

Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Интегралы.
1.1	Неопределенный интеграл.
1.2	Выпуклые функции.
1.3	Правило Лопитала.
1.4	Определенный интеграл.
1.5	Приложение к определенным интегралам.
1.6	Верхний и нижний пределы последовательностей
1.7	Интегральные суммы.
2	Информация о курсе

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. F называется первообразной функции f , если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b \rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b \rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b \rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b \rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f , то $F - G = const$.

Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0 , то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0 , то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f .

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b \rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \quad \int f(x)dx$$

Формально: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две загадочные формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\int (f + g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \int (af) = a \int f$
3. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

$$\text{Тогда: } \int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство:

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x .

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \subset R^m$ выпукло, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — выпукла на промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Надграфик ($f, \langle c, d \rangle$) = $\{(x, y) : x \in \langle c, d \rangle, y \geq f(x)\}$

Замечание. f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$ Надграфик $(f, \langle a, b \rangle)$ - выпуклый в R^2 .

Лемма (о трех хордах)

f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b \rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

f - строго выпукла на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

f - выпукла на $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b \rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

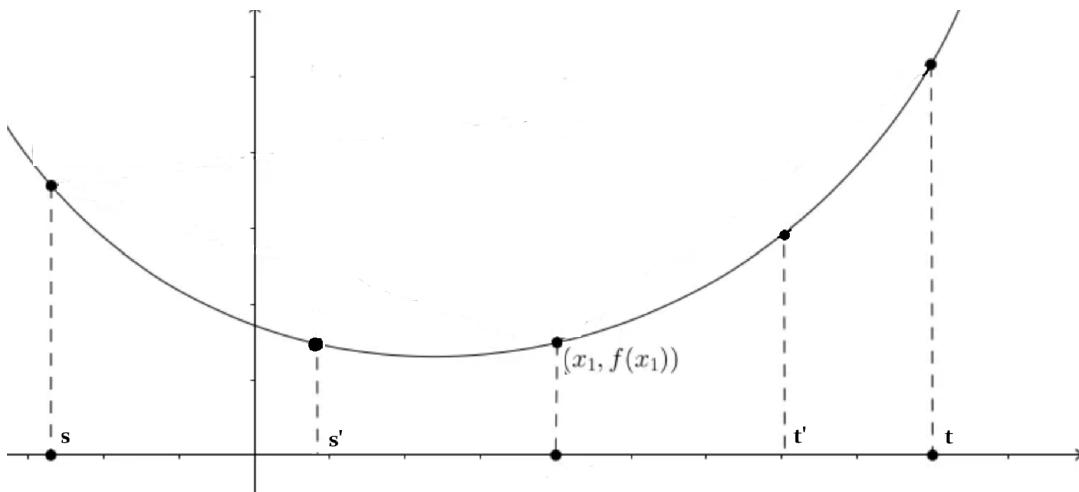
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1 . Посмотрю на данные выражения: $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1 , $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1 , $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1)$, $f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.

Возьму t на отрезке (x_1, x_2) . Посмотрю на $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограничена снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_1+0} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_2-0} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр на (a, b) .

Следствие 2. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об односторон дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интервале.

todo: добавить рисунок выпуклая вниз, выпуклая вверх

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Тогда

f - вып. вниз \Leftrightarrow График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$, тогда по предыдущей теореме: $f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: Дано множество A выпуклое в R^2 . Прямая L называется опорной к A в точке x_0 , если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

- 1) f - дифф на (a, b) , непр на $\langle a, b \rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b) .
- 2) f непр на $\langle a, b \rangle$, f - дважды дифф на (a, b) . Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b) .

Доказательство:

1) \Rightarrow очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.

\Leftarrow Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \text{ по теореме Лагранжа. } \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_3 - x_2} = f'(c_2) \text{ по теореме Лагранжа.}$$

Так как $c_1 < c_2$, а f' возрастает, то нужное неравенство выполняется.

- 2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Правило Лопиталя.

Лемма (об ускоренной сходимости)

Пусть даны $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists U(a), f, g \neq 0$ в $U(a) \cap D$ - выколотой.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тогда:

$$\forall (x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \in D, x_n \neq a, \exists (y_n) : y_n \rightarrow a, y_n \in D, y_n \neq a : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k} \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k}$$

Доказательство:

Давайте будем выбирать такие y_k , что:

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k} \text{ и } \left| \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$$

Очевидно, что мы сможем выбрать такие y_k . А из этого уже следует то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: утверждение верно, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a, b)

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(0, \frac{\infty}{\infty}\right)$

Тогда: $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Замечание о корректности: тк $g' \neq 0$, то g - строго положительно или отрицательно в какой-то окрестности a .

