

KVADRATNA FUNKCIJA

Kvadratna funkcija je oblika:

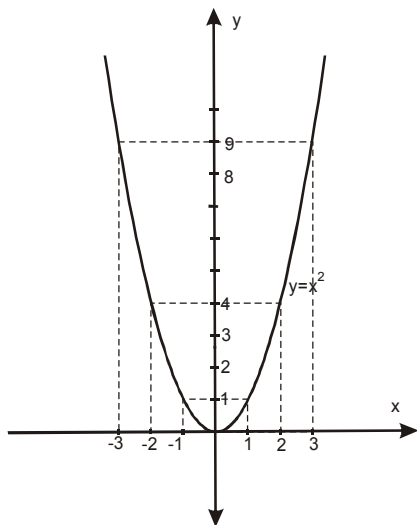
$$y = ax^2 + bx + c$$

Gde je $x \in R$, $a \neq 0$ i a, b i c su realni brojevi.

Kriva u ravni koja predstavlja grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$ je **parabola**.

Najpre ćemo naučiti kako izgleda grafik funkcije $y = x^2$. Napravićemo tablicu za neke vrednosti promenljive x .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



za $x = -3$ je $y = (-3)^2 = 9$

za $x = -2$ je $y = (-2)^2 = 4$

za $x = -1$ je $y = (-1)^2 = 1$

za $x = 0$ je $y = 0^2 = 0$

za $x = 1$ je $y = 1^2 = 1$

za $x = 2$ je $y = 2^2 = 4$

za $x = 3$ je $y = 3^2 = 9$

Ovaj grafik će nam uvek služiti kao “početni”. Šta se dešava ako ispred x^2 ima neki broj?

Naučimo sad grafik $y = ax^2$

Razlikovaćemo 2 situacije: $a > 0$ i $a < 0$

za $a > 0$

Ovde je parabola okrenuta “ otvorom nagore”. Šta se dešava ako je $a > 1$ i $0 < a < 1$?

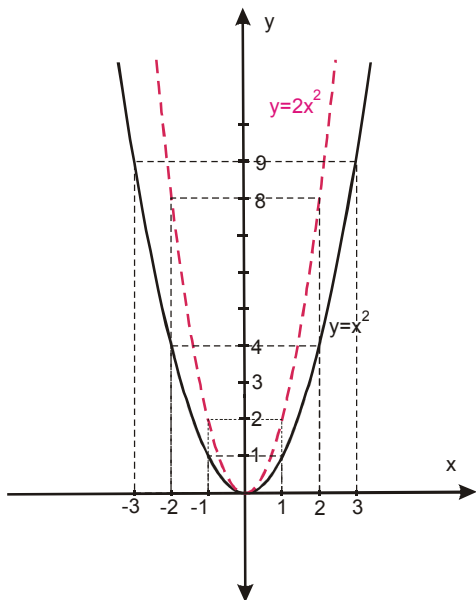
$a > 1$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se “ sužava”

Primer

$$y = 2x^2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18



Što je broj a veći to je grafik uži!

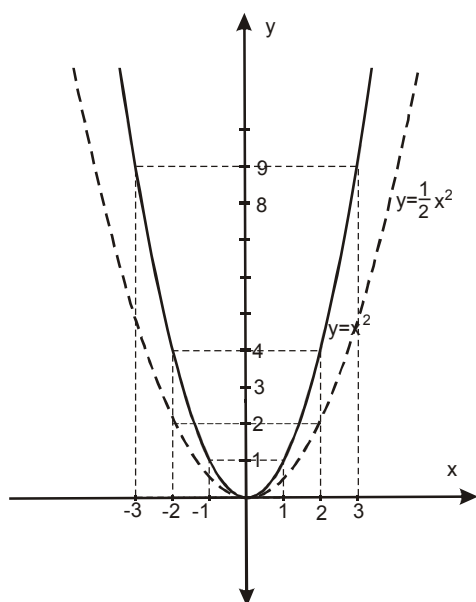
$$\underline{0 < a < 1}$$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se “širi”

Primer

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



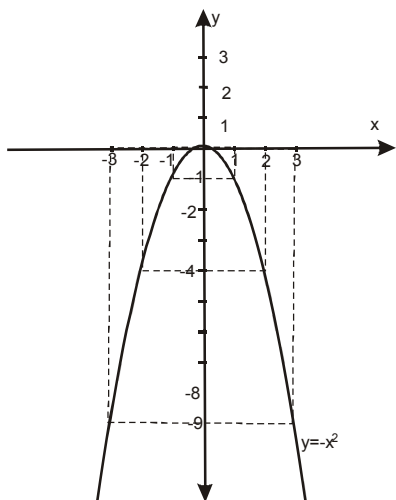
Što je broj a bliži nuli, grafik je širi!

