GRAFOVI

Ljubo Nedović

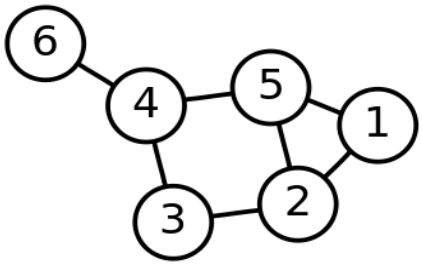
21. februar 2013

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi

Iz Vikipedije, slobodne enciklopedije.

Teorija grafova je oblast matematike, veoma zastupljena i u informatici, čija je oblast istraživanje osobina grafova. Neformalno govoreći, grafovi su sastavljeni od tačaka, odnosno čvorova (vrhova), i linija među njima, odnosno grana. Veoma je česta upotreba grafova za opis modela ili struktura podataka. Struktura jedne veb prezentacije se može predstaviti slikovito upotrebom grafa. Čvorovi tog grafa su pojedine stranice a grane grafa su veze kojima se može sa jedne stranice prelaziti na drugu. Proučavanje algoritama koji rešavaju probleme upotrebom grafova predstavlja veoma značajan deo informatičke nauke. Mreže imaju mnogo primena u proučavanju praktičnih aspekata teorije grafova i to se zove analiza mreža. Analiza mreža je posebno značajna za probleme modeliranja i analiziranje mrežnog saobraćaja, recimo interneta.



Graf je apstraktni matematički objekat, a crtež koji se sastoji od tačaka i linija je samo geometrijska predstava grafa. Međutim, uobičajeno je da se takva slika naziva grafom. Pa pošto je graf sastavljen iz tačaka i linija, koje spajaju po dve tačke, onda je odatle moguće izvesti i formalnu definiciju grafa. Ovakva uopštena definicija omogućuje da graf primenjujemo ne samo u matematici, već i u informatici, elektrotehnici i tehnici uopšte, a takođe i u hemiji, lingvistici, ekonomiji i mnogim drugim oblastima.

Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija u X. Uređeni par $G = (X, \rho)$ naziva se ***graf***. Elementi skupa X su ***čvorovi grafa***, a elementi skupa ρ ***grane grafa***. Sledi formalna definicija (neorijentisanog) grafa, i orijentisanog grafa.

Definicija 1 *Neka je X neprazan skup i $\rho \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in X\}$. Uređeni par $G = (X, \rho)$ naziva se* ***graf****. Elementi skupa X su* ***čvorovi grafa****, a elementi skupa ρ* ***grane grafa****.*

Definicija 2 *Neka je X neprazan skup i $\rho \subseteq \{(u,v) \mid u,v \in X\}$. Uređeni par $G = (X, \rho)$ naziva se* ***orijentisani graf****. Elementi skupa X su* ***čvorovi grafa****, a elementi skupa ρ* ***grane grafa****.*

Sa $G(v)$ ćemo označavati ***skup suseda*** čvora $v \in X$.

Pojam grafa je moguće generalisati ako prihvatimo da je moguće da postoji više od jedne grane iste orijentacije, odnosno da mogu postojati i višestruke petlje. Takav graf se onda zove ***multigraf***. Običan graf je onda poseban slučaj multigrafa. Sledi definicija takvog multigrafa.

Definicija 3 *Neka je X neprazan skup i U jedna kombinacija sa ponavljanjem skupa X^2. Uređeni par $G = (X,U)$ naziva se* ***multigraf****.*

U svakom slučaju, graf je zadat ako su zadata dva skupa, skup čvorova i skup grana. Slede definicije osnovnih pojmova u teoriji grafova.

Definicija 4 *Graf koji ima konačan broj čvorova se zove* ***konačan graf****. Analogno, graf sa beskonačnim brojem čvorova se zove* ***beskonačan graf****.*

Ako je svejedno da li je grana grafa AB isto što i BA i to važi za sve grane grafa, onda je ρ simetrična relacija, a graf je ***simetričan*** *ili* ***neorijentisan****. Kod takvih grafova se izostavljaju strelice na crtežu.*

Ako sve grane na grafu imaju strelice, odnosno orijentisane su, tada je ceo graf ***orijentisan*** *ili* ***antisimetričan****.*

Definicija 5 ***Put dužine*** *k ($k \geq 1$) grafa $G = (V,E)$ je niz grana oblika*

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, k)$$

kod orijentisanih grafova, odnosno

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, k\}$$

kod neorijentisanih grafova. Za ovaj put kažemo da počinje u v_0, a završava se u v_k. Čvorovi v_0 i v_k su krajnji čvorovi tog puta.

Put često označavamo i sa $v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_k$.

