Apuntes de Geometría Básica

Carlos E. Tafur Egido
Artos Institute
tung@artos.edu

Eugene Deklan
Honduras State
e.deklan@hstate.hn

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et.

Índice

Introducción

Algo que conviene hacer en esta asignatura es siempre dibujar la situación. Aunque se trate de un caso particular y, por tanto, no sirva como demostración ni como resolución de un ejercicio, dibujar la situación que se nos presenta nos saca en muchas ocasiones de la ofuscación en la que nos encontramos.

Capítulo 1. Espacios métricos

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías y, por tanto, se podrían haber presentado en este capítulo, perfectamente. Sin embargo, se ha optado por dispersar en distintos capítulos las definiciones relativas a los espacios métricos (es decir, generales para cualquier geometría), para que resulte más «digerible» para el lector.

Algo que debe tener en cuenta es que, en este capítulo, algunos de los ejemplos solo se plantean, sin resolverlos, y se presentan al final del mismo como ejercicios.

pág. 11. **Definición 1.1**. En lo que respecta a la definición de *métrica* o *distancia*, me gusta más la siguiente, ya que me parece más «elegante».

Definición 01 (Métrica o Distancia). Dado un conjunto $\boldsymbol{P}$ no vacío, una *métrica* o *distancia* es toda aplicación $d : \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ en la que para cualesquiera $x, y, z \in \boldsymbol{P}$ se cumple:

(i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría.)
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular.)

La definición que dan en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) establece como codominio a todo $\mathbb{R}$ y luego hace una corrección de este en el punto (i). Quizás se deba a que resulta más cómoda si se desea comprobar punto por punto, en los ejercicios, demostraciones, etc.

Lo único es que, con la mía, hay que tener cuidado para ciertas cosas. Por ejemplo, para demostrar el paso que si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$. Conviene hacerlo con el condicional contrarrecíproco, que sería lo mismo que en la definición de (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.).

pág. 11. **Ejemplo 1.2**. No llega a demostrar, ni aquí ni en el **Ejercicio 1.2**, los dos primeros puntos. Aunque sea fácil, vamos a hacerlo aquí.

Advierta que las coordenadas que se usan en este ejercicio son distintas a las que está acostumbrado. Normalmente, se usan coordenadas del tipo

$$u = (x_1, y_1), \quad v = (x_2, y_2)$$

en lugar de

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

Lo primero será ver que $\mathbb{R}^2$ es no vacío, cosa que sabemos perfectamente, por tratarse de un conjunto que conocemos. Por ejemplo, contiene al elemento $(0, 0)$.

Luego, se debe comprobar que el rango de la función d_E se encuentra en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Esto es fácil de ver por la fórmula de la función pues todo lo que esté elevado al cuadrado producirá un valor mayor o igual que 0. La suma de esos valores también lo será y, a su vez, la raíz cuadrada de este.

Del punto (i), es trivial ver que si $x = y$ entonces $d_E(x, y) = 0$, con una argumentación similar a la anterior. Más complicado es el otro condicional, es decir, que de $d_E(x, y) = 0$ se deduce que $x = y$. Es más cómodo hacerlo mediante su condicional contrarrecíproco, es decir, que de $x \neq y$ se deduce que $d_E(x, y) \neq 0$. Habría que ver los tres casos posibles en los que se da el antecedente, es decir, $x \neq y$:

1. $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$.
2. $x_1 \neq y_1$, $x_2 = y_2$.

3. $x_1 = y_1$, $x_2 \neq y_2$.

En todos y cada uno de estos casos, se tiene que al menos una de las subexpresiones $(x_i - y_i)^2$ para $i = 1, 2$ será mayor estricto que 0. Entonces, en cualquier caso, se tendrá que alguna de estas contribuye con un valor mayor estricto que 0; la otra, como poco, con 0. La suma será entonces mayor estricto que 0 y su raíz, evidentemente, también lo será.

Punto (ii).

$$
\begin{aligned}
d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{1(x_1 - y_1)^2 + 1(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2(x_1 - y_1)^2 + (-1)^2(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + [(-1)(x_2 - y_2)]^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
&= d_E(y, x)
\end{aligned}
$$

En cuanto al **Ejemplo 1.3**, lo más relevante está en que nos podemos basar en la desigualdad triangular en $(\mathbb{R}, +)$ para demostrar que se cumple el punto 3 en la definición de *métrica*. Esta se da como conocimiento básico, es decir, como prerrequisito.

