Apuntes de Geometría Básica

Carlos E. Tafur Egido
Artos Institute
tung@artos.edu

Eugene Deklan
Honduras State
e.deklan@hstate.hn

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et.

Índice

Introducción

Algo que conviene hacer en esta asignatura es siempre dibujar la situación. Aunque se trate de un caso particular y, por tanto, no sirva como demostración ni como resolución de un ejercicio, dibujar la situación que se nos presenta nos saca en muchas ocasiones de la ofuscación en la que nos encontramos.

Capítulo 1. Espacios métricos

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías, pero no se presentan todos en este capítulo porque de hacerlo sería enorme en relación a los demás. Se ha optado por ir introduciendo los conceptos no tan de golpe.

Algo que debe tener en cuenta es que, en este capítulo, algunos de los ejemplos solo se plantean, sin resolverlos, y se presentan al final del mismo como ejercicios.

pág. 11. **Definición 1.1**. Personalmente, me gusta más la definición siguiente del concepto de *métrica* o *distancia*.

Definición 01 (Métrica o Distancia). Una aplicación $d : \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una distancia o métrica si para cualesquiera $x, y, z \in \boldsymbol{P}$ se cumple:

(i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría.)
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular.)

La definición que dan en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) establece como codominio a todo $\mathbb{R}$ y luego hace una corrección de este en el punto (i). Quizás lo hace para que sea más cómodo usar esa definición en las demostraciones y ejercicios, al ir punto por punto. En cualquier caso, a mí me parece más elegante la que presento aquí.

Lo único es que, con la mía, hay que tener cuidado para ciertas cosas. Por ejemplo, para demostrar el paso que si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$. Conviene hacerlo con el condicional contrarrecíproco, que sería lo mismo que en la definición de (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.).

pág. 11. **Ejemplo 1.2**. No llega a demostrar, ni aquí ni en el **Ejercicio 1.2**, los dos primeros puntos. Aunque sea fácil, vamos a hacerlo aquí.

Advierta que las coordenadas que se usan en este ejercicio son distintas a las que está acostumbrado. Normalmente, se usan coordenadas del tipo

$$u = (x_1, y_1), \quad v = (x_2, y_2)$$

en lugar de

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

Lo primero será ver que $\mathbb{R}^2$ es no vacío, cosa que sabemos perfectamente, por tratarse de un conjunto que conocemos. Por ejemplo, contiene al elemento $(0,0)$.

Luego, se debe comprobar que el rango de la función d_E se encuentra en $\mathbb{R}^{\cup}\{0\}$. Esto es fácil de ver por la fórmula de la función pues todo lo que esté elevado al cuadrado producirá un valor mayor o igual que 0. La suma de esos valores será también mayor o igual que 0 y, a su vez, la raíz cuadrada de esto será también mayor o igual que 0.

Del punto (i), es trivial ver que si $x = y$ entonces $d_E(x,y) = 0$, con una argumentación similar a la anterior. Más complicado es el otro condicional, es decir, que de $d_E(x,y) = 0$ se deduce que $x = y$. Es más cómodo hacerlo mediante su condicional contrarrecíproco.

Punto (ii).

$$\begin{aligned}
d_E(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2(x_1 - y_1)^2 + (-1)^2(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + [(-1)(x_2 - y_2)]^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
&= d_E(y,x)
\end{aligned}$$

La métrica inducida es lo mismo que el concepto de restricción de una aplicación, solo que para espacios métricos. Si no conoce este concepto, este se estudia en asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

En cuanto a la notación, se podría usar también la notación usual para la restricción de una aplicación, que en este caso sería algo como $\delta\mid_{M' \times M'}$.

La nueva función se comporta del mismo modo que la vieja, solo que en un dominio más restringido.

$$\begin{aligned}
\delta : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto \delta(x,y)
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\delta\mid_{M' \times M'} : M' \times M' &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto \delta\mid_{M' \times M'}(x,y) = \delta(x,y)
\end{aligned}$$

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$g : (M, \delta) \longrightarrow (M', \delta')$$

Y, de hecho, en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) se usa esta notación un poco después, en la **Definición 1.8**. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

En cuanto a la demostración de que una restricción a $M' \times M'$ de la aplicación métrica δ es también una métrica, creo que faltaría decir que las propiedades de la definición de métrica ninguna es del tipo *closure*.

