APR 29TH, 2014

LAS 5-Orthogonal Matrix

线性代数那些事 Things of Linear Algebra
逸夫图书馆，2014/5/22

正交矩阵

1.正交矩阵

什么是正交?

两个向量的内积如果是零，那么就说这两个向量是正交的，在三维空间中，正交的两个向量相互垂直。如果相互正交的向量长度均为 1，那么他们又叫做标准正交基。

那什么是正交矩阵呢?

正交矩阵 on wiki的介绍是：在矩阵论中，实数正交矩阵是方块矩阵Q，它的转置矩阵是它的逆矩阵：
$Q^TQ = QQ^T = I$

注意上面提到的 实数 二字，正交矩阵中的元素都是实数，包含复数并且同样满足正交性质的矩阵是酉矩阵，也就是推广到复数域之后的"正交矩阵"。

简单地理解就是指列向量相互正交的矩阵，但是还需要满足列向量是正交规范化的。

实数方块矩阵是正交的，当且仅当它的列形成了带有普通欧几里得点积的欧几里得空间R^n 的正交规范基，它为真当且仅当它的行形成R^n 的正交基。假设带有正交（非正交规范）列的矩阵M叫正交矩阵可能是诱人的，但是这种矩阵没有特殊价值而没有特殊名字；它们只是M^TM = D，D是对角矩阵。

正交矩阵最重要的性质之一是它的变换可以保证一个向量的长度不变，包括 Euclidean lenght， matrix norm 和 Frobenius norm。[最后一个是矩阵的F范数]

下面考虑一个向量v，v的长度的平方是v^Tv。如果作用在向量v上的线性变换Q保持了向量长度，即

$$v^Tv = (Qv)^T(Qv) = v^TQ^TQv$$

能够做到保持向量长度不变的线性变换也就是旋转、反射和它们的组合，所以**旋转、反射和它们的组合都产生正交矩阵。反过来，正交矩阵也蕴涵了正交变换(旋转变换或者反射变换)**。但是，**线性代数包括了在既不是有限维的也不是同样维度的空间之间的正交变换，它们没有等价的正交矩阵。**

一些小正交矩阵的例子和可能的解释。来源自wiki

下面是一些小正交矩阵的例子和可能的解释。

- $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$恒等变换。
- $\begin{bmatrix}0.96&-0.28\\0.28&0.96\end{bmatrix}$旋转16.26°。
- $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$针对x轴反射。
- $\begin{bmatrix}0&-0.80&-0.60\\0.80&-0.36&0.48\\0.60&0.48&-0.64\end{bmatrix}$旋转反演（rotoinversion）:轴 (0,-3/5,4/5)，角度90°。
- $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$置换坐标轴。

低维度下的正交阵。

低维度 [编辑]

最简单的正交矩阵是1×1矩阵[1]和[−1]，它们可分别解释为恒等和实数线针对原点的反射。

如下形式的2×2矩阵

$$\begin{bmatrix}p&t\\q&u\end{bmatrix},$$

它的正交性要求满足三个方程

$$1=p^2+q^2,$$
$$1=t^2+u^2,$$
$$0=pt+qu。$$

在考虑第一个方程时，不丢失一般性而设p = cos θ, q = sin θ；因此要么t = −q, u = p要么t = q, u = −p。我们可以解释第一种情况为旋转θ(θ = 0是单位矩阵)，第二个解释为针对在角θ/2的直线的反射。

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}旋转 \begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}反射$$

在45°的反射对换x和y；它是置换矩阵，在每列和每行带有一个单一的1(其他都是0)：

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}。$$

单位矩阵也是置换矩阵。

反射是它自己的逆，这蕴涵了反射矩阵是对称的（等于它的转置矩阵）也是正交的。两个旋转矩阵的积是一个旋转矩阵，两个反射矩阵的积也是旋转矩阵。

对一个二维向量v，让它旋转θ角度其实也可以看做是让它以$\frac{1}{2}\theta$角度进行反射。

我们思考一下，反射的逆矩阵是什么？反射的逆过程其实就是它自己对不对？也就是说反射的逆矩阵等于反射本身！所以就有了**反射矩阵、反射矩阵的逆矩阵以及它的转置矩阵三者相同！**