По Гейне. Возьму $(x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \neq a$. Берем y_n из Лопиталя.

Теорема Коши: $\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, где $\xi_k \in (x_k, y_k)$.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

Посмотрим, куда это стремится. Справа это стремится к A . Значит и слева должна.

Q.E.D.

Пример неаналитической функции:

Неаналитическая - та, которую нельзя представить в виде разложение тейлора для бесконечности.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$\forall x : \exists f^{(k)}(0) = 0$. Если разложить ее в нуле, то она будет эквивалентна нулевой $a_{n+1} - a_n$ - аналог производной.

Теорема (Штольца)

x_n, y_n - вещ. последовательности, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$. y_n монотонный, начиная с какого-то места

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \bar{\mathbb{R}} \cup \{0\}^*$. Тогда: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Доказательство:

1) $a > 0, a \in \mathbb{R}$

$$\forall a > \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall N > N_1 : a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

Зафиксирую N . Возьму $n > N$ и напишу дроби $\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Заметим интересный факт, что (для положит. дробей) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$. Поэтому, если мы сложим, все высказанные дроби так, как показано, то они будут между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. А высказанные дроби положит, потому что у нас начиная с какого-то места монотонен y и $a > 0$. Поэтому:

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Что я получил? Устремим $n \rightarrow \infty$ и получим по условию, что $a - \varepsilon \leq \frac{x_N}{y_N} \leq a + \varepsilon$

2) $a = +\infty$. Аналогично, только смотрим на предел с одной стороны

3) $a = [-\infty, 0)$, поменяем у $y_n := -y_n$, тогда все стало положительным = счастье.

4) $a = 0$. Считаем, что x_n, y_n монотонны (строго) с какого-то момента. Тогда дробь $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow 0$ с какого-то момента. Тогда $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \rightarrow +\infty$, вернемся к пункту 1 и выиграем.

Q.E.D.

Замечание. Для неопределенности вида $+\infty, +\infty$ теорема верно (обе посл. монотонны). (Загадка)

Теорема (Гаусса)

Хотим доказать сумму $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство:

1) $x_n = 1 + 2 + \dots + n$, Хочу найти y_n такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. О чём нам говорит теорема

Штольца? Что если y будет таким, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$, то такой y_n нам подходит

$y_n = n^2$ не подходит, $y_n = \frac{n^2}{2}$ подходит и дает в пределе 1. Мы доказали, что $1 + 2 + 3 + \dots + n$ эквивалентно n^2 . Но это еще не то, что нам надо

2) $x_n = 1 + 2 + \dots + n - \frac{n^2}{2}$, хотим опять по теореме Штольца найти чему это эквивалентно.

$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\frac{1}{2}}{y_n - y_{n-1}} = 1$. О, возьму $y_n = \frac{n}{2}$. И все хорошо.

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + o(n)$. Пока это тупик.

Q.E.D.

Доказательство 2:

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + x^n$$

$$xf'(x) = x + \dots + nx^n = \left(x \frac{d}{dx}\right) f(x)$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^N f(x) = 1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n$$

Заметим, что $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1$. Хочу посчитать значение функции в единице:

$$\left(\left(x \frac{d}{dx}\right)^N f(x)\right)(1) = \left(\left(x \frac{d}{dx}\right)^N \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)\right)(1)$$

Заметим, что после N раз дифференцирования знаменатель будет $(x - 1)^{N+1}$. Но я хочу посчитать значение функции в точке 1. Мы не можем так сделать, но заметим, что наша функция непрерывна, откуда мы знаем, что у неё есть предел в этой точке. Применим $n + 1$ раз правило Лопитала идеологически???????

Замечание от Славы. Да именно такое говорит Константин Петрович на лекции в связи с чем этот конспект хочется забросить и мне хочется выброситься в окно. Так что со всех респект и уважение, что я сижу и разбираю.

Так что же тут подразумевал Константин Петрович? У нас знаменатель будет $(x - 1)^{N+1}$. Но значение функции в точке 1 у нас есть.