Teorema 1.7. En la demostración, hace uso de algunos resultados de la teoría de conjuntos. Puede consultarlo, entre otras referencias, en (pág. 104-105). Concretamente, el 3.59 (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y 3.60.

Al comienzo, se dice que $h \circ g$ y g^{-1} son biyectivas, pero no se da nada de información. Concretamente, esto es consecuencia de que tanto g como h son aplicaciones biyectivas.

Además, tampoco menciona que se dan las condiciones para que se pueda dar esa composición de aplicaciones, es decir, $h \circ g$. Lo primero que se debe cumplir para que $h \circ g$ sea una aplicación es que

$$\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$$

En la parte que demuestra que conservan las distancias, se están suponiendo algunas cosas que se cumplen por ser g^{-1} y $h \circ g$ aplicaciones biyectivas. Por ejemplo, que existe un $x \in M$ tal que $h(g(x)) \in M''$.

Además, al ser biyectivas son inyectivas y esto hace que ese elemento $x \in M$ sea único, condición que también se requiere aquí; o que lo sean u y v.

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de *isometría*. En este caso, sería $\mathrm{Isom}(M, \delta)$.

Al final de la página. Las propiedades 1 y 2 son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

Nota 1.9. En este caso, la operación interna sería la composición de aplicaciónes. Al cumplir las propiedades de grupo, que se mencionan en el texto, también se le suele llamar *grupo de isometrías* (M, δ), y también se suele ver en asignaturas de álgebra abstracta.

Es fácil de demostrar que se trata de un grupo. La propiedad asociativa (la primera que menciona) se cumple por cumplirse para todas las aplicaciones. La del elemento neutro (la segunda) es la propiedad identidad mencionada en el punto 3 de las propiedades anteriores. La del elemento simétrico (la tercera) es también sencilla: se tiene que la simétrica de una isometríe será su aplicación inversa (o, lo que es lo mismo, su simétrica respecto a la composición).

Ejemplo 1.11. En realidad, creo que la forma de definir δ_G no es muy precisa. Sería mejor «la menor de las posibles longitudes».

Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \text{Distancia máxima entre } p \text{ y } q$$

no es una métrica. Una razón es que, puede darse $\delta(x, x) > 0$ para algún $x \in G$.

Definición. 1.12. Además de llamarlo «segmento de extremos a y b» también se le suele llamar «segmento a b».

En la definición de puntos alineados se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente.

Ejercicio 1.5. Este es el ejercicio más relevante de este capítulo. Tiene cierta relación con algo que se verá en el capítulo dedicado a las isometrías. El apartado que me parece más difícil de comprender es el D. Lo pongo a continuación a mi manera.

Lo primero que hace es demostrar un resultado general para este espacio métrico, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Concretamente, que si dos de sus isometrías cumplen

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1(1) = f_2(1)$$

entonces son la misma, es decir, $f_1 = f_2$. Veamos por qué.

Para demostrar esto, nos basaremos en el resultado del punto C. Partiendo de la hipótesis, supongamos ahora otra isometría $g = f_1^{-1} \circ f_2$, pues, tal y como se explicó, la composición de dos isometrías sobre un mismo espacio métrico es también una isometría sobre ese mismo espacio métrico; por tanto, $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Por la hipótesis tenemos que

$$g(0) = (f_1^{-1} \circ f_2)(0) = f_1^{-1}(f_2(0)) = f_1^{-1}(f_1(0)) = \text{id}_{\mathbb{R}}(0) = 0$$

y

$$g(1) = (f_1^{-1} \circ f_2)(1) = f_1^{-1}(f_2(1)) = f_1^{-1}(f_1(1)) = \text{id}_{\mathbb{R}}(1) = 1$$

Es decir, en esta nueva isometría tenemos dos puntos fijos. Por tanto, tal y como se demuestra en el punto C, se tendrá que $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Vamos a operar:

$$f_1 \circ g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ f_2) = (f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f_2 = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ f_2 = f_2$$

y, por otro lado,

$$f_1 \circ g = f_1 \circ \text{id}_{\mathbb{R}} = f_1$$

con lo que tenemos que $f_1 = f_2$.

