IZVODI ZADACI (IV deo)

LOGARITAMSKI IZVOD

Logaritamskim izvodom funkcije $y = f(x)$, gde je $y>0$ i $y \neq 1$, nazivamo izvod logaritma te funkcije, to jest:

$$(\ln y)` = \frac{y`}{y} = \frac{f`(x)}{f(x)}$$

Primer 1.

Nadji izvod funkcije $y = x^x$

Rešenje: Najpre ćemo logaritmovati ovu jednakost sa ln (to beše prirodni logaritam za osnovu e) a zatim ćemo primeniti jedno od pravila vezana za logaritme: $\ln A^n = n \ln A$

$y = x^x$ logaritmujemo

$\ln y = \ln x^x$ ovo x u izložiocu ide ispred logaritma...

$\ln y = x \ln x$ sada diferenciramo (pazi, na desnoj strani je izvod proizvoda)

$$\frac{y`}{y} = x` \ln x + (\ln x)` x$$

$$\frac{y`}{y} = \ln x + \frac{1}{x} x$$ skratimo x

$$\frac{y`}{y} = \ln x + 1$$ sada sve pomnožimo sa y

$y` = y(\ln x + 1)$ ovde zamenimo y sa x^x

$y` = x^x(\ln x + 1)$ je konačno rešenje!

Primer 2.

Nadji izvod funkcije $y = (\cos x)^{\sin x}$

Postupak je isti: logaritmujemo, pa pravilo za log., pa sredjujemo…

Rešenje:

$y = (\cos x)^{\sin x}$

$\ln y = \ln (\cos x)^{\sin x}$ prebacimo sinx ispred logaritma…

$\ln y = \sin x \ln(\cos x)$ sada diferenciramo

$\frac{y`}{y} = (\sin x)` \ln(\cos x) + [\ln(\cos x)]` \sin x$ Pazi ln(cosx) je izvod složene funkcije

$\frac{y`}{y} = \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x}(\cos x)` \sin x$

$\frac{y`}{y} = \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \sin x$ prisredimo malo …

$\frac{y`}{y} = \cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ sve pomnožimo sa y

$y` = y\,[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}]$ zamenimo $y = (\cos x)^{\sin x}$

$y` = (\cos x)^{\sin x}[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}]$ je konačno rešenje

Primer 3.

Nadji izvod $y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$

Rešenje:

$y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$ logaritmujemo

lny = ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$

lny = sinx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ diferenciramo, pazimo jer na desnoj strani je izvod proizvoda a ima i složena funkcija...

$\frac{y`}{y}$ = (sinx)`ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ + [ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$]` sinx

$\frac{y`}{y}$ = cosx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ + $\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}(\frac{\ln x}{x})`$ sinx pazi $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ mora kao izvod količnika

$\frac{y`}{y}$ = cosx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ + $\frac{x}{\ln x}\,\frac{(\frac{1}{x}x - \ln x)}{x^2}$ sinx

$\frac{y`}{y}$ = cosx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ + $\frac{x}{\ln x}\,\frac{(1 - \ln x)}{x^2}$sinx skratimo po jedno x i sredimo…

$\frac{y`}{y}$ = cosx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ +$\frac{(1 - \ln x)}{x \ln x}$sinx sve pomnožimo sa y

y` = y [cosx ln$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ +$\frac{(1 - \ln x)}{x \ln x}$sinx] zamenimo $y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$

y` = $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$ **[cosx ln**$\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ +$\frac{(1 - \ln x)}{x \ln x}$**sinx]** **kraj zadatka**

IZVOD FUNKCIJE DATE U PARAMETARSKOM OBLIKU

Ako u funkciji y=f(x) promenljive x i y zavise od parametra t (x=x(t) i y=y(t)) , prvi izvod funkcije y=f(x) se

računa po formuli :

$$y_x^` = \frac{y_t^`}{x_t^`}$$

Primer 1.

Izračunati prvi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku: $x = 2t - t^2$ i $y = 4t - t^3$

Rešenje:

$\mathbf{x = 2t - t^2}$ odavde je $x`_t = 2 - 2t$

$\mathbf{y = 4t - t^3}$ odavde je $y`_t = 4 - 3t^2$

Sada $x`_t$ i $y`_t$ ubacimo u formulu:

$$y_x^` = \frac{y_t^`}{x_t^`} = \frac{2-2t}{4-3t^2}$$ i evo rešenja!

Primer 2.

Izračunati prvi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku: x = r cost y = r sint

Rešenje: (pazimo jer r je kao konstanta pošto radimo po t)

x = r cost $x`_t$ = - r sin t

y = r sint $y`_t$ = r cost

$$y_x^` = \frac{y_t^`}{x_t^`} = \frac{-r\cos t}{r\sin t} = \text{skratimo r} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$ konačno rešenje

Primer 3.

Izračunati prvi izvod funkcije: x = cost +t sint i y = sint – t cost

Rešenje:

x = cost +t sint odavde je $x`_t$ = - sint + [ t`sint + (sint)`t] = - sint + sint + t cost = t cost

y = sint – t cost pa je $y`_t$ = cost – [t` cost + (cost)` t] = cost – cost + t sint = t sint

$$y_x^{`} = \frac{y_t^{`}}{x_t^{`}} = \frac{t\sin t}{t\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \text{tg } t$$

IZVOD IMPLICITNO ZADATE FUNKCIJE

Kada je funkcija y = f(x) zadata u implicitnom obliku F(x,y) = 0, njen prvi izvod dobijamo iz relacije:

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$$

Primer 1.