Definicija 6 ***Elementarni put*** *(ili* ***prost put*** *je put koji kroz svaki svoj čvor prolazi tačno, tj. najviše jednom.*

Zatvoren put *(ili* ***kružni put*** *je put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje.*

Kontura *(ili* ***ciklus*** *dužine n je elementarni kružni put, i označavaćemo je sa C_n.*

Definicija 7 ***Povezan graf*** *je takav neorijentisani graf kod koga su bilo koja dva čvora povezana putem. Ako postoje dva čvora koja se ne mogu povezati, graf je* ***nepovezan****.*

Grana grafa koja polazi iz jednog čvora i završava u istom čvoru se zove ***petlja****.*

Nepovezan graf se sastoji od bar dva nepovezana dela. Takvi delovi se zovu ***komponente povezanosti*** *grafa.*

Ako se udaljavanjem jednog čvora iz grafa on raspada, odnosno broj komponenata povezanosti se povećava, tada je taj čvor ***artikulacioni čvor****.*

Ako se udaljavanjem jedne grane graf raspada, grana se zove ***most grafa****.*

Stepen čvora *a grafa je broj grana grafa koji imaju kraj u tom čvoru, i označava se sa $\deg(a)$. Ako grana spaja čvor sa samim sobom, onda se ona računa dva puta.*

Čvor stepena 0 naziva ***izolovan čvor****, a čvor stepena 1 naziva* ***list****.*

U usmerenom grafu, svaka grana ima dva različita kraja, početak, i kraj (crta se kao strelica). Svaki kraj se broji na različit način. Broj grana koje ulaze u neki čvor je ulazni stepen i označava se sa $\deg^+(v)$, a broj grana koje iz čvora izlaze je izlazni stepen i označava se sa $\deg^-(v)$.

Totalni stepen grafa *je zbir svih stepeni grafa, i jednak je dvostrukom broju grana. Nije moguće nacrtati graf sa neparnim stepenom.*

Grana koja spaja čvor sa stepenom jedan je **viseća grana**.

Dve (ili više) grane grafa su **paralelne** *ako spajaju dva ista temena. Grana može da spaja vrh sa samim sobom, i tada se naziva* **petljom**. *Graf koji nema petlje niti paralelne grane se naziva* **prostim grafom**. *Graf je* **prazan** *ako nema nijednu granu, a* **nulti graf** *nema nijedan vrh.*

Ako je stepen svakog čvora isti, onda je graf **regularan**, *pri čemu kažemo da je on* k**-regularan** *ako svi čvorovi imaju stepen* k, *i da je on stepena* k.

Kompletan graf *je prost graf, kod koga su svaka dva čvora spojena granom. Ako ima konačno mnogo* n *čvorova, označavaćemo ga sa* K_n, *a ako ima beskonačno mnogo čvorova, označavaćemo ga sa* K_∞.

Formula sume stepena tvrdi da u grafu $G = (V,E)$ važi $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, jer je svaka grana susedna sa dva čvora. Formula implicira da u svakom grafu broj čvorova neparnog stepena mora biti paran. Kompetan graf K_n ima $\binom{n}{2}$ grana.

Definicija 8 ***Planarni grafovi*** *su oni grafovi koji se mogu nacrtati u ravni tako da im se grane ne seku. Preciznije, zahteva se da je graf moguće predstaviti u ravni tako da zajednička tačka dve grane može biti samo čvor koji predstavlja zajedničku krajnju tačku tih grana. Ako je planaran graf predstavljen na opisan način u ravni, on deli ravan na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast.*

Svaka konačna oblast se naziva **okce** *ili* **ćelija**. *Ako je graf povezan i ne sadrži artikulacione čvorove, granična linija okca predstavlja* **konturu grafa**. *Ponekad se pod okcem podrazumeva, umesto oblasti, upravo ova granična kontura.*

Pojam grafa može biti proširen dodavanjem osobine težine svakoj grani. Ovakvi grafovi se zovu ***težinski grafovi*** i oni su zgodni za predstavljanje nekih problema, na primer mreže puteva gde se težina odnosi na dužinu puta između dva čvora. Težinski graf koji je usmeren zove se ***mreža***.

Definicija 9 *Graf* $G' = (V', E')$ *je* **podgraf** *grafa* $G = (V,E)$ *ako je skup njegovih čvorova* V' *podskup skupa čvorova* V *grafa* G, *a skup njegovih grana* E' *je podskup skupa grana* E *grafa* G. *Ako je ovim grafovima skup čvorova jednak, onda se graf* G' *naziva* **razapinjujućim grafom**, *ili* **skeletom**.

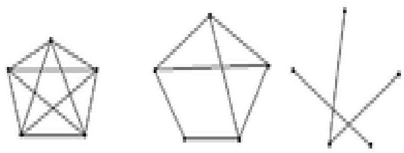
Definicija 10 ***Komponenta povezanosti*** *grafa* G *je neki njegov maksimalni povezani podgraf.*

Definicija 11 *Čvor* v *grafa* G *je* **artikulacioni čvor** *ako se njegovim uklanjanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa* G.

