

PREVOJNE TAČKE KONVEKSOST I KONKAVNOST

Funkcija $f(x)$ je konveksna na intervalu (a,b) ako je $f''(x) > 0$ na (a,b)

Funkcija $f(x)$ je konkavna na intervalu (a,b) ako je $f''(x) < 0$ na (a,b)

Neka u tački $x = x_0$ važi da je $f''(x_0) = 0$. Ako $f''(x)$ menja znak u okolini tačke x_0 ,

onda je $x = x_0$ prevojna tačka $f(x)$.

Šta konkretno radimo?

Nadjemo y'' i to izjednačimo sa 0 (naravno, samo brojilac).

Rešenja te jednačine x_1, x_2, \dots (naravno ako ih ima) menjamo u početnu funkciju da dobijemo y_1, y_2, \dots

Dobijene tačke $P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2); \dots$ su prevojne tačke funkcije.

Dalje razmišljamo od čega nam zavisi znak drugog izvoda i rešavamo nejednačine $y'' > 0 \wedge y'' < 0$.

Funkcija je **konveksna** na intervalima na kojima je $y'' > 0$, to jest “smeje se”



Funkcija je **konkavna** na intervalima na kojima je $y'' < 0$, to jest “tužna je”



Prevojna tačka je mesto gde funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost ili obrnuto...

Evo malo primera....

1. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti i naći prevojne tačke (ukoliko postoje)

a) $y = \frac{1+x}{1-x}$

b) $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

v) $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$

g) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

Rešenje:

a) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Naravno, najpre da nadujemo prvi izvod:

$$y' = \frac{(1+x)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1(1-x) + 1(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Sad tražimo drugi izvod, al je bolje da prvi izvod napišemo u obliku: $y' = \frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2}$

$$y' = 2(1-x)^{-2}$$

$$y'' = 2(-2)(1-x)^{-2-1}$$

$$y'' = -4(1-x)^{-3}$$

$$y'' = \frac{-4}{(1-x)^3}$$

U brojiocu je samo -4 pa zaključujemo da nema prevojnih tačaka.


Dalje se pitamo od čega nam zavisi znak drugog izvoda....

	1	
-4	-	-
1-x	+	-
y''	-	+

Gde je + tu se funkcija smeje (konveksna je)

Gde je - tu je funkcija tužna (konkavna je)

	$-\infty$	1	∞
-4	-	-	-
1-x	+	-	-
y''	-	+	+



b) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - 4)}{(x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{2x(x - 1) - 1(x^2 - 4)}{(x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x - 1x^2 + 4}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$$

Sad tražimo drugi izvod:

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{(x^2 - 2x + 4)'(x - 1)^2 - ((x - 1)^2)'(x^2 - 2x + 4)}{(x - 1)^4}$$

$$y'' = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x^2 - 2x + 4)}{(x - 1)^4} \quad \text{gore izvučemo x-1 ispred zagrade}$$



$$y'' = \frac{(x - 1)[(2x - 2)(x - 1) - 2(x^2 - 2x + 4)]}{(x - 1)^4}$$

$$y'' = \frac{[2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x - 8]}{(x - 1)^3}$$

$$y'' = \frac{-6}{(x - 1)^3}$$

Zaključujemo da funkcija nema prevojnih tačaka, jer je $-6 \neq 0$.

