Apuntes de Geometría Básica

Carlos E. Tafur Egido
Artos Institute
tung@artos.edu

Eugene Deklan
Honduras State
e.deklan@hstate.hn

Abstract
Apuntes de la asignatura Geometría Básica del primer curso del grado universitario de matemáticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).

Índice

Introducción

Algo que conviene hacer en esta asignatura es siempre dibujar la situación. Aunque se trate de un caso particular y, por tanto, no sirva como demostración ni como resolución de un ejercicio, dibujar la situación que se nos presenta nos saca en muchas ocasiones de la ofuscación en la que nos encontramos.

Capítulo 1. Espacios métricos

— **_pág. 11_**

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías y, por tanto, se podrían haber presentado en este capítulo, perfectamente. Sin embargo, se ha optado por dispersar en distintos capítulos las definiciones relativas a los espacios métricos (es decir, generales para cualquier geometría), para que resulte más «digerible» para el lector.

Algo que debe tener en cuenta es que, en este capítulo, algunos de los ejemplos solo se plantean, sin resolverlos, y se presentan al final del mismo como ejercicios.

En lo que respecta a la **Definición 1.1 (de Métrica)**, me gusta más la siguiente, ya que me parece más «elegante».

Definición (Métrica o Distancia). Dado un conjunto $\boldsymbol{P}$ no vacío, una *métrica* o *distancia* es toda aplicación $d : \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ en la que para cualesquiera $x, y, z \in \boldsymbol{P}$ se cumple:

(i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría.)
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular.)

La definición que dan en el libro establece como codominio a todo $\mathbb{R}$ y luego hace una corrección de este en el punto (i). Quizás se deba a que resulta más cómoda si se desea comprobar punto por punto, en los ejercicios, demostraciones, etc.

Lo único es que, con la mía, hay que tener cuidado para ciertas cosas. Por ejemplo, para demostrar el paso que si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$. Conviene hacerlo con el condicional contrarrecíproco, que sería lo mismo que en la definición del libro.

— **_pág. 12_**

El **Ejemplo 1.2** es lo mismo que el **Ejercicio 1.2** (pág. 17 con la solución en la pág. 256). Se obvian los primeros puntos de la Definición 1.1 (de Métrica), pero aquí los presentamos para que esté más completo. (Usaremos la Definición 1.1 (de Métrica) presentada en estos apuntes.)

Advierta que las coordenadas que se usan en este ejercicio son distintas a las que está acostumbrado de otras asignaturas donde se toca la geometría (euclidiana) analítica. En estas lo normal es usar coordenadas del tipo

$$u = (x_1, y_1), \quad v = (x_2, y_2)$$

en lugar de

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

Lo primero será ver que $\mathbb{R}^2$ es no vacío, cosa que sabemos perfectamente, por tratarse de un conjunto que conocemos. Por ejemplo, contiene al elemento $(0, 0)$.

Luego, se debe comprobar que el rango de la función d_E se encuentra en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Esto es fácil de ver por la fórmula de la función pues todo lo que esté elevado al cuadrado producirá un valor mayor o igual que 0. La suma de esos valores también lo será y, a su vez, la raíz cuadrada de esa suma.

Del punto 1, es trivial ver que si $x = y$ entonces $d_E(x, y) = 0$, con una argumentación similar a la anterior. Más complicado es el otro condicional, es decir, que de $d_E(x, y) = 0$ se deduce que $x = y$. Es más cómodo hacerlo mediante su condicional contrarrecíproco, es decir, que de $x \neq y$ se deduce que $d_E(x, y) \neq 0$. Habría que ver los tres casos posibles en los que se da el antecedente, es decir, $x \neq y$:

1. $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$.
2. $x_1 \neq y_1$, $x_2 = y_2$.
3. $x_1 = y_1$, $x_2 \neq y_2$.

En todos y cada uno de estos casos, se tiene que al menos una de las subexpresiones $(x_i - y_i)^2$ para algún i que valga 1 o 2, será mayor estricto que 0; cosa que sabemos que sucede con la función potencia de exponente 2. Entonces, en cualquier caso, se tendrá que alguna de estas contribuye con un valor mayor estricto que 0; la otra, como poco, con 0. La suma será entonces mayor estricto que 0 y su raíz, evidentemente, también lo será.

Punto 2.

$$\begin{aligned}
d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{1(x_1 - y_1)^2 + 1(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2(x_1 - y_1)^2 + (-1)^2(x_2 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + [(-1)(x_2 - y_2)]^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\
&= d_E(y, x)
\end{aligned}$$

En cuanto al **Ejemplo 1.3**, lo más relevante está en que nos podemos basar en la desigualdad triangular en $(\mathbb{R}, +)$ para demostrar que se cumple el punto 3 en la definición de *métrica*. Esta se da como conocimiento básico, es decir, como prerrequisito.

Aunque el **Teorema 1.4 (de la Métrica Inducida)** pueda parecer más bien una definición, en realidad lo que viene a explicar es que la restricción del dominio de un espacio métrico es siempre un espacio métrico. A este se le suele llamar *espacio métrico inducido*, y, a esa métrica, *métrica inducida*. También se podía haber optado por llamarlo *espacio métrico restringido*.

Para entender esto, además de conocer el concepto de *espacio métrico*, debe saber qué es una *restricción* de una aplicación, cosa que se estudia normalmente en asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

En cuanto a la notación, se podría usar también la notación usual para la restricción de una aplicación, que en este caso sería algo como $\delta \mid_{M' \times M'}$, para $M' \subseteq M$.

