MATRICE ZADACI (I DEO)

1. Date su matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$. Izračunati:

a) $A+B=?$

b) $A-B=?$

v) $2A-3B=?$

g) $A^T+B^T=?$

<u>Rešenje:</u>

a)

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 & 1+(-3) \\ -2+2 & 16+6 & 0+(-8) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 22 & -8 \end{bmatrix}$$

b)

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 & 3-0 & 1-(-3) \\ -2-2 & 16-6 & 0-(-8) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

v)

$$2A-3B=2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -4 & 32 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 6 & 18 & -24 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 4-3 & 6-0 & 2-(-9) \\ -4-6 & 32-18 & 0-(-24) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ -10 & 14 & 24 \end{bmatrix}$$

g)

$$A^T+B^T=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+1 & -2+2 \\ 3+0 & 16+6 \\ 1+(-3) & 0+(-8) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 22 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

2. Date su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunati:

a) $2A-B=?$

b) $(A^T+B)^T=?$

Rešenje:

a)

$$2A-B=2\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ -2 & -4 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -6\\ -4 & -8 & 2\\ 6 & 4 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -6\\ -1 & -12 & 1\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

b)

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^T+B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -3 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$(A^T+B)^T=\begin{bmatrix}3 & -3 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

3. Ako su nam date matrice $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 0\end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A\cdot B=?$

b) $B\cdot A=?$

Rešenje:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 2+0\cdot 8 & 3\cdot 1+0\cdot 0\\ -1\cdot 2+2\cdot 8 & -1\cdot 1+2\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 14 & -1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 2\\ 8\cdot 3+0\cdot(-1) & 8\cdot 0+0\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 10 & 0\end{bmatrix}$$

I na ovom primeru uočavamo jednu bitnu činjenicu koju smo napomenuli u teoretskom delu MATRICE:

a to je da komutativni zakon za množenje matrica NE VAŽI.

4. Ako su date matrice $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A\cdot B=?$

b) $B\cdot A=?$

Rešenje:

a)

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot4+2\cdot(-4)+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot0+2\cdot1\\2\cdot4+1\cdot(-4)+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot0+2\cdot1\\1\cdot4+2\cdot(-4)+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4-8+2 & 1+4+4 & 1+0+2\\8-4+2 & 2+2+4 & 2+0+2\\4-8+3 & 1+4+6 & 1+0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&9&3\\6&8&4\\-1&11&4\end{bmatrix}$$

b)

$$B\cdot A=\cdot\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 & 4\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 & 4\cdot2+1\cdot2+1\cdot3\\-4\cdot1+2\cdot2+0\cdot1 & -4\cdot2+2\cdot1+0\cdot2 & -4\cdot2+2\cdot2+0\cdot3\\1\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot2+1\cdot3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4+2+1 & 8+1+2 & 8+2+3\\-4+4+0 & -8+2+0 & -8+4+0\\1+4+1 & 2+2+2 & 2+4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&11&13\\0&-6&-4\\6&6&9\end{bmatrix}$$

Još jednom vidimo da je $A\cdot B\neq B\cdot A$

5. Ako su date matrice $A=\begin{bmatrix}2&1&11\\2&3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&1\\5&1\\6&1\end{bmatrix}$ izračunati:

a) $A\cdot C+B=?$

b) $B\cdot C^T=?$

Rešenje:

a)

$$A\cdot C+B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 11\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 2+1\cdot 5+11\cdot 6 & 2\cdot 1+1\cdot 1+11\cdot 1\\ 2\cdot 2+3\cdot 5+0\cdot 6 & 2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+5+66 & 2+1+11\\ 4+15+0 & 2+3+0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}75 & 14\\ 19 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76 & 15\\ 20 & 6\end{bmatrix}$$

b)

$$C^T=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot C^T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 5+1\cdot 1 & 1\cdot 6+1\cdot 1\\ 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 5+1\cdot 1 & 1\cdot 6+1\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+1 & 5+1 & 6+1\\ 2+1 & 5+1 & 6+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 7\\ 3 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

6. Za dati polinom $P(x)=x^2+2$ i matricu $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ izračunati $P\left(A\right)$.