Izračunati prvi izvod funkcije: $x^3 - 2y - y^2 = 0$

Rešenje:

Obeležimo sa $F(x,y) = x^3 - 2y - y^2$

Šta je ovde štos?

Od članova sa x-som tražimo normalno izvode, a kod onih gde se javlja i y (ipsilon) nadjemo izvod i dodamo

još y`. Tako da u našem primeru od $x^3$ izvod je $3x^2$, od y izvod je 1y` a od y^2 je izvod 2yy`. Dakle:

$F(x,y) = x^3 - 2y - y^2$

$\frac{d}{dx}F(x,y) = 3x^2 - 2y` - 2yy`$ pa sad ovo izjednačimo sa 0

$3x^2 - 2y` - 2yy` = 0$ odavde sada izrazimo y` i to je to .

$3x^2 = 2y` + 2yy`$

$3x^2 = 2y`(1+y)$ pa je **y`=** $\frac{3x^2}{2(1+y)}$ **konačno rešenje**

Primer 2.

Izračunati prvi izvod funkcije: $\mathbf{x^2 + xy + y^2 + 6 = 0}$

Rešenje:

$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 6$

Pazimo : xy mora kao izvod proizvoda !

$\frac{d}{dx}F(x,y) = 2x + y + xy` + 2yy`$

$2x + y + xy` + 2yy` = 0$ odavde moramo da izrazimo y`

$xy` + 2yy` = - 2x – y$

$y`(x + 2y) = -2x – y$ pa je $y` = \frac{-2x-y}{x+2y}$ **konačno rešenje**

Primer 3.

Izračunati prvi izvod funkcije: $\mathbf{e^{xy} = x^3 - y^3}$

Rešenje:

Možemo odmah diferencirati , a možemo prvo oformiti funkciju F(x,y), kako više volite!

Mi ćemo odmah diferencirati :

$e^{xy} = x^3 – y^3$

$e^{xy}(xy)` = 3x^2 – 3y^2y`$

$e^{xy}(y + xy`) = 3x^2 – 3y^2y`$

$e^{xy}y + e^{xy} xy` = 3x^2 – 3y^2y`$ sada da izrazimo y`

$e^{xy} xy` + 3y^2y` = 3x^2 - e^{xy}y$

$y`(e^{xy} x + 3y^2) = 3x^2 - e^{xy}y$ pa je odavde

$\mathbf{y`} = \frac{3x^2 - e^{xy}y}{e^{xy}x + 3y^2}$ **konačno rešenje**

Primer 4.

Izračunati prvi izvod funkcije: $\mathbf{x^y - y^x = 0}$

Ovde je malo teža situacija, jer moramo da logaritmujemo funkciju pa tek onda da tražimo izvod.

$x^y = y^x$ logaritmujemo

$\ln x^y = \ln y^x$ izložioce prebacimo ispred ln...

$y \ln x = x \ln y$ sada izvod , ali kao izvod proizvoda!

$$y`\ln x + y\frac{1}{x} = \ln y + \frac{1}{y}y`x$$

$$y`\ln x - \frac{x}{y}y` = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$y`(\ln x - \frac{x}{y}) = \ln y - \frac{y}{x}$$ i izrazimo y\`

$$y` = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$ **konačno rešenje**

<u>IZVOD INVERZNE FUNKCIJE</u>

Neka funkcija f ima prvi izvod različit od 0 na nekom intervalu i neka je g njena inverzna funkcija . Tada i g ima izvod i pri tome važi:

$$g`(x) = \frac{1}{f`(g(x))}$$

Često se ova formula zapisuje u obliku :

$$y`_x = \frac{1}{x`_y}$$ a može i $x`_y y`_x = 1$

Primer 1.

Ako je y = arcsin x , -1 ≤ x ≤ 1, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ **, da nadjemo izvod od y !**

Pošto je y = arcsin x , tada je x = siny , primenimo $y_x^` = \frac{1}{x_y^`}$ i dobijamo:

$$(\arcsin x)^` = \frac{1}{(\sin y)^`} = \frac{1}{\cos y} = \{\text{sad iskoristimo da je } \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \text{ to jest } \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \{\text{ sad vratimo da je } \sin y = x \} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Znači, dobili smo da je $(\arcsin x)^` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Primer 2.

Ako je y = arctg x i $-\infty < x < \infty$ **i** $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ **da nadjemo izvod od y !**

Kako je y = arctg x to je inverzna funkcija x = tg y , pa primenimo $y_x^` = \frac{1}{x_y^`}$:

$$(\mathrm{arctg}x)^` = \frac{1}{(tgy)^`} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \{\text{kako je } \sin^2 y + \cos^2 y = 1\}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} \quad \text{a kako je } tgy = x$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

Dakle: $(\mathrm{arctg}x)^` = \frac{1}{1+x^2}$

Primer 3.

Ako je $y = \log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$ i $-\infty < y < \infty$, da nadjemo izvod.

Inverzna funkcija za $y = \log_a x$ je $x = a^y$, pa je po formuli $y_x^` = \frac{1}{x_y^`}$:

$(\log_a x)` = \frac{1}{(a^y)`}$ = znamo da je izvod od $a^y = a^y \ln a$ =

$= \frac{1}{a^y \ln a}$ = i sad samo zamenimo da je $x = a^y$

$= \frac{1}{x \ln a}$

Dakle : $(\log_a x)` = \frac{1}{x \ln a}$