高维度下的正交矩阵比较复杂，但是可以通过基本模块例如置换、反射和旋转来构建高维的正交矩阵，例如下面要介绍的Householder变换和Givens旋转。(置换矩阵就是单位矩阵的某些行和列交换后得到的矩阵)

更高维度 [编辑]

不管维度，总是可能把正交矩阵按纯旋转与否来分类，但是对于3×3矩阵和更高维度矩阵要比反射复杂多了。例如，

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}和\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

表示通过原点的反演和关于z轴的旋转反演(逆时针旋转90°后针对x-y平面反射，或逆时针旋转270°后对原点反演)。

旋转也变得更加复杂；它们不再由一个角来刻画，并可能影响多于一个平面子空间。尽管经常以一个轴和角来描述3×3旋转矩阵，在这个维度旋转轴的存在是偶然的性质而不适用于其他维度。

但是，我们有了一般适用的基本建造板块如置换、反射、和旋转。

基本变换 [编辑]

最基本的置换是换位（transposition），通过交换单位矩阵的两行得到。任何n×n置换矩阵都可以构造为最多n−1次换位的积。构造自非零向量v的Householder反射为

$$Q = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}。$$

这里的分子是对称矩阵，而分母是v的平方量的一个数。这是在垂直于v的超平面上的反射（取负平行于v任何向量分量）。如果v是单位向量，则Q = I−2vv^T就足够了。Householder反射典型的用于同时置零一列的较低部分。任何n×n正交矩阵都可以构造为最多n次这种反射的积。

Givens旋转作用于由两个坐标轴所生成的二维（平面）子空间上，按选定角度旋转。它典型的用来置零一个单一的次对角线元素（subdiagonal entry）。任何n×n的旋转矩阵都可以构造为最多n(n−1)/2次这种旋转的积。在3x3矩阵的情况下，三个这种旋转就足够了；并且通过固定这个序列，我们可以用经常叫做欧拉角的三个角来（尽管不唯一）描述所有3×3旋转矩阵。

雅可比旋转有同Givens旋转一样的形式，但是被用做相似变换，选择来置零2×2子矩阵的两个远离对角元素（off-diagonal entry）。

既然正交矩阵这么有用，有时候我们就会想要把一个矩阵正交化，那怎么正交化呢？线代书中介绍了典型的Gram-Schmidt正交化 on wiki，但是实际应用中这种方法会因为误差的累积使得最后的正交性很差，所以经常使用的是下面的Givens旋转和Householder变换。

2.Givens旋转

Givens旋转又称为平面旋转变换，它能够消去给定向量的某一个分量（使其为0），这点不同于Householder变换消去向量中的多个分量，在处理有很多零元素的稀疏向量或者稀疏矩阵的时候Givens旋转就更加有效。

喻文健老师的《数值分析与算法》对此介绍地很详细，内容如下：

先看下2x2的Givens旋转的推导过程：

先给出 2×2 的 Givens 旋转矩阵的定义.

定义 5.9：矩阵 $G\in\mathbb{R}^{2\times2}$，若

$$G=\begin{bmatrix}c&s\\-s&c\end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

其中 $c=\cos\theta, s=\sin\theta, \theta\in\mathbb{R}$，则称矩阵 G 为 2 阶 Givens 旋转矩阵.