Za $a < 0$ parabola je okrenuta “otvorom nadole”.

Početni grafik je $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Evo grafika funkcije $y = -x^2$

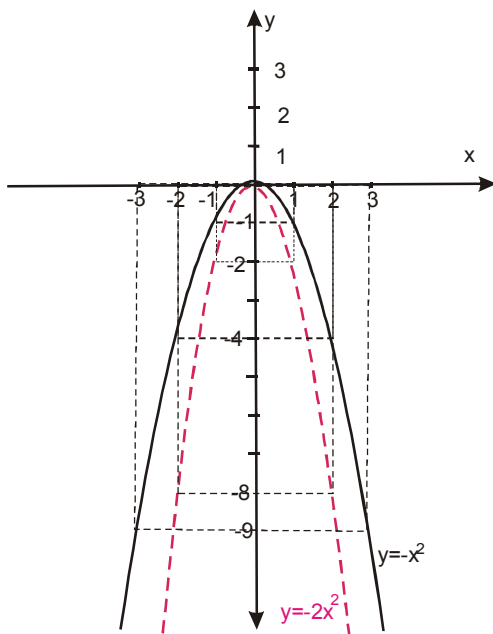


Opet ćemo razmotriti 2 situacije:

U odnosu na početni $y = -x^2$ grafik se “sužava” ako je $a < -1$

Primer
 $y = -2x^2$

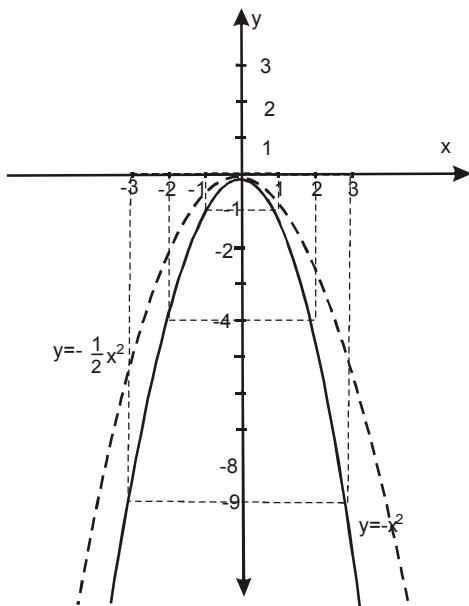
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



Ako je
 $-1 < a < 0$

U odnosu na početni grafik $y = -x^2$ grafik, na primer $y = -\frac{1}{2}x^2$ se “širi”

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$



Dobro, ovo za sad nije bilo "mnogo opasno". Naučimo sada da pomeramo funkciju duž y-ose. Posmatrajmo grafik:

$$y = ax^2 + \beta$$

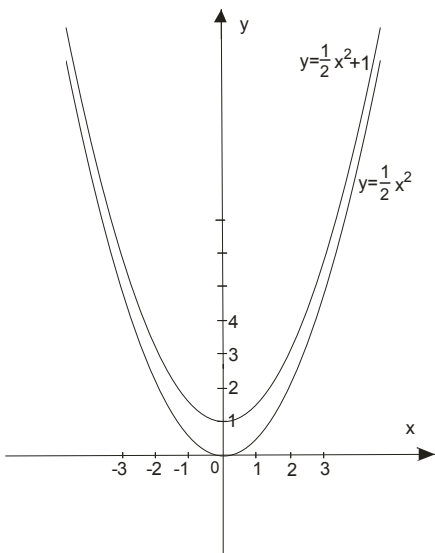
→ Prvo nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$

→ taj grafik pomeramo duž y-ose i to:

- 1) Ako je β pozitivan “podizemo” grafik, odnosno pomeramo ga u pozitivnom smeru y-ose.
- 2) Ako je β negativan, “spuštamo” grafik, odnosno pomeramo ga u negativnom smeru y-ose

Evo par primera:

Primer 1: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

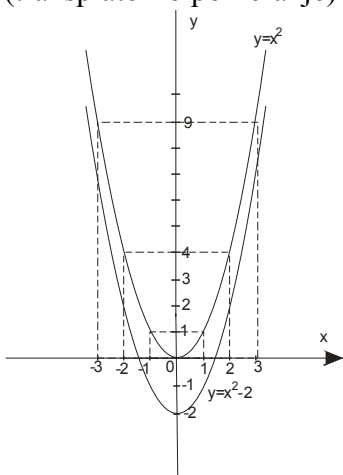


Prvo nacrtamo grafik $y = \frac{1}{2}x^2$, Zatim taj grafik “podignemo” za +1, paralelnim pomeranjem (translacija)

Primer 2:

$$y = x^2 - 2$$

Znači, najpre nacrtamo grafik $y = x^2$. Potom taj grafik “spustimo” za -2 duž y-ose (translatorsko pomeranje)



Nadam se da smo i ovo razumeli, jel tek sad ide "prava stvar". Naučimo da pomeramo funkciju i duž x-ose.

Posmatrajmo funkciju: $y = (x - \alpha)^2$

Pazi:

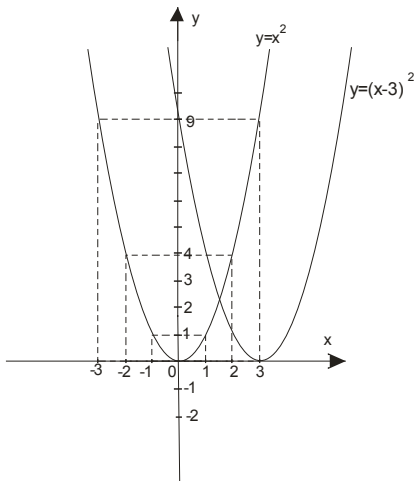
→ Ako je $-\alpha$ to znači da funkciju pomeramo za α po x-osi **udesno**.

→ Ako je $+\alpha$ to znači da funkciju pomeramo za α po x-osi **ulevo**

Ništa bez primera:

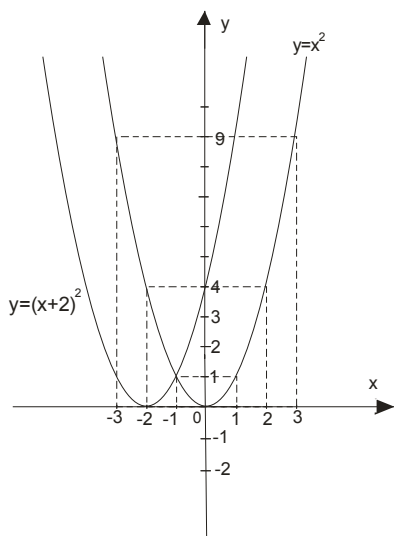
Primer 1. $y = (x - 3)^2$

→ Znači pomeramo funkciju $y = x^2$ udesno za 3



Primer 2. $y = (x + 2)^2$

→ Znači pomerimo funkciju $y = x^2$ ulevo za 2



Sada imamo znanje da nacrtamo ceo grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$.

Najpre moramo funkciju $y = ax^2 + bx + c$ svesti na takozvani kanonski oblik. Tu nam pomaže formula:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ili ako uvedemo da je:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{tj.} \quad \beta = -\frac{D}{4a} \quad \text{dobijamo:} \quad \boxed{y = a(x - \alpha)^2 + \beta} \quad \text{kanonski oblik}$$

Tačka $T(\alpha, \beta)$ je teme parabole.

Dakle: (važno, ovo je postupak)

→ Datu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ najpre svedemo na kanonski oblik $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

→ Nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$

→ Izvršimo pomeranje (transliranje) duž x-ose za α

→ Izvršimo pomeranje (transliranje) duž y-ose za β

Primer 1. Nacrtaj grafik funkcije:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

→ Svedemo je na kanonski oblik:

$$a = 1 \quad \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

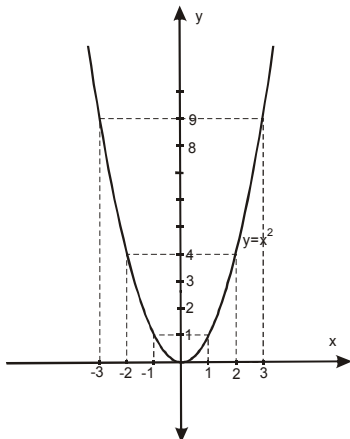
$$b = -6 \quad c = 5 \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-6)^2}{4 \cdot 1} = \frac{20 - 36}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

