# Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima

Najveći zajednički delilac i najmanji zajednički sadržalac polinoma

**NZD** polinoma P i Q je polinom D koji ima najveći stepen medju polinomima koji su delioci i polinoma P i polinoma Q.

**NZS** polinoma P i Q je polinom S koji ima najmanji stepen medju polinomima koji su deljivi i polinomom P i polinomom Q.

**Primer 1: Nadji NZS i NZD za polinome:**

$$P(x) = x^2 - 4$$
$$Q(x) = x^2 - x - 2$$
$$R(x) = x^2 - 3x + 2$$

Prvo moramo svaki od njih rastaviti na činioce (naravno , upotrebom postupka navedenog u fajlu: Transformacije algebarskih izraza).

$$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$
$$Q(x) = x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2 = x(x-2) + 1(x-2) = (x-2)(x+1)$$
$$R(x) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

**NZD** je ustvari ‘PRESEK’, odnosno ‘onaj’ koji ga ima u svakom od polinoma.

Ovde je to očigledno x-2. Dakle:

**NZD = x-2**

NZS je ‘unija’. On mora biti deljiv sa sva tri polinoma. Dakle:

**NZS = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)**

**Primer 2: Nadji NZS I NZD za polinome :**

$$P = a^2 - ab$$
$$Q = a^2 - b^2$$
$$R = a^2 - 2ab + b^2$$

Najpre vršimo rastavljanje na činioce:

$P = a^2 - ab = a(a-b)$

$Q = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$R = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

NZD = $(a-b) \to$ jer ga ima u sva tri NZS = $a(a-b)^2(a+b) \to$ deljiv sa sva tri

**Primer 3**: **Nadji NZS I NZD za polinome:**

$$A = x^2 - xy$$
$$B = xy + y^2$$

Rastavljamo na činioce:

$$\begin{aligned} A &= x(x-y) \\ B &= y(x+y) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{NZS} = xy(x-y)(x+y)$$

Šta ćemo sa NZD? Nema činioca koji se sadrži u A i B. U takvoj situaciji NZD = 1 , a za polinome kažemo da su uzajamno prosti.

**Primer 4:** **Nadji NZS I NZD za polinome:**

$$9a + 15 =$$
$$36a^2 - 100 =$$
$$-9a^2 + 30a - 25 =$$

Rešenje:

$$9a + 15 = 3(3a+5)$$
$$36a^2 - 100 = 4(9a^2 - 25) = 4(3a-5)(3a+5)$$
$$-9a^2 + 30a - 25 = -(9a^2 - 30a + 25) = -(3a-5)^2$$

NZS $= -12(3a+5)(3a-5)^2$

NZD = 1

**Primer 5:** **Nadji NZS I NZD za polinome:**

$$4a^2 + 4ab + b^2 = (2a+b)^2$$
$$4a^2 - b^2 = (2a-b)(2a+b)$$
$$8a^3 + b = (2a)^3 + b^3 = (2a+b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

NZS $= (2a+b)^2(2a-b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

NZD = *2a+b*

**Primer 6:** **Nadji NZS za polinome:**

$$3x^3 - 12x^2 + 12x =$$
$$5x^4 + 20x^3 + 20x^2 =$$
$$3nx^2 - 12n =$$

$3x^3-12x^2+12x=3x(x^2-4x+4)=3x(x-2)^2$

$5x^4+20x^3+20x^2=5x^2(x^2+4x+4)=5x^2(x+2)^2$

$3nx^2-12n=3n(x^2-4)=3n(x-2)(x+2)$

---

$\text{NZS}=15nx^2(x-2)^2(x+2)^2$

**Primer 7:** **Nadji NZS I NZD za polinome:**

$2a^4-2=2(a^4-1)=2(a^2-1)(a^2+1)=2(a-1)(a+1)(a^2+1)$

$a^3+a^2+a+1=a^2(a+1)+1(a+1)=(a+1)(a^2+1)$

$a^3-a^2+a+1=a^2(a-1)+1(a-1)=(a-1)(a^2+1)$

---

NZS $=2(a-1)(a+1)(a^2+1)$

NZD = $(a^2+1)$

**Kako upotrebiti NZS?**

**1) Uprosti izraz:**

$\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{a+b}{ab}=$ najpre treba svaki imenilac rastaviti na činioce=