La nueva función se comporta del mismo modo que la vieja, solo que en un dominio más restringido.

$$\begin{aligned}
\delta : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \delta(x, y)
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \delta\mid_{M'\times M'}: M'\times M' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \delta\mid_{M'\times M'}(x,y)=\delta(x,y) \end{aligned}$$

En la demostración de este teorema, creo que, por hacerla más completa, quizás se debería comentar también que que ninguna de las propiedades de la Definición 1.1 (de Métrica) es del tipo cierre (*closure*).

— pág. 13

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$g:(M,\delta)\longrightarrow(M',\delta')$$

Y, de hecho, en el libro se usa esta notación un poco después, en la **Definición 1.8**. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

Teorema 1.7. En la demostración, creo que obvia demasiados puntos. Básicamente, solo muestra las transformaciones que conducen a la conservación de distancias en estas nuevas relaciones, pero se deja todo lo relacionado con la teoría de conjuntos. Los hechos que faltan se basan en algunos resultados sobre las aplicaciones. Puede consultarlos en pineda (TKTK) (pág. 104-105). Concretamente, el 3.59 (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y 3.60.

Veamos primero la demostración de la inversa, g^{-1}. La relación inversa de g será una aplicación biyectiva, al serlo también g. Además, se tienen

$$g^{-1}\circ g=\mathrm{id}_M,\quad g\circ g^{-1}=\mathrm{id}_{M'}$$

Esta última es la que se usa en la parte en la que demuestra que se conservan las distancias. Pero debería explicarse también que, al ser g^{-1} una aplicación biyectiva, los valores tanto de $g^{-1}(u)$ como de $g^{-1}(v)$ son únicos por la inyectividad, y, además, el rango de valores que producen abarcan a todo M, por la suprayectividad.

Ahora, pasemos a la demostración de la composición. Lo primero, sería ver si tiene sentido la composición de esas dos aplicaciones, $h\circ g$. Como sabemos de la teoría de conjuntos, $\mathrm{Im}(g)\subseteq\mathrm{Dom}(h)$ es un requisito para esto. En nuestro caso concreto se cumple ya que tenemos que $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Dom}(h)$.

También, debería explicarse que, al ser tanto g como h biyectivas, se tiene que $h\circ g$ será también biyectiva, con lo que todo valor $x\in M$ producirá un único valor de M'' por $h\circ g$ (por la inyectividad), y los valores producidos abarcarán a todo M'' (por la suprayectividad).

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de *isometría*. En este caso, sería "$\mathrm{Isom}(M,\delta)$".

En cuanto a las propiedades presentadas al final de la página, las dos primeras son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

— pág. 14

La **Nota 1.9** viene a decir que la estructura $(\mathrm{Isom}(M,\delta),\circ)$ es un grupo (*group*), siendo "$\circ$" la composición de aplicaciones. Se le suele llamar también *grupo de isometrías* $(\mathrm{Isom}(M,\delta),\circ)$, o, abreviadamente, (M,δ).

Es fácil demostrar que se cumplen esas tres propiedades que la hacen un grupo. La propiedad asociativa (la primera que menciona) se cumple por cumplirse esta, en general, para todas las aplicaciones. La del elemento neutro (la segunda) es la propiedad identidad mencionada en el punto 3 de las propiedades anteriores. La del elemento simétrico (la tercera) es también sencilla: se tiene que la simétrica de una isometría será su aplicación inversa (o, lo que es lo mismo, su simétrica respecto a la composición).

Muchas veces, en lugar del operador “$\circ$” se usa uno análogo al de la multiplicación de números, es decir, “$\cdot$” o la notación en aposición. De hecho, a la composición de aplicaciones muchas veces se la llama también *producto*, de ahí que también se ponga “1” por “id”, como aparece en el texto.

— pág. 15

Ejemplo 1.11. En realidad, creo que la forma de definir δ_G no es muy precisa. Sería mejor «la menor de las posibles longitudes».

Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \textbf{Distancia máxima entre } p \text{ y } q$$

no es una métrica. Una razón es que puede darse $\delta(x,x) > 0$ para algún $x \in G$, cosa que invalida el punto 1 de la Definición 1.1 (de Métrica).

— pág. 16

La **Definición. 1.12** en realidad está definiendo dos cosas: (i) segmento y (ii) tres puntos alineados. Además de llamarlo «segmento de extremos a y b», también se le suele llamar «segmento $a\,b$».

Por cierto, se podría pensar en el concepto de *segmento* como en una generalización del de *intervalo* de $(\mathbb{R}), +, \cdot$.

En la definición de *puntos alineados*, se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente. Si tres elementos están alineados, también se dice que son *colineales*.

— pág. 17

La demostración del punto (i) de la **Ovservación 1.13** es, en su estructura, similar a muchas otras que aparecen a lo largo de todo el texto. Debe tener en cuenta que esos bicondicionales sirven para ir en los dos sentidos; es decir, en esta demostración en concreto, si la leemos de izquierda a derecha estaremos demostrando que $[a,a] \subseteq \{a\}$. Si se va en el otro sentido, que $[a,a] \supseteq \{a\}$, o, lo que es lo mismo, que $\{a\} \subseteq [a,a]$.

Ejercicio 1.3. Debe tener cuidado con la demostración de la desigualdad triangular:

$$\delta(a,b) \leq \delta(a,c) + \delta(c,b)$$

De las 8 formas de combinar las igualdades o negaciones de estas, los casos siguientes no se pueden dar por incompatibilidad de TKTK:

1. $a = b$, $a = c$ y $b \neq c$.
2. $a = b$, $a \neq c$ y $b = c$.
3. $a \neq b$, $a = c$ y $b = c$.

Ejercicio 1.5. Este es el ejercicio más relevante de este capítulo. Tiene cierta relación con algo que se verá en el capítulo dedicado a las isometrías. El apartado que me parece más difícil de comprender es el D. Pero primero haré una aclaración sobre el C.