Из непрерывности мы знаем, что $(1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n)(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n)$. И та наша формула, которую мы свернули с помощью геом. прогрессии ведет себя точно так же в окрестностях единицы. Также на самом деле числитель этой функции просто имеет множитель $(x - 1)^{N+1}$. Поэтому мы можем думать, что мы ищем $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^{N+1} \cdot h(x)}{(x - 1)^{N+1}}$. Поэтому применим $N + 1$ раз правило Лопиталя и знаменатель пропадет. Что мы получили? Мы получим, что теперь мы ищем предел по какой-то другой (непрерывной (тк многочлен)) функции при $x \rightarrow 1$. Значит, что мы можем просто посчитать значение в точке 1. Это то, что Константи Петрович назвал идеологически применить правило Лопиталя. То есть надо умножить нашу дробь на знаменатель N раз ее продифференцировать и поделить на производную N -ой степени знаменателя:

$$= \frac{1}{(N+1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^N \left((x-1)^{N+1} \left(\left(x \frac{d}{dx} \right)^N \left(\frac{x^{N+1} - 1}{x-1} \right) \right) \right)$$

Дальше подставляете $N = 1$ и все, ищите значение этой фигни в точке 1 и ваша жизнь прекрасна.

Q.E.D.

1.4 Определенный интеграл.

def: Фигура - это ограниченное подмножество в R^2 . ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ — назовем площадью, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$, так как: $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$.
2. $\sigma(\text{вертик отрезок}) = 0$, так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой $\forall \varepsilon > 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ — ослабленная площадь, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$, где $A = \bigcup_{\text{конеч}} P^k$, где P_k - прямоугольник
2. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$, где $A = \bigcup P^k$, где P_k - прямоугольник

todo: написать отличие.

def: Срезка - $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ ($f, [a, b]$) = $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$ - непр., σ - осл. адд. площадь, тогда определенный интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

Простейшие свойства:

1. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f \geq 0$

2. Если $f = c$ (константа), тогда $\int_a^b c = c \cdot (b - a)$

3. $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$

4. $\int_a^a f = 0$

Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$.

Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

3. $(b - a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{[a,b]} f$

Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]} f$

4. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.

5. Теорема о среднем

Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

$$\int_a^b f = f(c)(b - a)$$

Доказательство:

$a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \max f$$

А мы знаем, что функция непрерывна, тогда по теореме о промежуточном значении:

$$\exists c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Q.E.D.

Интеграл с переменным верхним пределом - $\Phi : [a, b] \rightarrow R : \Phi(x) = \int_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом - $\psi : [a, b] \rightarrow R : \psi(x) = \int_x^b f$

для $f \in C([a, b])$.

Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a, b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$$y > x : \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c),$$

где c лежит между x, y из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производная равна $f(x)$. Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f .

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a, b])$, F - первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ .

Замечание: Откажемся от соглашения $a \leq b$ и введем для $d < c$:

$$\int_c^d = - \int_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta F|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла. Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a, b])$. Тогда $\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$

Доказательство:

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int_a^b (fg' + f'g) = fg|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, $\varphi \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C^1$, $[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда:

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

F - первообразная f , тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p, q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a, b]$ $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a, b])$ обе возрастают. Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$, то есть

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x, y \in [a, b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_fg(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

Q.E.D.

Пример (III. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt$

$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \\ g = \cos t \end{bmatrix} = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2) - \text{многочлен, от } \pi^2, \text{ где } \deg P \leq n.$$

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Тогда $q^n H_n = \frac{q^n}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = q^n P(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \frac{q^n}{n!} 4^n \pi = \frac{(4q)^n}{n!} \pi \rightarrow 0$, но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

def: $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-непрерывной.

$\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$. Такая функция будет непрерывна на $[a,b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

def: $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ - почти первообразная функции f .

F - непр и $\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$. $\forall x \in [a,b] \setminus A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

f - кусочно-непрерывно на $[a,b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f|_{[x_{i-1}, x_i]}$

Утверждение. Если f - кусочно - непрерывна тогда: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Утверждение очевидно по определению.

