Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. F называется **первообразной** функция f, если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R}$: $F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f, то $F - G = const$.

Доказательство:

1. воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0, то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0, то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f.

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b\rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \int f(x)dx$$

Формально: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две *загадочные* формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразную F, G на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \displaystyle\int (af) = a \int f$
3. $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \displaystyle\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

   Тогда: $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:

1. очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. очевидно из производной композиции.
4. очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x.

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \in R^m$ **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпукла** на промежутке $\langle a, b\rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Надграфик (f,$\langle c, d\rangle$) $= \{(x, y) : x \in \langle c, d\rangle, y \ge f(x)\}$

Замечаниие. f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow$ Надграфик $(f, \langle a, b\rangle)$ - выпуклый в R^2.

Лемма (о трех хордах)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_2} f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект). Q.E.D.

f - **строго выпукло** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle : \exists f'_+(x), f'_-(x)$, а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

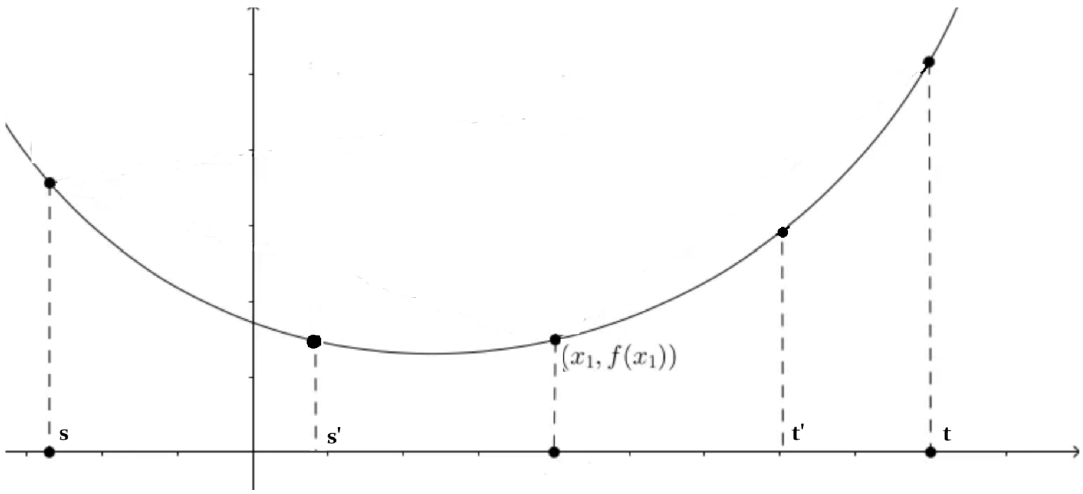
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1. Посмотрю на данные выражения: $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1, $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1, $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1), f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.

Возьму t на отрезке (x_1, x_2). Посмотрю, на $\dfrac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\dfrac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонна возрастает на промежограниченна снизу и сверху (по тем же соображением, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \to x_1 + 0} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\dfrac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \to x_2 - 0} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр на $(a.b)$. **Следствие 2.** f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ не дифф. н (a, b) в не более чем счетном множестве. Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторониих растут(теорема об одностор дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интеравле.

todo: добавить рисунок выпуклая вниз, выпуклая вверх

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Тогда

f - вып. вниз $\Leftrightarrow$ График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$: $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0) \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: в R^2 A - выпуклое. L - прямая, называется **опорной** к A в точке x_0, если L проходит через x и множество лежит в одной полуплоскомти.

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

1) f - дифф на (a, b), непр на $\langle a, b\rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b).

2) f непр на $\langle a, b\rangle$, f - дважды дифф на (a, b). Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

Доказательство

1) $\Rightarrow$ очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.
$\Leftarrow$ Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$ по теореме Лагранжа. $\dfrac{f(x_2) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$ по теореме Лагранжа.

Так как c_1 левее c_2, то верное

2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Определенный интеграл.

def: **Фигура** - это ограниченное подмножество в R^2. ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — назовем **площадью**, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$.
2. σ(вертик отрезок) $= 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$—**ослабленная площадь**, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^{+1} - правая полуплоскость(замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma A = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где } A = \bigcup\limits_{\text{конеч}} P^k, \text{где } P_k$ - прямоугольник)
2. $\sigma A = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где} A = \bigcup P^k, \text{где } P_k$ - прямоугольник)

todo: написать отличие.

def: **Срезка** - $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ $(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непр., σ- осл. адд площадь, тогда определенный интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

todo: тут что-то пропущено

Свойство интеграла.

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$

2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b g(x)$.

   Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

3. $(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \int\limits_a^b f \leq (b-a)\max\limits_{[a,b]} f$

   Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]}$

4. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

   Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.

5. <u>**Теорема о среднем**</u>

   Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [ab]$, тогда:

   $$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$$

   Доказательство:

   $a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

   $$\min f \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leq \max f$$

   А мы знаем, что функция непрерывна, поэтому $\exists c : c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$.

Q.E.D.

<u>**Интеграл с переменным верхним пределом**</u> - $\Phi : [a, b] \to R : \Phi(x) = \int\limits_a^x f$

<u>**Интеграл с переменным нижним пределом**</u> - $\psi : [a, b] \to R : \psi(x) = \int\limits_x^b f$

для $f \in C([a, b])$.

<u>**Теорема (Барроу)**</u>

В усл.определений. Доказать, что Φ дифф на $[a, b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство.

$y > x : \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{\Phi(y)-\Phi(y)}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim\limits_{y\to x+0} f(c)$, где c между x, y из теоремы о среднем

Получим, что правосторонняя производна равна $f(x)$. Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a, b])$, F - первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ.

Замечание: Откажемся от соглашения $a \le b$ и введем для $d < c$:

$$\int\limits_c^d = -\int\limits_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int\limits_a^b f + \beta\int\limits_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F\Big|_a^b + \beta F|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла. Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f', g \in C([a, b])$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Доказательство

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int\limits_a^b (fg' + f'g) = fg\big|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b\rangle), \varphi\langle \alpha, \beta\rangle \to \varphi \in C^1, [p, q] \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство

F - первообразная f, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p, q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a, b]$ $\dfrac{1}{a-b}\int\limits_a^b f$

Теорема (Неравенство Чёбышева)

$f, g \in C([a, b])$ обе возрастают. Тогда $I_f, I_g \leq I_{fg}$, т-е

$$\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g \leq (b-a)\int\limits_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x, y \in [a, b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b - a$. Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b - a$. Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_f g \geq 0$$

Q.E.D.

Пример(ш. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n = \dfrac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt$

$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_b^a - \int\limits_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \\ g = \cos t \end{bmatrix} = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2)$ - многочлен, от π^2, где $\deg P \leq n$.

Теорема (Пи иррационально)

π - ирационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$. Тогда $q^n H_n = \dfrac{q^n}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\mathrm{dt} = q^n P(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \dfrac{q^n}{n!}4^n\pi = \dfrac{(4q)^n}{n!}\pi \to 0$, но с другой стороны, оно должно быть целом. Противоречие. Q.E.D.

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!