VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (III DEO)

Izračunavanje površine u ravni primenom dvostrukog integrala

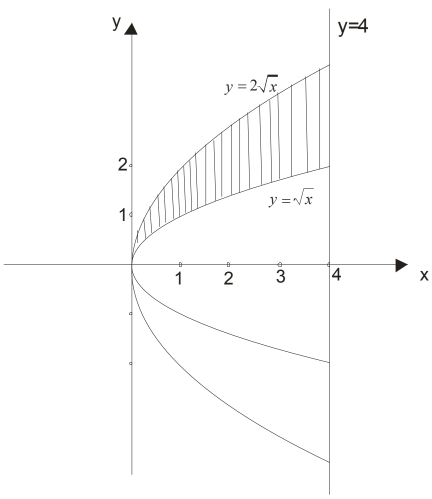
Površina oblasti *D* u ravni *xOy* može se naći po formuli: $\boxed{P = \iint\limits_D dxdy}$

Primer 1.

Izračunaj površinu ograničenu sledećim linijama: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ i $y = 4$.

Rešenje:

Najpre ćemo, kao i uvek, nacrtati sliku i odrediti granice po kojim radimo...



Oblast integracije je osenčena na slici $D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$

Upotrebom gore navedene formule, računamo površinu osenčenog dela:

$$P = \iint\limits_D dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^4 \left(y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x} \right) dx = \int_0^4 \sqrt{x} dx =$$

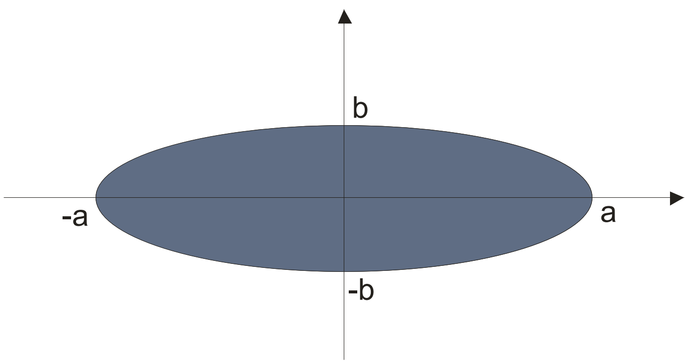
$$= \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Primer 2.

Izračunaj površinu ograničenu sa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Rešenje:

Naravno, ovde je u pitanju elipsa. Mi treba da izračunamo površinu unutar nje...



Ovde je zgodno uzeti takozvane **eliptičke koordinate**:

$x = a\, r\, cos\, \varphi$

$y = b\, r\, sin\ \varphi$ onda je: $\iint_D z(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdr$

$|J| = abr$

Da vidimo zašto su ove smene dobre:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(ar\cos\varphi)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\varphi)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{\cancel{a^2}r^2\cos^2\varphi}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}r^2\sin^2\varphi}{\cancel{b^2}}=1$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1$$
$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1$$
$$r^2=1 \to r=1$$

Dobijamo da je $0 \le r \le 1$, pošto ugao uzima ceo krug , to je $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Oblast D : $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Sad rešavamo dvojni integral :

$$P = \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abrdr = ab\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi = \boxed{ab\pi}$$

Površina elipse se dakle računa po formuli P = $ab\pi$

Primer 3.

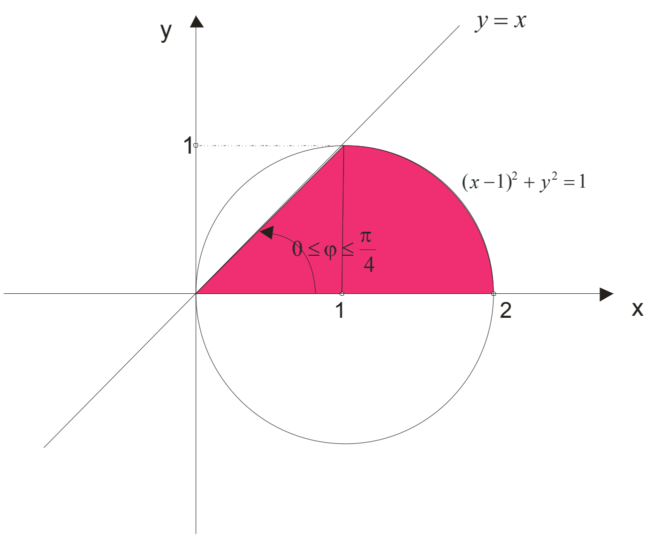
Izračunaj površinu ograničenu sledećim linijama: $x^2 + y^2 = 2x$, $y = x$ i $y = 0$

Rešenje:

Spakujmo kružnicu i nacrtajmo sliku da vidimo o kojoj se oblasti radi...