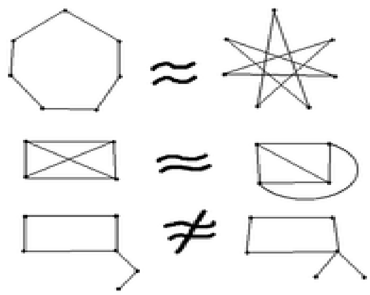
Definicija 12 *Grana* e *grafa* G *je* **most** *ako se njenim uklanjanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa* G.

Definicija 13 *Dva grafa G_1 i G_2 su* **izomorfna** *ako i samo ako postoji injektivna $1-1$ i sirjektivna na funkcija vrhova i grana, tako da se očuvava susednost svih vrhova, tj. da su veze između vrhova načinjene na analogan način. Pišemo $G_1 \approx G_2$.*

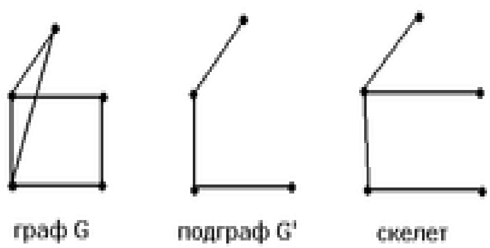
Izomorfizam održava susednost čvorova. Izomorfni grafovi su u stvari isti grafovi, ali različito nacrtani. Obeležavanje čvorova nema značaja za strukturu grafa, tako da se često i ne obeležavaju. Izomorfni grafovi moraju imati isti broj grana, isti broj čvorova, cikluse istih dužina, iste stepene čvorova. Ispitivanje da li su dva grafa izomorfna je složeno pitanje i do danas nemamo egzaktan algoritam za rešavanje ovog problema. Kompletan graf, prost graf, i njegov komplement:



Izomorfni i neizomorfni grafovi:



Podgraf i skelet:



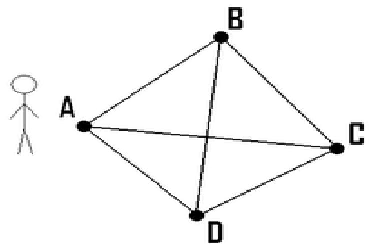
Izomorfni grafovi su od velikog značaja u elektronici, pri konstruisanju štampanih kola, gde grane grafa (strujni vodovi) ne smeju da se seku osim u čvorovima. Zato je bitno da se pronađe izomorfan graf željenom grafu, ali takav da mu se grane ne seku.

Prvi problem i njegovo rešenje izneseni na način koji je drugačiji u odnosu na prethodne i može se smatrati pretečom teorije grafova jeste rad Leonarda Ojlera pod nazivom Sedam mostova Kenigsberga, objavljen 1736. Ovo je prvi rezultat iz oblasti topologije u geometriji, što će reći ne zavisi od neke mere odnosno veličine. Ovo prikazuje duboke veze između teorije grafova i topologije. Gustav Kirhof je 1845. godine objavio nešto što je kasnije nazvano Kirhofov zakon, a odnosilo se na problem računa napona i struje u električnom kolu.

Frensis Gutri je 1852. godine je izložio problem četiri boje koji postavlja pitanje da li je moguće obojiti zemlje na geografskoj karti sa samo četiri boje, a da se ne pojave dve susedne zemlje obojene istom bojom. Ovaj problem su rešili tek 1976. godine Kenet Apel i Volfgang Heken, ali se postavljanje ovog problema smatra rođenjem teorije grafova. Tokom pokušaja rešavanja ovog problema otkrivene su mnoge teoreme i postavljeni mnogi teoretski pojmovi i koncepti.

Primer 1 (Problem trgovačkog putnika) *Problem trgovačkog putnika je problem iz oblasti diskretne ili kombinatorne optimizacije. Ovaj problem ilustruje klasu problema iz oblasti teorije računske složenosti koji su teški za rešavanje.*

Postavka problema: Ako je dat određen broj gradova, cene putovanja od bilo kog grada do bilo kog grada, koja je najjeftinija ruta koja obilazi svaki grad tačno jednom, i vraća se u početni grad? Ekvivalentan problem izražen u terminima teorije grafova bi glasio: dat je kompletan težinski graf (čiji čvorovi predstavljaju gradove, grane predstavljaju puteve, a težine predstavljaju cenu putovanja, ili dužinu puta) - naći Hamiltonov ciklus najmanje težine. Može se pokazati da zahtev da se vrati u početni grad ne menja računsku kompleksnost ovog problema. Rešenje ovog problema je od velikog praktičnog značaja, ne samo u pitanju saobraćaja. Dobar primer u kome je bitno na efikasan način rešiti problem trgovačkog putnika bi mogla da bude organizacija teretne luke: ako se u luci u svakom trenutku nalazi više hiljada kontejnera, naslaganih jedni na druge, i svakodnevno se stotine kontejnera iskrcavaju sa brodova, ili tovare na šlepere, koji je optimalan redosled kretanja kranova za utovar i istovar, i gde postaviti koji kontejner.