Terminada la demostración de este resultado, pasamos a ver ahora que, para una isometría $g(x) = \sigma(x) + \tau$ siendo $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, se cumplirá que $g(0) = h(0)$ y $g(1) = h(1)$ para una isometría cualquiera h en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Primero, recordar que, como se vio en el punto A de este mismo ejercicio, esa función g es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Tal y como vamos a ver ahora, basta con tomar la siguiente definición de g:

$$g(x) = [h(1) - h(0)] + h(0)$$

Esto se debe a que deseamos, por un lado, que $g(0) = h(0)$. Para que se dé esto, debe cumplirse lo siguiente:

$$g(0) = \sigma 0 + \tau = \tau = h(0)$$

Por otro lado, se debe dar que $g(1) = h(1)$. Veámoslo:

$$g(1) = \sigma + \tau = \sigma + h(0) = h(1)$$

Por tanto, $\sigma = h(1) - h(0)$. Estos dos resultados producen la fórmula que hemos dado para $g(x)$.

Por cierto, advierta que $|h(1) - h(0)| = 1$ por ser h una isometría. Por tanto, $\sigma \in \{-1, 1\}$.

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías, pero no se presentan todos en este capítulo porque de hacerlo sería enorme en relación a los demás. Se ha optado por ir introduciendo los conceptos no tan de golpe.

Algo que debe tener en cuenta es que, en este capítulo, algunos de los ejemplos solo se plantean, sin resolverlos, y se presentan al final del mismo como ejercicios.

pág. 11. **Definición 1.1**. Personalmente, me gusta más la definición siguiente del concepto de *métrica* o *distancia*.

Definición 02 (Métrica o Distancia). Una aplicación $d : \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una distancia o métrica si para cualesquiera $x, y, z \in \boldsymbol{P}$ se cumple:

(i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría.)

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular.)

La definición que dan en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) establece como codominio a todo $\mathbb{R}$ y luego hace una corrección de este en el punto (i). Quizás lo hace para que sea más cómodo usar esa definición en las demostraciones y ejercicios, al ir punto por punto. En cualquier caso, a mí me parece más elegante la que presento aquí.

Lo único es que, con la mía, hay que tener cuidado para ciertas cosas. Por ejemplo, para demostrar el paso que si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$. Conviene hacerlo con el condicional contrarrecíproco, que sería lo mismo que en la definición de (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.).

pág. 11. **Ejemplo 1.2**. No llega a demostrar, ni aquí ni en el **Ejercicio 1.2**, los dos primeros puntos. Aunque sea fácil, vamos a hacerlo aquí.

Advierta que las coordenadas que se usan en este ejercicio son distintas a las que está acostumbrado. Normalmente, se usan coordenadas del tipo

$$u = (x_1, y_1), \quad v = (x_2, y_2)$$

en lugar de

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

Lo primero será ver que $\mathbb{R}^2$ es no vacío, cosa que sabemos perfectamente, por tratarse de un conjunto que conocemos. Por ejemplo, contiene al elemento $(0, 0)$.

Luego, se debe comprobar que el rango de la función d_E se encuentra en $\mathbb{R}^{\cup}\{0\}$. Esto es fácil de ver por la fórmula de la función pues todo lo que esté elevado al cuadrado producirá un valor mayor o igual que 0. La suma de esos valores será también mayor o igual que 0 y, a su vez, la raíz cuadrada de esto será también mayor o igual que 0.

Del punto (i), es trivial ver que si $x = y$ entonces $d_E(x, y) = 0$, con una argumentación similar a la anterior. Más complicado es el otro condicional, es decir, que de $d_E(x, y) = 0$ se deduce que $x = y$. Es más cómodo hacerlo mediante su condicional contrarrecíproco.

Punto (ii).

$$\begin{aligned}
d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2(x_1 - y_1)^2 + (-1)^2(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + [(-1)(x_2 - y_2)]^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
&= d_E(y, x)
\end{aligned}$$

La métrica inducida es lo mismo que el concepto de restricción de una aplicación, solo que para espacios métricos. Si no conoce este concepto, este se estudia en asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

En cuanto a la notación, se podría usar también la notación usual para la restricción de una aplicación, que en este caso sería algo como $\delta\mid_{M'\times M'}$.