Punto C. Con las condiciones del problema hasta este apartado, se llega fácilmente a las igualdades siguientes:

$$|g(x) - g(a)| = |x - a|$$
$$|g(x) - g(b)| = |x - b|$$

Se podrían manipular y llegar al resultado, pero en el texto se resuelve de un modo más elegante.

La primera de las expresiones anteriores es equivalente a

$$\sqrt{(g(x) - g(a))^2} = \sqrt{(x - a)^2}$$

Nos centraremos solo en esta; la segunda se manipularía de forma análoga.

Como esas raíces son positivas, podemos elevar al cuadrado ambas partes de la igualdad y no obtendremos múltiples resultados. Tenemos entonces que

$$(g(x) - g(a))^2 = (x - a)^2$$

A partir de aquí, se puede hacer la manipulación que se muestra en el texto. Advierta que en algún punto se hacen las sustituciones $g(a) = a$ y $g(b) = b$.

Punto D. Lo primero que hace es demostrar un resultado general para este espacio métrico, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Concretamente, que si dos de sus isometrías cumplen

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1(1) = f_2(1)$$

entonces son la misma, es decir, $f_1 = f_2$. Veamos por qué.

Para demostrar esto, nos basaremos en el resultado del punto C. Partiendo de la hipótesis, supongamos ahora otra isometría $g = f_1^{-1} \circ f_2$, pues, tal y como se explicó, la composición de dos isometrías sobre un mismo espacio métrico es también una isometría sobre ese mismo espacio métrico; por tanto, $g \in \mathbf{Isom}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Por la hipótesis tenemos que

$$g(0) = (f_1^{-1} \circ f_2)(0) = f_1^{-1}(f_2(0)) = f_1^{-1}(f_1(0)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(0) = 0$$

y

$$g(1) = (f_1^{-1} \circ f_2)(1) = f_1^{-1}(f_2(1)) = f_1^{-1}(f_1(1)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(1) = 1$$

Es decir, en esta nueva isometría tenemos dos puntos fijos. Por tanto, tal y como se demuestra en el punto C, se tendrá que $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Vamos a operar:

$$f_1 \circ g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ f_2) = (f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f_2 = f_2$$

y, por otro lado,

$$f_1 \circ g = f_1 \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f_1$$

con lo que tenemos que $f_1 = f_2$.

Terminada la demostración de este resultado, pasamos a ver ahora que, para una isometría $g(x) = \sigma x + \tau$ siendo $\sigma \in \{-1, 1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, se cumplirá que $g(0) = h(0)$ y $g(1) = h(1)$ para una isometría cualquiera h

en $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, con lo que podremos concluir que ambas isometrías son la misma, como consecuencia del resultado anterior.

Primero, recordar que, como se vio en el punto A de este mismo ejercicio, esa función g es una isometría de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Tal y como vamos a ver ahora, basta con tomar la siguiente definición de g:

$$g(x) = [h(1) - h(0)]x + h(0)$$

Esto se debe a que deseamos, por un lado, que $g(0) = h(0)$. Para que se dé esto, debe cumplirse lo siguiente:

$$h(0) = g(0) = \sigma 0 + \tau = \tau$$

Por otro lado, se debe dar que $g(1) = h(1)$. Veámoslo:

$$h(1) = g(1) = \sigma + \tau = \sigma + h(0)$$

de lo que se deduce que $\sigma = h(1) - h(0)$. Estos dos resultados producen la fórmula que hemos dado para $g(x)$.

Por cierto, advierta que $|h(1) - h(0)| = 1$ por ser h una isometría. Por tanto, $\sigma \in \{-1, 1\}$.

Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo

2.1. Introducción

Este capítulo se podría considerar el inicio del segundo bloque de la asignatura: la geometría euclidea plana, es decir, en dos dimensiones (2D).

Al contrario que en el capítulo anterior (sobre espacios métricos), nos encontramos en una geometría en particular.

Como se explica en la introducción del texto, se abordará esta geometría desde un punto de vista *sintético*, en contraste con el enfoque *analítico*, que es al que quizás esté más acostumbrado. A este resepecto, en [1], en lugar de «enfoque» o «punto de vista» dicen «modelo».

Como quizás ya sepa, la geometría analítica es la que hace uso de coordenadas y, por tanto, se basa más en nuestro conocimiento del álgebra de los números reales. La sintética, por su parte, prescinde del álgebra y se basa en manipular expresiones conjuntistas en base a los axiomas. Es decir, en la sintética se suele estar más en contacto con los axiomas[1], mientras que, en la analítica, nos solemos encontrar a un nivel de abstracción superior.

En cualquier caso, el enfoque sintético presentado aquí no llega a ser «puro», pues hacemos uso de números reales y sus operaciones, tal y como se muestra en el Axioma P3 (de la Regla Graduada).

Lo primero que debe saber es que los elementos de este espacio métrico (el plano euclideo) reciben el nombre de *puntos* (*points*), y se usa la notación de los elementos para estos, es decir, cosas como $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{P}$. Otros conjuntos más complejos de elementos reciben, en general, la designación de *figuras* (*figures*). Evidentemente, verá cosas como $\boldsymbol{r} \subseteq \boldsymbol{P}$ para las figuras.

De forma más general, a cualquier agrupación en el plano euclidiano, ya sea una figura o un punto, o nada, a veces recibe la designación de *lugar geométrico* (*locus*). Este concepto se define en la pág. 35.

[1]que en la época de Euclides recibían la denominación de *postulados*

2.2 Recta

En la definición de *recta* (pág. 23), el punto (i) se incluye para que un conjunto formado por un único punto no cumpla las condiciones para ser una recta.

Algo similar sucede con el punto (i) del Axioma P2 (pág. 24). De no incluirlo, una recta podría ser todo el plano euclideo, $\boldsymbol{P}$.