Računska kompleksnost: Najdirektnije rešenje bi bilo da se isprobaju sve permutacije, i da se vidi koja je najjeftinija (korišćenje metoda grube sile), ali kako je broj permutacija za n gradova $n!$, ovakvo rešenje vrlo brzo postaje nepraktično. Korišćenjem tehnika dinamičkog programiranja, ovaj problem se može rešiti u vremenu $O(2^n)$. Mada je ovo vreme eksponencijalno, ipak je mnogo jeftinije od $O(n!)$ (vidi veliko O).

U slučaju da se radi o euklidskom problemu trgovačkog putnika, postoje razni vrlo brzi približni algoritmi, koji pronalaze puteve čija dužina je sigurno manja od dvostruke dužine najkraćeg mogućeg puta. Euklidski problem trgovačkog putnika je onaj kod koga između gradova važi nejednakost trougla - drugim rečima, između svaka dva grada najkraći mogući put je upravo direktan put (put $A-B-V$ ne može biti kraći od puta $A-V$).

Izbori reprezentacije

Grafovi se u računarstvu predstavljaju na razne načine. Najčešći su ***lista povezanosti*** i ***matrica povezanosti***. Lista povezanosti je implementirana tako što predstavlja svaki čvor kao strukturu podataka koja sadrži listu svih susednih čvorova. Matrica povezanosti je matrica, čije vrste i kolone predstavljaju početne i krajnje čvorove, a dati član matrice predstavlja indikaciju da li između odgovarajuća dva čvora postoji grana (recimo 0 ako ne postoji, a 1 ako postoji). Liste povezanosti se češće koriste kod retkih grafova, a u suprotnom su matrice povezanosti dobar izbor. Takođe, za vrlo velike grafove koji imaju neku pravilnost što se tiče položaja grana, mogući izbor predstavljanja je simbolički graf. Ređe se za predstavljanje grafa koristi ***matrica incidencije***. Vrste ove matrice predstavljaju čvorove, a kolone predstavljaju grane. U svakoj koloni stoje jedinice na mestima koja odgovaraju čvorovima koje spaja odgovarajuća grana (a na ostalim mestima su nule).

Poređenje sa drugim strukturama podataka

Grafovske strukture podataka su ne-hijerarhijske, i stoga su pogodne za podatke gde su pojedinačni elementi povezani na kompleksne načine. Na primer, simulacija računarske mreže se može sprovesti pomoću grafa. Hijerarhijski skupovi podataka se mogu predstaviti binarnim ili nebinarnim stablom. Stabla se takođe mogu posmatrati i kao grafovi.

Operacije

Grafovski algoritmi su od velikog značaja u računarstvu. Tipične operacije povezane sa grafovima su nalaženje puta između dva čvora, za šta se na primer koriste pretraga grafa u dubinu i pretraga grafa u širinu, i nalaženje najkraćeg puta od jednog do drugog čvora, za šta se može koristiti Dijkstra algoritam.

Teorema 1 *U neorijentisanom grafu $G = (X,E)$ bez petlji sa barem dva čvora, postoje bar dva čvora istog stepena.*

Teorema 2 *Neka je $G = (X,E)$ neorijentisan graf bez petlji sa $n \geq 2$ čvorova, dakle $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, i m grana. Zbir stepena svih čvora je jednak dvostrukom broju grana, tj. važi $G(v_1) + G(v_2) + \ldots + G(v_n) = 2m$.*

Teorema 3 *U neorijentisanom grafu $G = (X,E)$ bez petlji, broj čvorova neparnog stepena je paran.*

Definicija 14 ***Ojlerova kontura*** *grafa $G = (X,E)$ je kontura koja sadrži sve grane grafa G. Graf koji ima Ojlerovu konturu je* **Ojlerov graf***.* **Ojlerov put** *u grafu G je put koji sadrži sve grane grafa G. Graf koji ima Ojlerov put je* **poluojlerov graf***.*

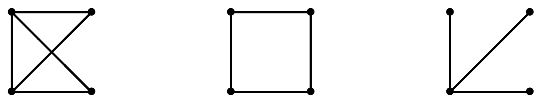
Ako je graf Ojlerov, moguće ga je nacrtati iz jednog poteza (bez dizanja olovke sa papira) tako da se kroz svaku granu prolazi tačno jednom - Ojlerov put. Ukoliko ima 0 čvorova neparnog stepena, tada crtanje počinje i završava se u istom (proizvoljnom) čvoru, a ako ima 2 čvora neparnog stepena, tada crtanje počinje u jednom od njih, a završava se u drugom.