La nueva función se comporta del mismo modo que la vieja, solo que en un dominio más restringido.

$$\begin{aligned} \delta : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \delta(x,y) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \delta\mid_{M'\times M'} : M' \times M' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \delta\mid_{M'\times M'}(x,y) = \delta(x,y) \end{aligned}$$

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$g : (M,\delta) \longrightarrow (M',\delta')$$

Y, de hecho, en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) se usa esta notación un poco después, en la **Definición 1.8**. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

En cuanto a la demostración de que una restricción a $M' \times M'$ de la aplicación métrica δ es también una métrica, creo que faltaría decir que las propiedades de la definición de métrica ninguna es del tipo *closure*.

Teorema 1.7. En la demostración, hace uso de algunos resultados de la teoría de conjuntos. Puede consultarlo, entre otras referencias, en (pág. 104-105). Concretamente, el 3.59 (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y 3.60.

Al comienzo, se dice que $h \circ g$ y g^{-1} son biyectivas, pero no se da nada de información. Concretamente, esto es consecuencia de que tanto g como h son aplicaciones biyectivas.

Además, tampoco menciona que se dan las condiciones para que se pueda dar esa composición de aplicaciones, es decir, $h \circ g$. Lo primero que se debe cumplir para que $h \circ g$ sea una aplicación es que

$$\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$$

En la parte que demuestra que conservan las distancias, se están suponiendo algunas cosas que se cumplen por ser g^{-1} y $h \circ g$ aplicaciones biyectivas. Por ejemplo, que existe un $x \in M$ tal que $h(g(x)) \in M''$.

Además, al ser biyectivas son inyectivas y esto hace que ese elemento $x \in M$ sea único, condición que también se requiere aquí; o que lo sean u y v.

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de *isometría*. En este caso, sería $\operatorname{Isom}(M, \delta)$.

Al final de la página. Las propiedades 1 y 2 son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

Nota 1.9. En este caso, la operación interna sería la composición de aplicaciónes. Al cumplir las propiedades de grupo, que se mencionan en el texto, también se le suele llamar *grupo de isometrías* (M, δ), y también se suele ver en asignaturas de álgebra abstracta.

Es fácil de demostrar que se trata de un grupo. La propiedad asociativa (la primera que menciona) se cumple por cumplirse para todas las aplicaciones. La del elemento neutro (la segunda) es la propiedad identidad mencionada en el punto 3 de las propiedades anteriores. La del elemento simétrico (la tercera) es también sencilla: se tiene que la simétrica de una isometríe será su aplicación inversa (o, lo que es lo mismo, su simétrica respecto a la composición).

Ejemplo 1.11. En realidad, creo que la forma de definir δ_G no es muy precisa. Sería mejor «la menor de las posibles longitudes».

Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \text{Distancia máxima entre } p \text{ y } q$$

no es una métrica. Una razón es que, puede darse $\delta(x, x) > 0$ para algún $x \in G$.

Definición. 1.12. Además de llamarlo «segmento de extremos a y b» también se le suele llamar «segmento a b».

En la definición de puntos alineados se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente.

Ejercicio 1.5. Este es el ejercicio más relevante de este capítulo. Tiene cierta relación con algo que se verá en el capítulo dedicado a las isometrías. El apartado que me parece más difícil de comprender es el D. Lo pongo a continuación a mi manera.

Lo primero que hace es demostrar un resultado general para este espacio métrico, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Concretamente, que si dos de sus isometrías cumplen

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1(1) = f_2(1)$$

entonces son la misma, es decir, $f_1 = f_2$. Veamos por qué.

Partiendo de la hipótesis, supongamos ahora otra isometría $g = f_1^{-1} \circ f_2$, pues, tal y como se explicó, la composición de dos isometrías sobre un mismo espacio métrico es también una isometría sobre ese mismo espacio métrico, por lo que $g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Por la hipótesis anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} g(0) = (f_1^{-1} \circ f_2)(0) = f_1^{-1}(f_2(0)) \\ = f_1^{-1}(f_1(0)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(0) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(1) = (f_1^{-1} \circ f_2)(1) = f_1^{-1}(f_2(1)) \\ = f_1^{-1}(f_1(1)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(1) = 1 \end{aligned}$$

Es decir, en esta nueva isometría tenemos dos puntos fijos. Por tanto, tal y como se demuestra en el punto C, se tendrá que $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Vamos a operar:

$$f_1 \circ g = f_1 \circ \left(f_1^{-1} \circ f_2\right) = \left(f_1 \circ f_1^{-1}\right) \circ f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f_2 = f_2$$

y, por otro lado,

$$f_1 \circ g = f_1 \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f_1$$

con lo que tenemos que $f_1 = f_2$.

Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo

Este capítulo se podría considerar el inicio del segundo bloque de la asignatura: la geometría euclidea plana, es decir, en dos dimensiones (2D).

Al contrario que en el capítulo anterior (sobre espacios métricos), nos encontramos en una geometría en particular.

Como se explica en la introducción de (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.), se abordará esta geometría desde un punto de vista *sintético*, en contraste con el enfoque *analítico*, que es al que quizás esté más acostumbrado. A este resepecto, en (Gerard A. Venema, s. f.), en lugar de «enfoque» o «punto de vista» dicen «modelo».

Como quizás ya sepa, la geometría analítica es la que hace uso de coordenadas y, por tanto, se basa más en nuestro conocimiento del álgebra de los números reales. La sintética, por su parte, prescinde del álgebra y se basa en manipular expresiones conjuntistas en base a los axiomas. Es decir, en la sintética se suele estar más en contacto con los axiomas[1], mientras que, en la analítica, nos solemos encontrar a un nivel de abstracción superior.

En cualquier caso, el enfoque sintético presentado aquí no llega a ser «puro», pues hacemos uso de números reales y sus operaciones, tal y como se muestra en el Axioma 3 de Euclides (de la Regla Graduada). TKTK.

En la definición de *recta* (pág. 23), el punto (i) se incluye para que un punto no cumpla las condiciones para ser una recta.

Algo similar sucede con el punto (i) del Axioma P2 (pág. 24). De no incluirlo, una recta podría ser todo el plano euclideo, $\boldsymbol{P}$.

Me gustaría poner aquí la demostración de la **Observación 2.4** (pág. 24) sobre que en el punto (ii) del Axioma $\boldsymbol{P}2$ no se requiere decir que sea única esa recta, sino que es algo que se puede deducir, y, por tanto, se puede poner en un teorema aparte.

Demostración — Suponemos dos puntos $A, B \in r$ no coindicentes en una recta r. También, que esos dos puntos están en otra recta s.

Dado un punto arbitrario $X \in \boldsymbol{P}$ tal que $X \in r$, por el punto (ii) de la Definición de Recta se tiene que A, B y X están alineados.

Considerando ahora que, tal y como dijimos, $A, B \in s$, por el punto (iii) de la Definición de Recta tenemos que. como A, B y X están alineados, se da que $X \in s$. Entonces, tenemos que $r \subseteq s$.

De forma análoga, llegamos a demosrtar que $s \subseteq r$. Uniendo ambas, tenemos que $r = s$. ■

[1] que en la época de Euclides recibían la denominación de *postulados*

En lo que respecta a la **Definición 2.6** (de Rectas Secantes y Paralelas), advierta que se admite que también se califica de paralelas a dos rectas coincidentes.

En cuanto al **Teorema 2.7**, creo que no llega a explicar bien cómo es este. Algo que es fundamental es resaltar que esa disyunción (esa *o*) es exclusiva, y no inclusiva.

Para la demostración, quizás se debería hacer un mayor uso de la teoría de conjuntos.

Además, creo que falta una parte por demostrar. Demuestra que no se puede dar que no se corten ni sean paralelas, simultáneamente. También creo que se debería demostrar que no se puede dar que sean secantes y paralelas simultáneamente.

Demostración — Tenemos que demostrar que no se puede dar ninguno de los dos casos siguientes, para dos rectas cualesquiera r y s:

1. Que sean secantes y paralelas.
2. Que no sean secantes ni paralelas.

Vamos a hacer las dos demostraciones por el método de contradicción (también llamado *por reducción al absurdo*).

Vamos a hacer uso de la lógica proposicional simbólica, para que queden claros los razonamientos. Tenemos las proposiciones siguientes:

p: r y s no tienen ningún punto en común. Es decir, $r \cap s = \emptyset$
q: r y s se cortan. Es decir, existe un único $X \in \mathbb{P}$ tal que $\{X\} = r \cap s$ siendo $\{X\} \neq \emptyset$.
m: r y s son la misma (son coincidentes). Es decir, $r = s$.
n: r y s son paralelas. Por definición del paralelismo de rectas, se tiene que $n \iff p \vee m$.