Rešenje:

Kako je $P(A)=A^2+2$, nadjimo najpre matricu A^2:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 3+0\cdot 2+2\cdot 1 & 3\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot(-1) & 3\cdot 2+0\cdot 4+2\cdot 0\\ 2\cdot 3+1\cdot 2+4\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 1+4\cdot(-1) & 2\cdot 2+1\cdot 4+4\cdot 0\\ 1\cdot 3+(-1)\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+0\cdot(-1) & 1\cdot 2+(-1)\cdot 4+0\cdot 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9+0+2 & 0+0-2 & 6+0+0\\ 6+2+4 & 0+1-4 & 4+4+0\\ 3-2+0 & 0-1+0 & 2-4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -2 & 6\\ 12 & -3 & 8\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

Sad ovo menjamo u $P(A)=A^2+2$, ali pazimo da uz 2 obavezno dodamo jediničnu matricu I, naravno trećeg reda.

Dakle $P(A)=A^2+2\cdot I$

$$P(A)=A^2+2\cdot I=\begin{bmatrix}11 & -2 & 6\\ 12 & -3 & 8\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -2 & 6\\ 12 & -3 & 8\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -2 & 6\\ 12 & -1 & 8\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

7. Za dati polinom $P(x)=x^2-5x+3$ i matricu $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ odredi $P\left(A\right)$.

<u>Rešenje:</u>

$$P(A)=A^2-5A+3\cdot I$$

Naći ćemo na stranu svaki od sabiraka pa to ubaciti u $P(A)=A^2-5A+3\cdot I$. Možemo i direktno sve da radimo ali se ukomplikuje …

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2+1\cdot3+1\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot2+1\cdot2\\ 3\cdot2+1\cdot3+2\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot1+2\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot2+2\cdot2\\ 0\cdot2+0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot2+2\cdot2\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}7 & 3 & 6\\ 9 & 4 & 9\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$5\cdot A=5\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5 & 5\\ 15 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$3\cdot I=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$P(A)=\begin{bmatrix}7 & 3 & 6\\ 9 & 4 & 9\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 5 & 5\\ 15 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\to P(A)=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -6 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Dalje ćemo pokušati da vam objasnimo kako se traži matrica A^n ako je data matrica A.

Ovakav tip zadatka možemo rešavati na više načina:

$\boxed{i}$ Tražimo matrice A^2, A^3, A^4 i ako treba još par njih dok ne zaključimo po kojoj se zakonitosti pojavljuju elementi matrice… Zatim zapišemo kako bi trebalo da izgleda A^n i izvršimo dokaz matematičkom indukcijom.

$\boxed{ii}$ Drugi način je da koristimo binomnu formulu $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}a^0 b^n$.
Datu matricu napišemo kao zbir dve matrice,od kojih je jedna jedinična matrica a druga kada se traži njen stepen, postaje nula matrica već kod trećeg ili četvrtog stepena.

$\boxed{iii}$ Treći način je da upotrebljavamo sopstvene vrednosti i vektore a to je objašnjeno u fajlu matrice zadaci 2. deo.

8. Ako je data matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, nadji A^n.

Rešenje:

I način

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovoga možemo predpostaviti da je $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+...+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno, pošto je $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

to je onda $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+...+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Sada ovo moramo dokazati primenom matematičke indukcije . Da bi se podsetili kako ide indukcija, pogledajte istoimeni fajl iz treće godine.

za n=1 je $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tačno.

za n=2 je $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2\cdot 3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ takodje tačno

postavljamo **indukcijsku hipotezu**, da je formula tačna za $n = k$

za n=k je $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

da dokažemo da je formula tačna za $n = k+1$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, naša formula je dobra.

