# HOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

**Jednačina oblika** $M(x,y)dx + N(x,y) = 0$ **koju možemo da spakujemo u oblik** $y` = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **naziva se homogena diferencijalna jednačina.**

**Rešavamo je smenom :**

$\frac{y}{x} = z$ to jest $y = z \cdot x$

Odavde je:

$y = z \cdot x$

$y` = z` \cdot x + x` \cdot z$

$y` = z` \cdot x + 1 \cdot z$

$\boxed{y` = z` \cdot x + z}$

**Posle smene ova jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.**

**Da Vas ne zbuni , neki profesori ne uzimaju za smenu slovo *z*, već slovo *u*.**

$\frac{y}{x} = u$ to jest $y = u \cdot x$

Odavde je:

$y = u \cdot x$

$y` = u` \cdot x + x` \cdot u$

$y` = u` \cdot x + 1 \cdot u$

$\boxed{y` = u` \cdot x + u}$

**Sve jedno je koje ćemo slovo uzeti za smenu, postupak rada je isti.....**

**Primer 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y` = \frac{2x + y}{2x}$

**Rešenje:**

$$y` = \frac{2x + y}{2x}$$ izvučemo gore x ispred zagrade

$$y` = \frac{\cancel{x}(2 + \frac{y}{x})}{2\cancel{x}}$$

$$y` = \frac{2 + \frac{y}{x}}{2}$$ Napravili smo oblik homogene d.j. pa sad uzimamo smenu

Smena: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$ , vraćamo se u zadatak

$$z`x + z = \frac{2 + z}{2}$$

$$z`x = \frac{2+z}{2} - z$$

$$z`x = \frac{2+z-2z}{2}$$

$z`x = \frac{2-z}{2}$ ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive , gde je $\boxed{z` = \frac{dz}{dx}}$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{2-z}{2}$$

$\frac{dz}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$ integralimo

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

$-\ln|2-z| = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln c$ "trik" je da kada su sva rešenja po ln da se doda *lnc* umesto *c*

$\ln|2-z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}} + \ln c$ spakujemo malo

$\ln|2-z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}} c$ antilogaritmujemo

$$|2-z|^{-1} = |x|^{\frac{1}{2}} c$$

$\frac{1}{2-z} = \sqrt{x}c$ vratimo smenu $\frac{y}{x} = z$

$\frac{1}{2-\frac{y}{x}} = \sqrt{x}c$ **ovo je opšte rešenje, ako zahteva vaš profesor odavde izrazite *y***

$$2 - \frac{y}{x} = \frac{1}{c\sqrt{x}}$$

$$\frac{y}{x} = 2 - \frac{1}{c\sqrt{x}} \text{..........................} /{*}x$$

$$y = 2x - \frac{x}{c\sqrt{x}}$$

$y = 2x - \frac{\sqrt{x}}{c}$ ako stavimo $\frac{1}{c} = C$

$$y = 2x - C\sqrt{x}$$

**Primer 2. Rešiti diferencijalnu jednačinu** $xy` - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Rešenje:**

$$xy` - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$xy` = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$
$$xy` = \sqrt{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})} + y$$
$$xy` = x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + y \text{...........................} / : x \qquad (x \neq 0)$$
$$y` = \frac{\cancel{x}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\cancel{x}} + \frac{y}{x}$$
$$y` = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Napakovali smo oblik koji nam treba, uvodimo smenu : $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$

$$y` = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$
$$z`x + z = \sqrt{1 + z^2} + z$$
$$z`x = \sqrt{1 + z^2} \rightarrow \text{d.j. koja razdvaja promenljive}$$
$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + z^2}$$
$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x} \rightarrow \text{integralimo}$$
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \ln x + \ln c$$
$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \ln x \cdot c$$
$$z + \sqrt{1 + z^2} = xc \rightarrow \text{vratimo smenu}$$
$$\boxed{\frac{y}{x} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = xc} \rightarrow \text{ako malo prisredimo} \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = xc \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = xc \text{.......} / {*x}$$
$$\boxed{y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 c}$$

**Primer 3. Rešiti diferencijalnu jednačinu** $\boldsymbol{xy^2dy = (x^3 + y^3)dx}$

**Rešenje**: $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$ gore izvlačimo $x^3$

$$y` = \frac{x^3(1+\frac{y^3}{x^3})}{xy^2} \to y` = \frac{\cancel{x^3}(1+\frac{y^3}{x^3})}{\cancel{x}y^2}$$

$$y` = \frac{x^2(1+\frac{y^3}{x^3})}{y^2}$$ spustimo $x^2$ dole ispod $y^2$

$$y` = \frac{(1+\frac{y^3}{x^3})}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$y` = \frac{1+(\frac{y}{x})^3}{(\frac{y}{x})^2}$$ jasno je da je ovo homogena d.j.

