Apuntes de Geometría Básica

Carlos E. Tafur Egido
Artos Institute
tung@artos.edu

Eugene Deklan
Honduras State
e.deklan@hstate.hn

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et.

Índice

Introducción

Algo que conviene hacer en esta asignatura es siempre dibujar la situación. Aunque se trate de un caso particular y, por tanto, no sirva como demostración ni como resolución de un ejercicio, dibujar la situación que se nos presenta nos saca en muchas ocasiones de la ofuscación en la que nos encontramos.

Capítulo 1. Espacios métricos

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías, pero no se presentan todos en este capítulo porque de hacerlo sería enorme en relación a los demás. Se ha optado por ir introduciendo los conceptos no tan de golpe.

pág. 11. **Definición 1.1**. Personalmente, me gusta más la definición siguiente del concepto de *métrica* o *distancia*.

Definición 01 (Métrica o Distancia). Una aplicación $d : \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ es una distancia o métrica si, para cualesquiera $x, y, z \in \boldsymbol{P}$, se cumplen:

(i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría.)
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular.)

La definición que dan en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) establece como codominio a todo $\mathbb{R}$ y luego hace una corrección de este en el punto (i). Quizás lo hace para que sea más cómodo usar esa definición en las demostraciones y ejercicios, al ir punto por punto. En cualquier caso, a mí me parece más elegante la que presento aquí.

pág. 11. **Ejemplo 1.2**. No llega a demostrar, ni aquí ni en el **Ejercicio 1.2**, los dos primeros puntos. Aunque sea fácil, vamos a hacerlo aquí.

Vamos a usar las coordenadas de un modo distinto al que se usan en este caso en el libro. Usaremos las que está acostumbrado TKTK.

Lo primero será ver que $\mathbb{R}^2$ es no vacío, cosa que sabemos perfectamente, por tratarse de un conjunto que conocemos. Por ejemplo, contiene al elemento $(0, 0)$.

Advierta que estamos usando una notación distinta a la que solemos usar para $\mathbb{R}^2$. Lo normal habría sido usar algo como

$$u = (x_1, y_1), \quad v = (x_2, y_2)$$

pero aquí seguiremos con la misma con la que han planteado el ejemplo.

Comprobemos que se cumplen las dos primeras condiciones de la

Punto 1.

$$d_E(x,x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$$

Si $x \neq y$, tenemos una de las tres situaciones siguientes:

1. $x_1 = y_1$ y $x_2 \neq y_2$.
2. $x_1 \neq y_1$ y $x_2 = y_2$.
3. $x_1 \neq y_1$ y $x_2 \neq y_2$.

En cualquiera de los casos, habrá, para algún $i = 1, 2$, un $x_i - y_i \neq 0$ y, por tanto, un $(x_i - y_i)^2 > 0$. Por tanto, en esos tres casos, se tiene que $d_E(x,y) > 0$.

Punto 2.

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(x_1 - y_1)^2 + (-1)^2(x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + [(-1)(x_2 - y_2)]^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ &= d_E(y,x) \end{aligned}$$

La métrica inducida es lo mismo que el concepto de restricción de una aplicación, solo que para espacios métricos. Esto se estudia en asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

Dado un conjunto M' tal que $M' \subseteq M$, la restricción de la aplicación δ a $M' \times M'$ es la métrica inducida.

En cuanto a la notación, se pueden usar cosas como $\delta \mid_{M' \times M'}$. Suele ser usual usar esa notación para la restricción de las aplicaciones.

La nueva función se comporta del mismo modo que la vieja, solo que en un dominio más restringido.

$$\begin{aligned} \delta : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \delta(x,y) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \delta \mid_{M' \times M'} : M' \times M' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \delta_{|_{M' \times M'}}(x,y) = \delta(x,y) \end{aligned}$$

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$g : (M, \delta) \longrightarrow (M', \delta')$$

Y, de hecho, en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) se usa esta notación un poco después. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

Teorema 1.7. En la demostración, hace uso de algunos resultados de la teoría de conjuntos. Puede consultarlo, entre otras referencias, en (pág. 104-105). Concretamente, el 3.59 (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y 3.60.

Al comienzo, se dice que $h \circ g$ y g^{-1} son biyectivas, pero no se da nada de información. Concretamente, esto es consecuencia de que tanto g como h son aplicaciones biyectivas.

Además, tampoco menciona que se dan las condiciones para que se pueda dar esa composición de aplicaciones, es decir, $h \circ g$. Lo primero que se debe cumplir para que $h \circ g$ sea una aplicación es que

$$\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Dom}(h)$$

En la parte que demuestra que conservan las distancias, se están suponiendo algunas cosas que se cumplen por ser g^{-1} y $h \circ g$ aplicaciones biyectivas. Por ejemplo, que existe un $x \in M$ tal que $h(g(x)) \in M''$.

Además, al ser biyectivas son inyectivas y esto hace que ese elemento $x \in M$ sea único, condición que también se requiere aquí.

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de *isometría*. En este caso, sería $\operatorname{Isom}(M, \delta)$.

Al final de la página. Las propiedades 1 y 2 son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

Nota 1.9. También se la puede llamar *grupo de isometrías* (M, δ).

Demostración de que las isometrías con la composición cumplen las propiedades de grupo TKTK.

Ejemplo 1.11. Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \text{Distancia máxima entre } p \text{ y } q$$

no es una métrica. Una razón es que, puede darse $\delta(x, x) > 0$ para algún $x \in G$.

Definición. 1.12. Además de llamarlo «segmento de extremos a y b» también se le suele llamar «segmento a b».

En la definición de puntos alineados se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente.

Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo

Bibliografía

Antonio F. Costa, y Peter Buser. s. f. *Curso de geometría básica*. 1.ª ed. Sanz y Torres.