Se podría enunciar de forma menos simbólica —y, por tanto, más prosaica— la **Observación 2.3**: «Si los extremos de un segmento pertenecen a una recta, entonces todo el segmento es parte de esta.»

Una vez vista la Observación 2.3 y el Axioma P2, me gustaría aclarar las relaciones que se dan entre pares (no ordenados) de puntos y los segmentos y las rectas.

Dos puntos definen los extremos de un bsegmento. Esta relación es una aplicación biyectiva. Dos puntos, también definen a una única recta, con lo que se tiene una aplicación, pero esta no es inyectiva ya que se pueden tener dos pares de puntos que definan a una misma recta.

Evidentemente, un segmento define también a una única recta ya que, al mencionar a un segmento, es como si mencionáramos a dos puntos (por la biyectividad).

Tal y como se explica en la **Observación 2.4** (pág. 24), en realidad en el punto (ii) del Axioma $\boldsymbol{P}$2 se podría haber limitado a decir que entre dos puntos no coincidentes siempre hay (al menos) una recta; que sea única es algo que se puede deducir y, por tanto, se podría haber presentado como un teorema. Veamos la demostración de este.

Demostración — Suponemos que existen dos rectas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ que contienen a dos puntos $A, B \in \boldsymbol{P}$.

Dado un punto arbitrario $X \in \boldsymbol{P}$ tal que $X \in \boldsymbol{r}$, por el punto (ii) de la Definición 2.2 (de Recta) se tiene que A, B y X están alineados.

Desde otro punto de vista, sabemos que $A, B \in \boldsymbol{s}$. Entonces, por el punto (iii) de la Definición 2.2 (de Recta) tenemos que, como A, B y X están alineados, se da que $X \in \boldsymbol{s}$. Con este razonamiento, hemos llegado a demostrar que $\boldsymbol{r} \subseteq \boldsymbol{s}$.

De forma análoga, llegamos a demosrtar que $\boldsymbol{s} \subseteq \boldsymbol{r}$. Uniendo ambas, tenemos que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$. ■

Por lo que explicamos antes sobre las relaciones entre pares de puntos y segmentos y rectas, de este axioma se deduce también que que la recta que contiene a un segmento es única. Se podría haber puesto quizás también como corolario esta afirmación.

En lo que respecta a la **Definición 2.6** (de Rectas Secantes y Paralelas), advierta que se admite que también se califica de *paralelas* a dos rectas coincidentes.

En cuanto al **Teorema 2.7**, creo que adolece de no hacer incapié en que esa *o* (disyunción) es exclusiva en este caso; y no inclusiva, como suele ser habitual en matemáticas si no se especifica nada a este respecto.

Además, la demostración que da no llega a convencerme. Entre otras cosas, faltaría por demostrar que no se puede dar el caso que no sean secantes ni paralelas simultáneamente.

En cualquier caso, tengo claro, por el uso que hace posteriormente de este teorema en algunas demostraciones, que se trata de una *o* exclusiva. Yo lo enunciaría del modo siguiente.

Teorema (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas). Las dos únicas posiciones relativas que pueden tener dos rectas es ser secantes o bien ser paralelas (coincidentes o no coincidentes), pero no pueden ser ambas cosas simultáneamente así como ninguna.

Para la demostración del teorema a mi manera, prefiero hacer un uso más explícito de la lógica y la teoría de conjuntos.

Demostración — Tenemos que demostrar que no se puede dar ninguno de los dos casos siguientes, para dos rectas cualesquiera r y s:

1. Que sean secantes y paralelas.
2. Que no sean secantes ni paralelas.

Vamos a hacer las dos demostraciones por el método de contradicción (también llamado *por reducción al absurdo*).

Vamos a hacer uso de la lógica proposicional simbólica, para que queden claros los razonamientos. Tenemos las proposiciones siguientes:

p: r y s no tienen ningún punto en común. Es decir, $r \cap s = \emptyset$
q: r y s se cortan. Es decir, existe un único $X \in \mathbb{P}$ tal que $\{X\} = r \cap s$ siendo $\{X\} \neq \emptyset$.
m: r y s son la misma (son coincidentes). Es decir, $r = s$.
n: r y s son paralelas. Por definición del paralelismo de rectas, se tiene que $n \iff p \vee m$.

Caso 1. Nuestra hipótesis es que r y s se cortan y son paralelas. La hipótesis será, por tanto, para este caso, la siguiente:

$$q \wedge n \iff q \wedge (p \vee m) \iff (q \wedge m) \vee (q \wedge p)$$

haciendo uso de la propiedad distributiva para los operadores conjunción y disyunción.

Veamos si puede ser cierto esto. Por la definición de disyunción, con que se dé una de las dos proposiciones que une esta, bastaría para que fuese cierta la proposición global.

Primero, $q \wedge m$. Por un lado, q impone —entre otras cosas— que existe un $X \in r$ tal que $X \notin s$, pero esto se contradice con m ya que esta última dice —entre otras cosas— que, para todo $X \in r$, $X \in s$.

Por la parte de $q \wedge p$ es evidente que se contradicen y, por tanto, da falso como resultado.

Por tanto, al ser ambas falsas, aun cuando estén unidas por una disyunción, la proposición general será siempre falsa.

Caso 2. Nuestra hipótesis es que r y s no se cortan ni son paralelas.

TKTK. ■

O sea, este teorema viene a decir que dos rectas tienen únicamente tres posiciones relativas entre sí: no se tocan en ningún punto (paralelas no coincidentes), se tocan en un único punto (secantes) o son la misma (paralelas y coincidentes). No pueden tener en común únicamente dos puntos, ni tres, etc.