II način

Datu matricu rastavimo na jediničnu i još jednu matricu:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=I+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Obeležimo matricu $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ sa slovom M.

Tada je $A=I+M$

$A^n=(I+M)^n$

Koristimo $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+.......+\binom{n}{n}a^0b^n$**,** ali najpre da vidimo kako se ponašaju stepeni matrice *M*.

$$M=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^2=M\cdot M=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ odavde zaključujemo da je:

$M^4=M^5=...=M^n=0$

Sad koristimo binomnu formulu:

$(I+M)^n=\binom{n}{0}I^nM^0+\binom{n}{1}I^{n-1}M^1+\binom{n}{2}I^{n-2}M^2$ **, svi ostali članovi su jednaki nuli.**

$$(I+M)^n = 1\cdot I\cdot 1 + n\cdot I\cdot M + \frac{n(n-1)}{2} I\cdot M^2$$

$$(I+M)^n = I + n\cdot M + \frac{n(n-1)}{2} M^2$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{2n+n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{2n+n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

9. Ako je data matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, nadji A^n.

<u>Rešenje:</u>

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+1\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & -2^2 \\ -2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & -2^3 \\ -2^3 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4\cdot A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & -2^4 \\ -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovoga možemo predpostaviti da je :

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Moramo ovo dokazati matematičkom indukcijom:

za n = 1 je $A^1 = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & -2^0 \\ -2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$

Pretpostavimo da je formula tačna za n=k $A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}$

Da dokažemo da formula važi i za $n = k+1$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k-1}\cdot 1 + (-2^{k-1})(-1) & 2^{k-1}\cdot(-1) + (-2^{k-1})\cdot 1 \\ -2^{k-1}\cdot 1 + 2^{k-1}\cdot(-1) & -2^{k-1}\cdot(-1) + 2^{k-1}\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & -2^{k-1} - 2^{k-1} \\ -2^{k-1} - 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^{k-1} & -2\cdot 2^{k-1} \\ -2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & -2^k \\ -2^k & 2^k \end{bmatrix}$$

U sledećim primerima ćemo pokušati da vam "približimo" rešavanje matričnih jednačina. Takav zadatak se najčešće sastoji iz dva dela. U prvom delu trebate rešiti matričnu jednačinu, odnosno da izrazite *X*, a u drugom delu se koriste operacije sa matricama...

10. Rešiti sledeće matrične jednačine:

1) $AX = B$
2) $XA = B$
3) $AX - I = X + B$
4) $(3X)^{-1} + B^{-1} = (AX)^{-1}$
5) $(AX + A)^{-1} = BA$
6) $(AX^{-1} - B)^{-1} = XB$
7) $\left((AX)^T - X^T B\right)^{-1} = A - B$

<u>Rešenja:</u>

Bilo bi dobro da se podsetite pravila koja važe za matrice a koja su date u prethodnom fajlu.

1)

$AX = B$ sa $\boxed{\text{leve}}$ strane množimo celu jednačinu sa A^{-1}

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$\boxed{A^{-1}A}X = A^{-1}B$

$I \cdot X = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$

2)

$XA = B$ sa $\boxed{\text{desne}}$ strane množimo celu jednačinu sa A^{-1}

$XAA^{-1} = BA^{-1}$

$X \cdot I = BA^{-1}$

$\boxed{X = BA^{-1}}$

3)

$AX - I = X + B$ nepoznate na levu a poznate na desnu stranu...

$AX - X = B + I$ izvlačimo X kao zajednički ispred zagrade , ali sa desne strane!

$(A - I)X = B + I$ celu jednačinu množimo sa $(A - I)^{-1}$, ali sa leve strane!

$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(B + I)$

$I \cdot X = (A - I)^{-1}(B + I)$

$\boxed{X = (A - I)^{-1}(B + I)}$

4)

$(3X)^{-1} + B^{-1} = (AX)^{-1}$

$X^{-1} \cdot 3^{-1} + B^{-1} = X^{-1}A^{-1}$ Nepoznate na jednu, poznate na drugu stranu...