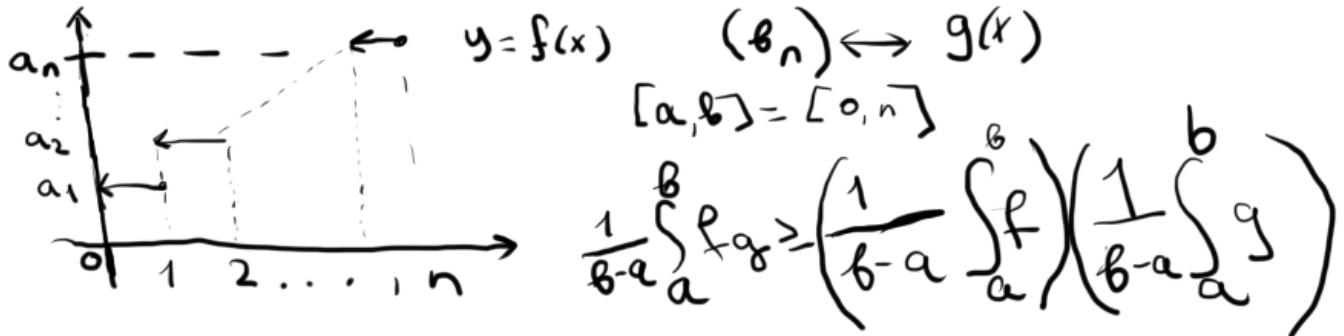
Следствие: Все теоремы, использующие в доказательство только формулу Ньютона-Лейбница у нас уже доказаны!

Пример (Неравенство Чебышева для сумм)

$a_1 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq \dots \leq b_n$.

Тогда $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum b_i \right)$

Доказательство:



Возьмем доску Константина Петровича для лучшего понимания. Давайте возьмем две функции $f(x), g(x)$, как показано на рисунке. Вспомним, что у нас есть неравенство Чебышева, которое записано на правой стороне доски. Тогда очевидно подстановкой в него наших $f(x), g(x)$ и $a = 0, b = n$, мы получим нужное неравенство.

Q.E.D.

1.5 Приложение к определенным интегралам.

Введем некоторые обозначения:

$\text{Segm}([a, b])$ - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a, b]$

$\Phi : \text{Segm}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ - функция для промежутка.

Введем аддитивные функции для промежутка:

$$\forall [p, q] \in \text{Segm}[a, b] : \forall c \in (p, q) : \Phi([p, c]) + \Phi(c, q) = \Phi([p, q])$$

def: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \text{Segm}(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - плотность Φ : $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle) : \inf_{\Delta} f \cdot \text{len}(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq \sup_{\Delta} f \cdot \text{len}(\Delta)$

Теорема(о вычисл. а.ф.п.по ее плотности)

Дана плотность $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \text{Segm}(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle)$, $\Phi(\Delta) = \int_{\Delta} f$

Доказательство:

Н.У.О. считаем, что $\Delta = [a, b]$. Тогда возьмем $F(x)$, такую что:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a, x]), & x \in (a, b) \end{cases}$$

Проверим, что F - первообразная f :

$F'_+(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \frac{\Phi(x, x+h)}{h} \in [\min f, \max f]$ на промежутке $x + x_0$ из ее плотности

Получили, что правосторонняя производная f и левосторонняя производные существуют.

Q.E.D.

Пример: Площадь криволинейного сектора.

$[a, b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a, b] \rightarrow (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: Сектор $[\alpha, \beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq p(\varphi)\}$

$\Phi : \Delta = \sigma(\text{Сектора}), \Delta \in \text{Segm}([a, b])$

Теорема.

В указанных условия, а так же $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha, \beta] \in \text{Segm}([a, b])$. Тогда:

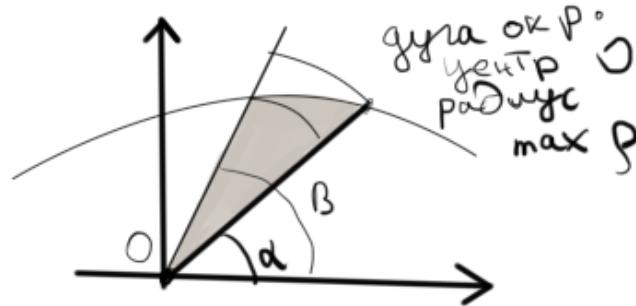
$$\Phi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Доказательство:

Если мы докажем, что $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ - плотность Φ , тогда по предыдущей теореме, мы получим, что данная формула будет верна. Будем определять определение плотности.

$\Delta = [\alpha, \beta]$, откуда Сектор $[\alpha, \beta] \subset$ Криволинейного вектора($O, \max \rho, [\alpha, \beta]$).

Криволинейный вектор в данном случае подразумевает сектор окружности, нарисованный на чертеже. Так же на нем вы видите серым - Сектор $[\alpha, \beta]$.



Как мы знаем из геометрии: площадь сектора окружности $= \frac{\alpha}{2}R^2$.