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Preseci su očigledno u x = 0 i x = 1



Uvodimo polarne koordinate: $\begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{array}$

$$x^2+y^2-2x=0$$
$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2-2r\cos\varphi=0$$
$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2r\cos\varphi$$
$$r^2=2r\cos\varphi \to r=2\cos\varphi$$

Odavde zaključujemo: $0\le r\le 2\cos\varphi$

Ugao ide od prave y = 0 do y = x , pa ugao ide od $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

Sad možemo računati traženu površinu:

$$P=\iint\limits_D dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4\cos^2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi$$

Malo se pomognemo trigonometrijskim formulama: $\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$P=\iint\limits_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=\cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\varphi}{\cancel{2}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$
$$=\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right)=\boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}$$

Do sada smo upotrebljavali polarne i cilindrične koordinate.

Medjutim u ozbiljnijim zadacima moramo upotrebljavati takozvane **generalisane polarne koordinate** r i φ po formulama:

$$\left.\begin{aligned}x&=ar\cos^\alpha\varphi\\ y&=br\sin^\alpha\varphi\end{aligned}\right\}\to |J|=\alpha\cdot abr\cdot\cos^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi$$

Vrednost za α se uzima u zavisnosti od konkretne situacije...

Gledamo da kod te date krive pogodnom vrednošću za α na levoj strani ostane samo r^2 .To je ideja.

Primer 4 .

Izračunati površinu ograničenu sa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ ako su parametri $a,b,\ h$ i k pozitivni.

<u>*Rešenje:*</u>

Najpre ćemo malo da prepakujemo zadatu krivu ...

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{h}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{k}=0 \text{ dopunimo do punih kvadrata}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{h}+\left(\frac{a}{2h}\right)^2}-\left(\frac{a}{2h}\right)^2+\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{k}+\left(\frac{b}{2k}\right)^2}-\left(\frac{b}{2k}\right)^2=0$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\left(\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{b}{2k}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}$$

Sad razmišljamo. Zgodno bi bilo da uništimo ovo u zagradama. Zato ćemo uzeti da je :

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=r\cos\varphi\rightarrow\frac{x}{a}=r\cos\varphi+\frac{a}{2h}\rightarrow\boxed{x=ar\cos\varphi+\frac{a^2}{2h}}$$

$$\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=r\sin\varphi\rightarrow\frac{y}{b}=r\sin\varphi+\frac{b}{2k}\rightarrow\boxed{y=br\sin\varphi+\frac{b^2}{2k}}$$

Dakle, uzimamo da je:

$$\left.\begin{array}{l} x=ar\cos\varphi+\frac{a^2}{2h} \\ y=br\sin\varphi+\frac{b^2}{2k} \end{array}\right\}\rightarrow|J|=abr$$

Sad da odredimo granice.

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}$$

ovo sve daje r^2 jer smo tako izabrali

$$r^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}$$

$$r^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\to r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$$

Dobili smo granice za r : $0\le r\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$

Ugao nema nikakvih " ograničenja", pa je $0\le\varphi\le 2\pi$

Sad računamo traženu površinu:

$$P=\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}abrdr=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}rdr$$

Kako se u integralu " po r" uopšte i ne nalazi ugao φ odmah možemo napisati da je $\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi$,

Dalje imamo:

$$P=\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}abrdr=2ab\pi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}rdr=$$

$$=\cancel{2}ab\pi\left(\frac{r^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}=ab\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\right)^2=ab\pi\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)=\boxed{\frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)}$$

Primer 5.

Izračunati površinu ograničenu sa :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$$8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$$x>0, y>0$$

Rešenje:

Upotrebićemo **generalisane polarne koordinate :** $\left.\begin{matrix} x=ar\cos^{\alpha}\varphi \\ y=br\sin^{\alpha}\varphi \end{matrix}\right\}\rightarrow |J|=\alpha\cdot abr\cdot\cos^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi$ i to:

$$\left.\begin{matrix} x=ar\cos^{3}\varphi \\ y=br\sin^{3}\varphi \end{matrix}\right\}\rightarrow |J|=3\cdot abr\cdot\cos^{3-1}\varphi\cdot\sin^{3-1}\varphi\rightarrow\boxed{|J|=3\cdot abr\cdot\cos^{2}\varphi\cdot\sin^{2}\varphi}$$

Da vidimo sada granice i zašto smo baš izabrali da je $\alpha=3$.

$\left.\begin{matrix} x=ar\cos^{3}\varphi \\ y=br\sin^{3}\varphi \end{matrix}\right\}$ zamenimo u $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ i dobijamo:

$$\left(\frac{\cancel{a}r\cos^{3}\varphi}{\cancel{a}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\cancel{b}r\sin^{3}\varphi}{\cancel{b}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$r^{\frac{2}{3}}\cos^{2}\varphi+r^{\frac{2}{3}}\sin^{2}\varphi=1$$

$$r^{\frac{2}{3}}=1\rightarrow\boxed{r=1}$$

Dalje $\left.\begin{matrix} x=ar\cos^{3}\varphi \\ y=br\sin^{3}\varphi \end{matrix}\right\}$ zamenimo u $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$ i dobijamo:

$$\left(\frac{\cancel{a} r\cos^3\varphi}{\cancel{a}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\cancel{b} r\sin^3\varphi}{\cancel{b}}\right)^{\frac{2}{3}}=4$$

$$r^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi+r^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi=4$$

$$r^{\frac{2}{3}}=4\rightarrow\boxed{r=8}$$

Dobili smo granice za r : $\quad 1\le r\le 8$

Sad da odredimo granice za ugao:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$$\frac{ar\cos^3\varphi}{a}=\frac{br\sin^3\varphi}{b}$$

$$\cos^3\varphi=\sin^3\varphi\rightarrow\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi}=1\rightarrow tg^3\varphi=1\rightarrow\boxed{\varphi=arctg1}$$

