Apuntes de la asignatura Geometría Básica

Carlos E. Tafur Egido

02/08/2025

Índice

Introducción **1**

Contexto general de la asignatura **2**

Notación **8**

Anotaciones **8**
- Capítulo 1. Espacios métricos . . . 8
- Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo . . . 10
- Capítulo 3. Isometrías en el plano euclideo . . . 11
- Capítulo 4. Ángulos . . . 12
- Capítulo 5. Cuadriláteros y teorema de Thales . . . 12
- Capítulo 6. Teorema de Pitágoras . . . 12

Erratas **12**

Referencias **12**

Introducción

Este repositorio es sobre los apuntes de la asignatura Geometría Básica impartida en el primer curso del Grado de Matemáticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).

El libro de texto que se usa como base de la asignatura es Antonio F. Costa y Peter Buser (2010).

Se tienen tres partes:

- Un artículo en el que se explica el contexto del contenido de la asignatura.
- Anotaciones que considero que se deben hacer, como explicaciones de partes de demostraciones que se omiten en el libro base de la asignatura.
- Lista de erratas del libro.

Contexto general de la asignatura

Esta asignatura trata de la geometría tradicional desde un enfoque tradicional. Lo primero es porque se trata la **geometría euclidea**,[1] que es la primera que creó la humanidad, al ser la más "natural" para nuestra experiencia diaria física con el mundo.

El mayor aporte a esta se debe al matemático Euclides de Alejandría, quien la compiló en el siglo III a.C. en su famosísimo libro titulado *Los Elementos*, donde se recogía todo el conocimiento sobre esta materia acumulado hasta su fecha tras ser estudiada durante varios siglos en algunas civilizaciones de la Antigüedad como el Antigüo Egipto y Babilonia.

El gran logro de Euclides no fue únicamente hacer esa compilación, sino que fue a quien se le ocurrió el formalismo con el que se suele presentar el conocimiento matemático. Eso de presentar las matemáticas en una secuencia de axioma[2], teorema y demostración. *Los Elementos* fue el primer libro en presentar de esta forma el conocimiento matemático. Desde entonces, este es el modo que se ha adoptado en todo el mundo para hacer matemáticas.

En cuanto a lo del "enfoque tradicional", me refiero a que se trata del que se seguía en esa época. Entonces se le conocía simplemente como *geometría*, a secas, pero actualmente se le acompaña de adjetivos para no confundirla con enfoques alternativos que surgieron posteriormente y que alcanzaron mucha aceptación, como la geometría analítica, inventada por el matemático y filósofo francés René Descartes en el siglo XVII,[3] que, aunque trata la misma geometría que la de Euclides, usa un enfoque distinto, basado en coordenadas y gracias a esto se puede hacer uso del álgebra. En muchas situaciones, este otro enfoque permite resolver problemas o hacer demostraciones de modo más fácil que desde la de Euclides.

Los adjetivos que recibe ahora la geometría al estilo de Euclides son *sintética*, *intrínseca*, *axiomática*, *conjuntista*, etc. Otras veces, hay quien simplemente la llama *geometría euclidea.*

Esta asignatura trata, por tanto, tal y como he mencionado, de la geometría sintética. Aunque la tratamos desde un enfoque mixto, es decir, que también hacemos uso del álgebra de los números reales, no la usamos constantemente, como sí se hace en el enfoque analítico de esta misma geometría.

Ignora deliberadamente el álgebra, que podríamos aplicar para llegar más fácilmente a muchos resultados, pero estaríamos entonces en la geometría analítica. Aunque usemos números, no lo haremos constantemente como se hace en la geometría analítica. Nos basaremos principalmente en objetos más elementales: los conjuntos. Estaremos más "cerca" de la base de las matemáticas. Debido a esto, se requiere cierta base en lógica y teoría de conjuntos.

[1] creo que también se puede usar el adjetivo *euclidiana*

[2] en su día, los llamaban *postulados*

[3] e independientemente por Pierre de Fermat

Debe ser consciente de que ambas geometrías (sintética y analítica) son la misma, de ahí que me refiera a que son *enfoques* diferentes. En Gerard A. Venema (2011), en lugar de *enfoque* los califican de *modelos* (*models*). No obstante, también existen diversas geometrías no euclidianas, solo que no son intuitivas o naturales para nosotros y, debido a esto, se inventaron mucho más tarde. Estas otras usan una base axiomática ligeramente diferente a la euclidiana, cosa que produce cambios muy relevantes en el comportamiento de todo lo que se estudia en estas respecto a la euclidiana.

