POLINOMI SA JEDNOM PROMENLJIVOM

Oblika su:

$$\boxed{P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}$$

Ovaj oblik se dobija "sredjivanjem" polinoma (sabiranjem, oduzimanje...) i naziva se kanonički, *x*-je promenljiva, $a_n, a_{n-1},...,a_0$ su koeficijenti (konstante), n je prirodan broj ili nula.

Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je polinom *P* stepena n, pa je a_n "najstariji" koeficijenat.

Primer: $P(x)=4x^3+6x^2-2x+7$

- ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

- **zanimljivo** je da se član bez *x*-sa, takozvani slobodni član dobija kad umesto x stavimo 0, tj. $P(0)=4\cdot 0^3+6\cdot 0^2-2\cdot 0+7=7 \to \quad P(0)=7$, ili za polinom $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 \to P(0)=a_0$

- takodje ako umesto x stavimo 1 imamo $P(1)=a_n+a_{n-1}+...+a_0$

SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA:

Primer: $P(x)=3x^3-4x^2+6x-7$

$Q(x)=4x^3-2x^2+12x+3$

$$P(x)+Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)+(4x^3-2x^2+12x+3)$$

$$=\underline{3x^3}-\underline{4x^2}+\underline{6x}-7+\underline{4x^3}-\underline{2x^2}+\underline{12x}+3$$

$=$ krenemo sa sabiranjem članova sa najvećim stepenom pa dok ne dodjemo do ''slobodnih članova'', to jest onih bez *x*-sa

$$\boxed{=7x^3-6x^2+18x-4}$$

$$P(x)-Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)-(4x^3-2x^2+12x+3)$$

$=$ **pazi: Minus ispred zagrade menja znak <u>svim</u> članovima u zagradi**

$$=\underline{3x^3}-\underline{4x^2}+\underline{6x}-7-\underline{4x^3}+\underline{2x^2}-\underline{12x}-3$$

$$=\boxed{-x^3-2x^2-6x-10}$$

Najbolje je da podvlačite **slične monome** kako se ne bi desila greška u sabiranju (oduzimanju)

MNOŽENJE POLINOMA

Primer 1. Pomnožiti sledeće polinome:

$$P(x) = 2x - 3$$
$$Q(x) = x^2 + 4x - 7$$

Rešenje:

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7)$$

Kako množiti?

Množi se ‘’svaki sa svakim’’. **Najbolje je da prvo odredimo znak** $(+ \cdot + = +,\ - \cdot - = +,\ + \cdot - = -,\ - \cdot + = -)$, onda pomnožimo brojke ispred nepoznatih i na kraju nepoznate. Naravno da je $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, itd. (ovde koristimo pravila iz stepenovanja: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$)
Vratimo se na zadatak:

$$(2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7) =$$

$\underline{2x^3} + \underline{\underline{8x^2}} - \underline{\underline{\underline{14x}}} - \underline{\underline{3x^2}} - \underline{\underline{\underline{12x}}} + 21 =$ sad saberemo (oduzmemo) slične monome

$= 2x^3 + 5x^2 - 26x + 21$

Primer 2. Pomnožiti sledeće polinome:

$$A(x) = -x^2 + 4x - 7$$
$$B(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (-x^2 + 4x - 7) \cdot (2x^2 + 5x + 1) \\ &= -2x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x^3 + 20x^2 + 4x \ -14x^2 - 35x - 7 \\ &= -2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 31x - 7 \end{aligned}$$

<u>**DELJENJE POLINOMA**</u>

Podsetimo se najpre deljenja brojeva.

Primer: $57146 : 23 = 2484$

$$\begin{array}{l}
-46 \\ \hline
\;\;111 \\
\;-92 \\ \hline
\;\;\;194 \\
\;-184 \\ \hline
\;\;\;\;106 \\
\;\;\;-92 \\ \hline
\;\;\;\;\;14 \text{ - } \textit{ostatak}
\end{array}$$

Možemo zapisati: $\dfrac{57146}{23} = 2484 + \dfrac{14}{23}$

$$\boxed{\frac{deljenik}{delilac} = rešenje + \frac{ostatak}{delilac}}$$

Probajmo sad sa polinomima:

Primer 1:

$$\begin{array}{l}
(2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = 2x - 1 \\
{}_{(-)}2x^2 -_{(+)} 4x \\ \hline
\qquad -x + 6 \\
\qquad -_{+}x +_{-} 2 \\ \hline
\qquad\qquad 4 \rightarrow \text{ Ostatak}
\end{array}$$

Dakle:

