INTEGRALI ZADACI (VII – DEO)
Integracija nekih trigonometrijskih funkcija

Daćemo vam savete za četiri tipa integrala trigonometrijskih funkcija.

A) Integrali tipa $\int R(\sin x, \cos x)dx$

To su integrali u kojima *sinx* i *cosx* nemaju stepene. **Uvodimo smenu**: $\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$

Iz smene ćemo upotrebom formula iz trigonometrije dobiti:

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1\right)}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1\right)}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Kako je $tg\frac{x}{2}=t$ onda je $\frac{x}{2}=arctgt \rightarrow x=2arctgt \rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Da rezimiramo:

Kad uzimamo smenu $\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$ menjamo:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x&=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx&=\frac{2}{1+t^2}dt\end{aligned}}$$

Smena $tg\frac{x}{2}=t$ je *univerzalna trigonometrijska smena* i može se uvek upotrebljavati, al je lakše , zavisno od izgleda podintegralne funkcije koristiti i sledeću smenu:

B) Integrali tipa $\int R(tgx)dx$ i $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x)dx$

To su integrali koji mogu da se sredjivanjem svedu sve na tgx ili kod kojih se javljaju stepeni kod sinusa i kosinusa i proizvod $\sin x \cdot \cos x$.

Uvodimo smenu: $\boxed{tgx = t}$

Iz smene ćemo upotrebom formula iz trigonometrije dobiti:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \text{svuda dodamo } \cos^2 x = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \text{svuda dodamo } \cos^2 x = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{tg^2 x + 1} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{tgx}{tg^2 x + 1} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$tgx = t \to x = arctgt \to dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Da rezimiramo:

Kad uzimamo smenu $\boxed{tgx = t}$ menjamo:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2} \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}}$$

C) Integrali tipa $\int \sin^m x \cdot \cos^n xdx$

Razlikovaćemo dve situacije:

i) Ako su m i n celi brojevi

ii) Ako su m i n racionalni brojevi

U obe situacije uvodimo smenu $\boxed{\sin x = u}$ ili *cosx=u* ali se u situaciji *i)* kad su m i n **celi brojevi** integral svede na integraciju racionalne funkcije, a u situaciji *ii)* kad su m i n **racionalni brojevi** svede na integral diferencijalnog binoma.

D) Integrali tipa $\int \sin ax \cos bxdx; \int \sin ax \sin bxdx; \int \cos ax \cos bxdx;$

Najpre iskoristimo trigonometrijske formulice:

$$sinax\ sinbx = \frac{1}{2}[cos(a\text{-}b)x - cos(a\text{+}b)x]$$
$$sinax\ cosbx = \frac{1}{2}[sin(a\text{+}b)x + sin(a\text{-}b)x]$$
$$cosax\ cosbx = \frac{1}{2}[cos(a\text{+}b)x + cos(a\text{-}b)x]$$

A zatim ih rastavimo na dva integrala od kojih svaki rešavamo lakom smenom.

NEKI TRIKOVI:

Ako je u integralu izraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda je zgodno uzeti smenu ***x=asint*** jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a\sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2(\sin t)^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos \mathrm{t}$$

Ako je u integralu dat izraz $\sqrt{x^2 + a^2}$, onda je zgodno uzeti smenu ***x=a tgt*** jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{(atgt)^2 + a^2} = \sqrt{a^2tg^2t + a^2} = a\sqrt{tg^2t + 1} = a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1} = a\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = a\frac{1}{\cos t}$$

PRIMERI

$\boxed{\text{primer 1.}}$ $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Ovaj integral smo već rešavali u fajlu **Integrali zadaci I- deo** bez trigonometrijkih smena. Videćemo da je mnogo ***elegantnije*** iskoristiti smenu $\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$. Dakle: $\boxed{\begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array}}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$\boxed{\text{primer 2.}}$ $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = ?$

I ovde ćemo koristiti smenu $tg\frac{x}{2} = t$ jer *sinx* i *cosx* nemaju stepene.

Imamo gotove smene: $\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}$ koje menjamo u integralu:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{\frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}dt = 4\int \frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(1+t^2)}dt$$

Ovo je integral racionalne funkcije. Izvlačimo *na stranu* i radimo:

Pazite: oba izraza u imeniocu su nerazloživa...