La **métrica inducida** es lo mismo que el concepto de *restricción* de una aplicación, solo que para espacios métricos. Si no conoce este concepto, este se estudia en asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

En cuanto a la notación, se podría usar también la notación usual para la restricción de una aplicación, que en este caso sería algo como $\delta \mid_{M' \times M'}$, para $M' \subseteq M$.

La nueva función se comporta del mismo modo que la vieja, solo que en un dominio más restringido.

$$
\begin{aligned}
\delta : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \delta(x, y)
\end{aligned}
$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
\delta \mid_{M' \times M'} : M' \times M' &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \delta \mid_{M' \times M'} (x, y) = \delta(x, y)
\end{aligned}
$$

En cuanto a la demostración del Teorema de la Métrica Inducida, creo que también se debería comentar que ninguna de las propiedades de la definición de *métrica* es del tipo *closure*.

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$
g : (M, \delta) \longrightarrow (M', \delta')
$$

Y, de hecho, en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.) se usa esta notación un poco después, en la **Definición 1.8**. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

Teorema 1.7. En la demostración, creo que obvia demasiados puntos. Básicamente, solo muestra las transformaciones que conducen a la conservación de distancias en estas nuevas relaciones, pero se deja todo lo relacionado con la teoría de conjuntos. Los hechos que faltan se basan en algunos resultados sobre las aplicaciones. Puede consultarlos en pineda (TKTK) (pág. 104-105). Concretamente, el 3.59 (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y 3.60.

Veamos primero la demostración de la inversa, g^{-1}. La relación inversa de g será una aplicación biyectiva, al serlo también g. Además, se tienen

$$g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_M$$
$$g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{M'}$$

Esta última es la que se usa en la parte en la que demuestra que se conservan las distancias. Pero debería explicarse también que, al ser g^{-1} una aplicación biyectiva, los valores tanto de $g^{-1}(u)$ como de $g^{-1}(v)$ son únicos por la inyectividad, y, además, el rango de valores que producen abarcan a todo M, por la suprayectividad.

Ahora, pasemos a la demostración de la composición. Lo primero, sería ver si tiene sentido la composición de esas dos aplicaciones, $h \circ g$. Como sabemos, debe darse que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$. En este caso, se cumple, ya que tenemos que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Dom}(h)$.

También, debería explicarse que, al ser tanto g como h biyectivas, se tiene que $h \circ g$ será también biyectiva, con lo que todo valor $x \in M$ producirá un único valor de M'' por $h \circ g$ (por la inyectividad), y los valores producidos abarcarán a todo M'' (por la suprayectividad).

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de *isometría*. En este caso, sería $\mathrm{Isom}(M, \delta)$.

Al final de la página. Las propiedades 1 y 2 son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

Nota 1.9. Viene a decir que la estructura $(\mathrm{Isom}(M, \delta), \circ)$ es un grupo, siendo $\circ$ la composición de aplicaciones. Se le suele llamar también *grupo de isometrías* $(\mathrm{Isom}(M, \delta), \circ)$, o, abreviadamente, (M, δ).

Es fácil demostrar que se cumplen esas tres propiedades que la hacen un grupo. La propiedad asociativa (la primera que menciona) se cumple por cumplirse esta, en general, para todas las aplicaciones. La del elemento neutro (la segunda) es la propiedad identidad mencionada en el punto 3 de las propiedades anteriores. La del elemento simétrico (la tercera) es también sencilla: se tiene que la simétrica de una isometría será su aplicación inversa (o, lo que es lo mismo, su simétrica respecto a la composición).

Muchas veces, en lugar del operador "$\circ$" se usa uno análogo al de la multiplicación de números, es decir, "$\cdot$" o la notación en aposición. De hecho, a la composición de aplicaciones muchas veces se la llama también *producto*, de ahí que también se ponga "1" por "id", como aparece en el texto.