Откуда из монотонности площади:

$$\Phi([\alpha, \beta]) \leq \sigma(\text{Крив. вектор}) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Аналогично можно оценить нижним сектором. То есть:

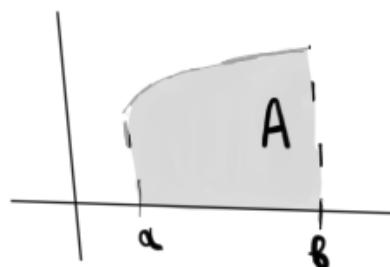
$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min_{[a,b]} \rho)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Откуда это и правда плотность, поэтому верно.

Q.E.D.

Кохась: хочу эксперимент

$$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_a^b f dx, \text{ где } f \geq 0, f \text{ - непрерывно. } \gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}, \gamma : [p, q] \rightarrow R^2.$$



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загадки будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изображение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисунке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int_a^b y(x) dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int_p^q y(t)x'(t) dt$$

Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

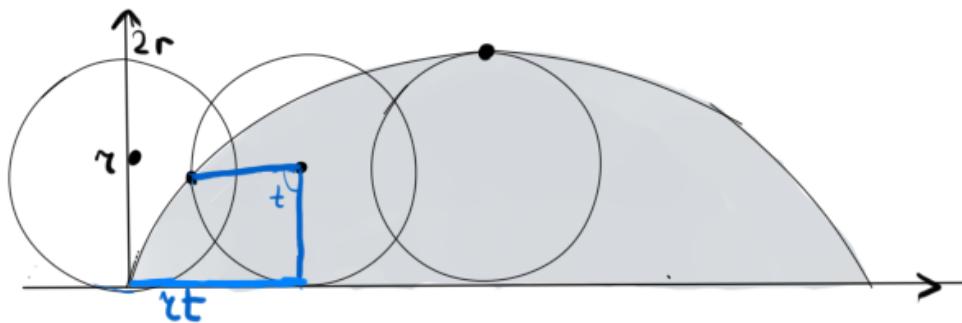
todo: вставить 2 формулы 1.50

Пример:

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), r \in R \\ y(t) = r(1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

- путь, который описывается данной формулой - циклоид.

Фиксируем точку в нуле и катим окружность по нашему полю. Мы знаем, что x монотонен



И теперь я хочу найти площадь серого подграфика:

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x) dx = \begin{bmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi r^2$$

Пример (Изопометрическое неравенство.)

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограничено.

Пусть $diam(G) = \sup_{a,b \in G} (\rho(a, b))$ - диаметр. $diam(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}d^2$

todo: тут во-первых скажут рисунок, во-вторых я не осознал 2:20

$\rho(\varphi) = \max(r : (\varphi, r)_{max} \in G)$ - непрерывна.

Упражнение: доказать непрерывность (возможно спросят на экзамене)

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \rho^2(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \left(\bar{\varphi} - \frac{\pi}{2} \right) d\bar{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} "AB^2" d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{d^2 \pi}{4}\end{aligned}$$

Теорема (обобщ. теорема о плотности)

$\Phi : Segm(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывно.

Пусть $\forall \Delta \in Segm(\langle a, b \rangle)$ заданы m_Δ, M_Δ - функции от сегмента:

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta : m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. \forall фикс. $x \in \langle a, b \rangle, M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$, при $l(\Delta) \rightarrow 0$ и $x \in \Delta$

Тогда f - плотность Φ .

Доказательство:

Н.у.о мы работаем на $[a, b]$. $F(x) = \begin{cases} \Phi([a, x]), & x > a \\ 0, & x = a \end{cases}$

Напишем то, что нам дает условие в конкретной точке x :

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta, \text{ где } \Delta = [x, x+h], h > 0$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

Вычтем из одного другое:

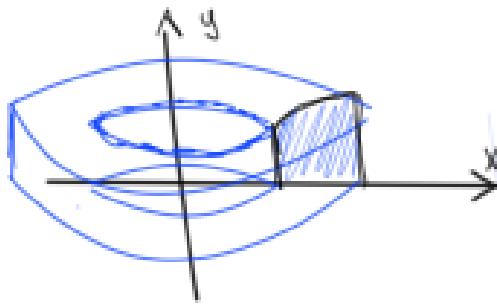
$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta$$

Устремим h к нулю и получим, что $M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$. Откуда $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \rightarrow 0$, а это $f(x) = F'_+(x)$. Аналогично $f(x) = F'_-(x)$.

Q.E.D.