De este otro tipo de geometrías, aquí tocaremos únicamente —y por encima— a la geometría hiperbólica. El conocimiento de espacios métricos en general y de la geometría euclidea sintética nos servirá para el estudio de la geometría hiperbólica, como verá.

/* Esta geometría es algo distinta a la geometría analítica, es decir, la de las coordenadas. La geometría que vemos aquí hay quien la califica de *sintética*, *intrínseca* o *axiomática*, pero en sus orígenes era simplemente *la* geometría, ya que era la única que existía.

Me refiero a la Grecia Antigua, principalmente, al compendio que hizo Euclides de Alejandría en su libro titulado *Los Elementos*. TKTK

Al contrario de lo que sucede con la geometría analítica, en esta estamos muy en contacto con la teoría de conjuntos, por lo que creo que *conjuntista* sería un buen calificativo, al contrario que los que mencioné antes.

En realidad, la analítica también surge de la teoría de conjuntos, al igual que todo en matemáticas, pero se trata de un área de las matemáticas a un nivel de abstracción muy elevado y, en lugar de manipular conjuntos, emplea constantemente números y sus operaciones.

En el fondo la geometría sintética no es muy distinta a lo que se ve en asignaturas de dibujo técnico en educación primaria y en secundaria, en las que hace demostraciones auxiliándose de regla y compás. Aquí, también usaremos esas herramientas, pero mediante la teoría de conjuntos.

En realidad, hay que precisar y calificarla de euclidiana, ya que posteriormente surgieron también otras TKTK.

El concepto de espacio métrico, que se explica en el capítulo 1, se podría considerar que pertenece a todas las geometrías. Sin embargo, como verá, el libro trata básicamente de la geometría euclidiana. Tiene un capítulo dedicado a la geometría hiperbólica pero se puede considerar una extrañeza y, de hecho, es algo sobre lo que normalmente no se pregunta en los exámenes.

Esta asignatura es parecida a las asignaturas de geometría de la educación primaria y la secundaria, excluyendo a la geometría analítica. Muchas veces, se incluyen esos contenidos dentro de una asignatura de dibujo técnico, técnicas de representación geométrica, etc.

Presenta un enfoque de hacer geometría distinto al de la geometría analítica (*analytic geometry*), que se basa en el uso de coordenadas, y, en última instancia, de números y sus operaciones.

En realidad, esta asignatura trata ciertos conceptos generales de la geometría *sintética* (*synthetic geometry*), es decir, la geometría desde un punto de vista axiomático que avanza en su conocimiento por medio de deducciones haciendo uso de la lógica. También, hay quien la llama *geometría axiomática*, como se hace en Gerard A. Venema (2011).

Personalmente, no me convence llamarla *axiomática*, pues TKTK. En todo caso, la calificaría de *conjuntista*.

También, se dice que es de naturaleza intrínseca. Se dice que una entidad matemática es intrínseca si no depende de las coordenadas desde las que se mida. Debido a esto, a la geometría sintética a veces se la llama *geometría intrínseca*.

Como caso particular de geometría sintética o intrínseca, se tiene a la geometría euclidiana (*Euclidean geometry*), que fue la primera geometría en existir. Esta se presentó formalmente por el filósofo y matemático Euclides de Alejandría aproximadamente en el año 300 a.C. en su famosísimo libro titulado *Los Elementos*, aunque en realidad lo que él hizo fue principalmente reunir en una obra el conocimiento de geometría que se tenía en algunas civilizaciones como el Antiguo Egipto y Babilonia.

La geometría euclidiana es un caso particular de geometría sintética. Existen otras geometrías que también se podrían calificar de sintéticas, como la geometría hiperbólica y la geometría proyectiva.

Hay que aclarar que el adjetivo *sintética* apareció después de que surgiese una geometría distinta a la geometría euclidiana; concretamente, la analítica. Antes de esto, la geometría sintética era simplemente *la* geometría. No estoy seguro del todo. Quizás la geometría era la euclidiana.

Lo primero que veremos será el concepto de *métrica* o *distancia*, así como el de espacio métrico, que surge de forma natural de este. Se trata de un concepto transversal a las matemáticas; es decir, es muy abstracto y aparece en diversas áreas de las matemáticas.

