LOGARITMI- DEFINICIJA I OSOBINE

Logaritam broja *b* za osnovu *a* je realan broj *x* kojim treba stepenovati osnovu *a* da bi se dobilo pozitivan broj *b*. $(a > 0, a \neq 0)$ **ili** $\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x}$

Važno: $b > 0$ je najčešći uslov koji postavljamo a još je $a \in R, a \neq 1,\ i\ a > 0$
b-se zove numerus (logaritmand), *a* je osnova (baza)

Osnovna svojstva logaritma

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$
6. $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad tj. \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
8. Za prelazak na neku novu bazu *c*: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $a^{\log_a b} = b$

→ Ako je baza (osnova) a =10 takvi se logaritmi nazivaju **DEKADNI** i označavaju se

$\log_{10} x = \log x$. Neki profesori pišu samo $\lg x$ (da vas ne zbuni)

(Znači kad nema da piše osnova, podrazumeva se da je 10)

Još se nazivaju i **Brigsovi logaritmi,** po engleskom matematičaru Henry Briggs-u

→ Ako je osnova (baza) a = e ($e \approx 2{,}7$) onda se takvi logaritmi zovu **PRIRODNI** i

označavaju se $\log_e x = \ln x$
Ovi prirodni logaritmi se još nazivaju i **Neperovi logaritmi,** po škotskom matematičaru

John Napier-u.

→ Moramo voditi računa o zapisu:

$$(\log_a x)^2 = \log_a^2 x = \log_a x \cdot \log_a x$$
$$\log_a x^2 = \log_a x \cdot x = 2 \log_a x$$

Upoznajmo se sa svojstvima logaritma kroz sledeće primere:

Izračunati:

1)

$\log_5 1 = ?$

$\log_6 1 = ?$

$\log_{\frac{1}{2}} 1 = ?$

$\log 1 = ?$

$\ln 1 = ?$

Svi ovi logaritmi za rešenje imaju 0. Znači, za bilo koju osnovu, od jedinice rešenje je 0 ($\log_a 1 = 0$)

$\log_5 1 = 0$

$\log_6 1 = 0$

$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

$\log 1 = 0$

$\ln 1 = 0$

2)

$\log_{12} 12 = ?$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = ?$

$\log 10 = ?$

$\ln e = ?$

Svi ovi logaritmi za rešenje imaju 1, jer je $\log_a a = 1$

<u>**PAZI:**</u> $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

$\ln e = \log_e e = 1$

$\log_{12} 12 = 1$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$

$\log 10 = 1$

$\ln e = 1$

3)

a) $\log_6 2 + \log_6 3 = ?$

b) $\log_{30} 2 + \log_{30} 5 + \log_{30} 3 = ?$

Primenićemo svojstvo **3:** $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$

Dakle:

a) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 =$ (po drugom svojstvu)=1

b) $\log_{30} 2 + \log_{30} 5 + \log_{30} 3 = \log_{30} (2 \cdot 5 \cdot 3) = \log_{30} 30 = 1$

4)

a) $\log_5 10 - \log_5 2 = ?$

b) $\log_2 20 - \log_2 10 = ?$

Primenićemo: $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

Dakle:

a) $\log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \frac{10}{2} = \log_5 5 = 1$

b) $\log_2 20 - \log_2 10 = \log_2 \frac{20}{10} = \log_2 2 = 1$

5) Izračunati:

a) $\log_2 8 = ?$

b) $\log_5 \frac{1}{125} = ?$ Ovde ćemo upotrebiti $\log_a x^n = n\log_a x$

v) $\log_a \sqrt[5]{a^2} = ?$ <u>Podsetnik:</u> $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ i $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

a)

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3\cdot 1 = 3$$

b)

$$\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 \frac{1}{5^3} = \log_5 5^{-3} = -3\log_5 5 = -3\cdot 1 = -3$$

v)

$$\log_a \sqrt[5]{a^2} = \log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\log_a a = \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}$$

6) Izračunati:

a) $\log_{81} 3 = ?$

b) $\log_{\sqrt{2}} 2 = ?$

v) $\log_{\sqrt{3}} 27 = ?$

Ovde ćemo upotrebiti da je $\log_{a^s} x = \frac{1}{s}\log_a x$

a) $$\log_{81} 3 = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4}\log_3 3 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

b) $$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 2 = 2\cdot 1 = 2$$

v) $$\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 = 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

7) Izračunati:

a) $\log_5 2 \cdot \log_2 5 = ?$ **Važi:**

b) $\log_{10} 15 \cdot \log_{15} 10 = ?$ $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Dakle rešenja oba ova zadačića je 1.

$\log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1$

$\log_{10} 15 \cdot \log_{15} 10 = 1$

8) Izračunati:

a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = ?$

b) Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$ izračunati $\log_{45} 100 = ?$

Rešenje:

Ovde ćemo primeniti prelazak na novu osnovu: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = ?$

Ajde recimo da uzmemo novu osnovu 10, tada je: $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3}$; $\log_4 3 = \dfrac{\log 3}{\log 4}$, itd.