$\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(a-b)}-\frac{a+b}{ab}=$ zatim nadjemo NZS za imenioce ,to je $ab(a-b)$ i izvršimo proširenje razlomka. Kako da znamo koji sa kojim da proširimo? Gledamo imenilac i NZS, šta je "višak'',**sa tim** proširimo. Tako prvi sabirak širimo sa $a$, jer je "višak'' kad gledamo $ab(a-b)$ i $b(a-b)$ drugi sa $b$ a treći sa $(a-b)$. Dakle:

$$=\frac{a\cdot a+b\cdot b-(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)}{ab(a-b)}=\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b^{\cancel{2}}}{a\cancel{b}(a-b)}=\frac{2b}{a(a-b)}$$

Pre početka (ili po završetku) rada treba postaviti **uslove** zadataka. Pošto deljenje nulom nije dozvoljeno to nijedan u imeniocu **ne** sme biti nula, tj.

$a\neq 0;\ b\neq 0;\ a-b\neq 0\Rightarrow a\neq b$

2) **Uprosti izraz:** $\frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x^2+x}$

$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{(1-x)(1+x)}+\frac{1}{x(x+1)}=$ šta je problem?

Izrazi $(1+x)$ i $(x+1)$ nisu, jer važi komutativni zakon : $(A+B=B+A)$, ali izrazi $(x-1)$ i(1-x) jesu. Taj problem ćemo rešiti tako što jedan od ta dva izraza ''okrenemo'' i izvučemo minus ispred, jer važi da je $A-B=-(B-A)$

$$=\frac{1}{x(x-1)}\boxed{+}\frac{2}{(1-x)(1+x)}+\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(1+x)}+\frac{1}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot(x+1)-2x+1(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x+1-2x+x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{0}{x(x-1)(x+1)}=0$$

Naravno, uslovi zadatka su:

$x\neq 0;\ x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1;\ x+1\neq 0\Rightarrow x\neq -1$

**3) Uprosti izraz:**

$$\frac{a+1}{a+2}+\frac{6a}{a^2-4}-\frac{2a-1}{a-2}$$

Rešenje:

$$\frac{a+1}{a+2}+\frac{6a}{a^2-4}-\frac{2a-1}{a-2}=$$

$$\frac{a+1}{a+2}+\frac{6a}{(a-2)(a+2)}-\frac{2a-1}{a-2}=$$

$$\frac{(a+1)(a-2)+6a-(2a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)}=$$ **<u>Pazi na znak ispred zagrade!</u>**

$$\frac{(a^2-2a+a-2)+6a-(2a^2+4a-a-2)}{(a-2)(a+2)}=$$

$$\frac{a^2-2a+a-2+6a-2a^2-4a+a+2}{(a-2)(a+2)}=$$

Uvek pokušaj da na kraju rastaviš i brojilac, jer možda ima nešto da se "skrati"!!! Kao sad *(a-2)*

$$\frac{-a^2+2a}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a-2)}{(a-2)(a+2)}=$$

$$\frac{-a}{a+2}$$

<u>Uslovi zadatka su:</u>

$a+2\neq 0\Rightarrow a\neq -2$

$a-2\neq 0\Rightarrow a\neq 2$

**4)** $\frac{x}{x-1}-\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=?$

Rešenje:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=$$

Izdvojićemo i rastaviti “na stranu’’

$$x^2-3x+2=x^2-2x-x+2=x(x-2)-1(x-2)=(x-2)(x-1)$$

Vraćamo se u zadatak:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=$$
$$\frac{x(x-2)-(3x-1)(x-1)+1(2x+1)}{(x-1)(x-2)}=$$ **<u>Pazi na minus!!!</u>**
$$\frac{x^2-2x-(3x^2-3x-x+1)+2x+1}{(x-1)(x-2)}=$$
$$\frac{x^2-2x-3x^2+3x+x-1+2x+1}{(x-1)(x-2)}=$$
$$\frac{-2x^2+4x}{(x-1)(x-2)}=$$
$$\frac{-2x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2x\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}=\frac{-2x}{x-1}$$

<u>Uslovi zadatka:</u>

$$x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$$
$$x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$$