Luego pasamos a centrarnos en una geometría en concreto: la geometría euclidiana y esto nos llevará prácticamente toda la asignatura. Se comenzará por la geometría en el plano, es decir, de 2 dimensiones (2D), y, posteriormente, se pasará a la del espacio, 3 dimensiones (3D).

La diferencia entre la geometría de esta asignatura y la analítica está en que son formalismos distintos que surgen inspirados por la misma realidad física. Así, la geometría analítica, tal y como hemos explicado, emplea coordenadas y, por tanto, números, mientras que la geometría sintética se basa en ciertas definiciones de las que luego haremos uso. Por ejemplo, el concepto de punto, recta, plano, ángulo, etc. Así, esto nos permite usar la regla y el compás, herramientas que conocerá de las asignaturas de dibujo técnico.

La geometría analítica euclidiana es como la geometría euclidiana solo que sustituye algunos de sus axiomas por el formalismo de los números reales.

No es exactamente una simple sustitución de axiomas, sino una reformulación de la geometría. La geometría euclidiana clásica se funda en una serie de axiomas, formulados en términos de conceptos geométricos básicos como puntos, rectas y ángulos. En cambio, la geometría analítica introduce un marco algebraico y el formalismo de los números reales para representar esos mismos conceptos.

Al ser una forma distinta de abordar los problemas sobre geometría, es posible que un estudiante de educación secundaria logre resolver problemas con la geometría analítica que por medio de la geometría euclidiana resultasen casi imposibles a un geómetra muy experimentado, como, por ejemplo, el mismísimo Euclides.

La geometría sintética ha influido en otras geometrías más modernas, como la geometría proyectiva (*projective geometry*) y la geometría diferencial (*differential geometry*).

La geometría, aunque supuso, junto con la teoría de números, históricamente, los inicios de las matemáticas, después tuvo una época en la que se la relegó. TKTK.

Coxeter se puede decir que la rescató. TKTK.

Se suele enseñar en la educación primaria, principalmente, porque supone una forma de acostumbrar al alumno a hacer razonamientos matemáticos. Es decir, en lugar de aplicar algoritmos, que es lo que se suele hacer en las matemáticas de la educación primaria y secundaria, la geometría en esos cursos sí supone hacer matemáticas de verdad, es decir, en esta los alumnos sí hacen razonamientos lógico-deductivos, que es en lo que se basan en mayor medida las matemáticas. TKTK.

Incluso en muchos grados universitarios de matemáticas se han eliminado asignaturas de geometría como esta. En todo caso, dan algunos de estos contenidos como parte de otras asignaturas TKTK.

Tal y como se explica en la introducción de TKTK, este curso sirve como base para otros cursos de matemáticas, como los de geometría analítica, topología y geometría diferencial.

Actualmente, la geometría sintética no es algo a lo que se le dé gran importancia en los currículos. De hecho, hay muchos profesores del grado universitario de matemáticas que son partidarios de eliminar este tipo de asignaturas de los planes de estudio, dejando únicamente, el contenido de geometría analítica.

Vamos a hacer un repaso superficial de los contenidos de la asignatura. Se puede dividir en tres bloques.

- *Bloque I*. Espacios métricos. De forma poco técnica, se podría definir como un lugar en el que se pueden medir distancias.

  En todas estas partes se estudian las aplicaciones (también llamadas funciones) entre los objetos. En concreto, un tipo de aplicación muy relevante son las isometrías, que son en las que se conserva algún aspecto TKTK.

  En realidad, esta asignatura, que consta de un solo tema, explica un concepto muy general y transversal a las matemáticas: el espacio métrico y la distancia. Las otras partes tratan sobre cosas más concretas.

- *Bloque II*. Plano euclideo. Se estudian los axiomas de Euclides en los que se sustenta la geometría euclídea para dos dimensiones. Es interesante el quinto de estos axiomas, que, como veremos, tiene bastante “juego”.

  También se estudian las isometrías del plano euclideo, que, como hemos dicho antes, serán las aplicaciones (o transformaciones) en las que se preservan las distancias.

  También, se estudian los ángulos, y así se pone más interesante la cosa.