1.48 - 4 лекция - кохась рассказывает интересную историю про отрубленные пальцы

Пример (Объем вращения фигур)



$a > 0, b > 0, f > 0$. Вращаем $\Pi\Gamma(f[a, b])$ вокруг оси Oy . Получается вот что-то такое(см рисунок). Хочу найти объем этой фигуры

$\Phi([a, b]) = Vol(\{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})\})$. Тогда выполнено:

$$\Phi([a, b]) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Доказательство:

A_1 - прямоугольник, такой что его высота $= \min_{(a,b)} f$. $A_1 = [a, b] \times [0, \min f]$

$$Vol A_1 = \pi b^2 \min f - \pi a^2 \min f$$

A_2 - прямоугольник, такой что его высота $= \max_{(a,b)} f$. $A_2 = [a, b] \times [0, \max f]$

$$Vol A_2 = \pi b^2 \max f - \pi a^2 \max f.$$

$$\forall \Delta \text{ положим } m_\Delta = \pi \min_\Delta f \cdot \min(2x), M_\Delta = \pi \max_\Delta f \cdot \max 2x, x \in \Delta$$

Тогда: как мы только что доказали:

$$\Phi(\Delta) \leq Vol(A_2(\Delta)) = \pi \max f \cdot (\bar{b} + \bar{a})(\bar{b} - \bar{a}) \leq M_\Delta(\bar{b} - \bar{a}) \leq M_\Delta l(\Delta)$$

Выше в формуле подразумеваются текущие \bar{a}, \bar{b} для Δ . Аналогично для m_Δ .

При $x \in \Delta : m_\Delta \leq \pi f(x)2x \leq M_\Delta$ - очевидно.

Фиксируем $x : M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ - очевидно. Откуда выполнено условие теоремы о плотности а это то, что нам и требовалось.

Q.E.D.

Пути:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. То есть $t \rightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t)) = \gamma(t)$. Мы обычно думаем, что они непрерывны

$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \tau) - \gamma(t)}{\tau}$ - интересно как меняется.

$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_m(t))$ - вектор скорости.

Носитель пути - траектория пути.

def: Функция l , заданная на множестве гладких путей (непрерывны, дифференцируемы) называется длиной пути, если выполняются следующие условия:

1. $l \geq 0$
2. аддитивна: $\forall [a, b], \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ для любого $c \in [a, b] : l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \bar{\gamma}$ — два пути. $C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$ — носители пути.

Если $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$ — сжатие ($\forall M, N : \rho(T(M), T(N)) \leq \rho(M, N)$), то $l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma)$

4. γ — линейный путь, то $l(\gamma) = \rho(A, B)$, где A — начало, B — конец.

А такая штука вообще существует?

Замечание: Из свойства 3 следует, что длина хорды меньше длины дуги.

Замечание: При растяжении длина пути растет.

Замечание: Длина пути не меняется при движениях пространства R^m (очевидно из свойства 3).

Теорема:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^1 — непрерывно дифференцируемо. Тогда $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Доказательство:

Считаем γ — инъективный.

$[p, q] \in Segm[a, b] : \Phi([p, q]) = l(\gamma|_{[p,q]})$. Проверим $\|\gamma'(t)\|$ — плотность Φ .

$\Delta : \forall i = 1, \dots, m : m_i(\Delta) = \min_{\delta} |\gamma'_i(t)|, M_i(\Delta) = \max |\gamma'_i(t)|$.

Возьму $m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$, $M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$. Проверяем 1, 2, 3 из обобщенной теоремы о плотности. 2 и 3 очевидно выполнены.

Проверим 1: $m_\Delta l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$. Завожу $\bar{\gamma} : \Delta \rightarrow R^m$ — линейный путь: $\gamma(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \dots, M_m(\Delta)t)$. Строю $T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$, такое, что $\gamma(t) \rightarrow \bar{\gamma}(t)$. Проверим, что это растяжение. Давайте считать расстояние. $\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2}$. По теореме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} &= \sqrt{\sum \gamma'_i(\tau_i)(t_0 - t_1)^2} = \sqrt{\sum \gamma'_i(\tau_i)} |t_0 - t_1| \leq M_{[t_0, t_1]} |t_0 - t_1| \\ &\leq M_\Delta |t_0 - t_1| = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1))) = \rho(\bar{\gamma}(t_0), \bar{\gamma}(t_1)) \end{aligned}$$

Откуда выполнен пункт один и выполнена обобщенная теорема о плотности.

Q.E.D.

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ - обычные декартовы.

