1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$

Oblast definisanosti (domen)

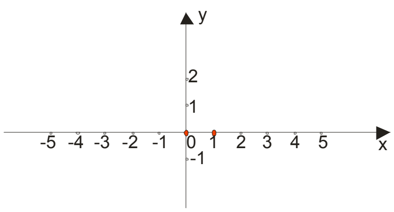
Ova funkcija je svuda definisana jer nema razlomaka a treći korern je svuda definisan... $D_f=(-\infty,\infty)$

Ovo nam govori da nema vertikalne asimptote.

Nule funkcije

$$y=0\rightarrow x^2-x^3=0\rightarrow x^2(1-x)=0$$
$$x=0; x=1$$

X osu grafik seče u dvema tačkama:



Znak funkcije

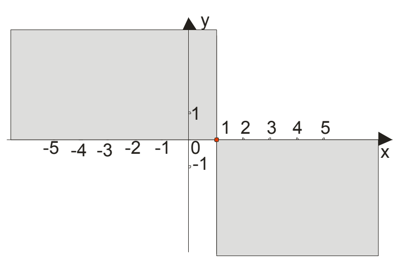
Kao i uvek, najpre razmišljamo od čega zavisi znak funkcije?

$$y=\sqrt[3]{x^2-x^3}=\sqrt[3]{x^2(1-x)}$$

Samo od 1-x , pa je

	$-\infty$	1 ∞
1-x	+	−
y	+	−

na skici je to



Parnost i neparnost

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2-(-x)^3}=\sqrt[3]{x^2+x^3}$$

Funkcija nije ni parna ni neparna!

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$ lakše nam je da tražimo izvod ako funkciju posmatramo kao

$$y=(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$y`=\frac{1}{3}(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2-x^3)`$$

$$y`=\frac{1}{3}(x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x-3x^2)$$

$$y`=\frac{1}{3}\frac{2x-3x^2}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}$$

$$y`=0\rightarrow 2x-3x^2=0\rightarrow x(2-3x)=0\rightarrow x=0\vee x=\frac{2}{3}$$

<u>Za x = 0</u>

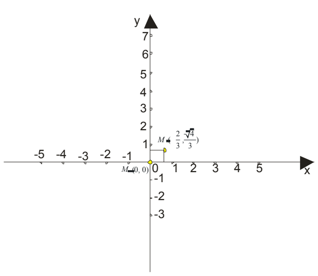
$$y=\sqrt[3]{0-0}=0$$

<u>Za x = $\frac{2}{3}$</u>

$$y=\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^2-(\frac{2}{3})^3}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}-\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\frac{4}{27}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

$Dakle:$

$$M_1(0,0);M_2(\frac{2}{3},\frac{\sqrt[3]{4}}{3})$$



Od čega nam zavisi znak prvog izvoda ?

Pa samo od izraza u brojiocu! x(2-3x)

	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$ ∞
x	–	+	+
2-3x	+	+	–
y`	–	+	–
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$$

$$y`=\frac{1}{3}(x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x-3x^2)$$ radimo kao izvod proizvoda

$$y``=\frac{1}{3}[((x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}})`\cdot(2x-3x^2)+\ (x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x-3x^2)`]$$

$$y``=\frac{1}{3}[-\frac{2}{3}(x^2-x^3)^{-\frac{5}{3}}\cdot(2x-3x^2)\cdot(2x-3x^2)+\ (x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2-6x)]$$

Posle pažljivog sredjivanja dobijamo da je

$$\boxed{y``=-\frac{2}{9(1-x)^{\frac{5}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}}$$

Odavde možemo zaključiti da nema prevojnih tačaka .Znak drugog izvoda zavisi od - ispred razlomka i od (1-x) , odnosno, možemo reći da zavisi samo od (x- 1) , pa je y``>0 za x>1 ( smeje se) i y``< 0 za x<1 (mršti se)

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Kao što smo već zaključili , funkcija nema vertikalnu asimptotu!

<u>Horizontalna asimptota</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3(\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-1)}=\infty\cdot(-1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3(\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-1)}=-\infty\cdot(-1)=+\infty$$

Dakle, nemamo horizontalnu asimptotu pa moramo potražiti kosu.