**5)** $\frac{1}{x^2+10x+25}+\frac{1}{x^2-10x+25}+\frac{2}{x^2-25}=?$

Rešenje:

$$\frac{1}{x^2+10x+25}+\frac{1}{x^2-10x+25}+\frac{2}{x^2-25}=$$

$$\frac{1}{(x+5)^2}+\frac{1}{(x-5)^2}+\frac{2}{(x-5)(x+5)}=$$

$$\frac{1\cdot(x-5)^2+1\cdot(x+5)^2+2\cdot(x^2-25)}{(x+5)^2(x-5)^2}=$$

$$\frac{x^2-10x+25+x^2+10x+25+2(x^2-25)}{(x+5)^2(x-5)^2}=$$

$$\frac{2x^2+50-2x^2-50}{(x+5)^2(x-5)^2}=$$

$$=\frac{4x^2}{(x+5)^2(x-5)^2}=\frac{4x^2}{(x^2-25)^2}$$

<u>Uslovi zadatka:</u>

$$x+5\neq 0 \Rightarrow x\neq -5$$
$$x-5\neq 0 \Rightarrow x\neq 5$$

Množenje i deljenje racionalnih algebarskih izraza se radi kao i kod običnih razlomaka, s tim da prvo moramo “svaki’’ rastaviti na činioce. Dakle:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D} \quad \text{i} \quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

**1)** $\frac{a^2-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}=?$ prvo “svaki’’ rastavimo na činioce !!!

$$\frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a+1)^2}{a(a+1)}=\text{''Skratimo''} \quad \frac{\cancel{A}}{\cancel{B}}\cdot\frac{\cancel{C}}{\cancel{D}}$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

<u>Uslov zadatka:</u>

$a^2-1\neq 0$ i $a^2+a\neq 0$

$a\neq 1$, $a\neq -1$, $a\neq 0$

**2)** $\frac{a^2-ab}{a^2-ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab}=$

$$\frac{a(a-b)}{a(a+b)}\cdot\frac{ab(a+b)}{ab}=\frac{a-b}{1}=a-b$$

<u>Uslov zadatka:</u>

$a\neq 0, b\neq 0, a+b\neq 0$

**3)** $\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}=?$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}:\frac{x(x+5)}{(x-3)(x+3)}=$$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}=\frac{(x-5)\cdot(x+3)}{x^2}$$

Uslovi:

$x \neq 0, x-3 \neq 0, x+3 \neq 0$

$x \neq 3, x \neq -3$

**4)** $\dfrac{a^2+b^2}{1+2m+m^2} : \dfrac{a^4-b^4}{1-2m^2+m^4} = ?$

$$\frac{a^2+b^2}{1+2m+m^2} : \frac{a^4-b^4}{1-2m^2+m^4} =$$

$$\frac{a^2+b^2}{(1+m)^2} : \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(1-m^2)^2} =$$

$$\frac{a^2+b^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{(1-m)^2(1+m)^2}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{(1-m)^2}{(a-b)(a+b)}$$

<u>Uslov zadatka</u>: $m \neq 1, m \neq -1$

**5)** $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} = ?$

$$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} = \text{"pretumbajmo'' ih prvo}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2+2ac+c^2-b^2} = \text{prva tri čine "pun'' kvadrat}$$

$$\frac{(a^2+b^2)-c^2}{(a+c)^2-b^2} = \text{upotrebimo sad razliku kvadrata}$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{(a+c-b)(a+c+b)} = \frac{(a+b-c)\cancel{(a+b+c)}}{(a+c-b)\cancel{(a+c+b)}} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$$

<u>Uslov:</u> $a+c-b \neq 0$ i $a+c+b \neq 0$

**6) Skrati razlomak:** $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2} =$$

$$= \frac{x(x-3)-2(x-3)}{x(x-2)-1(x-2)} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

<u>Uslovi:</u> $x-2 \neq 0$

$x-1 \neq 0$

**7)** $\left(\frac{x}{y^2+xy}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)=?$

$$\left(\frac{x}{y(y+x)}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x(x+y)}\right):\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\right)=$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}:\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}=\frac{1}{x+y}$$

<u>Uslovi:</u> $x\neq 0,\ \ y\neq 0,\ \ x+y\neq 0,\ \ x-y\neq 0$

**8)** $\left(\frac{a}{6-3a}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}=$

$$\left(\frac{a}{3(2-a)}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{(a-2)(a+2)}\right):\frac{a-4}{a-2}=$$