从定义可以看出，在二维几何空间中，Givens 旋转矩阵实现向量的旋转变换，即 Gx 为向量 x 顺时针旋转 θ 角度后得到的向量. 并且，矩阵 G 是正交矩阵. 因此，

$$G^{-1}=\begin{bmatrix}c&-s\\s&c\end{bmatrix}.$$

合适地选择 θ 值，或者实际的参数 c 和 s（它们满足 $c^2+s^2=1$），构造 Givens 旋转矩阵可消去任意向量的分量. 例如，要使

$$Gx=\begin{bmatrix}c&s\\-s&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix},$$

其中 $\alpha=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$（由于 G 为正交阵，必有 $|\alpha|=\|x\|_2$），则

$$c=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad s=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}. \quad (5.17)$$

为避免数值的上溢，有时也对公式进行调整. 若 $|x_1|\geqslant|x_2|$，则可按如下公式计算：

$$t=\frac{x_2}{x_1}, \quad c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s=c\cdot t.$$

若 $|x_1|<|x_2|$，则类似地，

$$t=\frac{x_1}{x_2}, \quad s=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad c=s\cdot t.$$

将其推广到n维向量的情况：

上述消去二维向量一个分量的技术可用于处理一般的 n 维向量，若对目标分量 k 和另一个分量 j 进行"旋转"，可以将分量 k 变为 0，而将其原有值"添加"到分量 j 中. 要达到这个目的，先构造一个 2×2 的 Givens 旋转矩阵，再将其"嵌入"到 n 阶单位阵的第 j、k 行和第 j、k 列中便得到实际的 n 阶旋转矩阵. 以 $n=5$，$j=2$，$k=4$ 的情形为例，旋转变换为

$$Gx=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&c&0&s&0\\0&0&1&0&0\\0&-s&0&c&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\\alpha\\x_3\\0\\x_5\end{bmatrix},$$

其中

$$c=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_4^2}}, \quad s=\frac{x_4}{\sqrt{x_2^2+x_4^2}}, \quad \alpha=\sqrt{x_2^2+x_4^2}.$$

很容易看出，这种一般的 Givens 旋转变换矩阵仍然是正交阵. 利用一系列这样的 Givens 旋转，可依次消去向量中的非零元素，使其最终成为 σe_1 的形式（达到与定理 5.19 中 Householder 变换同样的效果）.

举例说明Givens旋转的处理过程：

例 5.10（Givens 旋转变换）：通过一系列 Givens 旋转变换，消去下面向量中除第 1 个分量以外的分量

$$a=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

【解】 首先针对向量的第一、三分量构造旋转变换矩阵 $G_1'=\begin{bmatrix}c_1&s_1\\-s_1&c_1\end{bmatrix}$，利用公式(5.17)求出 $c_1=2/\sqrt{5}, s_1=1/\sqrt{5}$，则

$$G_1=\begin{bmatrix}c_1&0&s_1&0\\0&1&0&0\\-s_1&0&c_1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad G_1a=\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\0\\0\\2\end{bmatrix}.$$

然后，针对向量的第一、四分量构造旋转变换矩阵 $G_2'=\begin{bmatrix}c_2&s_2\\-s_2&c_2\end{bmatrix}$，利用公式(5.17)求出 $c_2=\sqrt{5}/3, s_2=2/3$，则

$$G_2=\begin{bmatrix}c_2&0&0&s_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-s_2&0&0&c_2\end{bmatrix}, \quad G_2G_1a=\begin{bmatrix}c_2&0&0&s_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-s_2&0&0&c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\0\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

从例 5.10 可以看出，一般的 Givens 旋转矩阵都只有 4 个需计算的元素，而它们的值仅由两个参数 c、s 确定. 并且，Givens 旋转矩阵与任意向量相乘都仅影响向量的两个分量，不会改变其他分量的值. 对于所有分量均不为零的 n 维向量，要达到一次 Householder 变换的消去效果，则需做 $n-1$ 次 Givens 旋转，其计算量和存储量都高于 Householder 变换. 但对于非常稀疏的向量，采用 Givens 旋转显然更为有效.

