Ejercicio n° 4

Sabiendo que el peso de los paquetes de galletitas de una conocida empresa alimenticia se distribuye normalmente con desvío 398 gramos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de 40 paquetes difiera del peso medio en menos de 50 gramos?
RESPUESTA: 0,57048

b. ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se quiere que dicha probabilidad sea del 0,90?
RESPUESTA: n = 172

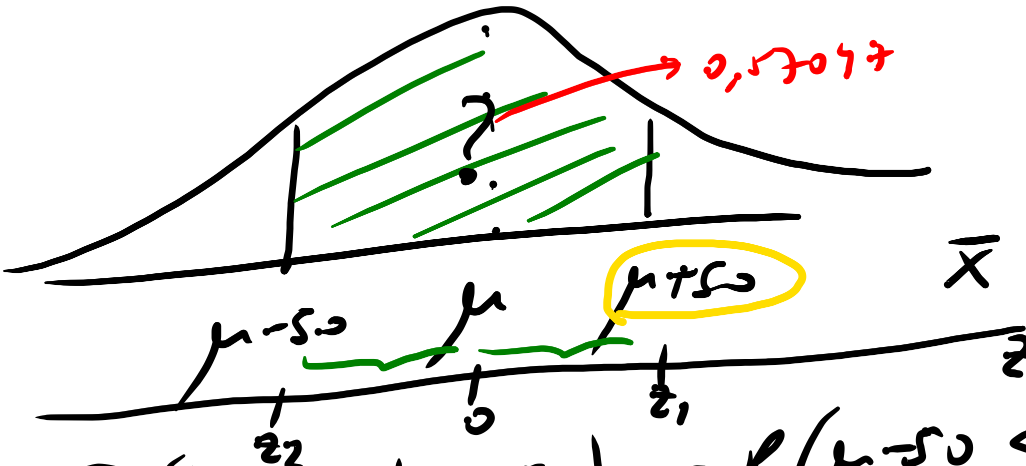
X = PESO DE LOS PAQUETES DE GALLETITAS (GRAMOS)

$X \sim N(\mu = ? \, ; \, \sigma = 398)$

$\bar{X} = \sum_{i=1}^{40} \frac{X_i}{40} \sim N(\underbrace{?}_{\mu} \, ; \, \underbrace{?}_{\frac{398}{\sqrt{40}}})$

$E(\bar{X}) = \mu$

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$



$$P\left(\underbrace{|\bar{x} - \mu| < 50}\right) = P(\mu - 50 < \bar{x} < \mu + 50)$$

$$= F[z = z_1] - F[z = z_2]$$

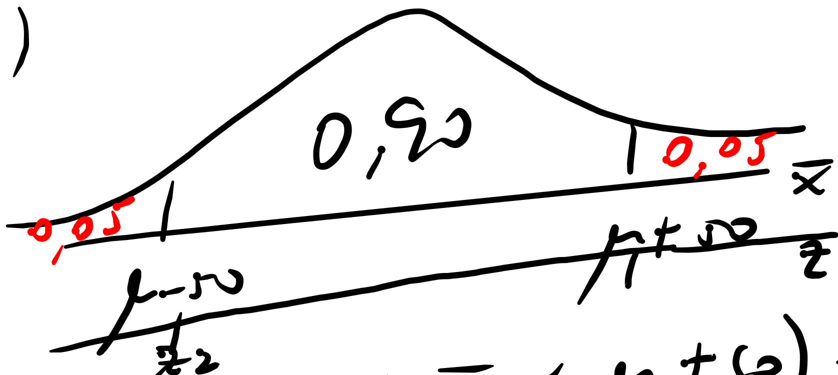
$$= \underbrace{F[z = 0{,}79] - F[z = -0{,}79]}$$

$$= 0{,}78524 - 0{,}21476$$

$$= 0{,}57047$$

$$z_1 = \frac{\cancel{\mu} + 50 - \cancel{\mu}}{\frac{398}{\sqrt{40}}} = 0{,}79$$

b)



$$P(\mu - 50 < \bar{x} < \mu + 50) = 0{,}90$$

$$F(z_1) = 0{,}95 \to z_1 = 1{,}645$$

$$F(z_2) = 0{,}05 \to \underbrace{z_2 \cong -1{,}645}_{} = \frac{\cancel{\mu} - 50 - \cancel{\mu}}{\frac{398}{\sqrt{n}}} \to ?$$