Teorema 4 (Ojlerova teorema) *Povezan graf sa bar jednom granom je Ojlerov graf ako i samo ako su mu svi čvorovi parnog stepena.*

Teorema 5 *Povezan graf sa bar jednom granom je poluojlerov graf ako i samo ako sadrži* 0 *ili* 2 *čvora neparnog stepena.*

Teorema 6 *Graf ima Ojlerov put ako i samo ako je povezan i sadrži najviše* 2 *čvora neparanog stepena.*

Prva dva grafa na narednim slikama su Ojlerovi, dok treći to nije.



Ojlerovi putevi su važni za organizaciju poslova u velikom gradu. Na primer, za raznošenje pošte, naplate računa i slično. Poštar ce najracionalnije razneti poštu ako svaku ulicu obide tačno jedanput.

Definicija 15 ***Hamiltonova kontura*** *grafa $G = (X, E)$ je kontura koja sadrži sve čvorove grafa G. Graf koji ima Hamiltonovu konturu je* ***Hamiltonov graf****.* ***Hamiltonov put*** *u grafu G je elementaran put koji sadrži sve čvorove grafa G. Graf koji ima Hamiltonov put je* ***poluhamiltonov graf****.*

Primer 2

- *Kontura C_n je i Ojlerov i Hamiltonov graf.*
- *Kompletan graf K_4 nije Ojlerov, a jeste Hamiltonov graf.*
- *Bipartitni graf $K_{2,4}$ jeste Ojlerov, a nije Hamiltonov graf.*

Hamiltonova kontura se može formirati počev od bilo kog čvora, obilazeći svaki čvor tačno jedanput, što je kod kompletnog grafa moguće jer postoji grana između svaka dva čvora. Svaki kompletan graf K_n, za $n \geq 3$ ima Hamiltonovu konturu.

Definicija 16 ***Težinski graf*** *$G = (V, E, w)$ je uređena trojka gde je V skupova čvorova, E skup grana, a $w : E \to \mathbb{N}$ je težinska funkcija koja svakoj grani dodeljuje težinu. Težinski graf koji je usmeren zove se* ***mreža****.*

2 Bipartitni grafovi

Definicija 17 ***Bipartitni graf*** *(odnosno* ***bigraf****) je uređena trojka $G = (L, R, E)$ takva da je $L \cap R = \emptyset$, gde je $L \cup R$ skup čvorova pri čemu je $L \neq \emptyset$ i $R \neq \emptyset$, i gde je $E \subseteq \{\{l, r\} \mid l \in L \wedge r \in R\}$ je skup grana.*

Pri tome L nazivamo skupom levih, a R skupom desnih čvorova.

Definicija 18 *$G = (L, R, E)$ je bipartitni graf ako i samo ako ne sadrži ni jednu konturu neparne dužine.*

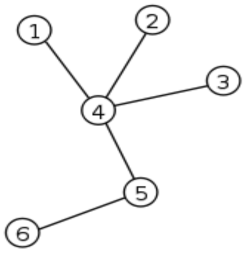
Definicija 19 *Svako stablo je bipartitan graf.*

Definicija 20 *Bipartitni graf $G = (L, R, E)$ je* **kompletan** *ako za sve $l \in L$ i $r \in R$ važi $\{l, r\} \in E$ (dakle, ako je svaki čvor skupa L povezan sa svakim čvorom skupa R). Ako skup L ima n, a skup R ima m čvorova, ovak bipartitni graf označavamo sa $K_{m,n}$.*

3 Stabla

Definicija 21 *U teoriji grafova,* **stablo** *je graf u kome su svaka dva čvora povezana tačno jednom stazom. Drugačije rečeno, svaki povezan graf bez* **ciklova** *je stablo.* **Šuma** *je disjunktna unija stabala.*

Stabla se izuzetno puno koriste u kao strukture podataka u računarstvu (kao binarna stabla pretrage, hipovi, i slično). Na slici vidimo stablo sa 6 čvorova i 5 grana, gde npr. jedinstvena prosta staza koja povezuje čvorove 2 i 6 je $2-4-5-6$.



Teorema 7 *Stablo je nepovezan prost graf G koji zadovoljava bilo koji od sledećih (ekvivalentnih) uslova:*

1. *G je povezan i nema prostih ciklova;*
2. *G nema prostih ciklova, a prost cikl se dobija ako se bilo bilo koja nova grana doda u G;*
3. *G je povezan, ali ako se bilo koja grana ukloni iz G, više neće biti povezan;*
4. *G je povezan i kompletan graf od tri čvora, K_3, nije minor od G;*
5. *bilo koja dva čvora u G su povezana jedinstvenom prostom stazom.*

Ako G ima konačno mnogo n čvorova, onda su gornji iskazi ekvivalentni sledećim uslovima:

1. *G je povezan i ima $n-1$ grana;*
2. *G nema prostih ciklova i ima $n-1$ grana.*

Teorema 8 ***Usmereno stablo*** *je usmeren graf koji bi bio stablo ako bi se smerovi grana ignorisali.*

Neki autori ograničavaju ovaj izraz na slučajeve kada su sve grane usmerene prema određenom čvoru ili od određenog čvora.