  También, se estudia el teorema de Tales, que es una propiedad muy interesante. Este nos conduce de forma natural al estudio de las razones trigonométricas, una parte muy importante de la geometría. Estas son las que ya habrá estudiado en trigonometría: seno, coseno, etc. También, se estudia aquí el teorema de Pitágoras; famosísimo.

  Muy importante será también el capítulo dedicado a las semejanzas, que son un tipo de aplicaciones. Al contrario de las isometrías, en estas las distancias no se conservan, pero sí se conservan otras cosas, como, por ejemplo, los ángulos. Además, como veremos, las distancias, aunque no se presenven, sí se encuentran en una relación constante, a la que se conoce como *razón*.

  También, se estudian las circunferencias. Se estudia aquí una operación relacionada con las circunferencias llamada *inversión*. Y será esta operación un preámbulo para la geometría hiperbólica, que también estudiaremos. Esta geometría, curiosamente, es como la geometría plana salvo porque no se cumple el quinto axioma, de ahí que dijéramos antes que ese axioma de bastante “juego”.

- *Bloque III*. Geometría en el espacio. Se comienza por el estudio de los polígonos, que son figuras geométricas formadas por segmentos.

  También, se verán los axiomas de la geometría tridimensional, al igual que se hizo para la bidimensional. También, se estudiarán las isometrías para este espacio. También, se estudiará el concepto análogo a los polígonos pero para 3 dimensiones: los poliedros.

Por lo que dice el tutor, esta asignatura suele costar bastante a los estudiantes.

El término “analítica” en “geometría analítica” proviene de la idea de analizar o descomponer problemas geométricos en partes algebraicas mediante el uso de coordenadas y ecuaciones. Este enfoque fue desarrollado por René Descartes y Pierre de Fermat, simultáneamente y de forma independiente entre sí, quienes mostraron que se podía representar la geometría con expresiones algebraicas, permitiendo así “analizar” las relaciones geométricas de forma sistemática.

Aunque hoy en día la palabra “análisis” se asocia mayormente a la rama del cálculo infinitesimal y el estudio de funciones, en el contexto de la geometría analítica se refiere a esta metodología de transformar problemas geométricos en problemas algebraicos. En esencia, la denominación resalta el método de “análisis” que permite abordar y resolver cuestiones geométricas utilizando herramientas del álgebra; no obstante, esto no implica una relación directa con el análisis matemático moderno.

Existe bastante confusión sobre las formas de llamar a lo que conocemos previamente como *geometría*. Al final, la referencia con la que me he aclarado a este respecto es Gerard A. Venema (2011). Tal y como explica en la pág. 19, la geometría analítica euclidiana es un *modelo* (*model*) de geometría euclidiana (axiomática). Además de esto, también es un modelo de la geometría de incidencia (*incidence geometry*), siendo esta última otra geometría axiomática, es decir, otro sistema formal constituido por ciertas definiciones y axiomas.

En cualquier caso, Euclides mostró la geometría de las dos formas: tanto como un sistema axiomático (geometría axiomática) como un modelo de este, es decir, la aplicación de este sistema axiomático al mundo real.

Así, tenemos como ejemplos de sistemas axiomáticos a la geometría de incidencia y la geometría euclidiana. Estos son, como decimos, sistemas axiomáticos. TKTK.

Al hablar de los sistemas axiomáticos, y más concretamente de la geometría euclidiana axiomática, surge la cuestión de si las matemáticas surgen del mundo real o, si por el contrario, no son más que rompecabezas que se nos presentan partiendo de conjuntos arbitrarios de axiomas.

Evidentemente, las matemáticas suelen partir de situaciones que se nos presentan en el mundo real.

Sobre esta cuestión, también estaría bien consultar el concepto de *reverse mathematics*. John Stillwell escribió un libro sobre este tipo de matemáticas.

Se podría decir que *la* geometría es la geometría axiomática. Luego, se tienen instancias de estas, es decir, casos particulares, que son geometrías, como la geometría euclidiana, la geometría de incidencia, la geometría analítica, etc. Creo que a estas, en Gerard A. Venema (2011), las llaman *modelos* (*models*).

Como ve, al estudiar la geometría axiomática se presentan cuestiones sobre qué es un sistema formal, paralelamente a lo que sucede al estudiar la teoría de conjuntos. Viene bien verlo desde estos dos puntos de vista. */

La dificultad principal de esta asignatura está en que debemos demostrar, con las pocas herramientas de las que partimos, cosas que nos resultan intuitivas y naturales, por nuestra experiencia diaria con el mundo físico.