$$-1,645 = \dfrac{-50}{\dfrac{398}{\sqrt{n}}}$$

$$-1,645 \cdot \dfrac{398}{\sqrt{n}} = -50$$

$$\boxed{n = \dfrac{z^2 \cdot \sigma^2}{e^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\dfrac{\overbrace{-1,645}^{z} \cdot \overbrace{398}^{\sigma}}{\underbrace{-50}_{e}}\right)^2 = n$$

$$172 \cong n \rightarrow 171,43$$

Ejercicio n° 10

Se sabe que las ventas efectuadas por una empresa tienen distribución normal con media \$343.200 y desvío estándar de \$48.152. De las ventas realizadas en el mes, se saca una muestra de 16 facturas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra difiera de la media poblacional en más de \$20.000?

   RESPUESTA: 0,09692

b. ¿Cuál es el valor de la media muestral que será superado con probabilidad 0,05?

   ¿X, $\bar{X}$?

   RESPUESTA: \$363.002,51

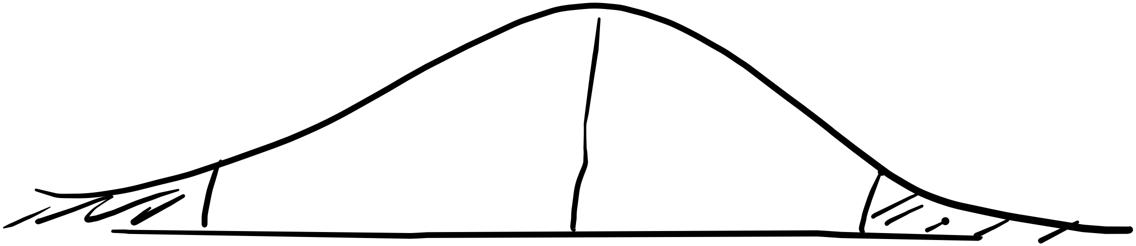
X = ventas de una empresa (en miles de \$)

CAM SCANNER

$X \sim N(343.200\,;\,48.152)$

$n = 16$

a) $P(|\bar{X} - \mu| > 20.000)$



$\mu - 20.000 \qquad 343.200 \qquad \mu + 20.000$

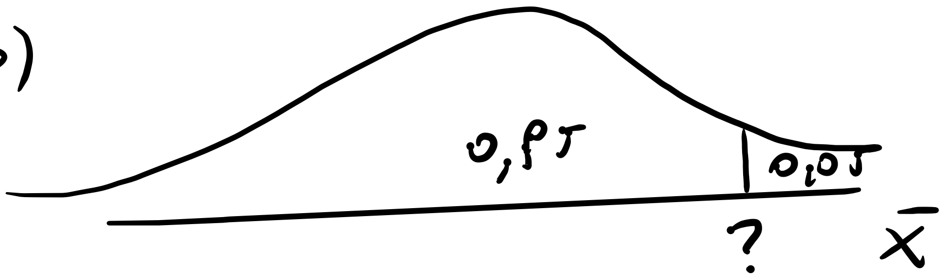
$$P(\bar{x} > \mu + 20.000) + P(\bar{x} < \mu - 20.000)$$

$$= P(\bar{x} > \underbrace{343.200 + 20.000}_{363.200}) + P(\bar{x} < 323.200)$$

$$= \underbrace{1 - P(\bar{x} < 363.200)}_{0{,}04831601} + \underbrace{P(\bar{x} < 323.200)}_{0{,}04831601}$$

$$= 0{,}09663202$$

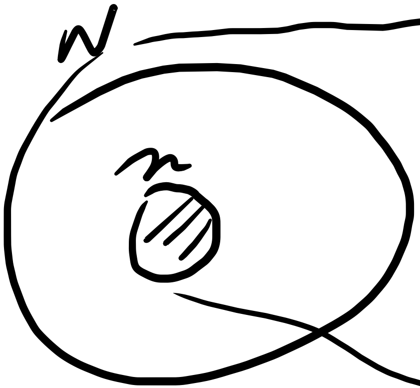
b)



percentil 95 → INV.NORM → 363.000,748

$$1{,}645 = \frac{\bar{x} - 343.200}{\frac{48.152}{\sqrt{16}}}$$

INTERVALOS DE CONFIANZA



θ (parámetros)

$\underbrace{\mu \,;\, \sigma^2 \,;\, p}_{\text{desconocidos}}$

$\hat{\theta}$ estimador

$\underbrace{\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)}$

estimación puntual

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$n = 10 \rightarrow \underbrace{\bar{x} = 15}_{\text{estimación}}$

