

# Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

## Содержание

1	Интегралы.
1.1	Неопределенный интеграл. . . . .
1.2	Выпуклые функции. . . . .
1.3	Определенный интеграл. . . . .
2	Информация о курсе

# 1 Интегралы.

## 1.1 Неопределенный интеграл.

Дано:  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F$  называется первообразной функции  $f$ , если:

1.  $F$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ .
2.  $\forall x \in \langle a, b \rangle : F'(x) = f(x)$ .

### Теорема 1

$f$  - непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  имеет первообразную на  $\langle a, b \rangle$ .

#### Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

### Теорема 2

$F$  - первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда:

1.  $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$  тоже первообразная.
2. Если  $G$  - еще одна первообразная  $f$ , то  $F - G = const$ .

#### Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2.  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ . Пользуясь теоремами, так как производная везде  $\geq 0$ , то  $F - G$  неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке  $\leq 0$ , то  $F - G$  невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл  $f$  — это множество всех первообразных  $f$ .

**Замечание от Славы.** Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале  $\langle a, b \rangle$ .

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \quad \int f(x)dx$$

Формально:  $\int f(x)dx = F(x) + C$

#### Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две загадочные формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

#### Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть  $f, g$  - имеют первообразные  $F, G$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда:

1.  $\int (f + g) = \int f + \int g$
2.  $\forall a \in \mathbb{R} : \int (af) = a \int f$
3.  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left( \int f(x)dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$
5.  $f, g$  - дифф. на  $\langle a, b \rangle$ . Пусть  $f'g$  и  $fg'$  имеют первообразную:

$$\text{Тогда: } \int fg' = fg - \int f'g$$

### **Доказательство:**

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

**Замечание.** Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что  $\varphi$  обратима. Тогда  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Подставим:

$$F(x) = \left( \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо  $x$  что-либо, а потом возвращаться обратно к  $x$ .

## 1.2 Выпуклые функции.

Множество  $A \subset R^m$  **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — **выпукла** на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

**Надграфик** ( $f, \langle c, d \rangle$ ) =  $\{(x, y) : x \in \langle c, d \rangle, y \geq f(x)\}$

**Замечание.**  $f$  - выпукло на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$  Надграфик  $(f, \langle a, b \rangle)$  - выпуклый в  $R^2$ .

### Лемма (о трех хордах)

$f$  - выпукла на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b \rangle$  выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

#### **Доказательство:**

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что  $f(x_2) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1\right)$ . Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда  $f$  выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

$f$  - строго выпукла на  $\langle a, b \rangle$ :

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

### Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

$f$  - выпукла на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$  (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b \rangle$  выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

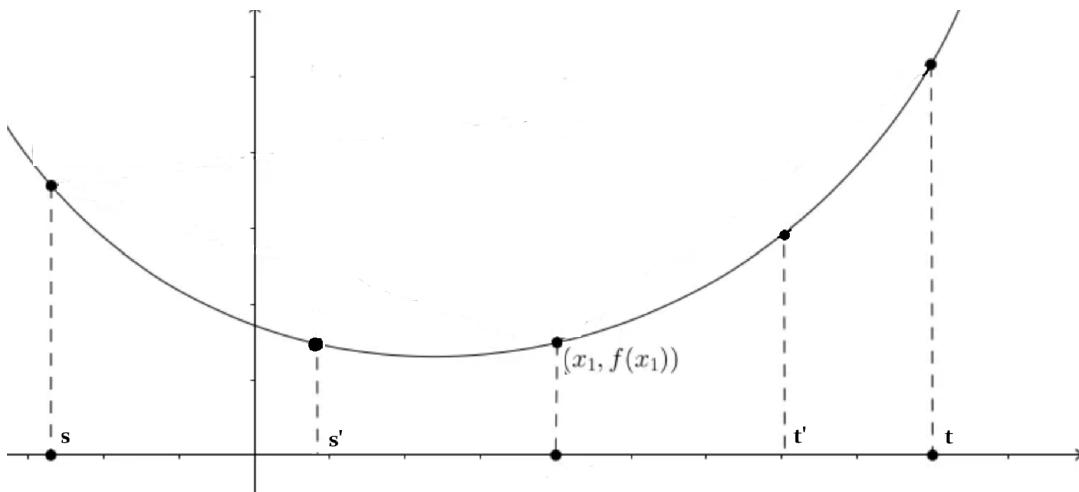
#### **Доказательство:**

Сначала докажу, что  $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$ . Замечу, что  $x_1$  в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то  $s$  левее  $x_1$  и какое-то  $t$  правее  $x_1$ . Посмотрю на данные выражения:  $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$  и  $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$ .