Antes de seguir, me gustaría mencionar que quizás lo mejor sería considerar que un segmento cuyos extremos son el mismo no es en realidad un segmento sino un punto. Esto quizás nos facilitaría ciertas cosas. No se considera así en el libro. Por cierto, esto tiene también relación con el punto medio de un segmento, concepto que se define un poco después.

Ahora, nos podríamos preguntar sobre las posiciones relativas de una recta y un segmento. Aquí, sí que hay más casos posibles de sus posiciones relativas.

1. Se cortan. Un único punto en común.
2. La recta contiene al segmento. Es coincidente con la única recta que contiene al segmento. La recta contiene a sus extremos. Advierta que esto último solo es cierto si el segmento no es un punto.

3. Son paralelos. La recta es paralela a la recta que contiene al segmento.
4. No se cortan ni son paralelos. Aquí es distinto a las posiciones relativas entre dos rectas.

Si lo piensa, un segmento es un objeto (también llamado *figura*) más complejo que una recta. De hecho, creo que se podría considerar a la recta como la figura más básica después del punto.

Veamos otro resultado de las posiciones relativas de un segmento y una recta.

Teorema. Sea un segmento $[A, B]$ siendo $A \neq B$ y una recta r. Si $[A, B] \cap r \neq \emptyset$, entonces $[A, B]$ y r son secantes.

Demostración — TKTK.

■

Una vez que se han presentado los conceptos de *rectas secantes* y *paralelas*, se puede deducir una consecuencia directa de la **Observación 2.3**.

Corolario. Dada una recta y un segmento que no es un solo punto, si son secantes entonces también lo serán esta y la recta soporte del segmento.

Lo cierto es que es algo muy evidente y entiendo perfectamente que no aparezca este resultado en el libro.

Demostración — Si se cortan r y $[A, B]$, tienen un único punto en común, es decir,

$$[A, B] \cap r = \{X\} = X$$

Es evidente, al ser A y B no coincidentes, que habrá algún punto en $[A, B]$ que no esté en r ya que hemos dicho que el punto de corte es uno solo, y este segmento contiene al menos a dos puntos. Entonces, por el Teorema 2.7 (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas), no queda otra que r y r_{AB} sean secantes, siendo r_{AB} la recta soporte de $[A, B]$.

■

Advierta que lo contrario no tiene por qué ser cierto. Es decir, pueden cortarse dos rectas pero no cortarse una de estas con un segmento incluido en la otra. Esto es fácil de imaginar.

En lo que respecta al Axioma P3 (de la Regla Graduada), este es el que hace que nuestro sistema de axiomas sea mixto (o que es el que «contamina» a la geometría pura), al incluir los números reales y sus operaciones.

En lugar de como se presenta en el libro (pág. 25), se puede hacer uso del concepto de *isometría*, tal y como hago a continuación.

Axioma (P3 de Euclides (de la Regla Graduada)). En $(\boldsymbol{P}, d)$, para toda recta $r \subseteq \boldsymbol{P}$ existe una isometría $\gamma : (r, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d')$ siendo d' la distancia definida del modo siguiente, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d'(x, y) = |x - y|$$

Ha de tener en cuenta que en realidad existen muchas de esas isometrías γ; es decir, muchas «reglas graduadas». Están todas sobre la recta r, pero es como si, para cada posición de medida 0 de la «regla graduada» (*ruler*), se tuviese una isometría distinta. E incluso se doblará el número de isometrías posibles al tener en cuenta que podemos cambiar el sentido de la «regla». Advierta también que estas «reglas» son algo especiales, pues tienen también marcados números negativos.

Por cierto, si se fija, (r, d) es un espacio métrico inducido (**Teorema 1.4**) de $\boldsymbol{P}, d$ ya que $r \subseteq \boldsymbol{P}$.

En cuanto al punto (i) de la **Observación 2.8**, se incluyen tanto un teorma como una definición. Sería la definición del punto medio de un segmento. Para esta se requiere de demostrar que dicho punto es único para cada segmento.

En esta demostración, aunque no lo mencione, hace uso en varios puntos de que γ es una biyección y, por tanto, también una inyección. Por ejemplo, esto justifica que de $A \neq B$ se tenga que $a \neq b$.

Me gustaría explicar también cómo se puede llegar, por medio de manipulaciones algebraicas, al último paso de la primera expresión matemática que presenta.

$$
\begin{aligned}
|t-a| &= |t-b| \\
\sqrt{(t-a)^2} &= \sqrt{(t-b)^2} \\
(t-a)^2 &= (t-b)^2 \\
t^2+a^2-2ta &= t^2+b^2-2tb \\
a^2-2ta &= b^2-2tb \\
a^2-b^2 &= 2ta-2tb \\
(a+b)(a-b) &= 2t(a-b) \\
a+b &= 2t \\
t &= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Al ser γ una biyección, el valor $\gamma^{-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ es único, y lo designamos por M.

Alternativamente, la manipulación algebraica anterior se podría haber procedido por una manipulación más directa de los valores absolutos. Por ejemplo, de $|t-a| = |t-b|$ tenemos dos resultados:

$$
\begin{aligned}
t-a &= t-b \\
t-a &= -(t-b)
\end{aligned}
$$

El primero nos conduce a la igualdad $a = b$, con lo que se tendría entonces, por la inyectividad de γ, a que $A = B$,cosa que contradice la hipótesis de partida, por lo que descartamos este resultado. El otro nos dará lo mismo que antes: $t = (a+b)/2$.

La demostración del punto (ii) es muy parecida a la del punto (i).