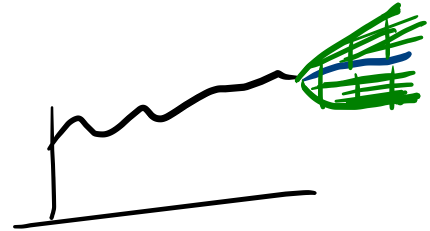
INTERVALOS P/ INFERIR EL VERDADERO VALOR DE θ

$$P\Big(\underbrace{L_i(\hat{\theta})}_{\text{LÍMITE INFERIOR}} \leq \theta \leq \underbrace{L_S(\hat{\theta})}_{\text{LÍMITE SUPERIOR}}\Big) = \underbrace{1-\alpha}_{\text{NIVEL DE CONFIANZA}}$$

SON ALEATORIOS

$$\underbrace{1-\alpha = 95\%}$$

$\mu \leftarrow$ MEDIA POBLACIONAL



$n = 50 \rightarrow \bar{x} = 38$

IC $(23 ; 52)$ → ES UNA SOLA ESTIMACIÓN

→ 0 → EN CASO CONTRARIO

→ 1 CUANDO EL VERDADERO VALOR ESTÁ CONTENIDO ACÁ

ADITIVOS $\longrightarrow$ EN GRAL

MARGEN DE ERROR

$$\hat{\theta} \pm \underbrace{k}_{\text{FACTOR DE CONFIANZA}} \cdot \underbrace{\sqrt{Var(\hat{\theta})}}_{\text{DESVIO ESTIMADOR}}$$

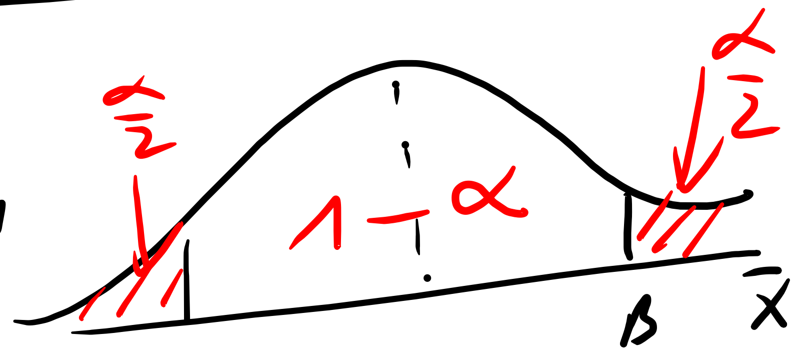
FACTOR DE CONFIANZA $\longrightarrow$ DIST. PROBABILIDAD

IC para μ

1) $X \sim N$ (población normal) $\longrightarrow$ $\underbrace{\bar{X} \sim N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

2) σ^2 conocida

3) población infinita



$$P(A < \bar{X} < B) = P\left(\overset{A}{z_{\frac{\alpha}{2}}} < z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\downarrow$$

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\downarrow$$

$$P\left(\bar{x} - \overbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{e} < \mu < \bar{x} + \overbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{e}\right) = 1-\alpha$$

$$\hat{\theta} \pm k \cdot \sqrt{Var(\hat{\theta})}$$

$$\bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejercicio n° 1

La profundidad de las piletas de lona que fabrica la empresa "PILETITA S.A.", se distribuye normalmente con un desvío estándar de 5 mm. Para estimar la profundidad media de las piletas, se tomó una muestra de 38 piletas, calculándose una profundidad promedio de 1250 mm. Realizar la estimación, con una confianza del 99%.

Respuesta: (1.247,91; 1.252,09)

X = PROFUNDIDAD DE LAS PILETAS (EN MM)

