

## EKSTREMUMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH ( I deo )

Kod ovakvih zadataka najčešće se zadaje funkcija  $f(x, y)$ .

Prvi posao nam je da nađemo parcijalne izvode  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Zatim rešavamo sistem jednačina  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  i  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

Rešenja ovog sistema ( može da bude jedno, ali i više njih) nam daju **stacionarne tačke**  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , ...itd.

Dalje tražimo:  $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Oformimo  $D = A \cdot C - B^2$

***Za svaku stacionarnu tačku radimo isto:***

Najpre vrednosti stacionarne tačke zamenimo u  $D$ . Dobijena vrednost mora da je veća od nule  $\boxed{D > 0}$ , ako se desi da nije, onda ta tačka nije tačka ekstremuma.

Dalje ispitujemo da li je maksimum ili minimum:

- i) Ako je  $\boxed{D > 0}$  i  $A < 0$  ( $C < 0$ ) onda je stacionarna tačka **maksimum**
- ii) Ako je  $\boxed{D > 0}$  i  $A > 0$  ( $C > 0$ ) onda je stacionarna tačka **minimum**
- iii) Ako je  $D = 0$  slučaj je **neodređen**
- iv) Ako je  $D < 0$  **nema ekstremuma**

**Ako se desi da je  $D = 0$** , to jest da je slučaj neodređen, onda moramo ići na širu definiciju ekstremuma, to jest tražimo diferencijal drugog reda  $d^2 f$  i

- a) Ako je  $d^2 f > 0$  funkcija ima minimum
- b) Ako je  $d^2 f < 0$  funkcija ima maksimum

primer 1.

Naći ekstremume funkcije  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

**Rešenje:**

Najpre tražimo prve parcijalne izvode:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

Oformimo sistem jednačina  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  i  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

$$3x^2 - 6y = 0 \dots / : 3$$

$$24y^2 - 6x = 0 \dots / : 6$$

$$x^2 - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} \quad \text{zamenimo u } 4y^2 - x = 0$$

$$4y^2 - x = 0$$

$$4\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - x = 0 \rightarrow 4 \cdot \frac{x^4}{4} - x = 0 \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

$$\text{Za } x = 0 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} \rightarrow y = 0 \rightarrow \boxed{M_1(0, 0)}$$

$$\text{Za } x = 1 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{M_1(1, \frac{1}{2})}$$

Dobili smo dve stacionarne tačke :  $M_1(0, 0)$  i  $M_1(1, \frac{1}{2})$ .

Dalje tražimo  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  i pravimo  $D = A \cdot C - B^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y) = 6x$$

pa je:

$$D = A \cdot C - B^2$$

$$D = (6x)(48y) - (-6)^2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(24y^2 - 6x) = -6$$

$$\boxed{D = 288xy - 36}$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(24y^2 - 6x) = 48y$$

Uzimamo prvu stacionarnu tačku i ispitujemo:

$$M_1(0, 0)$$

$$D = 288xy - 36 \rightarrow D(0, 0) = 288 \cdot 0 \cdot 0 - 36 = -36 \rightarrow D(0, 0) < 0$$

Dakle, pokazali smo da ova tačka nije ekstrem!

Ispitujemo drugu stacionarnu tačku:

$$M_1(1, \frac{1}{2})$$

$$D = 288xy - 36 \rightarrow D(1, \frac{1}{2}) = 288 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 36 = 144 - 36 = 108 \rightarrow D(1, \frac{1}{2}) > 0$$

Ova tačka jeste ekstrem, još da ispitamo da li je max ili min.

$$A = 6x \rightarrow A(1, \frac{1}{2}) = 6 \cdot 1 = 6 \rightarrow A(1, \frac{1}{2}) > 0$$

Zaključujemo da je ova tačka minimum!

Vratimo ovu vrednost u početnu funkciju da izračunamo tu minimalnu vrednost:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

$$z_{\min}(1, \frac{1}{2}) = 1^3 + 8(\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2}) + 5 = 1 + 1 - 3 + 5 = 4$$

$$\boxed{z_{\min}(1, \frac{1}{2}) = 4}$$

primer 2.