Dakle:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{\log 2}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 6}} \cdot \frac{\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 7}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\log 8} =$$

Kao što vidimo dosta toga se "skratiti'' $= \dfrac{\log 2}{\log 8} =$ (sad vidimo da je bilo bolje da uzmemo osnovu 2, ali nema veze , vraćamo se u zadatak $= \dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$)

$$= \log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

b) Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$ izračunati $\log_{45} 100 = ?$

$$\log_5 2 = a \quad \wedge \quad \log_5 3 = b$$

$\log_{45} 100 =$ (ovde je jasno da nova osnova mora biti 5.) $= \dfrac{\log_5 100}{\log_5 45} =$

$$= \frac{\log_5 10^2}{\log_5 (5 \cdot 9)} = \frac{2\log_5 10}{\log_5 5 + \log_5 9} = \frac{2\log_5 (5 \cdot 2)}{1 + \log_5 3^2} = \frac{2\left(\log_5 5 + \log_5 2\right)}{1 + 2\log_5 3} =$$

$$= \frac{2(1 + \log_5 2)}{1 + 2\log_5 3} = \frac{2(1+a)}{1+2b}$$

9) Izračunati:

a) $3^{\log_3 81} = ?$ Primenjujemo:

b) $10^{\log 5} = ?$ $a^{\log_a b} = ?$

Dakle: $3^{\log_3 81} = 81$ i $10^{\log 5} = 5$

Sad kad smo se upoznali sa osnovnim svojstvima logaritama , pokažimo još neke osnovne tipove zadataka:

1) Logaritmovati sledeće izraze za osnovu 10.

a) $A = \dfrac{x \cdot y}{z}$

b) $B = \dfrac{x^2 \cdot y^3}{z^5}$

v) $C = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{y}}$

d) $D = \sqrt[3]{5x^4 y^3}$

Rešenja:

a)

$$A = \frac{x \cdot y}{z}$$

$$\log A = \log \frac{xy}{z} = \log(xy) - \log z = \log x + \log y - \log z$$

b)

$$B = \frac{x^2 \cdot y^3}{z^5}$$

$$\log B = \log \frac{x^2 \cdot y^3}{z^5} = \log(x^2 \cdot y^3) - \log z^5 = \log x^2 + \log y^3 - \log z^5 =$$

$$= 2\log x + 3\log y - 5\log z$$

v)

$$C = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}}$$ **PAZI:** $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\log C = \log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}} = \log \sqrt[3]{x} - \log\left(\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt{z}\right) = \log x^{\frac{1}{3}} - \left(\log y^{\frac{2}{5}} + \log z^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\log x - \frac{2}{5}\log y - \frac{1}{2}\log z$$

g)

$$D=\sqrt[3]{5x^4y^3}$$

$$D=\sqrt[3]{5x^4y^3}=\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^3}=5^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot y$$

$$\log D=\log\left(5^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot y\right)$$

$$=\frac{1}{3}\log 5+\frac{4}{3}\log x+\log y$$

2) Rešiti po **x** jednačine:

a) $\log x=\log 4+2\log 5+\log 6-\log 15$
b) $\log x+\log 3=2\log r+\log \pi+\log H$
v) $2\log x-3\log a=\log 5+\log b+\frac{1}{2}\log c$

Rešenje: Ideja je da se upotrebom svojstva logaritma "spakuju'' obe strane! Dobićemo izraz $\log x=\log\otimes$, ovde izvršimo takozvano **ANTILOGARITMOVANJE**, tj. skratimo logaritme i dobijemo $x=\otimes$

a) $\log x=\log 4+2\log 5+\log 6-\log 15$ **SAVET:** Prvo brojeve ispred prebacimo kao stepen numerusa! $n\log_a x=\log_a x^n$

$$\log x=\log 4+\log 5^2+\log 6-\log 15$$

$$\log x=\log\frac{4\cdot 25\cdot 6}{15}$$

$$\log x=\log\frac{600}{15}$$

$$\log x=\log 40 \text{..................} /\ ANTILOGARITMOVANJE$$

$$x=40$$

b) $\log x+\log 3=2\log r+\log \pi+\log H$

$$\log(x\cdot 3)=\log r^2+\log\pi+\log H$$

$$\log(3x)=\log(r^2\pi H)\text{.......................................} /\ ANTILOGARITMOVANJE$$

$$3x=r^2\pi H$$

$$x=\frac{r^2\pi H}{3}\text{...}(V\ kupe)$$

v)

$$2\log x - 3\log a = \log 5 + \log b + \frac{1}{2}\log c$$

$$\log x^2 - \log a^3 = \log 5 + \log b + \log c^{\frac{1}{2}}$$

$$\log \frac{x^2}{a^3} = \log 5 \cdot b \cdot \sqrt{c} \text{................/ } \mathit{ANTILOGARITMOVANJE}$$

$$\frac{x^2}{a^3} = 5b\sqrt{c}$$

$$x^2 = 5a^3 b\sqrt{c}$$

$$x = \sqrt{5a^3 b\sqrt{c}}$$

3) Ako je $\log_{14} 7 = a$ i $\log_{14} 5 = b$ Izračunati $\log_{35} 28 = ?$

<u>Rešenje:</u> ovo je onaj tip zadataka gde moramo uzeti novu osnovu, naravno, to će biti 14.

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \frac{196}{7}}{\log_{14}(7\cdot 5)} = \frac{\log_{14} 196 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{\log_{14} 14^2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} =$$

$$= \frac{2\log_{14} 14 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{2-a}{a+b}$$

Vi se sada naravno pitate kako smo mi znali da napišemo $28 = \frac{196}{7} = \frac{14^2}{7}$. Probajte razne opcije, nešto mora da "upali''. Uglavnom, iskustvo je presudno!