Givens 旋转在数值线性代数中主要的用途是在向量或矩阵中介入零。例如，这种效果可用于计算矩阵的 QR分解。超过Householder变换的一个好处是它们可以轻易的并行化，另一个好处是对于非常稀疏的矩阵计算量更小。

关于旋转矩阵的内容：

wiki: 旋转矩阵是在乘以一个向量的时候有改变向量的方向但不改变大小的效果的矩阵。旋转矩阵不包括点反演，它可以把右手坐标系改变成左手坐标系或反之。所有旋转加上反演形成了正交矩阵的集合。旋转可分为主动旋转与被动旋转。主动旋转是指将向量逆时针围绕旋转轴所做出的旋转。被动旋转是对坐标轴本身进行的逆时针旋转，它相当于主动旋转的逆操作。

一个矩阵是旋转矩阵，当且仅当它是正交矩阵并且它的行列式是单位一。正交矩阵的行列式是 ±1(根据$UU^T = E$，且$det(U) = det(U^T)$易得)，如果行列式是 −1，则它包含了一个反射而不是真旋转矩阵。

[正交矩阵的行列式如果是-1，则它包含了一个反射！如果是1，则它包含了一个旋转！ 不知道正确与否，若读者明白请留言告知，谢谢]

旋转矩阵是正交矩阵，如果它的列向量形成 R^n 的一个正交基，就是说在任何两个列向量之间的标量积是零(正交性)而每个列向量的大小是单位一(单位向量)。一定要记住旋转矩阵一定是正交矩阵，所以也就有它的转置矩阵等于它的逆矩阵，并且它的行列式为1！

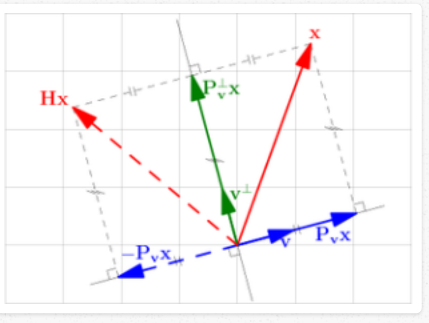
性质 [编辑]

设 $\mathbf{M}$ 是任何维的一般旋转矩阵：$\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$

- 两个向量的点积(内积)在它们都被一个旋转矩阵操作之后保持不变：
  $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{M}\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}\mathbf{b}$
- 从而得出旋转矩阵的逆矩阵是它的转置矩阵：
  $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}\mathbf{M}^{\top}=\mathcal{I}$ 这里的 $\mathcal{I}$ 是单位矩阵。
- 一个矩阵是旋转矩阵，当且仅当它是正交矩阵并且它的行列式是单位一。正交矩阵的行列式是 ±1；如果行列式是 −1，则它包含了一个反射而不是真旋转矩阵。
- 旋转矩阵是正交矩阵，如果它的列向量形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交基，就是说在任何两个列向量之间的标量积是零(正交性)而每个列向量的大小是单位一(单位向量)。
- 任何旋转向量可以表示为斜对称矩阵 A的指数：
  $$\mathbf{M}=\exp(\mathbf{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$
  这里的指数是以泰勒级数定义的而 $\mathbf{A}^k$ 是以矩阵乘法定义的。A 矩阵叫做旋转的"生成元"。旋转矩阵的李代数是它的生成元的代数，它就是斜对称矩阵的代数。生成元可以通过 M 的矩阵对数来找到。

3.Householder反射

Householder变换是一个初等反射变换，用Householder矩阵左乘一个向量或者矩阵，即实现Householder变换。下图为Householder变换的图示，向量x在矩阵H的作用下得到的向量Hx和原向量x刚好是镜像反射关系。



一个nxn的Householder矩阵H具有如下的形式：

$$H = I - \frac{2}{v^Tv}vv^T$$

其中，矩阵I是一个(nxn)单位阵(对角线元素都是1)，而v是一个包含n个元素的列向量

$$v = c + \|c\|_2e$$

向量c和e是包含n个元素的列向量，分别对应要变换的矩阵的某一列和单位阵的某一列，$\|c\|_2$是向量c的二范数

$$\|c\|_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots + c_n^2}$$

矩阵H是正交对称阵，所以$H = H^T = H^{-1}$。**Househoulder变换实现向量在线性空间中的"镜面反射"，即Hx是向量x相对于法向量为v的超平面的镜像，也就是Hx和x关于平面S镜像对称。采用Householder变换可以将向量x中除某一个分量之外的其他分量变成0，这是一种消元操作。**注意一类小技巧，不需要显式构造H便可以计算Hx，如下所示，只需计算向量x和v^T的内积，不用计算矩阵和向量的乘法，下面等式最右边的$\frac{v^Tx}{v^Tv}$实际上是一个标量！