<u>Kosa asimptota</u>

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(\frac{1}{x}-1)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-1)}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-1)}=0-1=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^2-x^3}+x]$$ ovde moramo racionalisati , upotrebljavamo : $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

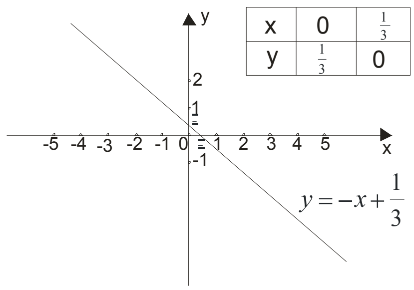
$$n=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x)\cdot\frac{(\sqrt[3]{x^2-x^3})^2-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2}{(\sqrt[3]{x^2-x^3})^2-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^2-x^3})^3+x^3}{(\sqrt[3]{x^2-x^3})^2-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{x^4-2x^5+x^6}-\sqrt[3]{x^3(1-\frac{1}{x})}\cdot x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1)}-x\cdot\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})}\cdot x+x^2}$$

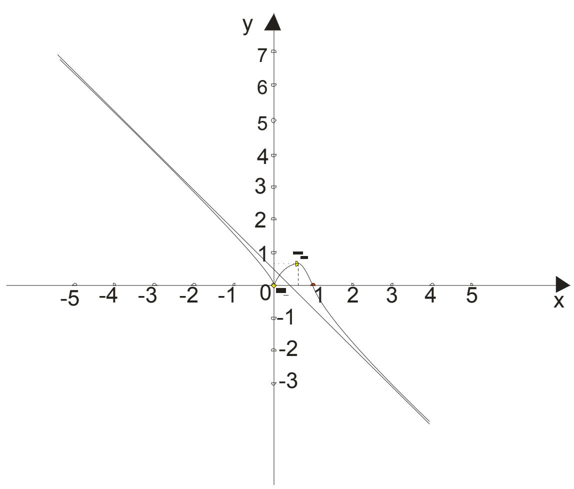
$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}[\sqrt[3]{(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1)}-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})}+1]}=\frac{1}{1-(-1)+1}=\frac{1}{3}$$

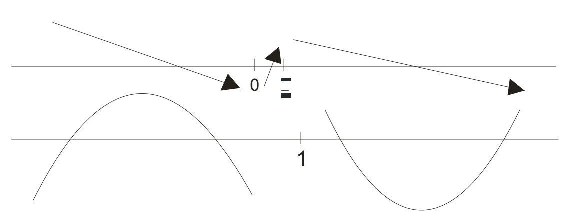
$y=-x+\dfrac{1}{3}$ je kosa asimptota

x	0	$\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	0



I konačno:





2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

Oblast definisanosti (domen)

Ovde moramo posmatrati dva uslova:

$\sqrt{x^2+2} \neq 0$ i $x^2+2 \geq 0$

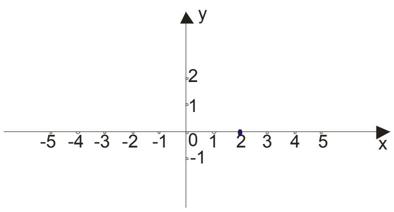
Ovo sklopljeno u jedan uslov daje $x^2+2>0$

A ovo je očigledno tačno za svako realno x , pa je $D_f = (-\infty, \infty)$

A odavde zaključujemo da funkcija nema vertikalne asimptote.

Nule funkcije

y=0 za x-2 = 0 , to jest x = 2

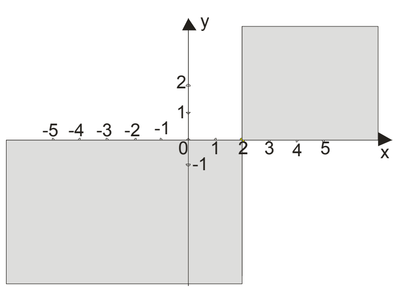


Znak funkcije

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

Kako je izraz u imeniocu uvek pozitivan, zaključujemo da znak zavisi samo od brojioca...