Konveksnost i konkavnost ispitujemo :

	$-\infty$	1	∞
-6	—		—
x-1	—		+
y''	+		—
			

$$\text{v)} \quad y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$

$$y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1} \right)' = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)'(x+1) - (x+1)'(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x+1}}{x-2} \cdot \frac{1(x+1) - 1(x-2)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x+1)}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$$y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)} \quad \text{pazi} \quad \left(\frac{1}{\otimes} \right)' = -\frac{1}{\otimes^2} \cdot \otimes'$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} [(x-2)(x+1)']$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} [1(x+1) + 1(x-2)]$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2} (2x-1)$$

$$y'' = \frac{3(1-2x)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$y'' = 0$ za $1-2x = 0$ pa je $x = \frac{1}{2}$, ali **PAZI**, ova tačka **NE PRIPADA** oblasti definisanosti, pa funkcija nema prevoj.

$$y'' > 0 \rightarrow 1-2x > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2} \rightarrow x < -1$$

$$y'' < 0 \rightarrow 1-2x < 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow x > 2$$



g) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

$y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ moramo kao izvod proizvoda i pazimo da je $e^{\frac{1}{x-2}}$ složena funkcija $(e^{\Theta})' = e^{\Theta} \cdot \Theta'$

$$y' = 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + (e^{\frac{1}{x-2}})' \cdot x$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(\frac{1}{x-2}\right)' \cdot x$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{(x-2)^2 - x}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4 - x}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$$y'' = (e^{\frac{1}{x-2}})' \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} + \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}\right)' \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} + \frac{(x^2 - 5x + 4)' \cdot (x-2)^2 - ((x-2)^2)' \cdot (x^2 - 5x + 4)}{(x-2)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

Posle sredjivanja dobijamo:

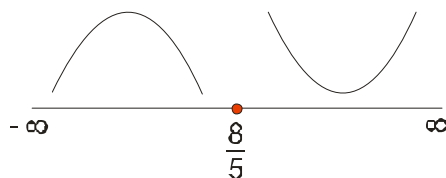
$$y'' = \frac{5x-8}{(x-2)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y'' = 0 \rightarrow 5x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$\text{Za } x = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{\frac{8}{5}-2}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{-\frac{2}{5}}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}}$$

Tačka prevoja je dakle : $P\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}}\right)$

Znak drugog izvoda nam zavisi samo od $5x - 8$ jer su ostali izrazi pozitivni:



$$y'' > 0 \rightarrow 5x - 8 > 0 \rightarrow x > \frac{8}{5}$$

$$y'' < 0 \rightarrow 5x - 8 < 0 \rightarrow x < \frac{8}{5}$$

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{(x-2) \cdot \sqrt{x^2+2} - (\sqrt{x^2+2}) \cdot (x-2)}{(\sqrt{x^2+2})^2} \quad \text{pazi, } \sqrt{x^2+2} \text{ mora kao složena funkcija...}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot (x^2+2) \cdot (x-2)}{x^2+2}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot x \cdot (x-2)}{x^2+2}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x-2)}{\sqrt{x^2+2} \cdot (x^2+2)}$$

$$y' = \frac{x^2+2 - x^2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \quad \text{ili ako odmah pripremimo za drugi izvod } y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'' = 2 \frac{(x+1) \cdot (x^2+2)^{\frac{3}{2}} - ((x^2+2)^{\frac{3}{2}})' \cdot (x+1)}{((x^2+2)^{\frac{3}{2}})^2}$$

$$y'' = 2 \frac{1 \cdot (x^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{3}{2}-1} \cdot (x^2+2)' \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y'' = 2 \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y'' = 2 \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3} \quad \text{izvučemo zajednički } (x^2+2)^{\frac{1}{2}} \text{ u brojocu}$$

$$y'' = 2 \frac{\cancel{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}} [x^2+2-3x \cdot (x+1)]}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y'' = 2 \frac{x^2+2-3x^2-3x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y'' = 2 \frac{-2x^2-3x+2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y'' = 0$$

$$-2x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Za } x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Za } x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow y_1 = -1$$

Imamo dve prevojne tačke:

$$P_1(-2, \frac{-4}{\sqrt{6}})$$

$$P_2(\frac{1}{2}, -1)$$

Znak drugog izvoda opet zavisi samo od izraza u brojiocu $-2x^2 - 3x + 2$.

Upotrebićemo da kvadratni trinom ima znak broja $a = -2$ svuda osim između nula!