Caso 1. Nuestra hipótesis es que r y s se cortan y son paralelas. La hipótesis será, por tanto, para este caso, la siguiente:

$$q \wedge n \iff q \wedge (p \vee m) \iff (q \wedge m) \vee (q \wedge p)$$

haciendo uso de la propiedad distributiva para los operadores conjunción y disyunción.

Veamos si puede ser cierto esto. Por la definición de disyunción, con que se dé una de las dos proposiciones que une esta, bastaría para que fuese cierta la proposición global.

Primero, $q \wedge m$. Por un lado, q implica que existe un $X \in r$ tal que $X \notin s$, pero esto se contradice con m ya que esta última dice, entre otras cosas, que, para todo $X \in r$, $X \in s$.

Por la parte de $q \wedge p$, tenemos que

$$X = r \cap s = \emptyset$$

pero esto contradice que $X \neq \emptyset$.

Por tanto, al ser ambas falsas, aun cuando estén unidas por una conectiva disyunción, la proposición general será siempre falsa.

Caso 2. Nuestra hipótesis es que r y s no se cortan ni son paralelas.

TKTK. ■

Si no nos fijamos tanto en los calificativos de las rectas, este teorema viene a decir que en el plano euclideo solo hay tres posiciones relativas de dos rectas:

1. Ningún punto en común. Es decir, $r \cap s = \emptyset$.
2. Un solo punto en común. Es decir, existe un único $X \in \mathbb{P}$ siendo $X \neq \emptyset$ tal que $r \cap s = X$.
3. Son coincidentes. Es decir, $r = s$.

No pueden tener únicamente dos puntos en común, ni tres, etc.

También, se podría hablar sobre las posiciones relativas de una recta y un segmento. Aquí, sí que hay más casos posibles de sus posiciones relativas: se cortan, lo contiene, son paralelos, ni se cortan ni son paralelos, etc.

Consideraremos que dos segmentos son paralelos si las respectivas rectas soporte de estos son paralelas. Y, una recta es paralela a un segmento si dicha recta es paralela a la recta soporte de dicho segmento.

Concretamente, se pueden tener dos segmentos que no se corten y que además no sean paralelos, cosa que, según el th-rectas-sec-paralelas, no puede suceder con las rectas.

Otra cosa que se podría deducir es el teorema siguiente.

Teorema 01. En $(\boldsymbol{P}, d)$, dado un segmento con extremos los puntos A y B, $[A, B]$, siendo estos no coincidentes, y una recta r. Si se cortan r y $[A, B]$, entonces también se cortarán r y la recta soporte de $[A, B]$.

Demostración — Si se cortan r y $[A, B]$, tienen un único punto en común, es decir,

$$[A, B] \cap r = \{X\} = X$$

Al ser A y B no coincidentes, habrá algún punto en $[A, B]$ que no esté en r. Entonces, por el Teorema 2.7, no queda otra que r y r_{AB} sean secantes, siendo r_{AB} la recta soporte de $[A, B]$.

■

Advierta que lo contrario no tiene por qué ser cierto. Es decir, pueden cortarse dos rectas pero no cortarse una de estas con un segmento de la otra. Esto es fácil de imaginar.

En lo que respecta al Axioma P3 (de la Regla Graduada), este es el que hace que nuestro sistema de axiomas sea mixto (o que es el que «contamina» a la geometría pura), al incluir los números reales y sus operaciones.

En lugar de como se presenta en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f., p. 25), se puede hacer uso del concepto de *isometría*, tal y como hago a continuación.

Axioma P1 de Euclides (Axioma P3 de Euclides (de la Regla Graduada)). En $(\boldsymbol{P}, d)$, para toda recta $r \subseteq \boldsymbol{P}$ existe una isometría $\gamma : (r, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d')$ siendo d' la distancia definida del modo siguiente, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d'(x, y) = |x - y|$$

Ha de tener en cuenta que en realidad existen muchas de esas isometrías γ; es decir, muchas «reglas graduadas». Están todas sobre la recta r, pero es como si, para cada posición de medida 0 de la «regla graduada» (*ruler*), se tuviese una isometría distinta. E incluso se doblará el número teniendo en cuenta que podemos cambiar el sentido de la «regla». Advierta también que estas «reglas» son algo especiales pues, al contrario de lo que sucede normalmente, en estas se tienen marcados también números negativos.