I još imamo:

$$8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$$8\frac{ar\cos^3\varphi}{a}=\frac{br\sin^3\varphi}{b}$$

$$8\cos^3\varphi=\sin^3\varphi\rightarrow\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi}=8\rightarrow tg^3\varphi=2^3\rightarrow\boxed{\varphi=arctg2}$$

$$Dakle: \qquad arctg1\le\varphi\le arctg2$$

Sad računamo traženu površinu:

$$P=\iint_D dxdy=\int_{arctg1}^{arctg2}d\varphi\int_1^8 3\cdot abr\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi dr=3ab\int_{arctg1}^{arctg2}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi d\varphi\int_1^8 rdr=$$

Kako je $\int_1^8 rdr=\frac{r^2}{2}\Big|_1^8=\frac{64}{2}-\frac{1}{2}=\frac{63}{2},$ imamo

$$=\frac{63}{2}\cdot 3ab\int_{arctg1}^{arctg2}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi d\varphi$$

Ovaj integral ćemo najlakše rešiti ako spakujemo podintegralnu funkciju koristeći formule iz trigonometrije:

$$\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi=\frac{4}{4}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi=\frac{\sin^2 2\varphi}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\right)=\frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi)$$

Sad imamo:

$$P=\frac{63}{2}\cdot 3ab\int_{arctg1}^{arctg2}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi d\varphi=\frac{189}{16}ab\int_{arctg1}^{arctg2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi$$

Zamenimo granice, spakujemo malo rešenje i dobijamo:

$$\boxed{P=\frac{189}{16}ab\cdot(arctg\frac{1}{3}+\frac{6}{25})}$$

Primer 6 .

Izračunati površinu ograničenu sa :

$$x^2=ay$$
$$x^2=by$$
$$x^3=cy^2$$
$$x^3=dy^2$$
$$(0<a<b)\wedge(0<c<d)$$

Rešenje:

Ovde je zgodno uzeti smene *u* i *v*.

Ali kako birati?

Pogledajmo prve dve jednačine:

$$x^2=ay\rightarrow\frac{x^2}{y}=a$$
$$x^2=by\rightarrow\frac{x^2}{y}=b$$

Uzećemo da je $\boxed{u=\frac{x^2}{y}}$

Iz preostale dve imamo:

$$x^3 = cy^2 \rightarrow \frac{x^3}{y^2} = c$$

$$x^3 = dy^2 \rightarrow \frac{x^3}{y^2} = d$$

Zgodno je uzeti: $\boxed{v = \frac{x^3}{y^2}}$

Dakle, uvodimo smene:

$$u = \frac{x^2}{y}$$

$$v = \frac{x^3}{y^2}$$

Odavde moramo izraziti x i y:

$$u = \frac{x^2}{y} \rightarrow y = \frac{x^2}{u} \text{(ovo zamenimo u drugu jednačinu)}$$

$$v = \frac{x^3}{y^2} \rightarrow x^3 = y^2 v \rightarrow x^3 = \left(\frac{x^2}{u}\right)^2 \cdot v \rightarrow x^3 = \frac{x^4}{u^2} v \rightarrow \boxed{x = \frac{u^2}{v}}$$

$$y = \frac{x^2}{u} \rightarrow y = \frac{\left(\frac{u^2}{v}\right)^2}{u} \rightarrow \boxed{y = \frac{u^3}{v^2}}$$

Tražimo Jakobijan:

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ \frac{3u^2}{v^2} & -\frac{2u^3}{v^3} \end{vmatrix} = \left|-\frac{4u^4}{v^4} + \frac{3u^4}{v^4}\right| = \left|-\frac{u^4}{v^4}\right| = \frac{u^4}{v^4}$$

Da odredimo granice:

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{x^2}{y} = a \\ u = \dfrac{x^2}{y} = b \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{a \le u \le b}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{x^3}{y^2} = c \\ v = \dfrac{x^3}{y^2} = d \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{c \le v \le d}$$

Sad možemo izračunati površinu:

$$P = \iint_D dxdy = \int_a^b du \int_c^d \frac{u^4}{v^4} dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d \frac{1}{v^4} dv$$

Ova dva integrala nije teško rešiti i dobijamo:

$$P = \frac{1}{15}\left(b^5 - a^5\right)\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)$$