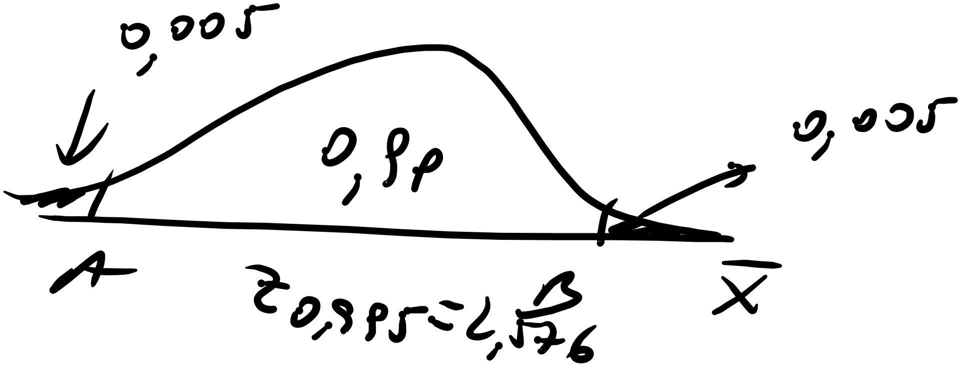
$X \sim N(?\,;\, 5)$

$P(A < \bar{X} < B) = 0{,}99$

$n = 38 \longrightarrow \bar{X} = 1250$

$\underbrace{1 - \alpha = 99\%}_{\text{SUBJETIVA}} \longrightarrow \alpha = 0{,}01$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$



$$P\left(\bar{X}-\overbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(1250-2,576\,\frac{5}{\sqrt{38}}<\mu<1250+2,576\,\frac{5}{\sqrt{38}}\right)=0,99$$

$$\boxed{IC\,(1247,91\,;\,1252,09)}$$

$$\underbrace{\frac{1247{,}91 + 1252{,}09}{2} = \underbrace{1250}_{\bar{x}}}$$

$$\frac{Li(\hat{\theta}) + Ls(\hat{\theta})}{2} = \hat{\theta}$$

$$\frac{1252{,}09 - 1247{,}91}{2} = e = z_{0{,}995} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejercicio n° 2

El costo variable de construcción de un determinado tipo de vivienda prefabricada, por metro cuadrado, se distribuye normalmente. Se tomó una muestra de 12 viviendas con las que se calculó un costo variable promedio de \$1440 y un desvío estándar de \$135.

a. ¿Entre qué valores estará el costo variable promedio del producto si se lo estima con una confianza del 95%?

   Respuesta: (1.354,22; 1.525,78)

b. Estime la varianza poblacional con una confianza del 90%.

   Respuesta: (10.186,74; 43.867,61)

a) X = Costo variable de construcción (m^2)

$\boxed{X \sim N}$

$n = 12 \longrightarrow \bar{X} = 1440 \quad \boxed{S = 135}$

Son datos de la muestra

$\Rightarrow$ Debo aplicar T de Student

1440   11   135   2,201

$$P\left(\bar{x} - t_{\underbrace{1-\frac{\alpha}{2}}_{\text{PROB. ACUM IZQUIERDA}},\ \underbrace{n-1}_{\text{GRADOS DE LIBERTAD}}} \cdot \frac{s}{\sqrt{\underbrace{n}_{12}}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\underbrace{\begin{gathered} Z \sim N(0;1) \\ E(Z) = 0 \\ Var(Z) = 1 \end{gathered}}$$

$1-\alpha = 0{,}95$

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow \underbrace{t_{0{,}975;11} = 2{,}201}$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$$1440 \pm 2{,}201 \cdot \frac{135}{\sqrt{12}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{IC\,(1354{,}22\,;\ 1525{,}78)}$$

IC para p $\underbrace{\hspace{6em}}$ $k\cdot\sqrt{var(\hat{\theta})}$

$$P\left(\bar{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{n}} < p < \bar{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{n}}\right) = 1-\alpha$$

INFINITA

$$P\left(\bar{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} < p < \bar{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\right) = 1-\alpha$$

FINITA

Ejercicio n° 3

Una muestra de 248 bicicletas indicó que el 19% de ellas tenía problemas en los frenos. Con una confianza del 92%, estime la proporción de bicicletas con problema en los frenos, ~~con una confianza del 92%~~

Respuesta: (0,1464; 0,2336)

X = cantidad de bicicletas con problemas

$X \sim B$

$n = 248 \longrightarrow \bar{p} = 0,19$

$1-\alpha = 0,92 \longrightarrow P(A < p < B) = 0,92$

$$P\left(\underbrace{\bar{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{n}}}_{A} < p < \underbrace{\bar{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}}}_{B}\right) = 1-\alpha$$