Por cierto, si se fija, (r, d) es un espacio métrico inducido de $\boldsymbol{P}, d$ ya que $r \subseteq \boldsymbol{P}$. (Vea (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f., p. 12) Teorema 1.4.)

En la demostración del punto (i) de la **Observación 2.8**, aunque no lo mencione, hace uso en varios puntos de que γ es una biyección y, por tanto, también una inyección.

También, deshecha una de las conclusiones a las que nos lleva

$$|t - a| = |t - b|$$

pues nos condice a $a = b$, y, como γ es biyectiva, esto conduce a su vez a que $A = B$, caso que hemos excluido por hipótesis.

También, al tener un único valor para t, se tendrá un único X, como dice el «teorema».

De hecho, esta demostración nos conduce también a una conclusión que no se presenta en el enunciado del «teorema»: que

$$\frac{1}{2}d(A, B) = d(M, A) = d(M, B)$$

Presento a continuación la demostración del punto (ii).

Demostración — Deseamos demostrar que existe un $A' \in r$ tal que

$$d(B, A) = d(B, A')$$

Por comodidad, usaremos la notación

$$\gamma(A') = x, \quad \gamma(A) = a, \quad \gamma(B) = b$$

ya que vamos a usar la isometría γ del ax-p3-euclides. Al ser una isometría, se cumple que

$$d(B, A) = d'(\gamma(B), \gamma(A)) = |b - a|$$
$$d(B, A') = d'(\gamma(B), \gamma(A')) = |b - x|$$

Vamos a suponer que se da la conclusión a la que deseamos llegar y, en ese caso, a ver qué valor o valores nos daría la variable x.

$$d(B, A) = d(B, A')$$
$$|b - a| = |b - x|$$

Por un lado, se tiene que

$$b - a = b - x$$
$$a = x$$

pero esto, por la biyección de γ^{-1}, nos conduce a que $A = A'$, cosa que contradice la hipótesis de partida. Por lo tanto desechamos este resultado. Por otro lado, se tiene que

$$b - a = x - b$$
$$x = 2b - a$$

Al ser γ^{-1} una biyección, habrá un único punto A' de $\mathbb{P}$ tal que $A' = \gamma^{-1}(x) = \gamma^{-1}(2b - a)$.

Entonces,

$$d(B, A') = |b - x| = |b - (2b - a)| = |a - b| = d(A, B) = d(B, A)$$

con lo que $B = \text{medio}[A, A']$ tal y como deseábamos demostrar. ■

Una diferencia que debe tener en cuenta entre los conceptos de *segmento* y *recta* es que, aunque ambos se pueden definir en base a dos puntos no coincidentes, la relación solo es inyectiva en el caso de los segmentos. Es decir, hay varios pares de puntos que definen a una misma recta; cosa que no sucede para los segmentos.

Entonces, el concepto de *punto medio* de dos puntos (pág. 25, **Observación 2.8** punto (i)) es lo mismo que el punto medio de un segmento; el segmento con extremos esos dos puntos.

Esto me hace creer que, alternativamente a la definición que se da de *punto medio* de dos puntos, que se basa en la (única) recta que pasa por ambos puntos, sería mejor definirlo en base al segmento de extremos dichos puntos. Esto nos permitiría que el caso en el que los extremos coinciden no tuviese que definirse mediante una excepción (pág. 26).

En lo que respecta a la definición de *semirrecta* (pág. 26), advierta que el punto que se usa para hacer esa separación no se encuentra en ninguna de las dos semirrectas.

Advierta que la demostración de la **Observación 2.10** se hace con signos de equivalencia, "$\Longleftrightarrow$", por lo que sirve para las dos demostraciones que se desean hacer, es decir, en los dos sentidos. Esto lo hace en muchas de las demostraciones del texto.

Bibliografía

Antonio F. Costa, y Peter Buser. s. f. *Curso de geometría básica*. 1.ª ed. Sanz y Torres.

Gerard A. Venema. s. f. *Foundations of Geometry*. 2.ª ed. Pearson.