Teorema 9 *Stablo se naziva* **korenskim stablom** *ako se jedan čvor označi kao koren, u kom slučaju grane imaju prirodnu orijentaciju, prema ili od korena.*

Teorema 10 *Svako stablo je bipartitni graf.*

Teorema 11 *Svako stablo sa prebrojivo mnogo čvorova je planaran graf.*

Teorema 12 *Svako neprazno stablo ima bar jedan list, tj. čvor stepena* 1.

Ako je dato n označenih čvorova, postoji n^{n-2} različitih načina da se oni povežu u stablo. Prebrojavanje neoznačenih stabala je teži problem. Ne postoji zatvorena formula za broj $t(n)$ stabala sa n čvorova do na izomorfizam grafova. Ričard Oter je dokazao da je $t(n) \sim C\alpha^n n^{-5/2}$ kada $n \to \infty$, gde je $C \approx 0.53495$ i $\alpha \approx 2,95576$.

Pojam „stablo” se u programiranju koristi da označi strukturu podataka koja ima „razgranatu” strukturu, po uzoru na pojam stabla u teoriji grafova. Stablo se često koristi kao glavni oblik nekog spremišta podataka, zbog lakog pisanja odgovarajućeg koda kroz korišćenje rekurzije, brzog upisivanja podataka i brzog pristupa traženim podacima. Najčešće korišćeno stablo je stablo u kojem svaki čvor mora imati tačno dve grane, tj. binarno stablo.

U terminologiji stabla kao strukture podataka, koriste se slični pojmovi kao kod običnog stabla. Tako, čvor koji ne sadrži granu nijednog drugog čvora a koji posredno ili neposredno sadrži sve druge čvorove naziva se „korijen”. Čvorovi koji ne sadrže nijednu granu, tj. nalaze se na „vrhu” stabla, nazivaju se „listovima” Takođe, postoji terminologija „roditelj-dijete”, u kojoj se čvor A koji sadrži čvor B naziva roditeljem čvora B, dok se čvor B naziva detetom čvora A.

Stablo se u programiranju ostvaruje korišćenjem pokazivača da bi se usmerilo ka odgovarajućim granama. Naime, svaki čvor se konstruiše tako da poseduje mogućnost čuvanja jedne ili više adresa drugih čvorova, što omogućava „prelaženje” iz jednog čvora u drugi, tj. kretanje po stablu.

Budući da stablo može imati neograničen broj čvorova (uslovno govoreći, zbog ograničene količine memorije na računarskim uređajima), iterativno rešenje konstrukcije i korišćenja stabla najčešće nije dobro niti lako rešenje. Umjesto toga, pišu se funkcije koje se rekurzivno pozivaju dok jedna od instanci funkcije ne primi traženi čvor kao argument. Tada se izvrši željena radnja (vraćanje rezultata ili stvaranje novog čvora) i rekurzivni lanac se odmotava i završava. Slabost rekurzivnog rješenja leži u situacijama kada je stablo veliko, te dolazi do prenatrpavanja funkcijskog steka procesa što može dovesti do usporenosti ili naglog prekidanja cijelog programa.

Dok se binarno stablo u programiranju ostvaruje relativno jednostavno, korišćenjem tačno dva pokazivača, neograničen broj grana po čvoru se implementira na nešto složeniji način. Potrebno je u svakom čvoru čuvati neku strukturu podataka koja podržava neograničen broj pokazivača, što se najčešće čini koristeći liste ili obične nizove koji se proširuju po potrebi.

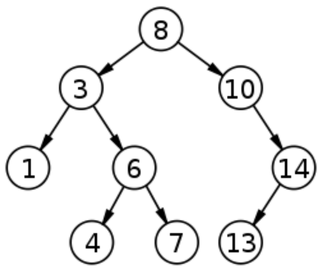
Binarno stablo se najčešće koristi za smeštaj podataka koji moraju biti u uređenom rasporedu, tj. sortirani, kako bi im se moglo brzo pristupati metodom binarne pretrage. Međutim, za smještaj bilo kakvih podataka čiji čvorovi mogu imati više od jednog deteta potrebno je višestruko stablo. Na primjer, jezik XML po samoj svojoj definiciji zahteva drvoliku strukturu podataka sa neograničenim brojem grana po jednom čvoru. Takođe, datotečni sistem kao drvolika struktura zahteva neograničen broj grana po jednom direktorijumu. U pojedinim implentacijama video igara, lavirinti se takođe implementiraju kao višestruka stabla, pri čemu je svako polje u lavirintu predstavljeno jednim čvorom u stablu, a polja na koja se može preći iz datog polja su predstavljena kao grane odgovarajućeg čvora. Obično rešavanje problema izlaza iz lavirinta se, međutim, najčešće ostvaruje upotrebom reda.