$$Hx = (I - \frac{2}{v^Tv}vv^T)x = x - 2\frac{v^Tx}{v^Tv}v$$

将(nxn)矩阵A分解为正交阵Q和上三角阵R的过程需要$n-1$步。下面看下详细的处理流程：[下面的步骤其实就是QR分解的核心，QR分解的内容请看下节]

(1)向量c是矩阵A的第一列，向量e是长度为n的列向量，如果c的第一个元素是正数的话e的第一个元素是1，否则是-1(**这么做其实是为了防止大数吃小数现象，也就是减小误差**)。得到c和e之后，便可以计算出v，然后得到矩阵H_1，如下所示：

$$c = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\cdots\\a_{nn}\end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix}\pm1\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix}$$

将H_1作用于A，此时$Q_1 = H_1, R_1 = H_1A$。其中Q_1是正交阵，R_1的第一列第一个元素以下的元素都是0。R_1大致如下所示：

$$\begin{pmatrix}R_{11}^{(1)}&R_{12}^{(1)}&\cdots&R_{1n}^{(1)}\\0&R_{22}^{(1)}&\cdots&R_{2n}^{(1)}\\0&R_{32}^{(1)}&\cdots&R_{3n}^{(1)}\\0&R_{42}^{(1)}&\cdots&R_{4n}^{(1)}\end{pmatrix}$$

(2)这步中向量c是矩阵R_1的第二列，并且第一个元素设置为0，向量e是长度为n的列向量，不过第二个元素是±1，如果c的第二个元素是正数的话e的第二个元素是1，否则是-1。得到c和e之后，便可以得到矩阵H_2，如下所示：

$$c = \begin{bmatrix}0\\R_{12}^{(1)}\\\cdots\\R_{n2}^{(1)}\end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix}0\\\pm1\\\cdots\\0\end{bmatrix}$$

将H_2作用于R_1，此时$Q_2 = Q_1H_2, R_2 = H_2R_1$。其中$Q_2$是正交阵，$R_2$的第二列第二个元素以下的元素都是0。$R_2$大致如下所示：

$$\begin{pmatrix}R_{11}^{(2)}&R_{12}^{(2)}&\cdots&R_{1n}^{(2)}\\0&R_{22}^{(2)}&\cdots&R_{2n}^{(2)}\\0&0&\cdots&R_{3n}^{(2)}\\0&0&\cdots&R_{4n}^{(2)}\end{pmatrix}$$

(3)重复与上面类似的过程，直到第(n-1)步，得到$Q_{n-1} = Q_{n-2}H_{n-1} = H_1H_2\cdots H_n$，同时$R_{n-1} = H_{n-1}R_{n-2} = H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2H_1$，此时$R_{n-1}$是一个上三角阵，$Q_{n-1}$是一个正交阵，得到矩阵$A$的QR分解式为$A = Q_{n-1}R_{n-1}$。

喻文健老师的《数值分析与算法》对Householder反射的介绍也很详细，重要内容如下：

Householder反射正确性的证明，注意其中的 $\omega = \frac{v}{\|v\|_2}$

如图 5-4 所示，设向量 w 和 x 的起点都在三维坐标系原点，以 w 为法向做一平面 S，w 为单位长度向量，x 为不在平面 S 内的任意向量，

$$Hx=(I-2ww^T)x=x-2ww^Tx$$
$$=x-2(w^Tx)w. \quad (5.14)$$

考察图中向量 x 在 w 方向的投影向量 y，根据向量内积的定义知，

$$\langle x,w\rangle=\|w\|_2\|y\|_2=\|y\|_2$$
$$\Rightarrow\|y\|_2=\langle x,w\rangle=x^Tw=w^Tx.$$