Esas cosas son los axiomas y nuestro conocimiento de la lógica matemática y la teoría de conjuntos.

El Axioma P3 (de la Regla Graduada) en cierto modo “contamina” nuestra geometría, al introducir el uso de los números reales y su operación suma.

Notación

Suele usar el símbolo $\subset$ para la inclusión, no necesariamente propia. La notación más usual actualmente es asemejarla a las desigualdades de números, es decir, $\subseteq$ en general y, para el caso de subconjuntos propios, $\subset$.

En cuanto a las notaciones con subíndices, también se podrían usar comas cuando constan de más de un argumento. Así, por ejemplo, la recta r_{AB} podría ser $r_{A,B}$. Es algo engorroso pero quizás sería más claro.

Lo cierto es que hay veces en las que la notación se hace superengorrosa. Cuando se ven cosas como $r_{g(A)g(B)}$, o en el Capítulo TKTK...

Anotaciones

Capítulo 1. Espacios métricos

Este capítulo es algo distinto a los demás. Trata conceptos geométricos generales, válidos para todas las geometrías. En el siguiente ya nos introducimos en la geometría euclidiana, que será la que usemos a lo largo de todo el libro, con la excepción de una pequeña incursión que hacemos en la geometría hiperbólica en el Capítulo 9.

En los capítulos de la geometría euclidiana, algunos de los conceptos que se dan son también generales para todas las geometrías, pero no se presentan todos en este capítulo porque de hacerlo sería enorme en relación a los demás. Se ha optado por ir introduciendo los conceptos no tan de golpe.

---

pág. 13

Definición 1.5. Alternativamente a como se define el concepto de *isometría*, podríamos definirla como

$$g:\ (M,\delta) \longrightarrow (M',\delta')$$

Y, de hecho, usa esta notación un poco después. En el fondo, la que usa el libro se refiere de forma implícita a esta. En su definición se entiende de forma tácita cuáles son las métricas en cada uno de los conjuntos.

---

pág. 13

Teorema 1.7. Que $h \circ g$ y g^{-1} sean biyectivas es consecuencia de que lo sean tanto g como h.

Es un resultado de la teoría de conjuntos. Puede consultarlo, entre otras referencias, en (Miguel Delgado Pineda y José María Muñoz Bouzo 2020, 104-5). Concretamente, el **Teorema 3.59** (de Caracterización de una Aplicación Biyectiva) y **Teorema 3.60**.

---

pág. 13

En la **Definición 1.8**, también se puede usar una notación más explícita, al igual que sucede con lo que dijimos antes sobre la definición de isometría. En este caso, sería $\mathrm{Isom}(M, \delta)$.

---

pág. 13 (abajo)

Al final de la página. Las propiedades 1 y 2 son casos particulares del Teorema 1.7. Por su parte, la demostración del punto 3 es trivial.

---

pág. 14

Nota 1.9. También se la puede llamar *grupo de isometrías* (M, δ).

---

pág. 14

Demostración de que las isometrías con la composición cumplen las propiedades de grupo TKTK.

---

pág. 15

Ejemplo 1.11. Algo interesante es demostrar también por qué la aplicación

$$\delta_G = \text{“Distancia máxima entre } p \text{ y } q\text{”}$$

no es una métrica.

---

pág. 16

Definición. 1.12. Además de llamarlo "segmento de extremos a y b" también se le suele llamar "segmento a b".

---

pág. 16

En la definición de puntos alineados se podría explicar también que esto está relacionado con el concepto de *recta*, que se define en el capítulo siguiente.

Capítulo 2. Axiomas del plano euclideo

pág. 24.— En la **Observación 2.4**. Para mí, para demostrar la unicidad se necesita también hacer uso del punto (ii) de la definición de recta.

---

pág. 24.— **Nota 2.5**. Al ser única, la recta ya sería una aplicación y por tanto se puede usar la notación r_{AB}.

---

pág. 24.— **Teorema 2.7**. En la demostración creo que hay un problema de lógica. En realidad, también habría que demostrar que no se puede dar que ni se cortan ni son paralelas.