$\bar{p} = 0,19$

$\bar{q} = 1-\bar{p} = 0,81$

$n = 248$

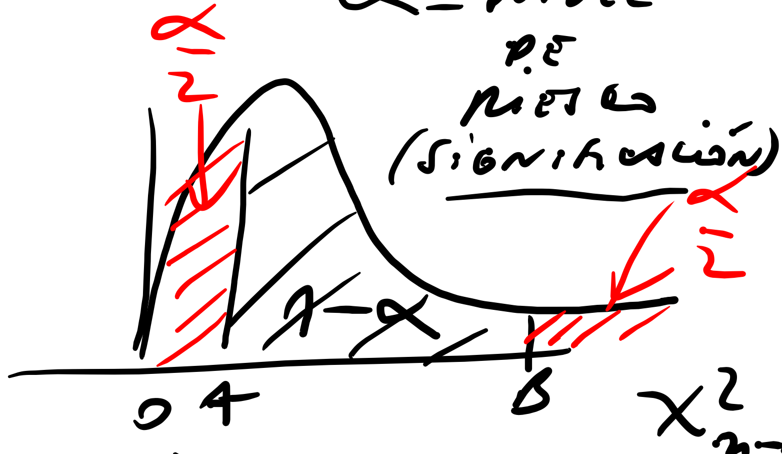
$\alpha = 0,08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \rightarrow z_{0,96} = 1,751$

$$P\left(0,19 - 1,751\sqrt{\frac{0,19\cdot 0,61}{248}} < p < 0,19 + 1,751\cdot\sqrt{\frac{0,19\cdot 0,81}{248}}\right)$$

$IC\,(0{,}1434\,;\,0{,}2336)$

IC para σ^2

α = NIVEL DE RIESGO (SIGNIFICACIÓN)



$$\frac{(n-1).S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$P(A < \chi^2_{n-1} < B) = 1-\alpha$$

$$P\left(A < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < B\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{B} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{A}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overbrace{\frac{(n-1)\cdot S^2}{B}}^{LI} < \sigma^2 < \overbrace{\frac{(n-1)\cdot S^2}{A}}^{LS} \right) = 1-\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} \\ B &= \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} \end{aligned}\right\} \quad B > A$$

Ejercicio n° 2

El costo variable de construcción de un determinado tipo de vivienda prefabricada, por metro cuadrado, se distribuye normalmente. Se tomó una muestra de 12 viviendas con las que se calculó un costo variable promedio de $1440 y un desvío estándar de $135.

a. ¿Entre qué valores estará el costo variable promedio del producto si se lo estima con una confianza del 95%?

   Respuesta: (1.354,22; 1.525,78)

b. Estime la varianza poblacional con una confianza del 90%.

   Respuesta: (10.186,74; 43.867,61)

2.b) IC para σ^2 con $\overbrace{1-\alpha = 90\%}^{\alpha = 10\%}$

$$P\left(\frac{(n-1).S^2}{B} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{A}\right) = 1-\alpha$$

