KOMBINATORIKA

BEZ PONAVLJANJA

1) Permutacije od n elemenata : $\mathbf{P(n)= n != n(n-1)(n-2)\ldots 3 \circ 2 \circ 1}$ još važi po definiciji : $\mathbf{0!=1}$

2) Varijacije k-te klase od n elemenata $\mathbf{V_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$

3) Kombinacije k-te klase od n elemenata $\mathbf{C_k^n = \binom{n}{k} =} \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ još važi:

$\mathbf{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$, $\mathbf{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$, $\mathbf{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

SA PONAVLJANJEM

1) Broj permutacija od n elemenata od kojih je k jednako medjusobno je $\mathbf{P_k(n)=}\frac{n!}{k!}$
2) Varijacije k-te klase od n elemenata $\overline{V_k^n}$ $\mathbf{=n^k}$
3) Kombinacije $\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}$

Sa n obeležavamo broj elemenata, a sa k klasu elementa.

PRVI PRINCIP ODBROJAVANJA: Ako jedan događaj može da se realizuje na **m** načina, a neki drugi na **n** načina, tada jedan od njih može da se realizuje na **m+n** načina

DRUGI PRINCIP ODBROJAVANJA: Ako jedan dogadjaj može da se realizuje na **m** načina , a neki drugi dogadjaj na **n** načina, tada se oba dogadjaja mogu istovremeno realizovati na **mn** načina

KAKO PREPOZNATI DA LI SU P , V ILI C ?

Neka je dat skup S sa n različitih elemenata. **Ako radimo sa svih n elemenata**, odnosno pravimo sve moguće različite rasporede tih n elemenata , onda ćemo upotrebiti **permutacije**. Ako trebamo formirati sve njegove podskupove od po k različitih elemenata gde nam je **bitan redosled elemenata**, onda cemo koristiti **VARIJACIJE.** Ako trebamo formirati podskupove gde nam **nije bitan redosled elemenata ,** onda ćemo upotrebiti **KOMBINACIJE.** Dve kombinacije k-te klase su jednake, ako imaju iste elemente, bez obzira kako su uredjene. Na primer : abcd=acdb=…=dcba. Kod kombinacija je svejedno kako pišemo elemente u jednom slogu, dok kod varijacija o tome moramo voditi računa.

PRIMERI

1) Koliko se morzeovih znakova može formirati iz oba osnovna znaka . i -, ako se jedan znak sastoji najviše od pet elementarnih znakova?

Rešenje:

Razmišljamo:

- Imamo dva znaka : · i – (tačka i crta) pa je sigurno $n = 2$
- Pošto kaže da se jedan znak sastoji <u>najviše</u> od 5 elementarnih znakova razlikovaćemo 5 situacija:

1) Ako imamo samo 1 znak $\rightarrow \overline{V_1^2}$
2) Ako ima 2 znaka $\rightarrow \overline{V_2^2}$
3) Ako ima 3 znaka $\rightarrow \overline{V_3^2}$
4) Ako ima 4 znaka $\rightarrow \overline{V_4^2}$
5) Ako ima 5 znaka $\rightarrow \overline{V_5^2}$

Pa je konačno rešenje:

$$
\begin{aligned}
&= \overline{V_1^2} + \overline{V_2^2} + \overline{V_3^2} + \overline{V_4^2} + \overline{V_5^2} \\
&= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \\
&= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62
\end{aligned}
$$

2) Odrediti broj različitih prirodnih brojeva do 10 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Rešenje:

Razmišljamo:

Traženi brojevi mogu biti:

1) Jednocifreni
2) Dvocifreni
3) Trocifreni
4) Četvorocifreni
5) Petocifreni

Imamo 6 brojeva: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i cifre se mogu ponavljati, pa su u pitanju varijacije sa ponavljanjem. **Moramo paziti da 0 nije na prvom mestu!**

Zato ćemo naći sve mogućnosti pa oduzeti broj mogućnosti kada je 0 na prvom mestu.

1) Jednocifreni → to su brojevi 1, 2, 3, 4, 5 to jest $\bar{V}_1^5$
2) Dvocifreni → $\bar{V}_2^6 - \bar{V}_1^6 = 6^2 - 6^1 = 30$
3) Trocifreni → $\bar{V}_3^6 - \bar{V}_2^6 = 6^3 - 6^2 = 180$
4) Četvorocifreni → $\bar{V}_4^6 - \bar{V}_3^6 = 6^4 - 6^3 = 1080$
5) Petocifreni → $\bar{V}_5^6 - \bar{V}_4^6 = 6^5 - 6^4 = 6480$

Dakle , konačno rešenje je: $5 + 30 + 180 + 1080 + 6480 = 7775$

3) U ravni je dato 10 različitih tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna.

Odrediti broj svih pravih koje su odredjene datim tačkama.