Es decir, lo que dice el teorema es que se da un operador disyunción excluyente; en las ciencias de la computación y la electrónica digital se le conoce más como *o*-exclusiva. Entonces, se deberían demostrar esas dos cosas.

---

pág. 25.— El Axioma P3 (de la Regla Graduada) también puede expresarse como que $\gamma : (r, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es una isometría. Recuerde que $d_{\mathbb{R}}$ se definió anteriormente como

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$$

Esto concuerda con que, como se demostró en el Capítulo 1, que $d_{\mathbb{R}}$ es una distancia.

---

pág. 26.— La parte que queda por completar del punto medio de un segmento, que sería cuando los extremos coinciden, se podría dar por convenio pero también puede ser una consecuencia de la definición. Esto dependerá de la definición que se dé del punto medio de un segmento.

Si se hubiera dado en base a los puntos del segmento, en lugar de a los puntos de la (única) recta que los contiene, todo tendría más sentido, y no habría que hacer uso en este caso una excepción.

---

pág. 27.— Aunque podría parecerle que las demostraciones de la **Observación 2.10** y del **Teorena 2.12** están incompletas porque se hacen en uno solo de los dos condicionales, en realidad, si se fija, está usando símbolos de bicondicional, con lo que podría ir también de delante hacia atrás en la demostración.

Creo que el libro, aunque está muy bien, es muy "telegráfico". No estaría mal que diese algunas explicaciones más en algunas partes.

---

pág. 27.— Demostración del punto (6) del **Teorema 2.12**. En realidad, la última implicación se justifica, además de por el punto (ii), por el (i).

---

pág. 31.— En la demosrtación del **Teorema 2.18**, no se llega a explicar el paso

$$[X,Y]\cap r_{AB}=\emptyset \quad\Longleftrightarrow\quad g([X,Y])\cap g(r_{AB})=\emptyset$$

Capítulo 3. Isometrías en el plano euclideo

pág. 47 (abajo)

En la demostración del **Teorema 3.6**, faltan algunas cosas por explicar. Concretamente, en la segunda línea, dice:

"En $X\in \mathbf{P}\setminus r$, se sigue que la recta $l\perp r$ pasando por X satisface $g(l)=l$."

Pero no lo demuestra. Vamos a hacerlo aquí.

Partimos de que $l\perp_P r$, es decir, l es ortogonal a r y su punto de corte es $P\in\mathbf{P}$.

Como $P\in r$, se tiene, por lo que se dijo al comienzo, que $g(P)=P$. Por tanto, $P\in g(l)$.

Por la **Observación 2.24**, se tiene que $g(l)\perp g(r)$ siendo $g(P)$ su punto de corte. Pero, por lo que ya sabemos, podemos también afirmar que $g(l)\perp r$ con P como punto de corte.

Entonces, como tenemos que $l\perp_P r$ y $g(l)\perp_P r$, por el **Teorema 2.29** tendremos que $g(l)=l$.

Capítulo 4. Ángulos

Capítulo 5. Cuadriláteros y teorema de Thales

Capítulo 6. Teorema de Pitágoras

Erratas

A lo largo de todo el libro, suelen dejar muchas veces un espacio entre una palabra y el signo de dos puntos.

---

pág. 15.— ``` ``disquitos '' ``` –> ``` ``disquitos'' ```

---

pág. 16 (medio).— `siguiente :` –> `siguiente:`

---

pág. 17 (medio).— `(Ejercicio dif'icil)` –> `(Ejercicio dif\'icil)` o bien `(Ejercicio difícil)`

---

pág. 21.— `aplicaciones ...` –> `aplicaciones\ldots`

---

pág. 21.— "caracterizan **P** y *d*" –> "caracterizan a **P** y *d*"

---

pág. 23.— "**(ii)** para" –> "**(ii)** Para". Por cierto, no sé por qué se ponen los números en negrita.

---

pág. 32 (arriba).— "`$P '$`" –> "`$P'$`". Lo hace dos veces.

Referencias

Antonio F. Costa, y Peter Buser. 2010. *Curso de geometría básica*. 1.ª ed. Sanz y Torres.

Gerard A. Venema. 2011. *Foundations of Geometry*. 2.ª ed. Pearson.

Miguel Delgado Pineda, y José María Muñoz Bouzo. 2020. *Lenguaje matemático, conjuntos y números*. 2.^{a} edición (revisada y aumentada). Sanz y Torres.