**<u>PAZI: Moramo</u>** $2-a$ **da okrenemo:** $2-a=-(a-2)$ **, pa (-) izlazi ispred!!!**

$$\left(\frac{-a}{3(a-2)}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{(a-2)(a+2)}\right)\cdot\frac{a-2}{a-4}=$$

$$\frac{-a(a+2)+3a(a-2)+12a}{3(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{a-4}=$$

$$\frac{-a^2-2a+3a^2-6a+12a}{3(a+2)(a-4)}=$$

$$\frac{2a^2+4a}{3(a+2)(a-4)}=\frac{2a(a+2)}{3(a+2)(a-4)}=\frac{2a}{3(a-4)}$$

<u>Uslovi:</u> $a\neq 2,\ \ a\neq -2,\ \ a\neq 4$

**9) Uprosti izraz:** $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=$

Ovaj zadatak ne možemo rešiti “klasično’’, probajmo da saberemo prva dva:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

Dodajemo mu treći sabirak:

$$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4}=\frac{4}{1-x^4}$$

Ovo radi!!!

$$\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{4+4x^2+4-4x^2}{(1-x^4)(1+x^2)}=\frac{8}{1-x^8}$$

Idemo dalje:

$$\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8+8x^8+8-8x^8}{(1-x^8)(1+x^8)}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

Konačno:

$$\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{16+16x^{16}+16-16x^{16}}{(1-x^{16})(1+x^{16})}=\frac{32}{1-x^{32}}$$

<u>Uslovi:</u> $1-x\neq 0$ i $1+x\neq 0$

**10) Pokazati da vrednost izraza ne zavisi od a,b,c i d**

$$\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}$$

$$\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}=$$

$$\frac{4}{a+\frac{1}{\frac{bc+1}{c}}}:\frac{1}{\frac{ab+1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}=$$

**Pazi:** $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{AD}{BC}$

$$\frac{4}{a+\frac{c}{bc+1}}:\frac{b}{ab+1}-\frac{4}{b(abc+a+c)}=$$

$$\frac{4}{\frac{abc+a+c}{bc+1}}\cdot\frac{ab+1}{b}-\frac{4}{b(abc+a+c)}=$$

$$\frac{4(bc+1)}{abc+a+c}\cdot\frac{ab+1}{b}-\frac{4}{b(abc+a+c)}=$$

$\dfrac{4(bc+1)(ab+1)}{b(abc+a+c)}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}=$ Izvučemo gore 4 kao zajednički

$$\frac{4[(bc+1)(ab+1)-1]}{b(abc+a+c)}=$$

$$\frac{4[ab^2c+bc+ab+1-1]}{b(abc+a+c)}=\frac{4b(abc+c+a)}{b(abc+c+a)}=4$$ je rešenje!

**11)** Ako je $a+b+c=0$ dokazati da je $a^3+b^3+c^3=3abc$

Dokaz: Podjimo od $a+b+c=0$

$a+b=-c$ kubirajmo ovo

$$(a+b)^3=(-c)^3$$

$$a^3+\underline{3a^2b}+\underline{3ab^2}+b^3=-c^3$$

$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3 \rightarrow a+b=-c$ ovo iz a+b+c=0, zamenimo…

$$a^3+b^3-3abc=-c^3$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

**12) Ako je** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ **Dokazati da je:**

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=-3$$

Dokaz: Podjimo od $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$$

$$\frac{b+a}{ab}=-\frac{1}{c}$$

$a+b=-\frac{ab}{c}$ / Podelimo sa $c$ da bi napravili izraz iz zadatka

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=-\frac{ab}{c^2}}$$

Slično će biti:

$$\frac{b+c}{a}=-\frac{bc}{a^2}$$

$$\frac{c+a}{b}=-\frac{ca}{b^2}$$

Sad se vratimo u zadatak:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=$$

$-\frac{bc}{a^2}-\frac{ac}{b^2}-\frac{ab}{c^2}=$ Proširimo ih redom sa $a, b$ i $c$

$-\frac{abc}{a^3}-\frac{abc}{b^3}-\frac{abc}{c^3}=$ izvučemo $-abc$

$=-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$ Ajde ovo da nadjemo!!!

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c} /()^3$$

$$\frac{1}{a^3}+3\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}+3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^3}=-\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{3}{ab}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}-\frac{3}{abc}=-\frac{1}{c^3}$$

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=+\frac{3}{abc}$ Vratimo se u zadatak:

$$=-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

$$=-abc\cdot\frac{3}{abc}=-3$$

Malo je zeznuto, pa proučavajte pažljivo!