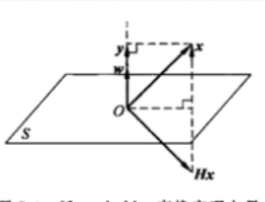


图 5-4 Householder 变换实现向量的镜面反射

又由于向量 y 和 w 方向相同，则 $(w^Tx)w=y$，于是

$$Hx=x-2y.$$

结合图 5-4，$2y$ 为虚线表示的向量，由此得到 Hx 与 x 关于平面 S 镜像对称.

下面有两个关于Householder的定理，其实也很重要，便于理解镜面的法向量

下面给出两个定理，它们是通过 Householder 变换实现矩阵的正交三角化的基础.

定理 5.18：设 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$x\neq y$，$\|x\|_2=\|y\|_2$，则存在 Householder 矩阵 H，使 $Hx=y$.

定理 5.19：设 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T\neq0$，则存在 Householder 矩阵 H，使 $Hx=-\sigma e_1$，其中

$$\sigma=\mathrm{sign}(x_1)\|x\|_2, \quad e_1=[1,0,\cdots,0]^T, \quad \mathrm{sign}(x_1)=\begin{cases}1, & x_1\geqslant0\\-1 & x_1<0\end{cases}.$$

定理 5.18 的证明是构造性的，假设单位长度向量 $w=(x-y)/\|x-y\|_2$，则可证明由它生成的 $H=I-2ww^T$ 能使 $Hx=y$. 这通过 Householder 变换的几何意义很容易理解. Householder 变换实现镜面反射，向量 x 和 y 关于镜面是对称的，则镜面的法向必然是沿 $x-y$ 的方向，或其反方向，据此可构造出向量 w 和相应的矩阵 H 满足要求. 此外，还可以证明满足要求的 Householder 矩阵是唯一的.

定理 5.19 实际上是定理 5.18 的推论，因为 $\|-\sigma e_1\|_2=|\sigma|=\|x\|_2$. 因此，构造满足定理要求的 Householder 矩阵时，可取向量 $w=(x+\sigma e_1)/\|x+\sigma e_1\|_2$. 对定理 5.19 再说明两点：

(1) 该定理的意义为，采用 Householder 变换可将向量 x 中除第一个分量外的其他分量均变成 0，这是一种消元操作.

(2) 公式 $Hx=-\sigma e_1$ 等号右边的"−"号可保证计算的稳定性，它使得求 w 的第一个向量分量时，计算的是 $x_1+\mathrm{sign}(x_1)\|x\|_2$，为两个同符号的数相加，不会发生"抵消"现象. 同时注意，变换后向量的第一个分量改变了符号.

最后给出一个Householder反射变换的例子：

例 5.9（Householder 变换）：确定一个 Householder 变换，用以消去下面向量中除第一个分量以外的分量

$$a=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}.$$

【解】 根据定理 5.19，令 $\sigma=\mathrm{sign}(a_1)\|a\|_2=3$，则构造向量

$$v=a+\sigma e_1=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix},$$

取 $w=v/\|v\|_2$ 可根据定义构造 Householder 矩阵 H. 此时，

$$Ha=a-2(w^Ta)\cdot w=a-2\frac{v^Ta}{v^Tv}v=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}-2\times\frac{15}{30}\times\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\end{bmatrix}.$$

这验证了 Householder 变换的效果. 注意，这里没有生成矩阵 H 和向量 w，而是利用一个与 w 同方向的向量 v 表示 Householder 变换. 这给计算 Householder 变换的结果带来方便，

OK！至此正交矩阵就介绍完了，下节介绍矩阵的常用分解，也是非常重要的内容。

Posted by hujiawei • Apr 29th, 2014 • math

« LAS 4-Similarity Matrix

LAS 6-Matrix Decomposition »