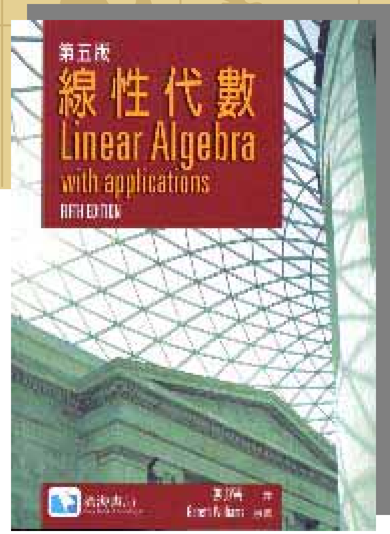


Chapter 5

Eigenvalues and Eigenvectors

特徵值與特徵向量

- 5.1 Eigenvalues and Eigenvectors
  (特徵值與特徵向量)
- 5.3 Diagonalization of Matrices
  (矩陣的對角化)

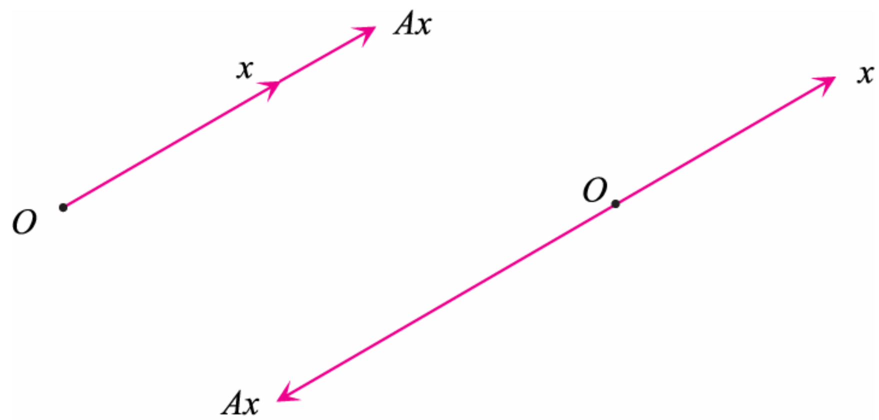
5.1 特徵值與特徵向量

定義：
令A為一個$n\times n$之方形矩陣。對純量λ而言，若$\mathbf{R}^n$中存在有非零向量$\mathbf{x}$，使得

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

則稱λ為矩陣A之特徵值(***eigenvalue***)；而稱$\mathbf{x}$為矩陣A對應於λ之特徵向量(***eigenvector***)。

$\lambda > 0;$



$\lambda < 0.$

圖 5.1

特徵值與特徵向量之計算

令A為一個$n \times n$之方形矩陣，純量λ為其特徵值，而$\mathbf{x}$為對應於λ之特徵向量，則上式可改寫成

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

因此

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(形式如 $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$)

求解 $|A - \lambda I_n| = 0$將可求得矩陣A的所有特徵值。

展開 $|A - \lambda I_n|$,可得一λ之多項式，此多項式稱為矩陣A之特徵多項式(***Characteristic polynomial***)，而 $|A - \lambda I_n| = 0$則為矩陣A之特徵方程式(***Characteristic equation***)。

Example 1

求解下列矩陣之特徵值及特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

Solution 首先推導矩陣A的特徵多項式，即

$$A-\lambda I_2=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-\lambda & -6\\ 3 & 5-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I_2|=(-4-\lambda)(5-\lambda)+18=\lambda^2-\lambda-2$$

求解矩陣A之特徵方程式

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=2\text{ or }-1$$

因此矩陣A之特徵值爲2及–1。

- $\lambda = 2$

$$(A-2I_2)x=\begin{bmatrix}-6 & -6\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

將上式以線性方程式系統表示，則得

$$-6x_1 - 6x_2 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

可得 $x_1 = -x_2$ ，因此本線性方程式系統之解可表示成 $x_1 = -r$， $x_2 = r$，其中r爲純量。則與特徵值 $\lambda = 2$對應之特徵向量爲具下列形式之非零向量

$$r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = -1$

$$(A+1I_2)x = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

可得 $x_1 = -2x_2$，$\lambda = -1$對應之特徵向量爲具下列形式之非零向量，可表示成 $s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中$s$爲純量

Theorem 5.1

令A為一個$n \times n$之方形矩陣，λ為其特徵值，則與λ對應之所有特徵向量與零向量構成$\mathbf{R}^n$的一個子空間，稱為λ的特徵空間(***eigenspace***)。

Proof

令 x_1 與 x_2爲V中二向量，c爲純量，則有 $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$及 $A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2$，因此

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 \Rightarrow A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$

因此 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是與λ對應之向量，即V對向量加法封閉。
此外，由於 $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$, $\quad cA\mathbf{x}_1 = c\lambda\mathbf{x}_1 \Rightarrow A(c\mathbf{x}_1) = \lambda(c\mathbf{x}_1)$