Rešenje:

Pošto je prava odredjena dvema različitim tačkama, znači da od 10 biramo po 2.

Pošto redosled tačaka nije bitan u pitanju su kombinacije.

$$C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

10 tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna (ne leži na istoj pravoj) odredjuju 45 pravih

4) Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da bar 2 beka i bar jedan centar?

Rešenje:

Razmišljamo:

Pošto u zadatku kaže da moraju u petorci igrati bar 2 beka i 1 centar to nam daje više mogućnosti

1) 2 beka, 1 centar, 2 krila $\rightarrow C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3$
2) 2 beka, 2 centra, 1 krilo $\rightarrow C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3$
3) 2 beka, 3 centra $\rightarrow C_2^5 \cdot C_3^4$
4) 3 beka, 1 centar, 1 krilo $\rightarrow C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3$
5) 3 beka, 2 centra $\rightarrow C_4^5 \cdot C_2^4$
6) 4 beka, 1 centar $\rightarrow C_4^5 \cdot C_1^4$

Sad je broj svih mogućnosti:

$$C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3 + C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3 + C_2^5 \cdot C_3^4 + \cdot C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3 + \cdot C_3^5 \cdot C_2^4 + C_4^5 \cdot C_1^4 =$$
$$\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{1} = 540 \text{ mogućnosti}$$

5) Na koliko različitih načina se moze raspodeliti 5 dečaka i 5 devojčica u bioskopskom redu od 10 stolica tako da dva dečaka nikad ne sede jedan pored drugog?
Rešenje:

Razmišljamo:

Pošto ima 10 mesta a 2 dečaka ne smeju biti jedan do drugog, to znači da raspored ide jedan dečak jedna devojčica.

Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.

- Mogućnost za dečake je 5!
- Mogućnost za devojčice je 5!

Ali moramo razmišljati da na prvom mestu može biti i devojčica.

Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.

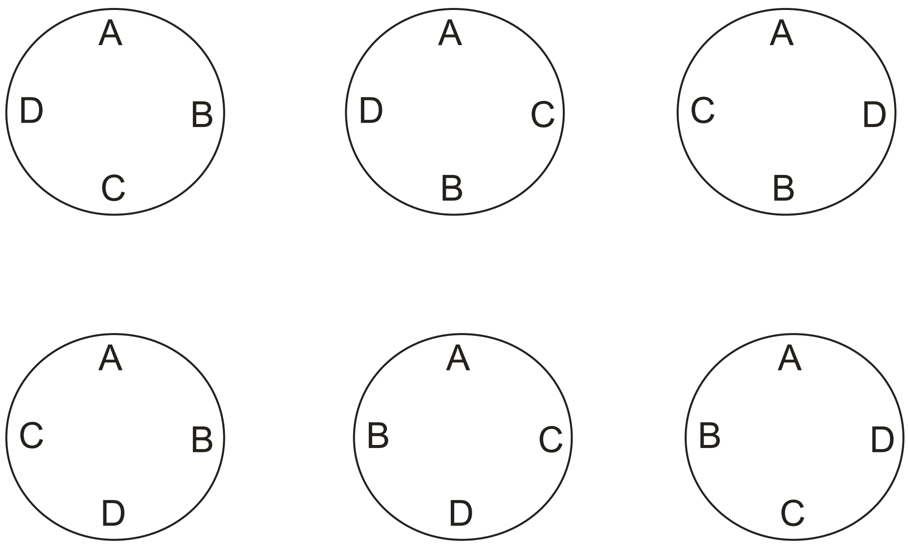
Pa je broj svih mogućnosti:

$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$

6) Na koliko načina četiri osobe mogu da stanu u krug?

Rešenje:

Najbolje da mi to nacrtamo



Dakle ima 6 mogućnosti!

7) Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju sa 2 a završavaju se sa 7?

Rešenje:

To su brojevi 2 ▒▒ 7, gde umesto kvadratića mogu biti brojevi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Znači, broj mogućnosti je:

$\overline{V}_2^{10} = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

8) Koliko ima trocifrenih brojeva koji su deljivi sa 5?

Rešenje:

Trocifreni brojevi su od 100 do 999. Znači ima 900 brojeva

Pošto je svaki peti deljiv sa 5 počevši od 100 to takvih brojeva ima 900:5=180

9) Koliko ima brojeva izmedju 3000 i 6000 koji se završavaju sa 3 ili 7?

Rešenje:

→ Brojevi koji počinju sa 3 su

3 ▒ ▒ 3 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

3 ▒ ▒ 7 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

→ Brojevi koji počinju sa 4

4 ▒ ▒ 3 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

4 ▒ ▒ 7 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

→ Brojevi koji počinju sa 5

5 ▒ ▒ 3 → 100 broj

5 ▒ ▒ 7 → 100 broja

Ukupno ima 100·6=600 brojeva.