Demostración — Por ejemplo, usando las designaciones

$$\gamma(A') = x, \quad \gamma(A) = a, \quad \gamma(B) = b$$

deseamos demostrar que existe un único $A' \in r$ para el que se cumple

$$d(B,A) = d(B,A')$$

Al ser γ una isometría, se cumple que

$$
\begin{aligned}
d(B,A) &= d'(\gamma(B),\gamma(A)) = |b-a| \\
d(B,A') &= d'(\gamma(B),\gamma(A')) = |b-x|
\end{aligned}
$$

con lo que se tiene que

$$|b-a| = |b-x|$$

Mediante manipulaciones algebraicas similares a las del punto (i), se llega a

$$x = 2b-a$$

con lo que $A' = \gamma^{-1}(2b-a)$ será único por ser γ biyectiva.

A partir de esto, es fácil demostrar que $B = \mathbf{medio}[A, A']$. ■

En esta definición, se debe hacer cierta puntualización para analizar el caso extremo en el que los extremos sean el mismo punto, es decir, para definir $\mathbf{medio}[A, A]$ para un $A \in \boldsymbol{P}$.

No basta con definirlo como el punto equidistante de los extremos, en la recta r, pues, en este caso extremo, esto es algo que se cumpla para todos los puntos de r. Hay que tener también en cuenta que ese pundo debe encontrarse en el segmento; en este caso, en $[A, A]$. Esto nos conduce a una única solución:

$$\mathbf{medio}[A, A] = A$$

ya que el único punto en $[A, A]$ es el propio A. Al hacerlo así, no tiene por qué establecerse esta igualdad por convenio, como se hace en el texto.

Tal y como expliqué antes, si excluyésemos este caso «degenerado» de la definición de *segmento*, no tendríamos este problema.

En lo que respecta a la definición de *semirrecta* (pág. 26), advierta que el punto que se usa para hacer esa separación no se encuentra en ninguna de las dos semirrectas.

2.3. Semiplanos

En lo que respecta a los semiplanos, que se presentan en el Axioma $\boldsymbol{P}4$, antes de pasar a ver sus propiedades, presentadas en el **Teorema 2.12**, hay un resultado que me gustaría presentar y que se deduce directamente de este y que se usa en muchas demostraciones. Sería básicamente el recíproco del punto (3) de este.

Teorema (Ampliación del Punto (3) del Axioma $bold(P)$4). Dados $X, Y \in \boldsymbol{P} \setminus r$ siendo $X \neq Y$. Si $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$, entonces X e Y se encuentran en semiplanos distintos.

Este teorema se enuncia al final de la demostración de la propiedad (4) (Teorema 2.12), pero no lo demuestran.

Demostración — Este se deduce de los puntos (1) y (2) del Axioma $\boldsymbol{P}4$.

De $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$ se tiene que existe un punto $U \in r$ tal que $U \in [X, Y]$. Al encontrarse en r, se tiene, como consecuencia del punto (1), que $U \notin H^1$ y $U \notin H^2$. De esto se tiene que $[X, Y] \nsubseteq H^i$ para $i = 1, 2$. Entonces, por el (condicional contrarrecíproco del) punto (2) del Axioma, se tiene que X e Y se encuentran en semiplanos distintos. ■

Veamos algunas observaciones del **Teorema 2.12** (Propiedades de los Semiplanos). En la (4), el primer paso se justifica concretamente por el punto (i) del Axioma $\boldsymbol{P}2$.

Creo que se debería justificar que $C \in \boldsymbol{P} \setminus r$. Como r y la única recta que pasa por A y B tienen en común a B pero no a A —ya que $A \in H^1$—, por el Teorema 2.7 (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas) se tendrá que son secantes, con lo que se tiene que $C \notin r$ y, por tanto, $C \in \boldsymbol{P} \setminus r$.

Tras esto, basta con aplicar el Teorema Ampliación del Punto (3) del Axioma $\boldsymbol{P}4$.

La propiedad (6) sería como un teorema de caracterización de los semiplanos. En cuanto a su demostración, advierta que, tal y como hemos comentado anteriormente, esos bicondicionales permiten ir en las dos direcciones en la demostración. Por tanto, en esta —aunque quizás no lo parezca— se están demostrando las dos inclusiones de la igualdad que se desea demostrar; $\subseteq$ y $\supseteq$. Creo que, al ir de derecha a izquierda, nos podemos saltar el paso intermedio.

En la demostración del **Teorema 2.16** («Axioma» de Pasch), determina que los extremos de los lados están en H^1, pues es algo que se puede hacer sin pérdida de generalidad.

Me gustaría aclarar también el último paso de esta. Llegamos a obtener $[P, Q] \subseteq H^1$. A partir de esto, si tenemos en cuenta el punto (1) del Axioma $\boldsymbol{P}4$, tenemos que para todo $X \in [P, Q]$ se tiene que $X \notin r$, o, lo que es lo mismo, no existe $X \in [P, Q]$ tal que $X \in r$, cosa que contradice la hipótesis de la que partimos.

Axiomas sobre isometrías

El **Teorema 2.18** engloba a varios en realidad. Además, de la conservación de segmentos por isometría, se deduce de forma directa la conservación de alineaciones, cosa que es evidente ya que, por la definición de la alineación de tres puntos, uno estará en el segmento determinado por los otros dos. Quizás hubiera estado mejor que lo enunciaran también fuera de la demostración.

Me resulta bastante críptica la presentación de este teorema, al tratar de llevar al extremo el uso de la simbología matemática. A continuación lo presento con más prosa; creo que sirve un poco para aclararlo.