因此 $c\mathbf{x}_1$是V中向量，即V對純量乘積封閉。
由此可證特徵空間確爲一子空間。

Example 2

求解下列矩陣之特徵值及特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Solution

$$|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4 & 2\\ 4 & 5-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-10)(\lambda-1)^2$$

- $\lambda = 10$

$$(A-10I_3)\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-5 & 4 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

本線性方程式系統之解可表示成 $x_1 = 2r, x_2 = 2r$, 與 $x_3 = r$，其中r為純量。則特徵值$\lambda = 10$之特徵空間為一維向量空間，該空間中向量可表示成

$$r\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

- $\lambda = 1$

  將 $\lambda = 1$代入$(A - \lambda I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，可得

$$(A - 1I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

  本線性方程式系統之解可表示成 $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$,與 $x_3 = 2t$，其中s與t均爲純量。則特徵值$\lambda = 1$之特徵空間中的向量可表示成

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ 2t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Example 3

令A為一$n \times n$矩陣，其特徵值為$\lambda_1, ..., \lambda_n$，而對應之特徵向量依序為$X_1, ..., X_n$，試證若$c \neq 0$則$cA$之特徵值為$c\lambda_1, ..., c\lambda_n$，而對應之特徵向量則仍依序為$X_1, ..., X_n$

Solution

令 λ_i 爲矩陣A對應特徵向量X_i之特徵值，則 $AX_i = \lambda_i X_i$，等號兩側等乘以c則得

$$cAX_i = c\lambda_i X_i$$

因此 $c\lambda_i$爲矩陣 cA之特徵值，而其對應特徵向量 X_i.

此外，由於cA爲一$n \times n$矩陣，其特徵多項式爲一n次多項式，而其特徵方程式則有n個根，亦即cA有n個特徵值。因此cA之特徵值爲$c\lambda_1, ..., c\lambda_n$，而對應之特徵向量則仍依序爲$X_1, ..., X_n$

In Exercise 9-14, determine the characteristic polynomials, eigenvalues, and corresponding eigenspaces of the given 3x3 matrices.

9. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 13 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

30. Let A be a matrix with eigenvalue λ having corresponding eigenvector x. Let c be a scalar. Prove that λ-c is an eigenvalue of A-cI with corresponding eigenvector x.

5.3 矩陣對角化

定義：

令A與B為大小相同之二方陣，若存在一可逆矩陣C，使得$B=C^{-1}AC$，則稱B相似於A (B is **similar** to A)；而這種將矩陣A轉換成B的過程即稱為相似轉換 (**similarity transformations**)。

Example 1

考量下列矩陣A與C，其中C為可逆，試用相似$C^{-1}AC$轉換將A轉換成B

$$A=\begin{bmatrix}7 & -10\\ 3 & -4\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Solution

$$B=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7 & -10\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -10\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -10\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Theorem 5.3

相似矩陣(Similar Matrices)具有相同的特徵值。

Proof

令A, B爲相似矩陣，因此必然存在一可逆矩陣C，使得 $B = C^{-1}AC$。B之特徵多項式爲 $|B - \lambda I_n|$，利用前式代入特徵多項式並運用行列式之乘法性質，則有

$$
\begin{aligned}
|B-\lambda I| &= |C^{-1}AC-\lambda I| = |C^{-1}(A-\lambda I)C| \\
&= |C^{-1}||A-\lambda I||C| = |A-\lambda I||C^{-1}||C| \\
&= |A-\lambda I||C^{-1}C| = |A-\lambda I||I| \\
&= |A-\lambda I|
\end{aligned}
$$

因此A, B之特徵多項式完全相同，亦即兩者具有相同之特徵值。

定義：

A為一方陣；若存在有一矩陣C，使得 $D = C^{-1}AC$為一對角矩陣，則方陣A稱為可對角化(***diagonalizable***)。

Theorem 5.4

令A為一$n\times n$矩陣，

(a) 若A具有n個線性獨立的特徵向量，則其可被對角化。並且，以此n個線性獨立的特徵向量為行向量之矩陣C，可對A進行相似轉換 $C^{-1}AC$而得對角矩陣D；而D的對角線元素均為A之特徵值。

(b) 若A可被對角化，則其必具有n個線性獨立特徵向量。

Proof

(a)令$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$為$A$之特徵值（不須完全不同），而$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$為依序與各特徵值對應之線性獨立特徵向量。並令矩陣$C$以$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$為其行向量，

$$C = [\mathbf{v}_1 \ \ldots \ \mathbf{v}_n]$$

由於 $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$，以行向量進行矩陣乘積可得

$$\begin{aligned}
AC &= A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda\mathbf{v}_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由於C之行向量為線性獨立，C為非奇異（可逆），因此