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{4}{x - 2}$$

<u>**POSTUPAK**</u>

→ Podelimo "prvi sa prvim'' $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$
i upišemo $2x$ u rešenju
→ 2x pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod deljenika $2x^2-4x$
→ promenimo znake (ono u zagradi)
→ <u>**prvi se uvek skrate**</u> a druge saberemo
-5x + 4x = -x
→ dopišemo +6
→ opet delimo "prvi sa prvim'' $\dfrac{-x}{x} = -1$
→ množimo sa deliocem
→ promenimo znake i saberemo

Primer 2:

$$(x^3+2x^2-4x+5):(x+1)=x^2+x-5$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\underset{(-)}{}x^3 \underset{(-)}{+} x^2} \\
\quad x^2-4x \\
\quad \underline{\underset{(-)}{}x^2 \underset{(-)}{+} x} \\
\qquad -5x+5 \\
\qquad \underline{\underset{(+)}{-}5x \underset{(+)}{-} 5} \\
\qquad\quad 10
\end{array}$$

POSTUPAK

→ Podelimo "prvi sa prvim'' $\frac{x^3}{x}=x^2$ upišemo x^2 u rešenje

→ x^2 pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod deljenika x^3+x^2

→ promenimo znake kod x^3+x^2 u $-x^3-x^2$

→ prvi se uvek "skrate'', a $2x^2-x^2=x^2$

→ spustimo - 4x

→ opet "prvi u prvom'' $\frac{x^2}{x}=x$

→ x množimo sa deliocem

→ menjamo znake kod x²+x u $-x^2-x$

→ prvi se skrate a -4x-x=-5x

→ spuštamo +5

→ $\frac{-5x}{x}=-5$

→ -5·(x+1)=-5x-5

→ promenimo znake i prvi se skrate

→ 5+5=10

Dakle:

$$\frac{x^3+2x^2-4x+5}{x+1}=x^2+x-5+\frac{10}{x+1}$$

Primer 3:

$$(x^4-3x^3+2x^2+x-5):(x^2+2x-3)=x^2-5x+15$$

$$\begin{array}{l}
\underline{_{-}x^4 \underset{(-)}{+} 2x^3 \underset{(+)}{-} 3x^2} \\
\quad -5x^3+5x^2+x \\
\quad \underline{\underset{(+)}{-}5x^3 \underset{(+)}{-} 10x^2 \underset{(-)}{+} 15x} \\
\qquad 15x^2-14x-5 \\
\qquad \underline{\underset{(-)}{}15x^2 \underset{(-)}{+} 30x \underset{(+)}{-} 45} \\
\qquad\qquad -44x+40 \rightarrow \text{ ostatak}
\end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2+x-5}{x^2+2x-3}=x^2-5x+15+\frac{-44x+40}{x^2+2x-3}$$

Primer 4:

$$(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$$
$$\underset{(-)}{}x^4 \underset{(+)}{-} x^3$$
$$+x^3-1$$
$$\underset{(-)}{+}x^3 \underset{(+)}{-} x^2$$
$$x^2-1$$
$$\underset{(-)}{}x^2 \underset{(+)}{-} x$$
$$x-1$$
$$\underset{(-)}{}x \underset{(+)}{-} 1$$

Nema ostatka

PAZI:

Kad skratimo "prve'' a drugi nisu istog stepena prepišemo ih, prvo onaj sa većim pa sa manjim stepenom, to jest: $+x^3-1$

Dakle: $\dfrac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$

U nekim zadacima interesovaće nas samo ostatak koji se dobija deljenjem dvaju polinoma a ne i količnik. Tu nam pomaže **Bezuova teorema:**

Ostatak pri deljenju polinoma P(x) sa (x-a) jednak je P(a), to jest vrednosti

polinoma P(x) u tački x = a. Ako je P(a)=0, deljenje je bez ostatka.

Primer 1: *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* x^3-5x^2+6x-7 *sa* $x-2$

Najpre rešimo x-2=0, pa je **x = 2**

onda uporedjujemo x-a i x-2→ *a=2*

Sada je $P(x)=x^3-5x^2+6x-7$

$$P(2)=2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2-7$$
$$P(2)=8-20+12-7$$
$$P(2)=-7 \Rightarrow$$ **Ostatak je -7**

Primer 2: *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* $2x^3 - 5x + 6$ *sa* $x + 1$

Pazi , ovde je $a = -1$, jer je x+1=0

$x = -1$

$$P(x) = 2x^2 - 5x + 6$$
$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6$$
$$P(-1) = 2 + 5 + 6$$
$P(-1) = 13 \Rightarrow$ Ostatak je 13

Još jedna izuzetna primena Bezueve teoreme je kod rastavljanja polinoma na činioce. Mi smo do sada naučili da faktorišemo polinome drugog stepena. Za polinome trećeg i četvrtog stepena postoje algoritmi, ali su suviše teški, dok za polinome petog i većeg stepena ne postoji univerzalan način da se faktorišu, odnosno reše.