Teorema (de Conservaciones de Figuras por Isometrías). Sean $A, B \in \boldsymbol{P}$, $g \in \mathrm{Isom}(\boldsymbol{P}, d)$ y usando la notación de prima para un elemento transformado, por ejemplo, $X' = g(X)$ para un punto $X \in \boldsymbol{P}$, se tiene:

i. El conjunto transformado por una isometría de un segmento es un segmento cuyos extremos son los puntos transformados de los extremos del original. Es decir,

$$g([A, B]) = [g(A), g(B)]$$

ii. Si tres puntos están alineados, entonces sus transformados por una isometría también están alineados entre sí.

iii. El conjunto transformado por una isometría de la (única) recta que pasa por dos puntos es la única recta que pasa por los transformados de esos dos puntos. Es decir,

$$g(r_{AB}) = r_{A'B'}$$

iv. Los conjuntos transformados por una isometría de los semiplanos determinados a partir de una recta son los semiplanos que define la recta transformada de la original. Es decir, para los semiplanos H_r^1 y H_r^2 determinados a partir de una recta r, se tiene que

$$g(\{H_r^1, H_r^2\}) = \{H_{r'}^1, H_{r'}^2\}$$

Advierta que en estas demostraciones hay que ir en los dos sentidos, como se hizo antes. Así, demostramos tanto la parte $\subseteq$ como $\supseteq$.

También, debe tener en cuenta que en las distintas demostraciones se hace uso también de los puntos anteriores de la misma.

Me gustaría aclarar algo de la primera de las demostraciones, pero que sirve para las demás. En las demostraciones se usan equivalencias, o, lo que es lo mismo, bicondicionales, por lo que, como hemos dicho, se puede leer en los dos sentidos: de izquierda a derecha y también de derecha a izquierda. Así se demuestra escribiéndolo una sola vez. El problema que le encuentro es que creo que falta una equivalencia a la izquierda de todo, para que quede más claro. Lo pongo para la primera de estas demostraciones:

$$g(X) \in g([A, B]) \iff X \in [A, B]$$

Así, tiene sentido aplicar la definición de *subconjunto*.

También, en la demostración del último punto (el de los semiplanos), se usa un resultado de la teoría de conjuntos que no se explica en el texto. En concreto, se trata de la primera equivalencia que se presenta. Partimos de

$$[X, Y] \cap r_{AB} = \emptyset$$

Haciendo la isometría, tenemos

$$g([X, Y] \cap r_{AB}) = g(\emptyset)$$

Por un lado, se tiene que $g(\emptyset) = \emptyset$, por las propiedades de las aplicaciones. Por otro, por las propiedades de las aplicaciones inyectivas, se tiene que

$$g([X, Y] \cap r_{AB}) = g([X, Y]) \cap g(r_{AB})$$

Si no le convence con simplemente mencionarlo, en el Apéndice TKTK presento este teorema, junto con otros que usa como base, con sus demostraciones respectivas, aunque esta materia pertenecería a la teoría de conjuntos.

Existen otros resultados de conservación por isometrías que no se presentan en el texto pero que creo que son relevantes para tener como herramientas para otras demostraciones o problemas.

Por ejemplo, uno viene a decir que, dado un segmento, el transformado por una isometría de su punto medio es el punto medio de su segmento transformado. O, de forma más simbólica, como expresamos a continuación.

Teorema (de la Conservación del Punto Medio de un Segmento por Isometría). Dado un segmento $[A, B]$ y una isometría $g \in \mathrm{Isom}(\boldsymbol{P}, d)$, se tiene que

$$g(\mathrm{medio}[A, B]) = \mathrm{medio}[g(A), g(B)]$$

Demostración — Primero, demostraremos la parte $\subseteq$.

Por la conservación de segmentos por isometrías, es decir, de la primera parte del **Teorema 2.18**, se tiene que $g(M) \in [A', B']$. Le recuerdo que usamos la notación $X' = g(X)$ para un punto cualquiera $X \in \boldsymbol{P}$, al igual que se hace en el libro.

Por la conservación de distancias en g se tiene que

$$d(M, A) = d(g(M), A')$$
$$d(M, B) = d(g(M), B')$$

Además, por la definición de *punto medio de un segmento*, se tiene que

$$d(M, A) = d(M, B)$$

con lo que tenemos que

$$d(g(M), A') = d(g(M), B')$$

pero esto es la condición para que $g(M) = \mathrm{medio}[A', B']$. Por cierto, aunque es evidente, deseo aclarar que, como $[A', B']$ es un segmento, tal y como se muestra en el Teorema 2.18, el punto que equidista de sus extremos será único, por la Observación 2.8 (i).

Ahora, demostraremos la parte $\supseteq$, es decir

$$\mathrm{medio}[A', B'] \subseteq g(\mathrm{medio}[A, B])$$

Partimos de $g(M) = \mathrm{medio}[A', B']$. Por la definición del *punto medio de un segmento*, se tiene que

$$d(g(M), A') = d(g(M), B')$$

Por ser g una isometría, se tiene que

$$d(g(M), A') = d(M, A)$$
$$d(g(M), B') = d(M, B)$$

Además, por la inyectividad de las isometrías, ese M es único. De lo anterior tenemos que

$$d(M, A) = d(M, B)$$

Por tanto,

$$M = \text{medio}[A, B]$$

y, entonces,

$$g(M) = g(\text{medio}[A, B])$$

■

Podría haber presentado esta demostración en el estilo del libro, es decir, encadenando bicondicionales, $\iff$, pero deseo que quede al menos una explicación con mayor detalle, por si el lector no las entiende.

Alternativamente, se podría haber usado el Axioma P3 para esta demostración.

Ahora, veamos un resultado de las isometrías para dos rectas secantes. Viene a decir que, dadas dos rectas secantes, su transformada por una isometría son dos rectas secantes cuyo punto de corte es el punto transformado por la isometría del punto de corte de las mismas.

Teorema (de la Isometría de Dos Rectas Secantes). Dadas dos rectas r y s secantes con punto de corte $V \in \boldsymbol{P}$ y una isometría $g \in \text{Isom}(\boldsymbol{R}, d)$, se tiene que

$$g(r) \cap g(s) = g(V)$$

Demostración — Lo primero que debe comprobarse es que $g(r)$ y $g(s)$ son rectas, por el Teorema 2.18.