Ejemplo 1.11. En realidad, creo que la forma de definir δ_G no es muy precisa. Sería mejor «la menor de las posibles longitudes».

Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \text{Distancia máxima entre } p \text{ y } q$$

no es una métrica. Una razón es que puede darse $\delta(x, x) > 0$ para algún $x \in G$.

Definición. 1.12. Además de llamarlo «segmento de extremos a y b», también se le suele llamar «segmento $a\,b$».

En la definición de *puntos alineados*, se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente.

La demostración del punto (i) de la **Ovservación 1.13** es, en su estructura, similar a muchas otras que aparecen a lo largo de todo el texto. Debe tener en cuenta que esos bicondicionales sirven para ir en los dos sentidos; es decir, en esta demostración en concreto, si la leemos de izquierda a derecha estaremos demostrando que $[a, a] \subseteq \{a\}$. Si se va en el otro sentido, que $\{a\} \subseteq [a, a]$.

Ejercicio 1.3. Debe tener cuidado con la demostración de la desigualdad triangular:

$$\delta(a,b) \leq \delta(a,c) + \delta(c,b)$$

De las 8 formas de combinar las igualdades o negaciones de estas, los casos siguientes no se pueden dar por incompatibilidad de TKTK:

1. $a = b$, $a = c$ y $b \neq c$.
2. $a = b$, $a \neq c$ y $b = c$.
3. $a \neq b$, $a = c$ y $b = c$.

Ejercicio 1.5. Este es el ejercicio más relevante de este capítulo. Tiene cierta relación con algo que se verá en el capítulo dedicado a las isometrías. El apartado que me parece más difícil de comprender es el D. Pero primero haré una aclaración sobre el C.

Punto C. Con las condiciones del problema hasta este apartado, se llega fácilmente a las igualdades siguientes:

$$|g(x) - g(a)| = |x - a|$$
$$|g(x) - g(b)| = |x - b|$$

Se podrían manipular y llegar al resultado, pero en el texto se resuelve de un modo más elegante.

La primera de las expresiones anteriores es equivalente a

$$\sqrt{(g(x) - g(a))^2} = \sqrt{(x-a)^2}$$

Nos centraremos solo en esta; la segunda se manipularía de forma análoga.

Como esas raíces son positivas, podemos elevar al cuadrado ambas partes de la igualdad y no obtendremos múltiples resultados. Tenemos entonces que

$$(g(x) - g(a))^2 = (x-a)^2$$

A partir de aquí, se puede hacer la manipulación que se muestra en el texto. Advierta que en algún punto se hacen las sustituciones $g(a) = a$ y $g(b) = b$.

Punto D. Lo primero que hace es demostrar un resultado general para este espacio métrico, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Concretamente, que si dos de sus isometrías cumplen

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1(1) = f_2(1)$$

entonces son la misma, es decir, $f_1 = f_2$. Veamos por qué.

Para demostrar esto, nos basaremos en el resultado del punto C. Partiendo de la hipótesis, supongamos ahora otra isometría $g = f_1^{-1} \circ f_2$, pues, tal y como se explicó, la composición de dos isometrías sobre un mismo espacio métrico es también una isometría sobre ese mismo espacio métrico; por tanto, $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Por la hipótesis tenemos que

$$g(0) = (f_1^{-1} \circ f_2)(0) = f_1^{-1}(f_2(0)) = f_1^{-1}(f_1(0)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(0) = 0$$

y

$$g(1) = (f_1^{-1} \circ f_2)(1) = f_1^{-1}(f_2(1)) = f_1^{-1}(f_1(1)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(1) = 1$$

Es decir, en esta nueva isometría tenemos dos puntos fijos. Por tanto, tal y como se demuestra en el punto C, se tendrá que $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Vamos a operar:

$$f_1 \circ g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ f_2) = (f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f_2 = f_2$$

y, por otro lado,

$$f_1 \circ g = f_1 \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f_1$$

con lo que tenemos que $f_1 = f_2$.

Terminada la demostración de este resultado, pasamos a ver ahora que, para una isometría $g(x) = \sigma x + \tau$ siendo $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, se cumplirá que $g(0) = h(0)$ y $g(1) = h(1)$ para una isometría cualquiera h en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, con lo que podremos concluir que ambas isometrías son la misma, como consecuencia del resultado anterior.