4 Binarna stabla

Binarno stablo (engleski „binary tree”) je u informatici struktura namenjena čuvanju podataka. Njene memorijske jedinice su organizovane po principu piramide. Tačnije, svaka memorijska jedinica (čvor) binarnog stabla može da pokazuje na još najviše dva elementa (njegova ***deca***), dok stablo ima samo jedan elemenat na koga ne pokazuje ni jedan drugi (***koren***). Od ovog elementa se može doći u bilo koji drugi elemenat stabla. Svaki elemenat stabla može biti i svestan koji elemenat pokazuje na njega (tj. ko mu je ***roditelj***).

Čvor stabla je jedna memorijska ćelija stabla. Ona može imati nula, jedan ili dva podčvora. Ista može da nosi dve različite vrednosti. ***Ključ*** je najčešće numerička vrednost, po kojoj se neki element raspoređuje u binarnom stablu. ***Vrednost*** je podatak koji treba zapamtiti. Može se desiti da su vrednost i ključ jedno te isto, tj. da se sortiranje binarnog stabla vrši po samoj vrednosti. ***Koren stabla*** je čvor stabla koji nije podčvor nijednog drugog čvora u stablu. ***List*** je čvor stabla koji nema ni jedan podčvor. ***Roditelj*** nekog čvora je čvor koji pokazuje na njega. ***Dete*** nekog čvora je čvor na koji neki drugi čvor pokazuje. ***Podstablo*** ili ***podgrana*** je skup svih čvorova stabla koji se nalaze levo ili desno od nekog od čvorova stabla.

Na sledećoj slici, čvorovi stabla su elementi prikazani krugovima. Upisani brojevi su vrednosti ključeva po kojima se elementi sortiraju. Čvor sa ključem 8 je koren stabla. Njegova deca su čvorovi sa ključevima 3 i 10. Roditelj čvorova sa vrednošću ključeva 3 i 10 je čvor sa ključem 8. Listovi stabla su čvorovi sa ključevima 1, 4, 7 i 13.



Iako sortirano, binarno stablo ne garantuje brzinu izvođenja operacija. Traženje elementa u stablu npr. može da varira od $O(\log n)$ u najboljem (kao kod binarne pretrage) do $O(n)$ u najgorem slučaju (kao kod linearne pretrage nesortiranog niza). Slično je i sa ostalim operacijama.

Pretraga

Pretraga počinje od korena stabla. Sledi jedan od algoritama.

1. Uporedi vrednost traženog ključa sa vrednošću ključa trenutno ispitivanog čvora.

2. Ukoliko je ključ veći, ispitati desno (levo) dete.
3. Ukoliko je ključ manji, ispitati levo (desno) dete.
4. Ukoliko je ključ jednak, trenutno ispitivani čvor je traženi čvor.
5. Ako dete ka kome treba da se nastavi pretraga ne postoji, onda tražena vrednost ključa na postoji u stablu.

Dodavanje novog elementa

Pretragom se ustanovljava da elementa koji treba dodati u stablu nema. Potom se na mestu deteta koje nije postojalo pravi novi element sa datim ključem i podacima.

Brisanje elementa

Brisanje elementa iz stabla je najsloženiji od ova tri procesa. U zavisnosti od toga koliko dece ima, deli se u tri slučaja:

1. ukoliko čvor za brisanje nema dece; treba obrisati čvor, a njegovo mesto kod roditelja treba da bude naznačeno kao prazno;
2. ukoliko čvor za brisanje ima jedno dete; čvor treba obrisati, a njegovo mesto kod roditelja zauzima njegovo dete;
3. ukoliko čvor za brisanje ima dvoje dece; čvor treba obrisati, a njegovo mesto i ulogu zauzima ili „najlevlji" čvor njegove desne podgrane, ili „najdesniji" čvor njegove leve podgrane; ovi čvorovi mogu imati jedno ili nijedno dete, a treba ih istim ovim algoritmom obrisati sa mesta na kome su bili pre nego što preuzmu novu ulogu u stablu.

5 Planarni grafovi

Definicija 22 ***Planaran graf*** *je graf koji se može nacrtati u ravni, a da mu se grane ne seku, sem u čvorovima.*

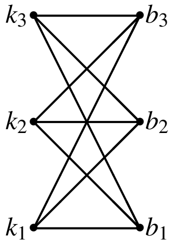
On deli ravan na na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu u beskonačnosti. Svaka zatvorena oblast se naziva ***ćelija***.