Evidentemente, $g(V) \in g(r) \cap g(s)$, ya que, por ejemplo, por darse $V \in r$, se tiene que $g(V) \in g(r)$.

De $V \in r \cap s$ se deduce que $V \in r$ y $V \in s$, y, de esto, a su vez, que $g(V) \in g(r)$ y $g(V) \in g(r)$, o, lo que es lo mismo, $g(V) \in g(r) \cap g(s)$.

Al tener $g(r)$ y $g(s)$ al menos un punto en común, no pueden ser paralelas no coincidentes; aunque sí pueden ser coincidentes. Veamos que no es así.

Supongamos que existe, además de $g(V)$, otro punto $Z \in g(r) \cap g(s)$. Esto es lo mismo que afirmar que $Z \in g(r)$ y $Z \in g(s)$.

Por ser g una biyección, existe un único punto Z_1 que pertenece a r y a s tal que $g(Z_1) = Z$. Pero esto es un problema puesto que tenemos dos puntos, V y Z_1, que pertenecen a la intersección de r y s, cosa que contradice la hipótesis de partida, es decir, que las dos rectas son secantes. ■

Teorema (de las Isometrías de Semirrectas). Dada una isometría $g \in \text{Isom}(\boldsymbol{P}, d)$ y una de las semirrectas $\bar{r}$ con etremo el punto V en la recta r, se tiene que $g(\bar{r})$ es una de las semirrectas definidas por el punto $g(V)$ en la recta $g(r)$.

Terminar de copiar de los otros apuntes. TKTK.

En cuanto a la **Definición 2.19** (pág. 33), creo que también se puede afirmar la simetría de la congruencia de figuras. Es decir, podemos continuar con esa definición y afirmar que, por ser g biyectiva, se tiene que para todo $X', Y' \in \mathcal{F}_2$ se tienen $X = g^{-1}(X)$ e $Y = g^{-1}(Y)$ tales que $X, Y \in \mathcal{F}_1$.

En la demostración del **Lema 2.21** (pág. 33)), la primera igualdad que aparece podemos justificarla aquí con el Teorema de la Conservación del Punto Medio de un Segmento por Isometría, presentado aquí anteriormente.

Me da la sensación de que, llegado a este punto del libro, se salta algunos pasos en las demostraciones. Esto va a más en el capítulo siguiente, y, de hecho, se menciona al comienzo de dicho capítulo.

En cualquier caso, por aclarar las cosas, me gustaría presentar una demostración más completa del **Teorema 2.22**. No obstante, a partir de aquí me adaptaré al estilo del libro y únicamente mencionaré las cosas que no quedan claras y los pasos que creo que pueden ser difíciles de intuir.

Demostración — Dado un $A \in \boldsymbol{P}$ tal que $A \in H^1$, hacemos su reflexión de eje r, $A' = \sigma(A)$.

Por el Lema 2.21, sabemos que $\mathrm{medio}[A, A'] \in r$; lo designaremos por M. Al contrario de lo que se afirma en la demostración del libro, aún no sabemos si se cortan, pues el lema no lo dice. Veamos por qué se cortan.

TKTK.

Al pertenecer A a H^1, por el punto (1) del Axioma $\boldsymbol{P}4$ se tiene que todo punto de H^1 está fuera de r. Por tanto, $A \notin r$.

como tenemos un punto, M que pertenece tanto a r como a s y un punto A que pertenece a s pero no a r, ambas rectas, es decir, r y s, serán secantes, por aplicación del Teorema 2.7 (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas). Entonces, también serán secantes el segmento $[A, A']$ y la recta r, es decir, se cumple que $[A, A'] \cap r \neq \emptyset$. Aplicando ahora el Teorema Ampliación del Punto (3) del Axioma $\boldsymbol{P}4$, tenemos que, como $A \in H^1$, no queda otra más que $A' \in H^2$.

Por la Observación 2.3 y el punto (ii) del Axioma $\boldsymbol{P}2$ (incluyendo la unicidad), sabemos que existe una única recta que contiene al segmento $[A, A']$. La designaremos por s.

Al pertenecer A a H^1, por el punto (1) del Axioma $\boldsymbol{P}4$ se tiene que todo punto de H^1 está fuera de r. Por tanto, como tenemos un punto, M que pertenece tanto a r como a s y un punto A que pertenece a s pero no a r, ambas rectas, es decir, r y s, serán secantes, por aplicación del Teorema 2.7 (de las Posiciones Relativas de Dos Rectas). Entonces, también serán secantes el segmento $[A, A']$ y la recta r, es decir, se cumple que $[A, A'] \cap r \neq \emptyset$. Aplicando ahora el Teorema Ampliación del Punto (3) del Axioma $\boldsymbol{P}4$, tenemos que, como $A \in H^1$, no queda otra más que $A' \in H^2$.

Ahora, nos fijaremos en que, por el punto (1) de la definición de *reflexión axial*, se tiene que $\sigma(r) = r$. Aplicando entonces la última parte del Teorema 2.18 —la que trata sobre los semiplanos—, tenemos que H^1 y H^2 son los semiplanos determinados por $\sigma(r)$. Entonces, quedarían dos posibilidades únicamente: que los semiplanos transformados sean los mismos o que se intercambien. Del resultado anterior, es decir, de que si $A \in H^1$ entonces $A' \in H^2$, se tiene que se intercambian siempre, es decir,

$$\sigma(H^1) = H^2; \quad \sigma(H^2) = H^1$$

■

Bibliografía

[1] Gerard A. Venema, *Foundations of Geometry*, 2.ª ed. Pearson.