$B^{-1} = X^{-1}A^{-1} - X^{-1} \cdot 3^{-1}$ Izvlačimo X^{-1} kao zajednički ispred zagrade ali sa leve strane...

Pazi , moramo dodati I kod $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$B^{-1} = X^{-1} \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$ Celu jednačinu množimo sa X sa leve strane

$X \cdot B^{-1} = X \cdot X^{-1} \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$

$X \cdot B^{-1} = I \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$

$X \cdot B^{-1} = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$ Celu jednačinu množimo sa B sa desne strane

$X \cdot B^{-1}B = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)B$

$X \cdot I = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)B$

$\boxed{X = (A^{-1} - \frac{1}{3}I) \cdot B}$

5)

$(AX+A)^{-1}=BA$ unutar zagrade izvučemo A sa leve strane

$[A(X+I)]^{-1}=BA$ celu jednačinu stepenujemo na $()^{-1}$

$[A(X+I)^{-1}]^{-1}=(BA)^{-1}$

$A(X+I)=A^{-1}B^{-1}$ množimo celu jednačinu sa A^{-1} sa leve strane

$A^{-1}A(X+I)=A^{-1}A^{-1}B^{-1}$

$I\cdot(X+I)=A^{-2}B^{-1}$

$X+I=A^{-2}B^{-1}$

$\boxed{X=A^{-2}B^{-1}-I}$

6)

$(AX^{-1}-B)^{-1}=XB$ celu jednačinu stepenujemo na $()^{-1}$

$((AX^{-1}-B)^{-1})^{-1}=(XB)^{-1}$

$AX^{-1}-B=B^{-1}\cdot X^{-1}$ sad nepoznate na levu a poznate na desnu stranu...

$AX^{-1}-B^{-1}X^{-1}=B$

$(A-B^{-1})X^{-1}=B$ pomnožimo celu jednačinu sa X ali sa desne strane...

$(A-B^{-1})X^{-1}X=BX$

$(A-B^{-1})I=BX$

$A-B^{-1}=BX$ pomnožimo celu jednačinu sa B^{-1} ali sa leve strane...

$B^{-1}(A-B^{-1})=B^{-1}BX$

$B^{-1}(A-B^{-1})=I\cdot X$

$B^{-1}(A-B^{-1})=X$

$\boxed{X=B^{-1}(A-B^{-1})}$

7)

$\left((AX)^T-X^TB\right)^{-1}=A-B$

$\left(X^TA^T-X^TB\right)^{-1}=A-B$ unutar zagrade izvučemo X^T...

$\left(X^T(A^T-B)\right)^{-1}=A-B$ celu jednačinu na -1...

$X^T(A^T-B)=(A-B)^{-1}$ sa desne strane množimo sa $(A^T-B)^{-1}$

$X^T(A^T-B)(A^T-B)^{-1}=(A-B)^{-1}\cdot(A^T-B)^{-1}$

$X^T=(A-B)^{-1}\cdot(A^T-B)^{-1}$ spakujemo malo desnu stranu

$X^T=[(A^T-B)(A-B)]^{-1}$ celu jednačinu transponujemo...

$(X^T)^T=\left([(A^T-B)(A-B)]^{-1}\right)^T$

$\boxed{X=\left([(A^T-B)(A-B)]^{-1}\right)^T}$

11. **Rešiti matričnu jednačinu** $AX = X + A$ **ako je data matrica** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Rešenje:

Najpre rešavamo zadatu matričnu jednačinu:

$$\begin{aligned}
&AX = X + A \\
&AX - X = A \\
&(A - I)X = A \\
&(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}A \\
&I \cdot X = (A - I)^{-1}A \\
&\boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot A}
\end{aligned}$$

Dalje tražimo matricu $A - I$, pa njenu inverznu. Ako vaš profesor dozvoljava , radi lakšeg rada, matricu $A - I$ možemo obeležiti nekim slovom, recimo sa *M*. Ako se profesor ljuti, vi nastavite da radite sa $A - I$.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M$$

sada je $X = M^{-1} \cdot A$

tražimo $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} adjM$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \rightarrow \boxed{\det M = 1}$$, matrica je regularna…

Ako vam se u radu dogodi da je $\det M = 0$, onda takva matrica nema inverznu matricu i tu prekidate sa radom.