Primero, recordar que, como se vio en el punto A de este mismo ejercicio, esa función g es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Tal y como vamos a ver ahora, basta con tomar la siguiente definición de g:

$$g(x) = [h(1) - h(0)]x + h(0)$$

Esto se debe a que deseamos, por un lado, que $g(0) = h(0)$. Para que se dé esto, debe cumplirse lo siguiente:

$$h(0) = g(0) = \sigma 0 + \tau = \tau$$

Por otro lado, se debe dar que $g(1) = h(1)$. Veámoslo:

$$h(1) = g(1) = \sigma + \tau = \sigma + h(0)$$

de lo que se deduce que $\sigma = h(1) - h(0)$. Estos dos resultados producen la fórmula que hemos dado para $g(x)$.

Por cierto, advierta que $|h(1) - h(0)| = 1$ por ser h una isometría. Por tanto, $\sigma \in \{-1, 1\}$.

Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo

Este capítulo se podría considerar el inicio del segundo bloque de la asignatura: la geometría euclidea plana, es decir, en dos dimensiones (2D).

Al contrario que en el capítulo anterior (sobre espacios métricos), nos encontramos en una geometría en particular.

Como se explica en la introducción de (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f.), se abordará esta geometría desde un punto de vista *sintético*, en contraste con el enfoque *analítico*, que es al que quizás esté más acostumbrado. A este resepecto, en (Gerard A. Venema, s. f.), en lugar de «enfoque» o «punto de vista» dicen «modelo».

Como quizás ya sepa, la geometría analítica es la que hace uso de coordenadas y, por tanto, se basa más en nuestro conocimiento del álgebra de los números reales. La sintética, por su parte, prescinde del álgebra y se basa en manipular expresiones conjuntistas en base a los axiomas. Es decir, en la sintética se suele estar más en contacto con los axiomas[1], mientras que, en la analítica, nos solemos encontrar a un nivel de abstracción superior.

En cualquier caso, el enfoque sintético presentado aquí no llega a ser «puro», pues hacemos uso de números reales y sus operaciones, tal y como se muestra en el Axioma 3 de Euclides (de la Regla Graduada). TKTK.

Lo primero que debe saber es que los elementos de este espacio métrico (el plano euclideo) reciben el nombre de *puntos* (*points*), y se usa la notación de los elementos para estos, es decir, cosas como $X \in \boldsymbol{P}$. Otros conjuntos más complejos de elementos reciben, en general, la designación de *figuras* (*figures*). Evidentemente, verá cosas como $r \subseteq \boldsymbol{P}$ para las figuras.

De forma más general, a cualquier agrupación en el plano euclidiano, ya sea una figura o un punto, o nada, a veces recibe la designación de *lugar geométrico* (*locus*).

En la definición de *recta* (pág. 23), el punto (i) se incluye para que un conjunto formado por un único punto no cumpla las condiciones para ser una recta.

Algo similar sucede con el punto (i) del Axioma P2 (pág. 24). De no incluirlo, una recta podría ser todo el plano euclideo, $\boldsymbol{P}$.

Se podría enunciar de forma menos simbólica —y, por tanto, más prosaica— la **Observación 2.3**.

Si los extremos de un segmento pertenecen a una recta, entonces todo el segmento es parte de esta.

Me gustaría poner aquí la demostración de la **Observación 2.4** (pág. 24) sobre que en el punto (ii) del Axioma $\boldsymbol{P}$2 no se requiere decir que sea única esa recta, sino que es algo que se puede deducir, y, por tanto, se puede poner en un teorema aparte.

Demostración — Suponemos dos puntos $A, B \in r$ no coindicentes en una recta r. También, que esos dos puntos están en otra recta s.

Dado un punto arbitrario $X \in \boldsymbol{P}$ tal que $X \in r$, por el punto (ii) de la Definición de Recta se tiene que A, B y X están alineados.

Considerando ahora que, tal y como dijimos, $A, B \in s$, por el punto (iii) de la Definición de Recta tenemos que, como A, B y X están alineados, se da que $X \in s$. Entonces, tenemos que $r \subseteq s$.

