$。

根据我们在前边给出的矩阵几何理解，在P坐标系下测量的x'，在直角坐标系测量为x，可以表示成$Px' = x$；同理有$Py' = y$。代入就得到：$Py' = APx'$，可以稍稍改成$Py' = P(P^{-1}AP)x'$，换句话说，在P坐标系下，从x'到y'的运动用矩阵$B = P^{-1}AP$表示，这就是A的一个相似矩阵！所以说，一族相似矩阵，只不过是同一个线性变换在不同坐标系下的一个测量结果而已。

Part 2

其实，相似矩阵还有一个相对直观的几何立体模型。我们知道一个矩阵A由n个列向量组成，它实际上给出了n维空间的一个n维平行方体（类比二维的平行四边形和三维的平行六面体）。而矩阵I实际上给出了一个n维单位方体。假设他们两个存在某种对应关系。

而矩阵A在新坐标系P下的测量结果为$P^{-1}A$，即$A = P(P^{-1}A)$；而I在P的测量结果为$I = P(P^{-1})$，也就是说，在新坐标系下，P^{-1}与$P^{-1}A$具有对应关系。那么新坐标系下的单位方体对应什么呢？那就是
$P^{-1} \to P^{-1}P = I$
$P^{-1}A \to P^{-1}AP$

也就是说新坐标系下的单位方体对应着相似矩阵所描述的n维方体！

这压根儿就是配对原则嘛！

这就不难理解为什么相似矩阵的行列式值都相同了。行列式的几何意义就是体积，虽然矩阵A代表的立方体经过坐标变换后体积变了，但是单位方体的体积实则也变啦，也就是说，新坐标系下一切标度都变化了，但是从“数格子”的角度来说，格子数目是没有变化的，所以体积也就没有变化了。

判断两个矩阵是否相似的辅助方法:

1.判断行列式是否相等;

2.判断迹是否相等;

以上条件可以作为判断矩阵是否相似的必要条件，而非充分条件。

相似矩阵的性质，关键在于理解**在给定了矩阵A后，只要能找到一个与之相似而又足够“简单”的“规范形式”B，那么对A的研究就可以转化为对更简单的矩阵B的研究。比如如果A与一个对角矩阵相似，那么称A为可对角化的，因为对角矩阵有很多很好的性质(比如特征值就是主对角线上的元素)，这样对于A的分析就方便多了**。注意，不是所有的矩阵都可以对角化，但是至少在复数域下，所有的矩阵都相似于一些被称为若尔当标准型的矩阵。

相似矩阵最重要的作用就是简化对复杂矩阵的分析，因为相似矩阵和原矩阵有很多相似的地方(不变的量很多，下面不变的性质中都列举了)，所以我们可以用简单的相似矩阵来研究很复杂的原矩阵。后面矩阵分解总结中的QR分解就利用了相似变换不改变特征值的性质来计算矩阵的特征值。

性质 [编辑]

相似变换是矩阵之间的一种等价关系，也就是说满足：

1. 反身性：任意矩阵都与其自身相似。
2. 对称性：如果A和B相似，那么B也和A相似。
3. 传递性：如果A和B相似，B和C相似，那么A也和C相似。

矩阵间的相似关系与所在的域无关：设K是L的一个子域，A和B是两个系数在K中的矩阵，则A和B在K上相似当且仅当它们在L上相似。这个性质十分有用：在判定两个矩阵是否相似时，可以随意地扩张系数域至一个代数闭域，然后在其上计算若尔当标准形。

如果两个相似矩阵A和B之间的转换矩阵P是一个置换矩阵，那么就称 A和B “置换相似” 。 如果两个相似矩阵A和B之间的转换矩阵P是一个酉矩阵，那么就称 A和B “酉相似” 。谱定理证明了每个正交矩阵都酉相似于某个对角矩阵。

相似变换下的不变性质 [编辑]

两个相似的矩阵有许多相同的性质：

- 两者的秩相等。
- 两者的行列式相等。
- 两者的迹数相等。
- 两者拥有同样的特征值，尽管相应的特征向量一般不同。
- 两者拥有同样的特征多项式。
- 两者拥有同样的初等因子。

这种现象的原因有两个：

- 两个相似的矩阵可以看做是同一个线性变换的 “两面” ，即在两个不同的基下的表现。
- 映射$X \mapsto P^{-1}XP$是从n阶方阵射到n阶方阵的一个双射同构，因为P是可逆的。

因此，在给定了矩阵A后，只要能找到一个与之相似而又足够 “简单” 的 “规范形式” B，那么对A的研究就可以转化为对更简单的矩阵B的研究。比如说A被称为可对角化的，如果它与一个对角矩阵相似。不是所有的矩阵都可以对角化，但至少在复数域（或任意的代数闭域）内，所有的矩阵都相似于一些被称为若尔当标准形的简单的矩阵。另一种标准形：弗罗贝尼乌斯标准形则在任意的域上都适用。只要查看A和B所对应的标准形是否一致，就能知道两者是否相似。

某些性质不变的证明:

1.行列式不变: $det(B) = det(P^{-1})det(A)det(P) = det(A)det(P^{-1}P) = det(A)$

2.特征值不变，但是相应的特征向量一般不同

假设有$Bv = \lambda v$，代入$B = P^{-1}AP$得到：$P^{-1}APv = \lambda v$

左右两边同时左乘P得到：$APv = P\lambda v$，即 $A(Pv) = \lambda(Pv)$

也就是说，如果矩阵B有一个特征值λ，对应的特征向量是v，那么它的相似矩阵A也对应有一个特征值λ，而对应的特征向量是Pv。进一步，我们还可以看出，如果v是可逆矩阵P的特征值为1对应的特征向量的时候，A和B的特征向量也是一样的。

Posted by hujiawei • Apr 29th, 2014 • math

« LAS 3-EigenVectors and Eigenvalues
LAS 5-Orthogonal Matrix »