По теореме о трех хордах:  $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ .

Замечу, что при устремлении  $s$  к  $x_1$ ,  $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$  будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для  $s, s', x_1$ ).

Замечу, что при устремлении  $t$  к  $x_1$ ,  $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$  будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для  $x_1, t', t$ ).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют  $f'_-(x_1)$ ,  $f'_+(x_1)$ . Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что  $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$ .

Теперь докажем вторую часть.

Возьму  $t$  на отрезке  $(x_1, x_2)$ . Посмотрю на  $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$  и  $\frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограничена снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_1+0} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк  $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_2-0} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$  по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

**Следствие 1.**  $f$  - выпукла на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  непр на  $(a, b)$ .

**Следствие 2.**  $f$  - выпукла на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  не дифф. на  $(a, b)$  в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об односторон дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интервале.

todo: добавить рисунок выпуклая вниз, выпуклая вверх

### Теорема (выпуклость в терминах касательных)

$f$  - дифф. на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

$f$  - вып. вниз  $\Leftrightarrow$  График  $f$  лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму  $x > x_0$ , тогда по предыдущей теореме:  $f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Домножу и победил. Аналогично  $x < x_0$ .

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки,  $x_1 < x_0 < x_3$ :

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$  и  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$ , тогда по лемме о трех хордах  $f$  выпукло.

Q.E.D.

**def:** Дано множество  $A$  выпуклое в  $R^2$ . Прямая  $L$  называется опорной к  $A$  в точке  $x_0$ , если  $L$  проходит через  $x_0$  и множество  $A$  лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

### Теорема (дифф. критерий выпуклости)

- 1)  $f$  - дифф на  $(a, b)$ , непр на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  - выпукло на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$  возрастает на  $(a, b)$ .
- 2)  $f$  непр на  $\langle a, b \rangle$ ,  $f$  - дважды дифф на  $(a, b)$ . Тогда  $f$  - вып.  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$  на  $(a, b)$ .

### Доказательство:

1)  $\Rightarrow$  очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.

$\Leftarrow$  Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \text{ по теореме Лагранжа. } \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_3 - x_2} = f'(c_2) \text{ по теореме Лагранжа.}$$

Так как  $c_1 < c_2$ , а функция возрастает то нужное неравенство выполняется.

- 2)  $f$  - выпуклое  $\Leftrightarrow f'$  возрастает  $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

### 1.3 Определенный интеграл.

**def:** Фигура - это ограниченное подмножество в  $R^2$ .  $\varepsilon$  - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$  — назовем площадью, если:

1. Аддитивно:  $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка:  $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$ .

**Замечание.** Площади существуют.

**Замечание.**

1. Она обладает монотонностью по включению:  $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$ , так как:  $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$ .
2.  $\sigma(\text{вертик отрезок}) = 0$ , так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой  $\forall \varepsilon > 0$ .

**def:**  $\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$  — ослабленная площадь, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть  $E \in \varepsilon : l$  - вертик. прямая  $L^-$  - левая полуплоскость,  $L^+$  - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда  $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1.  $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$ , где  $A = \bigcup_{\text{конеч}} P^k$ , где  $P_k$  - прямоугольник
2.  $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$ , где  $A = \bigcup P^k$ , где  $P_k$  - прямоугольник

todo: написать отличие.

**def:** Срезка -  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. положительная —  $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная —  $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

**def:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$  ПГ ( $f, [a, b]$ ) =  $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ .

**def:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$  - непр.,  $\sigma$ - осл. адд. площадь, тогда определенный интегралом  $f$  по отрезку  $[a, b]$  назовем:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

**Простейшие свойства:**

1. Если  $f \geq 0$  на  $[a, b]$ , тогда  $\int_a^b f \geq 0$

2. Если  $f = c$  (константа), тогда  $\int_a^b c = c \cdot (b - a)$

3.  $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$

4.  $\int_a^a f = 0$

### Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку:  $\forall c \in [a, b] : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

2. Монотонность:  $f \leq g$  - непр., то  $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$ .

Говорят: Проинтегрируем неравенство  $f \leq g$ , на отрезке  $[a, b]$ .

3.  $(b - a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{[a,b]} f$

Делается с помощью монотонности и интегрирования  $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]} f$

4.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Проинтегрируем  $-|f| \leq f \leq |f|$  и получим то, что хотим.

### Теорема о среднем

Функция  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\exists c \in [a, b]$ , что:

$$\int_a^b f = f(c)(b - a)$$

### Доказательство:

$a = b$  - скучно. Если  $a \neq b$ , напишем неравенство п.3:

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \max f$$

А мы знаем, что функция непрерывна, по теореме о промежуточном значении  $\exists c : c = \frac{1}{b - a} \int_a^b f$ .

Q.E.D.

Интеграл с переменным верхним пределом -  $\Phi : [a, b] \rightarrow R : \Phi(x) = \int_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом -  $\psi : [a, b] \rightarrow R : \psi(x) = \int_x^b f$

для  $f \in C([a, b])$ .

### Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что  $\Phi$  дифф на  $[a, b]$ ,  $\Phi'(x) = f(x)$ .

#### Доказательство:

$$y > x : \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(y)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c),$$

где  $c$  лежит между  $x, y$  из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производная равна  $f(x)$ . Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это  $f(x)$ .

Q.E.D.

**Замечание** Мы построили первообразную для функции  $f$ .

### Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a, b])$ ,  $F$  - первообразная  $f$  на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

#### Доказательство:

$F = \Phi + c$ , по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

**Следствие:** Этот определенный интеграл не зависит от выбора  $\sigma$ .

**Замечание:** Откажемся от соглашения  $a \leq b$  и введем для  $d < c$ :

$$\int_c^d = - \int_d^c = F(d) - F(c)$$

### Микротеорема (Линейность интеграла)

Для  $f, g \in C([a, b])$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , выполнено:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство:**

$(\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta F|_a^b$  из линейности неопредел. интеграла.

Q.E.D.

### Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a, b])$ . Тогда  $\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$

**Доказательство:**

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int_a^b (fg' + f'g) = fg|_a^b$$

Q.E.D.

### Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ ,  $\varphi \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ ,  $\varphi \in C^1$ ,  $[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ . Тогда:

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

**Доказательство:**

$F$  - первообразная  $f$ , тогда  $F(\varphi(t))$  - первообразная  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

**Замечание.** Может показаться, что множество  $\varphi([p, q])$  шире  $[\varphi(p), \varphi(q)]$ .

**Замечание.** Может быть, что  $\varphi(p) > \varphi(q)$

$I_f$  - среднее значение  $f$  на  $[a, b]$   $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

### Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a, b])$  обе возрастают. Тогда  $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$ , то есть

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

**Доказательство:**

Тк функции возрастают, то  $\forall x, y \in [a, b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ .

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем  $y$  и проинтегрируем по  $x$  и поделю на  $b - a$ . Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем  $x$  и проинтегрируем по  $y$  и поделю на  $b - a$ . Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

Q.E.D.

**Пример (Ш. Эрмит)**

Пусть мы хотим посчитать  $H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt$

$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$ . Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \\ g = \cos t \end{bmatrix} = \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2) - \text{многочлен, от } \pi^2, \text{ где } \deg P \leq n.$$

**Теорема (Пи иррационально)**

$\pi$  - иррационально. Проверим, что  $\pi^2$  иррационально.

**Доказательство:**

Пусть  $\pi^2 = \frac{p}{q}$ . Тогда  $q^n H_n = \frac{q^n}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = q^n P(\pi^2)$  - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \frac{q^n}{n!} 4^n \pi = \frac{(4q)^n}{n!} \pi \rightarrow 0$ , но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

## 2 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!