Tražimo kofaktore i adjungovanu matricu:

$M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{0}\\\boxed{0}&1&1\\\boxed{1}&1&1\end{bmatrix}\to M_{11}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$ $\quad M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&0\\\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{1}\\\boxed{1}&1&1\end{bmatrix}\to M_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&0\\\boxed{0}&1&1\\\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}\end{bmatrix}\to M_{31}=+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$

$M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{0}\\0&\boxed{1}&1\\1&\boxed{1}&1\end{bmatrix}\to M_{12}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1$ $\quad M=\begin{bmatrix}1&\boxed{1}&0\\\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{1}\\1&\boxed{1}&1\end{bmatrix}\to M_{22}=+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$ $\quad M=\begin{bmatrix}1&\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}&1\\\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}\end{bmatrix}\to M_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$

$M=\begin{bmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{0}\\0&1&\boxed{1}\\1&1&\boxed{1}\end{bmatrix}\to M_{13}=+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad M=\begin{bmatrix}1&1&\boxed{0}\\\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{1}\\1&1&\boxed{1}\end{bmatrix}\to M_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$ $\quad M=\begin{bmatrix}1&1&\boxed{0}\\0&1&\boxed{1}\\\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}\end{bmatrix}\to M_{33}=+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$

$adjM=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$**,** odavde smo dobili da je inverzna matrica:

$$M^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\boxed{M^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}}$$

Sad možemo da se vratimo u rešenje i da zamenimo:

$$X=M^{-1}\cdot A$$

$$X=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}0\cdot2+(-1)\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot2\\ 1\cdot2+1\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot2\\ (-1)\cdot2+0\cdot0+1\cdot1 & (-1)\cdot1+0\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot0+0\cdot1+1\cdot2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

12. Rešiti matričnu jednačinu $AX-B=BX+I$ **ako su date matrice:**

$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&2&-2\end{bmatrix}$ **i** $B=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$**.**

Rešenje:

$$AX - B = BX + I$$
$$AX - BX = B + I$$
$$(A-B)X = B + I$$
$$(A-B)^{-1}(A-B)X = (A-B)^{-1}(B+I)$$
$$\boxed{X = (A-B)^{-1}(B+I)}$$

Izrazili smo X, sada tražimo inverznu matricu …

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kao i malopre, radi lakšeg rada, ovu matricu ćemo obeležiti sa *M*.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{, onda je } M^{-1} = \frac{1}{\det M} adjM$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \to M_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \quad M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \to M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \quad M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \to M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \to M_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2 \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$adjM = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \boxed{M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$B + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I konačno je :

$$X=\left(A-B\right)^{-1}\left(B+I\right)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 2+\left(-1\right)\cdot 1+0\cdot 2 & 1\cdot 2+\left(-1\right)\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 2+\left(-1\right)\cdot 2+0\cdot 2\\ \left(-1\right)\cdot 2+\left(-2\right)\cdot 1+1\cdot 2 & \left(-1\right)\cdot 2+\left(-2\right)\cdot 2+1\cdot 1 & \left(-1\right)\cdot 2+\left(-2\right)\cdot 2+1\cdot 2\\ \left(-1\right)\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot 2 & \left(-1\right)\cdot 2+0\cdot 2+0\cdot 1 & \left(-1\right)\cdot 2+0\cdot 2+0\cdot 2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -5 & -4\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}}$$