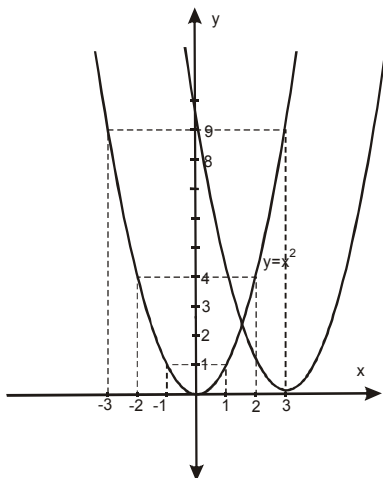
$$y = 1(x - 3)^2 + (-4)$$

$$y = (x - 3)^2 - 4$$

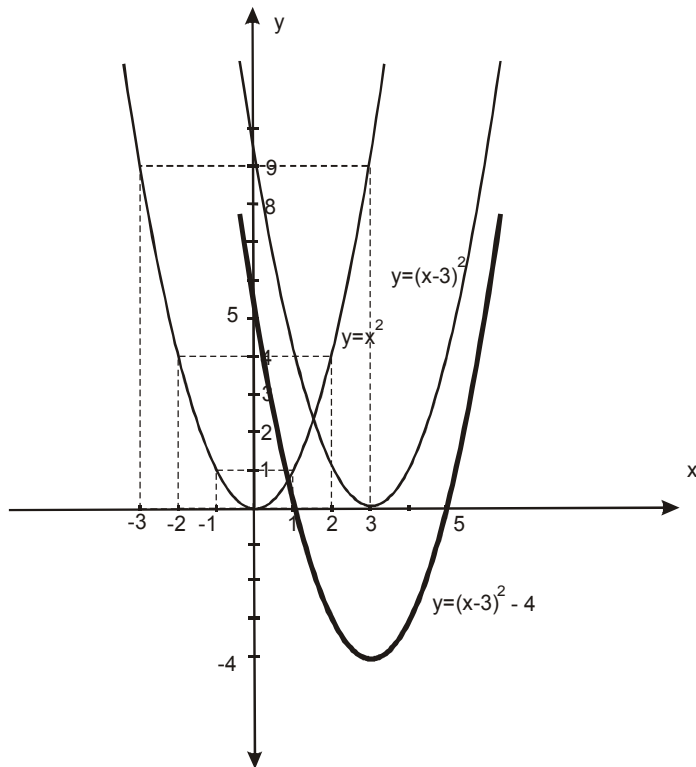
→ Najpre nacrtamo $y = ax^2$, odnosno $y = x^2$



→ Sada ucrtamo grafik $y = (x - 3)^2$, odnosno vršimo pomeranje za 3 ulevo



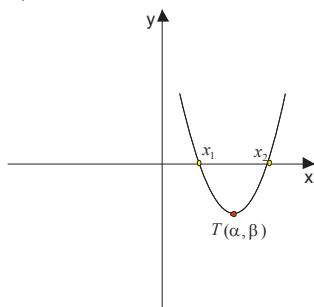
→ I najzad ucrtamo $y = (x-3)^2 - 4$ tako što grafik $y = (x-3)^2$ spustimo za 4 “nadole”



Ceo ovaj postupak je dosta “zamršen” a nije baš ni mnogo precizan. Evo kako ćete mnogo brže i preciznije nacrtati grafik $y = ax^2 + bx + c$ bez svodjenja na kanonski oblik i “pomeranja”:

Naš grafik će u zavisnosti od a (broja uz x^2) i diskriminante $D = b^2 - 4ac$ biti jedan od sledećih 6 grafika:

1) $a > 0, D > 0$



→ F-ja seče x-osu u x_1 i x_2

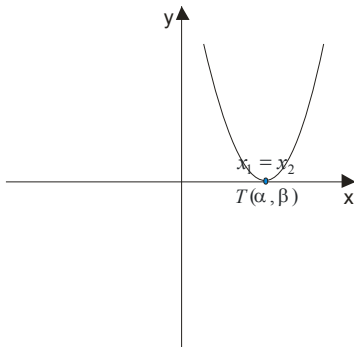
→ $y < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$ i $y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