De forma análoga, llegamos a demosrtar que $s \subseteq r$. Uniendo ambas, tenemos que $r = s$. ■

Advierta que del punto (ii) del Axioma $\boldsymbol{P}$2 se deduce inmediatamente que la recta que contiene a un segmento es única. Esta afirmación quizás se podría poner en forma de corolario.

En lo que respecta a la **Definición 2.6** (de Rectas Secantes y Paralelas), advierta que se admite que también se califica de *paralelas* a dos rectas coincidentes.

[1] que en la época de Euclides recibían la denominación de *postulados*

En cuanto al **Teorema 2.7**, creo que adolece de no hacer incapié en que esa *o* (disyunción) es exclusiva en este caso; y no inclusiva, como suele ser habitual en matemáticas si no se especifica nada a este respecto.

Además, la demostración que da no llega a convencerme. Entre otras cosas, faltaría por demostrar que no se puede dar el caso que no sean secantes ni paralelas simultáneamente.

En cualquier caso, tengo claro, por el uso que hace posteriormente de este teorema en algunas demostraciones, que se trata de una *o* exclusiva. Yo lo enunciaría del modo siguiente.

Teorema 01 (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas). Dos rectas únicamente pueden o bien cortarse o bien ser paralelas, pero no pueden ser simultáneamente ambas cosas ni no darse una de estas dos opciones.

Para la demostración del teorema a mi manera, prefiero hacer un uso más explícito de la lógica y la teoría de conjuntos.

Demostración — Tenemos que demostrar que no se puede dar ninguno de los dos casos siguientes, para dos rectas cualesquiera r y s:

1. Que sean secantes y paralelas.
2. Que no sean secantes ni paralelas.

Vamos a hacer las dos demostraciones por el método de contradicción (también llamado *por reducción al absurdo*).

Vamos a hacer uso de la lógica proposicional simbólica, para que queden claros los razonamientos. Tenemos las proposiciones siguientes:

p: r y s no tienen ningún punto en común. Es decir, $r \cap s = \emptyset$
q: r y s se cortan. Es decir, existe un único $X \in \mathbb{P}$ tal que $\{X\} = r \cap s$ siendo $\{X\} \neq \emptyset$.
m: r y s son la misma (son coincidentes). Es decir, $r = s$.
n: r y s son paralelas. Por definición del paralelismo de rectas, se tiene que $n \iff p \vee m$.

Caso 1. Nuestra hipótesis es que r y s se cortan y son paralelas. La hipótesis será, por tanto, para este caso, la siguiente:

$$q \wedge n \iff q \wedge (p \vee m) \iff (q \wedge m) \vee (q \wedge p)$$

haciendo uso de la propiedad distributiva para los operadores conjunción y disyunción.

Veamos si puede ser cierto esto. Por la definición de disyunción, con que se dé una de las dos proposiciones que une esta, bastaría para que fuese cierta la proposición global.

Primero, $q \wedge m$. Por un lado, q impone —entre otras cosas— que existe un $X \in r$ tal que $X \notin s$, pero esto se contradice con m ya que esta última dice —entre otras cosas— que, para todo $X \in r$, $X \in s$.

Por la parte de $q \wedge p$ es evidente que se contradicen y, por tanto, da falso como resultado.

Por tanto, al ser ambas falsas, aun cuando estén unidas por una disyunción, la proposición general será siempre falsa.

Caso 2. Nuestra hipótesis es que r y s no se cortan ni son paralelas.

TKTK. ■

O sea, este teorema viene a decir que dos rectas tienen únicamente tres posiciones relativas entre sí: no se tocan en ningún punto (paralelas no coincidentes), se tocan en un único punto (secantes) o son la misma (paralelas y coincidentes). No pueden tener en común dos puntos, ni tres, etc.

También, se podría hablar sobre las posiciones relativas de una recta y un segmento. Aquí, sí que hay más casos posibles de sus posiciones relativas: se cortan, lo contiene, son paralelos, ni se cortan ni son paralelos, etc.

Consideraremos que dos segmentos son paralelos si las respectivas rectas soporte de estos son paralelas. Y una recta es paralela a un segmento si dicha recta es paralela a la recta soporte de dicho segmento.