Ispitati ekstremume funkcije:  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

**Rešenje:**

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1$$

$$\sqrt{y} - 2x + 6 = 0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0$$

$$\text{Iz } \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \rightarrow x = 2\sqrt{y} \text{ pa ovo zamenimo u } \sqrt{y} - 2x + 6 = 0$$

$$\sqrt{y} - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 6 = 0$$

$$-3\sqrt{y} + 6 = 0 \rightarrow \sqrt{y} = 2 \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$x = 2\sqrt{y} \rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{4} \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$\boxed{M(4,4)}$  je stacionarna tačka ( jedina)

Dalje tražimo  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  i oformimo  $D = A \cdot C - B^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{y} - 2x + 6) = -2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = -\frac{x}{4y\sqrt{y}}$$

$$D = A \cdot C - B^2$$

Pa je :

$$D = (-2)\left(-\frac{x}{4y\sqrt{y}}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2$$

$$\boxed{D = \frac{x}{2y\sqrt{y}} - \frac{1}{4y}}$$

Vrednost stacionarne tačke  $M(4, 4)$  zamenimo u  $D$  :

$$D = \frac{x}{2y\sqrt{y}} - \frac{1}{4y}$$

$$D(4, 4) = \frac{4}{2 \cdot 4\sqrt{4}} - \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$D(4, 4) = \frac{3}{16} > 0$$

Zaključujemo da je naša tačka  $M(4, 4)$  ekstrem, zamenimo je u  $A$  da odredimo da li je max ili min.

Kako je  $A = -2$  nemamo šta da zamenjujemo, već odmah zaključujemo  $A = -2 < 0$ , tačka  $M(4, 4)$  je maksimum!

Vratimo se u početnu funkciju da nađemo tu maksimalnu vrednost:

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

$$z(4, 4) = 4\sqrt{4} - 4^2 - 4 + 6 \cdot 4 + 3$$

$$\boxed{z(4, 4) = 15}$$

primer 3.

**Ispitati ekstremume funkcije:**  $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$

**Rešenje:**

$$z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{12 - x - y}(-1) \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{12 - x - y}(-1) \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}}$$

Izjednačimo prve parcijalne izvode sa nulom i rešavamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x} - \frac{1}{12-x-y} &= 0 \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{12-x-y} &= 0 \\ \hline \frac{3}{x} &= \frac{1}{12-x-y} \rightarrow 4x + 3y = 36 \\ \frac{2}{y} &= \frac{1}{12-x-y} \rightarrow 2x + 3y = 24 \\ \hline 4x + 3y &= 36 \\ 2x + 3y &= 24 \\ \hline x &= 6 \\ y &= 4 \\ \boxed{M(6,4)}\end{aligned}$$

Dobili smo stacionarnu tačku.

Tražimo  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  i oformimo  $D = A \cdot C - B^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{3}{x} - \frac{1}{12-x-y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2}{y} - \frac{1}{12-x-y} \\ \hline A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2} \\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{(12-x-y)^2} \\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}\end{aligned}$$

$$D = A \cdot C - B^2$$

$$D = \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}\right) - \frac{1}{(12-x-y)^4}$$

Zamenimo vrednost stacionarne tačke u D da vidimo da li je pna potencijalni ekstrem:

$$M(6,4) \rightarrow D = \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}\right) - \frac{1}{(12-x-y)^4}$$

$$D(6,4) = \left(-\frac{3}{6^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{4^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2}\right) - \frac{1}{(12-6-4)^4}$$

$$D(6,4) = \frac{1}{8} > 0$$

Sad menjamo u  $A$  da odredimo da li je max ili min:

$$M(6,4) \rightarrow A = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}$$

$$A(6,4) = -\frac{3}{6^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} < 0$$

Naša tačka  $M(6,4)$  je dakle maksimum!

Vrednost funkcije u njoj je:

$$z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12-x-y)$$

$$z(6,4) = 3 \ln \frac{6}{6} + 2 \ln 4 + \ln(12-6-4)$$

$$z(6,4) = 3 \ln 1 + 2 \ln 2^2 + \ln 2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \ln 2 + \ln 2$$

$$\boxed{z(6,4) = 5 \ln 2}$$