Kako nam to pomaže Bezuova teorema?

Primer 1: Dat je polinom $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ **Izvrši njegovu faktorizaciju.**

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

za x=1

$$P(x) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6$$
$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6$$
$$P(1) = 0$$

POSTUPAK

→ uočimo ''slobodan'' član, to jest onaj bez x-sa.
ovde je to 6.
→ on se može podeliti: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6
→redom zamenjujemo ove brojeve dok ne dobijemo da je $P(a) = 0$
→ našli smo da je $a=1$
→ podelimo polinom sa $(x - a) = (x - 1)$

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$
$$\underset{(-)}{x^3} \underset{(+)}{- x^2}$$
$$-5x^2 + 11x$$
$$\underset{(+)}{-5x^2} \underset{(-)}{+ 5x}$$
$$6x - 6$$
$$\underset{(-)}{6x} \underset{(+)}{- 6}$$

Nema ostatka

Ovim smo smanjili stepen polinoma i sad već $x^2 - 5x + 6$ znamo da rastavljamo

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 \\ &= x(x-2) - 3(x-2) \\ &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Dakle: $\boxed{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)}$

Primer 2:

Izvršiti faktorizaciju polinoma: $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x + 4$

Posmatrajmo broj 4 (slobodan član). Pošto njega možemo podeliti sa
+1, -1, +2, -2,+4, -4, redom menjamo u polinom dok ne bude P(a)=0

Za **x = 1** $P(1) = 1^4 - 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 + 4$

$P(1) = 4 \neq 0$

Idemo dalje:
Za **x = -1**

$$P(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 4$$

$$P(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$$

Dakle, delimo sa $x - (-1) = x + 1$

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) : (x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\underset{(-)}{x^4} \underset{(-)}{+ x^3}$$

$$-3x^3 - 3x^2$$

$$\underset{(+)}{-3x^3} \underset{(+)}{- 3x^2}$$

$$4x + 4$$

$$\underset{(-)}{4x} \underset{(-)}{+ 4}$$

Dalje gledamo $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, njegov slobodan član je 4, pa opet redom ispitujemo:

Za **x = -1** $P_1(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$

Opet delimo sa (x+1)

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$$

Znamo da je : $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Konačno rešenje je:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 &= (x+1)(x+1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x+1)^2 (x-2)^2 \end{aligned}$$

<u>Primer 3:</u>

Odrediti realan parametar *m* tako da polinom $P(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$ **bude deljiv sa x + 2.**

Rešenje:

Iz x+2 = 0 je x = -2 , pa je *a = -2*

$$P(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$$
$$P(-2) = (-2)^5 + m(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 8$$
$$P(-2) = -32 - 8m + 12 + 4 + 8$$
$$P(-2) = -8m - 8$$

$\boxed{P(-2) = 0}$ jer u zadatku kaže da je P(x) deljiv sa -2

$$-8m - 8 = 0$$
$$\boxed{m = -1}$$

<u>Primer 4:</u>

Odrediti realne vrednosti parametara *a* i *b* tako da polinom $P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$ **pri deljenju sa** $x+1$ **daje ostatak 6, a pri deljenju sa** $x-1$ **daje ostatak 2.**

Rešenje:

Kako pri deljenju sa $x+1$ daje ostatak 6, to je $\boxed{P(-1) = 6}$

$$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$$
$$P(-1) = a(-1)^3 - b(-1)^2 - 5(-1) + 4$$
$$P(-1) = -a - b + 9$$
$$-a - b + 9 = 6$$
$$-a - b = -3$$
$$\boxed{a + b = 3}$$

Kako pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 2, to je $\boxed{P(1)=2}$

$P(x)=ax^3-bx^2-5x+4$

$P(1)=a\cdot 1^3-b\cdot 1^2-5\cdot 1+4$

$P(1)=a-b-1$

$a-b-1=2$

$\boxed{a-b=3}$

Dalje oformimo sistem jednačina:

$a+b=3$

$\underline{a-b=3}$

$a\cancel{+b}=3$

$\underline{a\cancel{-b}=3}$

$2a=6\rightarrow a=3\rightarrow b=0$

Rešenja su $a=3, b=0$