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

2. \mathbb{R}^2 , полярные координаты $r(t), \varphi(t)$

$$l = \int_a^b \sqrt{((r(t) \cos \varphi(t))')^2 + ((r(t) \sin \varphi(t))')^2} dt = \int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

3. Длина графика $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Вернемся к вопросу существованию такой штуки.

Существование длины пути - Супремум длин вписанных ломаных. Разбиваю отрезок на n кусочков и считаю сумму длины ломанных: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Теперь будем рассматривать пути в \mathbb{R}^1 .

$$l(\gamma) = \sup(\sum \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) | a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b).$$

Замечание: $\gamma \in C^1 : l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$

Замечание: Пусть f - любая из $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда вариация функции на $[a, b]$:

$$\text{Var}_a^b f = \sup\left(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|\right)$$

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $\text{Var}_a^b f = +\infty$

Если для f выполнено: $\text{Var}_a^b f < +\infty$, то она называется ограниченной вариации.

Экскурсия в зоопарк.

Кривая Пеано - это путь в \mathbb{R}^2 , такой, что я сначала разбиваю отрезок $[0, 1]$ на 4 равных части так, что отображение первой части отрезка находится в части 1(см рисунок), второй части отрезка в части 2 и так далее. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике квадратика и так далее. Изображение внизу описывает это построение поэтапно.

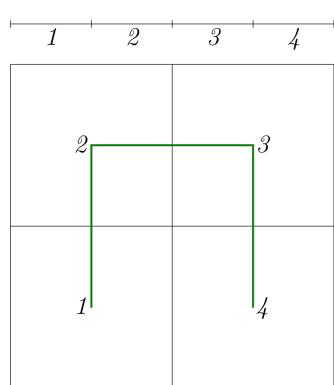


Fig. 1.

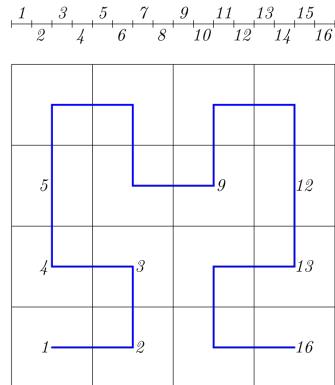


Fig. 2.

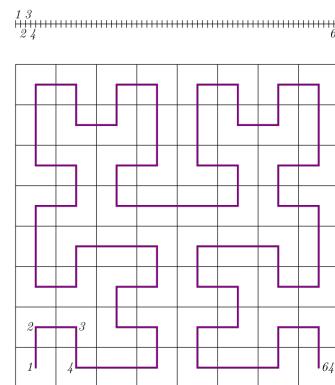
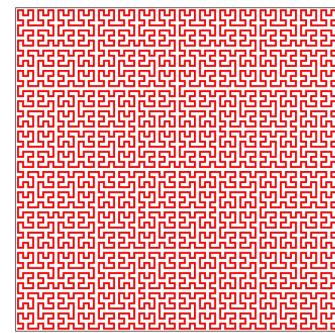
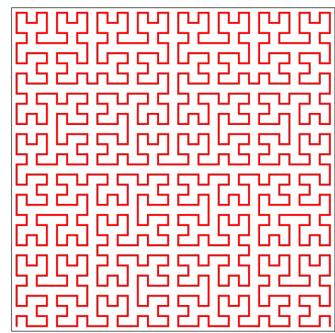
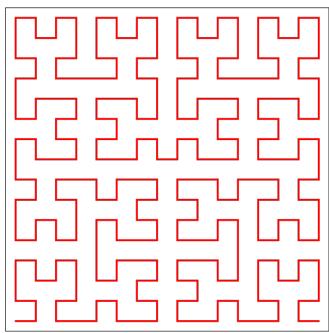


Fig. 3.



Заметим, что у нас биекция между \mathbb{R} и в \mathbb{R}^2 .

1.6 Верхний и нижний пределы последовательностей

def: (x_n) - вещ. последовательность $L \in \mathbb{R}$ - частичный предел $x_n : \exists(n_k) : n_1 < n_2 < \dots : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$.

def: x_n - вещ. последовательность. Рассмотрим $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots)$. y_n - верхне огибающая, z_n - нижне огибающая.

y_n - не возрастает, z_n - не убывает. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$

Если изменить конечное число членов последовательности, то y_n, z_n изменятся конечное число раз.