$$\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(1+t^2)}=\frac{At+B}{t^2+3}+\frac{Ct+D}{1+t^2}.................................../\cdot(t^2+3)(1+t^2)$$

$$t^2-t+1=At+At^3+B+Bt^2+Ct^3+3Ct+Dt^2+3D$$

Neko piše i identički jednako umesto jednako…U suštini je po nama sve jedno al vi radite kako kaže vaš profesor…

$$t^2-t+1\equiv(A+C)t^3+(B+D)t^2+(A+3C)t+B+3D$$

Uporedjujemo :

$$A+C=0,\ B+D=1,\ A+3C=-1\ \text{ i }\ B+3D=1$$

Rešimo ovo sistemče (ukombinujemo 1. i 3. jednačinu, a 2. i 4.) i dobijamo:

$$A=1/2,\ B=1,\ C=-1/2,\ D=0$$

Vratimo se da vidimo kako će da ide razlaganje:

$$4\int\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(1+t^2)}dt=4\int\frac{\frac{1}{2}t+1}{t^2+3}dt+4\int\frac{\frac{-1}{2}t}{1+t^2}dt=2\int\frac{t+2}{t^2+3}dt-2\int\frac{t}{1+t^2}dt$$

Rešavanje ovih integrala smo detaljno objasnili u prethodnim fajlovima…

$$=\ln\frac{t^2+3}{1+t^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\boxed{\ln\frac{3+tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C}$$

$\boxed{\text{primer 3.}}$ $I=\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=?$

Često se integral u radu obeležava nekim slovom , najčešće sa *I, J …*

Razlog je da ga ne bi posle vazdan prepisivali, već samo upišemo *I, J …*

I ovaj integral ćemo rešiti prvom , univerzalnom smenom $tg\frac{x}{2}=t$.

$$
\begin{aligned}
&tg\frac{x}{2}=t\\
&dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\
&\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\
&\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

pa je $I=\int\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}}dt=\int\frac{dt}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}\cdot t}=\int\frac{1+t^2}{(t^2+3)t}dt$

Integracija racionalne funkcije, izdvojimo podintegralnu funkciju:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+t^2}{(t^2+3)t}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+3}=\frac{At^2+3A+Bt^2+Ct^2}{t(t^2+3)}\\
&1+t^2=A(t^2+3)+(Bt+C)t\\
&1+t^2=At^2+3A+Bt^2+Ct\\
&1+t^2=t^2(A+B)+Ct+3A
\end{aligned}
$$

$A+B=1,\quad C=0,\quad 3A=1$

$A=1/3,\quad B=2/3,\quad C=0$

$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{2}{3}\int\frac{t}{t^2+3}dt=$ za drugi integral smena $\left|\begin{matrix}t^2+3=u\\ tdt=\frac{1}{2}du\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}+c$

$$I=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{1}{3}\ln(t^2+3)+C=\boxed{\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3}\ln\left(tg^2\frac{x}{2}+3\right)+C}$$

$\boxed{\text{primer 4.}}$ $\quad I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = ?$

Kako ovde imamo stepene sinusa i kosinusa, uzećemo drugu smenu $\boxed{tgx = t}$ pa je:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ &\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ &\sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2} \\ &dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}}$$

$$I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{t}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{t^4+1}{\cancel{(1+t^2)}^{\cancel{2}}}} \frac{dt}{\cancel{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{t}{t^4+1} dt = \int \frac{t}{(t^2)^2+1} dt = \left| \begin{aligned} &t^2 = z \\ &2tdt = dz \\ &tdt = \frac{1}{2} dz \end{aligned} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2} arctgz + C = \frac{1}{2} arctgt^2 + C = \frac{1}{2} arctg(tg^2 x) + C$$

Ovaj zadatak smo mogli da rešimo i na drugi način, koristeći trigonometrijske formule.

Ideja je da se izraz u imeniocu transformiše. Krenemo od osnovne identičnosti:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / ()^2$$

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2 - \sin^2 2x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \boxed{1 - \sin^2 2x}}{2}$$

$$\boxed{\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}}$$

Vratimo se u integral...

$$I=\int\frac{\sin x\cos x}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x}dx=\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx\left|\begin{array}{l}\cos 2x=t\\ -\sin 2x\cdot 2dx=dt\\ \sin 2xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{array}\right|=\frac{1}{-2}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{-2}arctgt+C=\boxed{-\frac{1}{2}arctg(\cos 2x)+C}$$

$\boxed{\text{primer 5.}}$ $\int\sqrt{a^2-x^2}=?$

Sećate se ovog integrala?

Rešavali smo ga do sada na dva načina: parcijalnom integracijom i metodom Ostrogradskog.

Po nama je najelegantnije koristiti trikče:

Ako uzmemo smenu $x=a\sin t$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2(\sin t)^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$$

$$x=a\sin t\to dx=a\cos tdt$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}=\int a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=$$

Moramo vratiti *t* iz smene:

$x=a\sin t\to\sin t=\frac{x}{a}\to t=\arcsin\frac{x}{a}$ i još da sredimo :

$$\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sin t\cos t=\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}=\sin(\arcsin\frac{x}{a})\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{x}{a})}=$$

$$=\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}=\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Rešenje je: $\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+C=\boxed{\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C}$