Uzimamo smenu : $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$

$$z`x + z = \frac{1+z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1+z^3}{z^2} - z$$

$$z`x = \frac{1+z^3-z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1}{z^2}$$ razdvaja promenljive $z` = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z^2}$$

$$z^2dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z^2dz = \int \frac{dx}{x}$$

$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c$ vratimo smenu $\frac{y}{x} = z$ pa je $\frac{(\frac{y}{x})^3}{3} = \ln|x| + c$ opšte rešenje

**Primer 4. Rešiti diferencijalnu jednačinu** $xy`-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

**Rešenje:**

$$xy`-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$
$$xy`=(x+y)\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{y}{x}\right)+y$$
$$xy`=(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+y..............................\,/:x \qquad (\mathrm{x}\neq 0)$$
$$y`=\frac{(x+y)}{x}\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$
$$y`=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$

Sad smena: $\frac{y}{x}=z\Rightarrow y=zx\Rightarrow y`=z`x+z$

$$y`=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$
$$z`x+z=(1+z)\ln(1+z)+z$$
$$z`x=(1+z)\ln(1+z)$$
$$\frac{dz}{dx}x=(1+z)\ln(1+z)$$
$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\int\frac{dx}{x}$$

“Rešimo” na stranu integral sa leve strane: $\int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\left|\begin{array}{l}\ln(1+z)=t\\ \frac{1}{1+z}dz=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln(1+z)|$

$$\ln|\ln(1+z)|=\ln x+\ln c$$
$$\ln|\ln(1+z)|=\ln xc$$
$$\ln(1+z)=xc$$
$$1+z=e^{xc}$$
$$z=e^{xc}-1$$
$$\frac{y}{x}=e^{xc}-1$$
$$\boxed{y=x\left(e^{cx}-1\right)}$$

**Primer 5. Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y`=\frac{x-y+1}{x+y-3}$

**Rešenje:**

**Evo ovde malog problema! Smetaju nam ovi brojevi gore i dole.**

**Kako rešavamo ovu situaciju?**

**Jednačina oblika** $y`=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ **svodi se na homogenu prenošenjem koordinatnog početka u tačku preseka pravih** $a_1x+b_1y+c_1=0 \wedge a_2x+b_2y+c_2=0$ **.**

**Ustvari, mi rešimo sistem od ove dve jednačine , i dobijemo rešenja** $(x,y)=(\alpha,\beta)$

**Uvodimo smene:** $\begin{array}{l} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{array}$ **i dobijemo poznatu homogenu diferencijalnu jednačinu.**

**Ako se desi da se prave ne seku , onda je** $a_1x+b_1y=k(a_2x+b_2y)$ **pa diferencijalna jednačina ima oblik**

$y`=F(ax+by)$ **koji se smenom** $z=ax+by$ **ili** $z=ax+by+c$ **svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.**

**Da se vratimo na naš primer:**

$$y`=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ \underline{x+y-3=0} \end{array}\right\}+$$

$$2x-2=0 \rightarrow x=1$$

$$x-y+1=0 \rightarrow 1-y+1=0 \rightarrow y=2$$

$$(\alpha,\beta)=(0,2)$$

$$smena$$

$$x=X+1$$

$$y=Y+2$$

$$y`=\frac{x-y+1}{x+y-3} \rightarrow Y`=\frac{X+1-Y-2+1}{X+1+Y+2-3} \rightarrow \boxed{Y`=\frac{X-Y}{X+Y}}$$

Sad je ovo obična homogena d.j.

Samo da je upakujemo!

$$Y` = \frac{X-Y}{X+Y}$$

$$Y` = \frac{X(1-\frac{Y}{X})}{X(1+\frac{Y}{X})}$$

$$Y` = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}} \rightarrow \text{Smena:} \frac{Y}{X} = Z \rightarrow \quad Y` = Z`X + Z$$

$$Z`X + Z = \frac{1-Z}{1+Z}$$

$$Z`X = \frac{1-Z}{1+Z} - Z$$

$$Z`X = \frac{1-Z-Z-Z^2}{1+Z}$$

$$Z`X = \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z} \rightarrow \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = dX$$

$$\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = dX$$

$$\int \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = \int dX$$

$$\int \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = -\int \frac{Z+1}{Z^2+2Z-1} dZ = \left| \begin{array}{l} Z^2+2Z-1 = t \\ (2Z+2)dZ = dt \\ 2(Z+1)dZ = dt \\ (Z+1)dZ = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|Z^2+2Z-1\right|$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = \ln|X| + \ln c \text{.......................} / *(-2)$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = -2\ln|X| + (-2\ln c)$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = -\ln|X|^2 + \ln c^{-2}$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| + \ln|X|^2 = \ln c^{-2}$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| \cdot |X|^2 = \ln c^{-2}$$

$$\left(Z^2+2Z-1\right) \cdot X^2 = c^{-2} \rightarrow \text{stavimo da je } c^{-2} = C$$

$$\left(Z^2+2Z-1\right) \cdot X^2 = C$$

$$\left(\frac{Y^2}{X^2} + 2\frac{Y}{X} - 1\right) \cdot X^2 = C$$

$$\left(\frac{Y^2+2XY-X^2}{X^2}\right) \cdot X^2 = C$$

$$\boxed{Y^2+2XY-X^2 = C}$$

**Sad još imamo posao da vratimo smene sa početka zadatka:**

$Y^2 + 2XY - X^2 = C$

*smena*

$x = X + 1 \rightarrow X = x - 1$

$y = Y + 2 \rightarrow Y = y - 2$

$\boxed{(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C}$

Evo opšteg rešenja.