→ F-ja ima minimum u temenu $T(\alpha, \beta)$

→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$

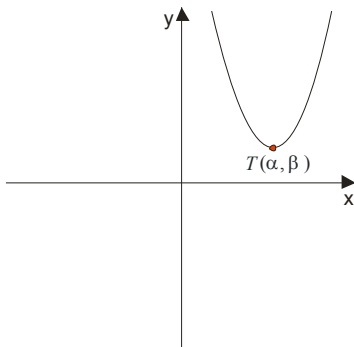
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

2) $a > 0, D = 0$



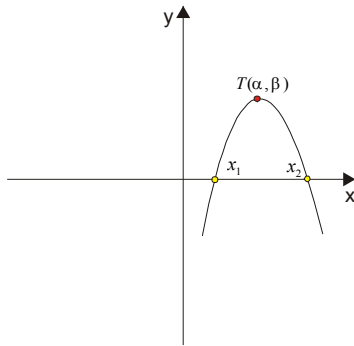
- F-ja je definisana za $\forall x \in R$
- F-ja seče x-osu u $x_1 = x_2$
- $y \geq 0, \forall x \in R$
- F-ja ima minimum u $T(\alpha, 0)$
- F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
- F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

3) $a > 0, D < 0$



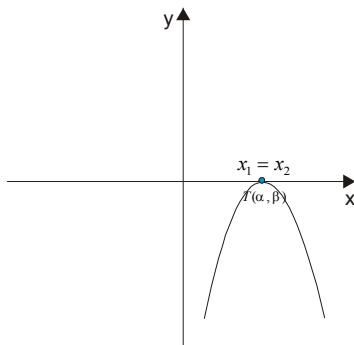
- F-ja je definisana za $\forall x \in R$
- F-ja ne seče x- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano-kompleksni brojevi).
- $y > 0, za \forall x \in R$
- F-ja ima minimum u $T(\alpha, \beta)$
- F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
- F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

4) $a < 0, D > 0$



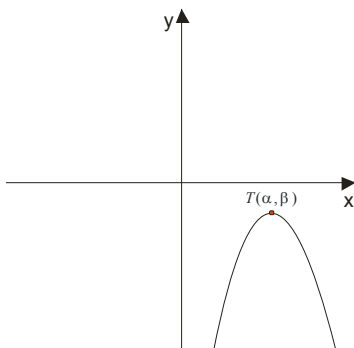
- F-ja je definisana $\forall x \in R$
- F-ja seče x- osu u x_1, x_2
- $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
- $y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$
- F-ja ima maksimum u $T(\alpha, \beta)$
- F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
- F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

5) $a < 0, D = 0$



- F-ja je definisana $\forall x \in R$
- F-ja seče x- osu u $x_1 = x_2$
- $y \leq 0, \forall x \in R$
- F-ja ima maximum u $T(\alpha, 0)$
- F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
- F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

6) $a < 0, D < 0$




- F-ja je definisana $\forall x \in R$
- F-ja ne seče x- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano-kompleksni brojevi)
- $y < 0$, za $\forall x \in R$
- F-ja ima maximum u $T(\alpha, \beta)$
- F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
- F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$


Postupak

- 1) Najpre odredimo a, b, c i nadjemo diskriminantu $D = b^2 - 4ac$
- 2) Tražimo $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (ako ima)
 - $D > 0, x_1 \neq x_2$
 - $D = 0, x_1 = x_2$
 - $D < 0$, nema x_1, x_2
- 3) U zavisnost od znaka broja a zaključujemo da li je parabola okrenuta otvorom nagore ili na dole, tj:

$D > 0 \rightarrow$ smeje se



$D < 0 \rightarrow$ mršti se


- 4) Parabola uvek seče y-osu u tački $(0, c)$

5) Nadjemo teme $T(\alpha, \beta)$ $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = -\frac{D}{4a}$

$T(\alpha, \beta)$ je max ako je $a < 0$

$T(\alpha, \beta)$ je min ako je $a > 0$

6) Konstruišemo grafik

Primer 1. Nacrtaj grafik funkcije

$$y = x^2 - 6x + 5$$

(ovo je ista funkcija koju smo crtali svodjenjem na kanonski oblik i pomerili duž x i y ose, pa da vidimo koji će nam postupak biti jasniji)

1)

$$a = 1 \quad D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$b = -6$$

$$c = 5$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 1$$

3)

$$a = 1 > 0 \Rightarrow \text{okrenuta otvorom na gore (smeje se)}$$

4)

y-osu seče u tački (0,5)

5)