	$-\infty$	2 ∞
x-2	$-$	$+$
y	$-$	$+$



Parnost i neparnost

$$f(-x) = \frac{-x-2}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{-x-2}{\sqrt{x^2+2}} \neq f(x)$$

Funkcija nije ni parna ni neparna.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (raščenje i opadanje)

$$y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y`=\frac{(x-2)`\cdot\sqrt{x^2+2}-(\sqrt{x^2+2})`\cdot(x-2)}{(\sqrt{x^2+2})^2}$$ pazi , $\sqrt{x^2+2}$ mora kao složena funkcija...

$$y`=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot(x^2+2)`\cdot(x-2)}{x^2+2}$$

$$y`=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x-2)}{x^2+2}$$

$$y`=\frac{\frac{(\sqrt{x^2+2})^2-x(x-2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

$$y`=\frac{x^2+2-x^2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y`=\frac{2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

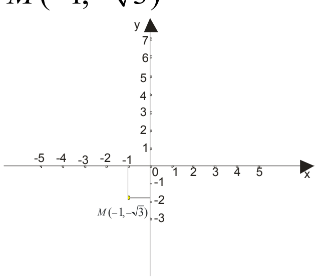
$$y`=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$ ili ako odmah pripremimo za drugi izvod $y`=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$

y`=0 za x+1 = 0 , to jest x = -1

<u>*Za* x = -1</u>

$$y=\frac{-1-2}{\sqrt{1+2}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

$M(-1,-\sqrt{3})$



Znak prvog izvoda zavisi samo od izraza u brojiocu , pa je :

	-∞ -1	∞
2x+2	−	+
y`	−	+
	↘	↗

tačka M minimum funkcije.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y`=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y``=2\frac{(x+1)`\cdot(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-((x^2+2)^{\frac{3}{2}})`(x+1)}{((x^2+2)^{\frac{3}{2}})^2}$$

$$y``=2\frac{1\cdot(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{3}{2}-1}(x^2+2)`\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y``=2\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y``=2\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-3(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot x\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$ izvučemo zajednički $(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ u brojiocu

$$y``=2\frac{\cancel{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}[x^2+2-3x\cdot(x+1)]}{(x^2+2)^{\cancel{3}}}$$

$$y``=2\frac{x^2+2-3x^2-3x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y``=2\frac{-2x^2-3x+2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y``=0$$

$$-2x^2-3x+2=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow x_1=-2\wedge x_2=\frac{1}{2}$$

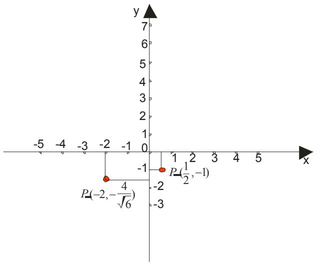
Za $x_1=-2\rightarrow y_1=\frac{-4}{\sqrt{6}}$

Za $x_2=\frac{1}{2}\rightarrow y_1=-1$

Imamo dve prevojne tačke:

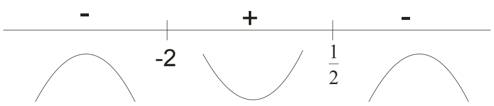
$\mathrm{P}_1(-2,\frac{-4}{\sqrt{6}})$

$P_2(\frac{1}{2},-1)$



Znak drugog izvoda opet zavisi samo od izraza u brojiocu $-2x^2-3x+2$.

Upotrebićemo da kvadratni trinom ima znak broja *a = -2* svuda osim izmedju nula!



Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota ne postoji.

<u>Horizontalna asimptota</u>

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{|x|\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}$ PAZI ! Pošto smo dole dobili apsolutnu vrednost, moramo odvojiti limese za + i za – beskonačno!

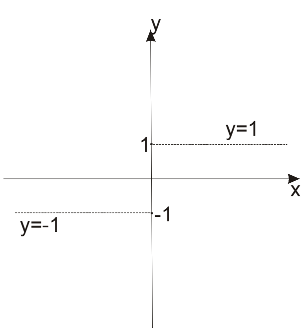
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{-x\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}=-1$$

КАД X TEŽI + BESKONAČNO HORIZONTALNA ASIMPTOTA JE y = 1

КАД X TEŽI - BESKONAČNO HORIZONTALNA ASIMPTOTA JE y = -1

Na slici bi to izgledalo ovako:



Kose asimptote naravno nema, jer postoji horizontalna!

Konačan grafik je :