Верхний предел последовательности — $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim y_n \in \bar{R}$

Нижний предел последовательности — $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim z_n \in \bar{R}$

Теорема (о свойствах верхнего и нижнего предела)

$(x_n), (\bar{x}_n)$ — произвольные вещ. последовательности

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. Если $\forall n : x_n \leq \bar{x}_n$, то $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \bar{x}_n$ и $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \bar{x}_n$

Замечание от Славы: На самом деле здесь можно сказать, что $\exists N$ начиная с которого выполнено $x_n \leq \bar{x}_n$, но КПК почему-то решил так ввести это свойство.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Тогда $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$. (Считаем $0 \cdot \infty = 0$)
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \bar{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \bar{x}_n$
6. Пусть $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$ и $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}(x_n) + l$
7. $t_m \rightarrow l > 0 (l \in \mathbb{R})$. Тогда $\overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim}(x_n)$ и $\underline{\lim}(t_n x_n) = l \underline{\lim}(x_n)$

Доказательство:

1. т.к. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$, то используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
2. Используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
3. Очевидно из свойств предела.
4. Очевидно из свойств супремума.
5. $\sup(x_n + \bar{x}_n, \dots) \leq \sup(x_n, \dots) + \sup(\bar{x}_n)$ - первое значение в паре не больше $\sup(x_n, \dots)$, второе не больше $\sup(\bar{x}_n)$.
6. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$ - верно из условия.

Возьмем $N > N_0$ при $n \geq N$ выполнено, откуда перейдем к супремумам множеств:

$$y_N + l - \varepsilon \leq \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

Устремлю N к бесконечности:

$$\overline{\lim} y_n + l - \varepsilon \leq \limsup(\dots) \leq \overline{\lim} y_n + l + \varepsilon$$

7. Аналогично прошлому пункту.

Q.E.D.

Теорема (техническое определение верхнего предела).

(x_n) - произвольная вещ. последовательность.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ - не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$.
3. $\overline{\lim} x_n = l \Leftrightarrow$
 - (a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$
 - (b) $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $l - \varepsilon \leq x_n$ выполнено для бесконечного множества x -ов

Доказательство:

1. Очевидно.
2. $x_n \leq y_n$ Тогда по теореме о предельном переходе(или двух городовых) $x_n \rightarrow -\infty$. А в обратную сторону очевидно из определения предела.
3. $\Rightarrow \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < \varepsilon + l$ - пункт а доказан просто определением предела y_n .

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : l - \varepsilon < y_n.$$

Тогда по техническому описанию супремума $\exists k \geq n : l - \varepsilon < x_k \leq y_n$. Потом возьмите $n > k$ и так далее. Мы научились делать бесконечное кол-во таких k -шек, откуда пункт б доказан.

$\Leftarrow y_n$ - убывающая. Если мы имеем а, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$. Из этого следует $y_n \leq l + \varepsilon$. И благодаря пункту б у нас выполнено техническое описание супремума то есть $y_n \rightarrow l$

Q.E.D.

Теорема

$$\exists \underline{\lim}(x_n) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = L.$$

Доказательство:

$L = +\infty$ - см прошлую теорему. Аналогично с $-\infty$.

$L \in \mathbb{R}$. В правую сторону очевидно из технического описания. В левую сторону: $z_n \leq x_n \leq y_n$ по теореме о двух городовых верно.

Q.E.D.

Теорема о характеристизации верхнего предела как частичного

(x_n) - вещ. последовательность. Тогда:

1. Если $l \in \overline{\mathbb{R}}$ – частичный предел x_m , то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists n_k, m_k : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n, x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

1. $x_{n_k} \rightarrow l : z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}$. Устремим к $+\infty$ и получим то, что надо.

2. Очевидно из технического описания супремума и техн. описания верхнего предела (будем выбирать все более и более близкие к l).

Q.E.D.

1.7 Интегральные суммы.

def: $[a, b]$ дробление отрезка $[a, b]$ (на n частей):

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Ранг дробления (мелкость) - $\max |x_k - x_{k-1}|$

Оснащение дробления - $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Пусть задана $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда Риманова сумма: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Теорема(об интеграле, как о пределе частичных сумм)

$f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall$ дробления (x_0, \dots, x_m) ранга $< \delta$. Тогда \forall оснащ.:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Используем теорему Кантора о равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta : |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx \end{aligned}$$

Теперь возьму δ и ϵ из теоремы Кантора, возьму любое дробление ранга меньше δ , получу, что $|x_i - \xi_i| < \delta$ и $|\xi_i - x_{i-1}| < \delta$. Откуда выполнено теорема Кантора и разность $|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Откуда:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

Откуда по теореме о бюрократном учете получим искомое.

Q.E.D.

2 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!