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

由此可知，若一$n\times n$矩陣A具有n個線性獨立特徵向量，由此n個線性獨立特徵向量為行向量之矩陣C，即可對角化矩陣A，而對角矩陣的對角線元素則均為A之特徵值。

(b)反向的論述可由倒述上列步驟證明之。假設矩陣C為$[\mathbf{v}_1\ \ldots\ \mathbf{v}_n]$可對角化$A$，則必存在有純量$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$使得

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\gamma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n\end{bmatrix}\Rightarrow Av_1=\gamma_1 v_1,\ldots,Av_{\mathrm{n}}=\gamma_n v_{\mathrm{n}}$$

其中$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$為矩陣$A$之特徵向量。由於$C$為非奇異，其行向量應互為線性獨立，因此，如果一$n\times n$矩陣$A$為可對角化，則必具有$n$個線性獨立特徵向量。

Example 2

(a) 試證明矩陣A可對角化

(b) 求解與A相似之對角矩陣D

(c) 求解可對角化A之相似轉換

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

Solution

(a) A之特徵值及特徵向量已於第4.7節例題1求得，為

$$\lambda_1=2,\ \mathbf{v}_1=r\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\qquad \lambda_2=-1,\ \mathbf{v}_2=s\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

由於A為2×2矩陣，且有兩線性獨立特徵向量，因此為可對角化矩陣

(b) 由理論6.4可知，對角線元素為 $\lambda_1=2$ and $\lambda_2=-1$.之對角矩陣與A類似，即

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}\text{與 } D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\text{類似}$$

(c) 知道可對角化A之轉換是重要的，我們現在進行轉換並證明其確能求得上列矩陣D。首先選取二簡單的線性獨立特徵向量，如 $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 及 $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

以爲$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$行向量而得矩陣C

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

可得

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=D \qquad \#$$

若A經由相似轉換而與對角矩陣D相似，則可以推知
$A^K=C^{-1}AC$,

$$D^k=(C^{-1}AC)^k=\underbrace{(C^{-1}AC)\quad\cdots\quad(C^{-1}AC)}_{k\text{ times}}=C^{-1}A^kC$$

$$A^k=CD^kC^{-1}$$

Example 3

試由矩陣A計算 A^9

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

Solution

矩陣A與上例相同，故可直接選用上例之C及D，因此

$$D^9=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^9=\begin{bmatrix}2^9 & 0\\ 0 & -1^9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}512 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^9=CD^9C^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}512 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-514 & -1026\\ 513 & 1025\end{bmatrix}$$

Example 4

試證明矩陣A無法對角化

$$A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

Solution

$$|A-\lambda I_2|=\begin{bmatrix}5-\lambda & -3\\ 3 & -1-\lambda\end{bmatrix}=(\lambda-2)^2=0$$

$(A-2I_2)\mathbf{x}=\mathbf{0}$得 $\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0} \Rightarrow 3x_1-3x_2=0.$

因此 $x_1 = r, x_2 = r$，所以特徵向量為具有下列形式之非0向量，

$$r\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

由此可知A之特徵空間為一維空間，而A為一2×2矩陣，須有二線性獨立特徵向量始能組成轉換矩陣，因此A無法被對角化。

Theorem 5.5

令A為一$n\times n$對稱矩陣，

(a) A的所有特徵值均為實數

(b) 各特徵空間的維度由各特徵值(即特徵方程式之根)之重數決定

(c) 各特徵空間互為正交

(d) A有n個線性獨立的特徵向量

Example 2 in Section 6.1:

$$A=\begin{bmatrix}5&4&2\\4&5&2\\2&2&2\end{bmatrix},\det(A-\lambda I)=(\lambda-10)(\lambda-1)^2$$

$$\lambda_1=10,V_1=\left\{r\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\},\lambda_2=1,V_2=\left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$$

正交對角化

定義：

矩陣A稱為可正交對角化(***orthogonally diagonalizable***)，若存在有一正交矩陣C使得$D=C^tAC$為對角矩陣。

Theorem 5.6

令A為一方陣，則A為可正交對角矩陣，若且唯若A為對稱矩陣

Example 5

試正交對角化對稱矩陣A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

A之特徵值及特徵向量計算結果如下

$$\lambda_1=-1, V_1=\left\{s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\};\ \lambda_2=3, V_2=\left\{r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

因爲A爲對稱，我們知道它可以被正交對角化成

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

接著執行轉換，如所預期，特徵空間V_1, V_2互為正交，在兩特徵空間中各選用一單位向量來建構正交矩陣C，可得

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

則正交轉換可求得D如下

$$C^tAC=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

2. In each of the following exercises, transform the matrix A into a matrix B using the similarity transformation $C^{-1}AC$, with the given matrix C.

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Diagonalize (if possible) each of the following matrices. Give the similarity transformation.

(a) $\begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 13 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

8. Orthogonally diagonalize each of the following symmetric matrices. Give the similarity transformation.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$