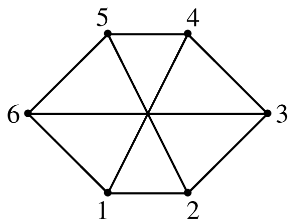
Teorema 13 (Ojlerova teorema) *Povezan planarni graf sa v čvorova i e grana deli ravan na $f = e - v + 2$ oblasti.*

Na primer, kompletni K_5 graf (kompletni pentagraf) i kompletni bipartitni $K_{3,3}$ graf (kompletni bitrigraf) nisu planarni grafovi.

Primer 3 *Postavka problema: da li je moguće spojiti* 3 *zgrade sa* 3 *bunara, a da se putevi ne ukrštaju, ako od svake kuće vodi po jedna staza do svakog bunara?*

Rešenje: Prva slika predstavlja problem, u pitanju je kompletan bipartitivni graf $K_{3,3}$ *sa* $v = 6$ *čvorova i* $e = 9$ *grana, ali grane ne smeju da mu se seku. Lako se dokazuje da naš graf ima izomorfan, prikazan na drugoj slici.*





Treba dokazati da taj graf nije planaran. Ako bi pretpostavili da jeste imali bi da je $f = e - v + 2 = 5$. *U svakom grafu, za ukupan broj grana imamo* $2e \geq gf$, *gde je* g *dužina najmanje oblasti (teorijski, kako oblast koju odreduje graf u ravni ima najmanje* 3 *grane, a svaka grana se dva puta pojavljuje kao granica oblasti, pa je* $2e \geq 3f$*). Kod našeg grafa svaka oblast je ograničena sa najmanje* 4 *grane, (nikoja* 3 *čvora ne obrazuju trougao, jer od* 3 *čvora* 2 *su kuće, a* 1 *bunar ili obrnuto, a kuće i bunari nisu međusobno vezani granama), pa je* $2e \geq 4f$, *odnosno* $18 \geq 20$ *što je nemoguće.*

6 Zadaci

1. Nacrtati sve neizomorfne grafove sa 4 čvora i bar jednom konturom dužine 3.

   Rešenje:

2. Nacrtati sve neizomorfne grafove sa 4 čvora i tačno jednom konturom dužine 3.

   Rešenje:

3. Dokazati da je kompletan K_4 graf planaran.

   Rešenje:

4. Koliko ima različitih jednostavnih grafova sa n obeleženih čvorova?

   Rešenje: Granu identifikujemo kao dvočlani potskup skupa vrhova. Svaki dvočlani potskup skupa vrhova ili jeste ili nije grana u grafu. Dakle, za svaki od $\binom{n}{2}$ potskupova imamo dve mogućnosti. Stoga je broj različitih grafova sa n čvorova jednak $2^{\binom{n}{2}}$.

5. Nacrtati sve neizomorfne povezane grafove sa 3 čvora.

   Rešenje:

6. Nacrtati sve neizomorfne povezane grafove sa 4 čvora.

   Rešenje:

7. Ispitati za koje $n \in \mathbb{N}$ je kontura C_n bipartitan graf.

   Rešenje: Kontura C_n je bipartitan graf ako i samo ako je n paran broj jer tada i samo tada možemo u jednu particiju stavljati svaki drugi čvor sa konture.

8. Nacrtati sva neizomorna binarna stabla sa 5 čvorova.

   Rešenje:

9. Koliko ima različitih označenih bipartitnih $B_{n,m}$ grafova kod kojih je svaki čvor prve particije koja sadrži n čvorova, stepena tačno 1?

   Rešenje: m^n.

10. Koliko ima različitih označenih bipartitnih $B_{n,m}$ grafova kod kojih je svaki čvor prve particije koja sadrži n čvorova, stepena najviše 1?

    Rešenje: $(m+1)^n$.

11. Koliko ima različitih označenih bipartitnih $B_{n,m}$ grafova kod kojih je svaki čvor prve particije koja sadrži n čvorova, stepena tačno 2?

    Rešenje: $\binom{m}{2}^n$.

12. Koliko ima različitih označenih bipartitnih $B_{n,m}$ grafova kod kojih je svaki čvor prve particije koja sadrži n čvorova, stepena tačno 3?

    Rešenje: $\binom{m}{3}^n$.

13. Koliko ima neizomorfnih grafova sa 4 čvora i 2 komponente povezanosti? Nacrtati ih.

    Rešenje:

14. *Rešenje:*

15. *Rešenje:*

16. *Rešenje:*

17. *Rešenje:*

18. *Rešenje:*

19. *Rešenje:*

20. *Rešenje:*

21. *Rešenje:*

22. *Rešenje:*

23. *Rešenje:*

24. *Rešenje:*