Una diferencia con respecto a las posiciones relativas de dos rectas es que se pueden tener dos segmentos que no se corten y que además no sean paralelos, cosa que, según el teorema anterior sobre las posiciones relativas de las rectas, no puede suceder con las rectas.

Una vez que se han presentado los conceptos de rectas secantes y paralelas, se puede deducir una consecuencia directa de la **Observación 2.3**.

Corolario 01. En $(\boldsymbol{P}, d)$, dado un segmento con extremos los puntos A y B, $[A, B]$, siendo estos no coincidentes, y una recta r. Si se cortan r y $[A, B]$, entonces también se cortarán r y la recta soporte de $[A, B]$.

Demostración — Si se cortan r y $[A, B]$, tienen un único punto en común, es decir,

$$[A, B] \cap r = \{X\} = X$$

Al ser A y B no coincidentes, habrá algún punto en $[A, B]$ que no esté en r. Entonces, por el Teorema 2.7, no queda otra que r y r_{AB} sean secantes, siendo r_{AB} la recta soporte de $[A, B]$.

■

Advierta que lo contrario no tiene por qué ser cierto. Es decir, pueden cortarse dos rectas pero no cortarse una de estas con un segmento de la otra. Esto es fácil de imaginar.

En lo que respecta al Axioma P3 (de la Regla Graduada), este es el que hace que nuestro sistema de axiomas sea mixto (o que es el que «contamina» a la geometría pura), al incluir los números reales y sus operaciones.

En lugar de como se presenta en (Antonio F. Costa y Peter Buser, s. f., p. 25), se puede hacer uso del concepto de *isometría*, tal y como hago a continuación.

Axioma P1 de Euclides (Axioma P3 de Euclides (de la Regla Graduada)). En $(\boldsymbol{P}, d)$, para toda recta $r \subseteq \boldsymbol{P}$ existe una isometría $\gamma : (r, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d')$ siendo d' la distancia definida del modo siguiente, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d'(x, y) = |x - y|$$

Ha de tener en cuenta que en realidad existen muchas de esas isometrías γ; es decir, muchas «reglas graduadas». Están todas sobre la recta r, pero es como si, para cada posición de medida 0 de la «regla graduada» (*ruler*), se tuviese una isometría distinta. E incluso se doblará el número de isometrías posibles al tener en cuenta que podemos cambiar el sentido de la «regla». Advierta también que estas «reglas» son algo especiales, pues tienen también marcados números negativos.

Por cierto, si se fija, (r, d) es un espacio métrico inducido (**Teorema 1.4**) de $\boldsymbol{P}, d$ ya que $r \subseteq \boldsymbol{P}$.

En cuanto al punto (i) de la **Observación 2.8**, se incluyen tanto un teorma como una definición. Sería la definición del punto medio de un segmento. Para esta se requiere de demostrar que dicho punto es único para cada segmento.

En esta demostración, aunque no lo mencione, hace uso en varios puntos de que γ es una biyección y, por tanto, también una inyección. Por ejemplo, esto justifica que de $A \neq B$ se tenga que $a \neq b$.

Me gustaría explicar también cómo se puede llegar al último paso de la primera expresión matemática que presenta.

$$\begin{aligned}
|t-a| &= |t-b| \\
\sqrt{(t-a)^2} &= \sqrt{(t-b)^2} \\
(t-a)^2 &= (t-b)^2 \\
t^2+a^2-2ta &= t^2+b^2-2tb \\
a^2-2ta &= b^2-2tb \\
a^2-b^2 &= 2ta-2tb \\
(a+b)(a-b) &= 2t(a-b) \\
a+b &= 2t \\
t &= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Al ser γ una biyección, el valor $\gamma^{-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ es único, y lo designamos por M.

Alternativamente, la manipulación algebraica anterior se podría haber hecho viendo los dos casos a los que nos conducen los valores absolutos y descartando uno que veríamos que no tiene sentido en este caso.