$n = 12$

$S^2 = 135^2$

$\alpha = 10\%$

$\frac{\alpha}{2} = 5\%$

$A = \chi^2_{0,05;\,11} = 4,575$

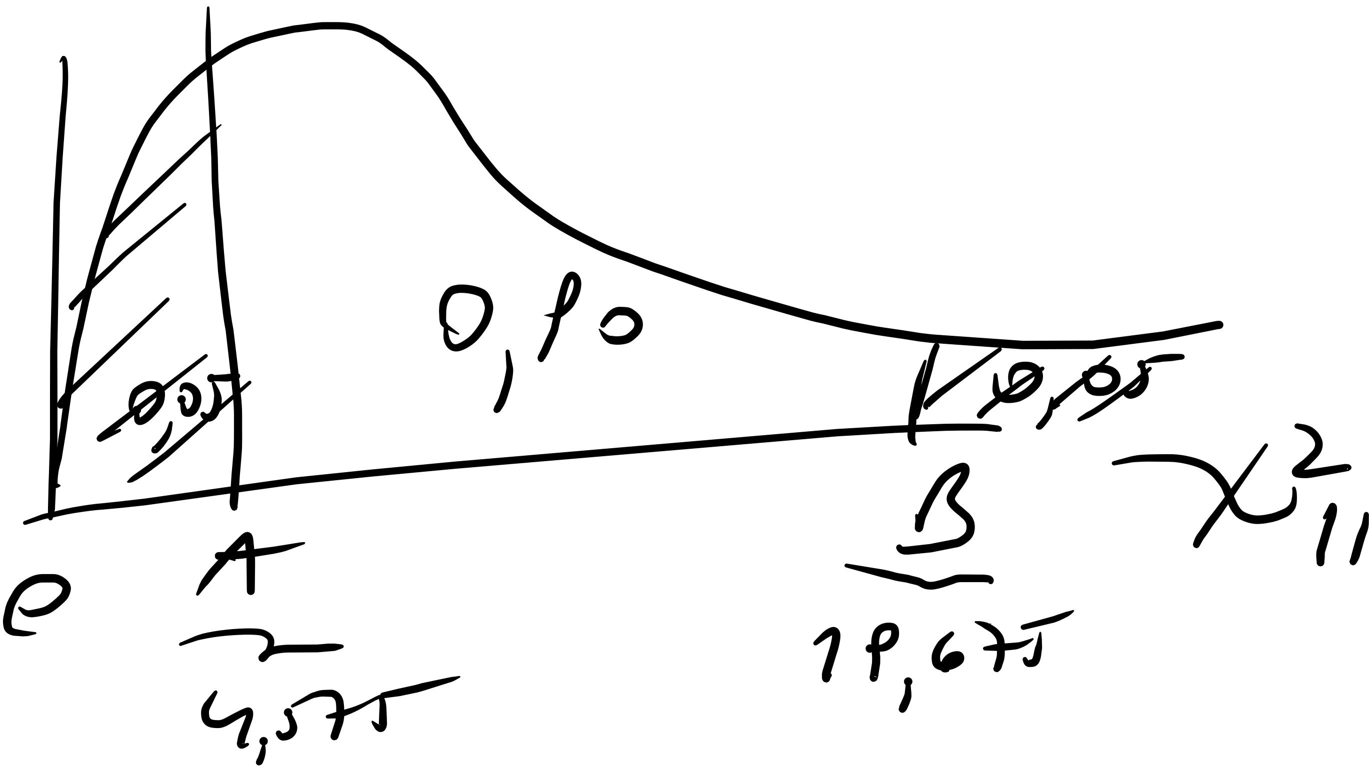
$\underline{\underline{B > A}}$

$B = \chi^2_{0,95;\,11} = 19,675$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(12-1)\cdot 135^2}{19{,}675} < \sigma^2 < \frac{(12-1)\cdot 135^2}{4{,}575}\right) = 0{,}90$$

$$\sigma^2 \quad IC\,(10.187{,}74\ ;\ 43.867{,}61)$$

$$\sigma \quad IC\left(\sqrt{10.187{,}74}\ ;\ \sqrt{43867{,}61}\right)$$


0,05
0,90
0,05
0
A
4,575
B
19,675
χ^2_{11}

IC para μ

$$\bar{X} \pm \overbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{e}$$

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \boxed{n = \frac{z^2 \cdot \sigma^2}{e^2}}$$

$e \uparrow \Rightarrow n \downarrow$

$\sigma^2 \uparrow \Rightarrow n \uparrow$

$z \uparrow \Rightarrow n \uparrow$

Ejercicio n° 4

En una tornería se fabrican cilindros cuyo diámetro se distribuye normalmente con un desvío estándar de 1.5 mm. Con una muestra de 10 cilindros se estimó el diámetro medio entre 20,5 y 21,8. Calcule la confianza de la estimación.

Respuesta: 0,83

X = Diámetro de los cilindros (mm)

$X \sim N(?;1{,}5)$

$n=10 \longrightarrow IC(20{,}5;21{,}8)$

$1-\alpha = ?$

$$\frac{21{,}8+20{,}5}{2} = \bar{X} = 21{,}15$$

$$\frac{21{,}8-20{,}5}{2} = 0{,}65 = e = \underbrace{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{?}\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}$$

$$0{,}65 = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{} = \frac{0{,}65}{\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right)} = \underline{\underline{1{,}3703}}$$

z	$F(z)$
1,3703	

$$F(z = 1{,}3703) = \underbrace{1-\frac{\alpha}{2}}_{\underline{\underline{0{,}9147\ldots}}}$$

..

$$1-\frac{\alpha}{2}=0,9147\ldots$$

$$1-0,9147\ldots=\frac{\alpha}{2}$$

$$\underbrace{(1-0,9147)*2}_{0,17}=\alpha$$

$$\Rightarrow\ 1-\alpha\cong 0,83$$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T

PRUEBA DE HIPÓTESIS

$$\alpha = P(\text{ERROR TIPO I})$$

NIVEL DE SIGNIFICACIÓN

$$\beta = P(\text{ERROR TIPO II})$$

$$1-\beta = \Pi \rightarrow \text{POTENCIA DEL TEST}$$