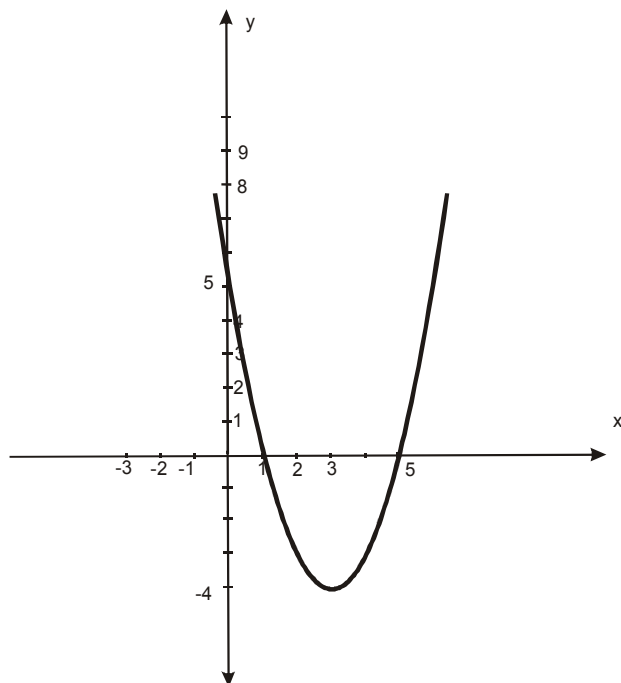
$$T(\alpha, \beta)$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$$

$$T(3, -4) \rightarrow \min$$

6) Grafik:



sami odlučite koji način konstrukcije grafika vam je “lakši”

Primer 2. Nacrtati grafik funkcije $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$

1)

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$c = 6$$

$$D = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = \frac{1}{4} + 12 = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}}{-1} \rightarrow x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{-1} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 4$$

3)

$$a = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{okrenuta otvorom na dole (mršti se)}$$

4)

preseka sa y-osom je u tački (0,6)

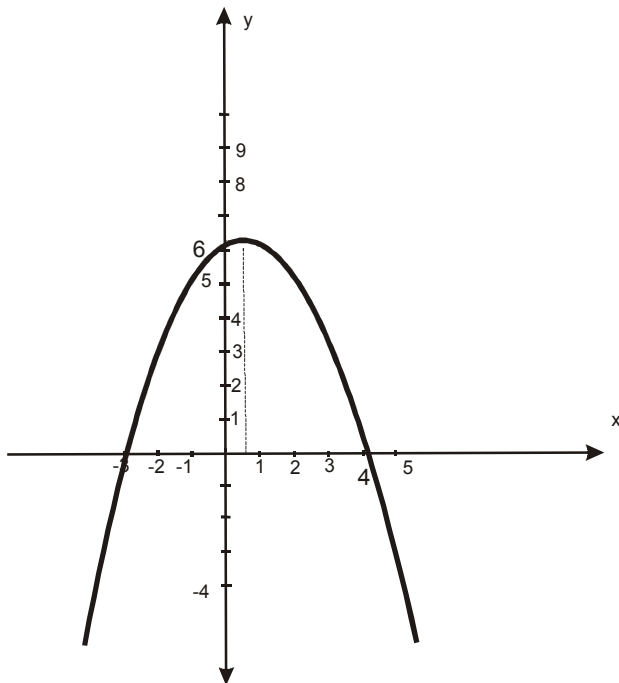
5)

$$T(\alpha, \beta)$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{\frac{49}{4}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = +\frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8}\right)$$



Primer 3. Skicirati grafik funkcije:

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

Rešenje:

Pošto $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, odavde ćemo imati 2 grafika, jedna za $x \geq 0$ i jedan za $x < 0$.

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

$$\text{za } x \geq 0 \text{ je } y = x^2 - 4x + 3$$

1)

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

3)

$$a = 1 > 0 \Rightarrow \text{smeje se}$$

4)

presek sa y-osom je u (0,3)

5)

$$T(\alpha, \beta)$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$

$$T(2, -1)$$

za $x < 0$ grafik $y = x^2 - 4|x| + 3$ je

$$y = x^2 + 4x + 3$$

1)

$$a = 1, b = 4, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -3$$

3)

$a = 1 \Rightarrow$ smeje se

4)

presek sa $-y$ -osom je u 3

5)

$$T(\alpha, \beta)$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$

$$T(-2, -1)$$

Pogledajmo sad kako izgledaju ova dva grafika posebno a kako zajedno daju grafik koji

nam treba: $y = x^2 - 4|x| + 3$