La demostración del punto (ii) es muy parecida a la del punto (i). Por ejemplo, usando las designaciones

$$\gamma(A') = x, \quad \gamma(A) = a, \quad \gamma(B) = b$$

deseamos demostrar que existe un único $A' \in r$ para el que se cumple

$$d(B, A) = d(B, A')$$

Al ser γ una isometría, se cumple que

$$\begin{aligned}
d(B, A) &= d'(\gamma(B), \gamma(A)) = |b-a| \\
d(B, A') &= d'(\gamma(B), \gamma(A')) = |b-x|
\end{aligned}$$

con lo que se tiene que

$$|b-a| = |b-x|$$

Mediante manipulaciones algebraicas similares a las del punto (i), se llega a

$$x = 2b-a$$

con lo que $A' = \gamma^{-1}(2b-a)$ será único.

A partir de esto, es fácil demostrar que $B = \mathrm{medio}[A, A']$.

En esta definición, se debe hacer cierta puntualización para analizar el caso extremo en el que los extremos sean el mismo punto, es decir, para definir $\mathrm{medio}[A, A]$ para un $A \in \boldsymbol{P}$.

No basta con definirlo como el punto equidistante de los extremos, en la recta r, pues, en este caso extremo, esto es algo que se cumpla para todos los puntos de r. Hay que tener también en cuenta que ese pundo debe encontrarse en el segmento; en este caso, en $[A, A]$. Esto nos conduce a una única solución:

$$\mathrm{medio}[A, A] = A$$

ya que el único punto en $[A, A]$ es el propio A. Al hacerlo así, no tiene por qué establecerse esta igualdad por convenio, como se hace en el texto.

Por cierto, una diferencia que debe tener en cuenta entre los conceptos de *segmento* y *recta* es que, aunque ambos se pueden definir en base a dos puntos no coincidentes, la relación solo es inyectiva en el caso de los segmentos. Es decir, hay varios pares de puntos que definen a una misma recta; cosa que no sucede para los segmentos.

En lo que respecta a la definición de *semirrecta* (pág. 26), advierta que el punto que se usa para hacer esa separación no se encuentra en ninguna de las dos semirrectas.

En lo que respecta a los semiplanos, que se presentan en el Axioma $\boldsymbol{P}4$, antes de pasar a ver sus propiedades, presentadas en el **Teorema 2.12**, hay un resultado que me gustaría presentar y que se deduce directamente de este y que se usa en muchas demostraciones. Sería básicamente el recíproco del punto (3) de este.

Teorema 02. Dados $X, Y \in \boldsymbol{P} \setminus r$ siendo $X \neq Y$. Si $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$, entonces X e Y se encuentran en semiplanos distintos.

Este teorema se enuncia al final de la demostración de la propiedad (4), pero no lo demuestran.

Demostración — De $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$ se tiene que existe un punto $U \in r$ tal que $U \in [X, Y]$. Al encontrarse en r, se tiene que $U \notin H^1$ y $U \notin H^2$. De esto se tiene que $[X, Y] \nsubseteq H^i$ para $i = 1, 2$. Entonces, por el (condicional contrarrecíproco del) punto (2) del Axioma $\boldsymbol{P}4$, se tiene que X e Y se encuentran en semiplanos distintos. ∎

Veamos algunas observaciones de las propiedades de los semiplanos. En la (4), el primer paso se justifica concretamente por el punto (i) del Axioma $\boldsymbol{P}2$.

Creo que se debería justificar que $C \in \boldsymbol{P} \setminus r$. Para esto, usaríamos el Teorema de las Posiciones Relativas de Dos Rectas. Como $A \in \boldsymbol{P} \setminus r$ y $B \in r$, se tiene que $C \in \boldsymbol{P} \setminus r$ ya que r y la única recta que pasa por A y B son secantes, según este teorema.

La propiedad (6) sería como un teorema de caracterización de los semiplanos. En cuanto a su demostración, advierta que, tal y como hemos comentado anteriormente, esos bicondicionales permiten ir en las dos direcciones en la demostración. Por tanto, en esta —aunque quizás no lo parezca— se están demostrando las dos inclusiones de la igualdad que se desea demostrar; $\subseteq$ y $\supseteq$.

Bibliografía

Antonio F. Costa, y Peter Buser. s. f. *Curso de geometría básica*. 1.ª ed. Sanz y Torres.

Gerard A. Venema. s. f. *Foundations of Geometry*. 2.ª ed. Pearson.