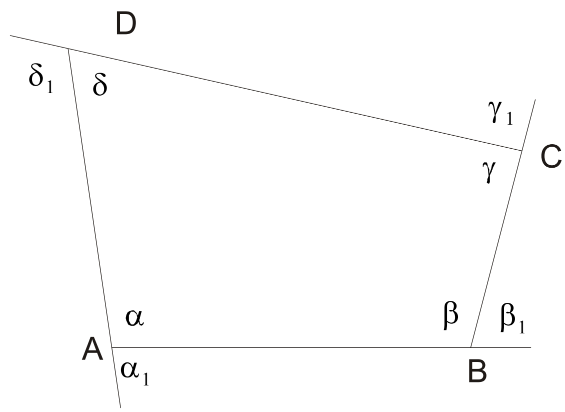
ČETVOROUGAO

Mnogougao koji ima četiri stranice naziva se četvorougao.

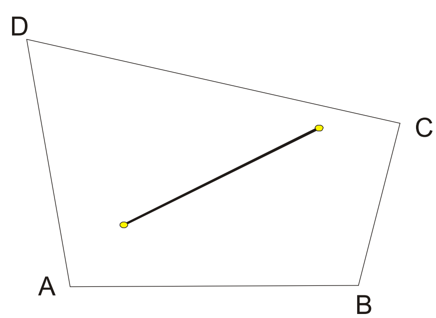


Za svaki četvorougao važi da im je zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova isti i iznosi 360^0

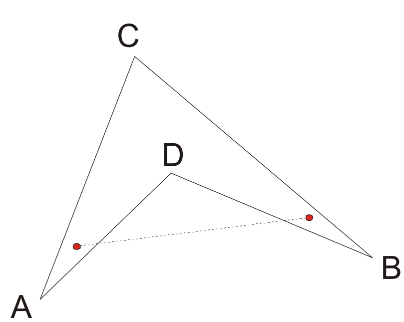
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0 \qquad \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360^0$$

Najpre da kažemo da četvorouglovi mogu biti : **konveksni** i **nekonveksni**.

Četvorougao je **konveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti ostaje unutar četvorougla.



Četvorougao je **nekonveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti izlazi iz nje.



Podela četvorouglova može se izvršiti na više načina.Prvu podelu izvršio je još Euklid.

On ih je podelio u pet grupa: kvadrati, pravougaonici,rombovi,romboidi i trapezi.

Međutim, danas je podela izvršena na sledeći način:

1) **Paralelogrami** (imaju po dva para paralelnih stranica)

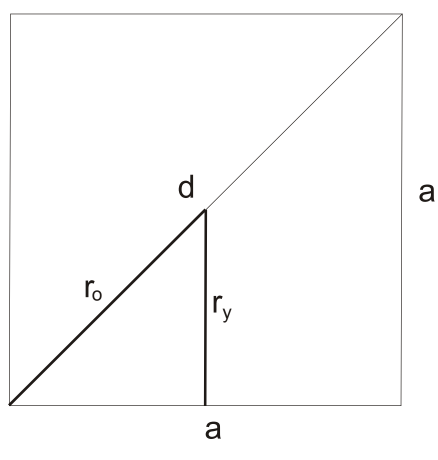
2) **Trapezi** (imaju jedan par paralelnih stranica)

3) **Trapezoidi** (nemaju paralelne stranice)

Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice paralelne.

KVADRAT

- Sva četiri ugla su mu prava
- Sve stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove pod pravim uglom
- Centralno simetrična je figura
- Ima 4 ose simetrije



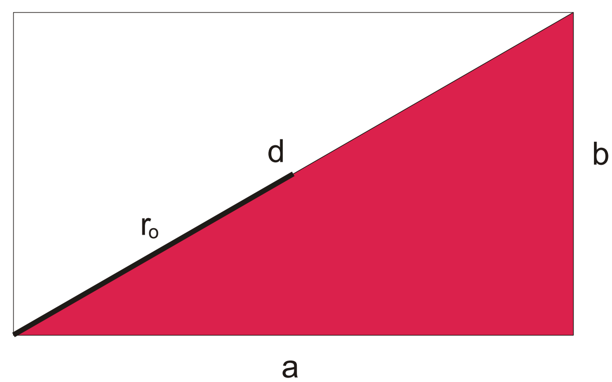
O= 4a

P = a^2 ili $P = \frac{d^2}{2}$, $r_y = \frac{a}{2}$ i $r_o = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

d=$a\sqrt{2}$ i ako nam treba dužina stranice a imamo dužinu dijagonale $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

PRAVOUGAONIK

- Sva četiri ugla su mu prava
- Paralelne stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove
- Centralnosimetrična figura
- Ima 2 ose simetrije



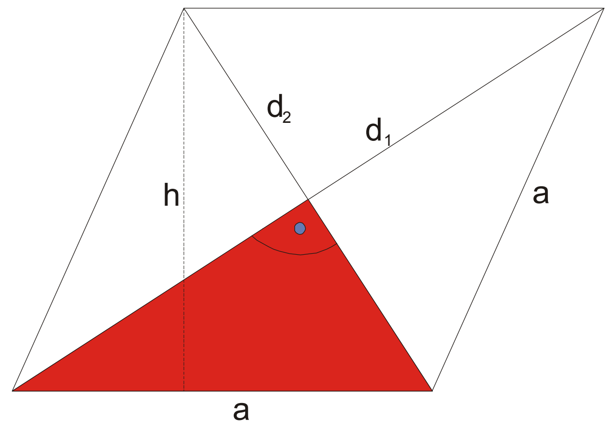
O = 2a + 2b

P = ab

$r_o = \frac{d}{2}$ a dijagonalu nalazimo iz Pitagorine teoreme: $d^2 = a^2 + b^2$

ROMB

- Sve četiri stanice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove pod pravim uglom
- Centralnosimetrična figura
- Ima dve ose simetrije



O = 4a

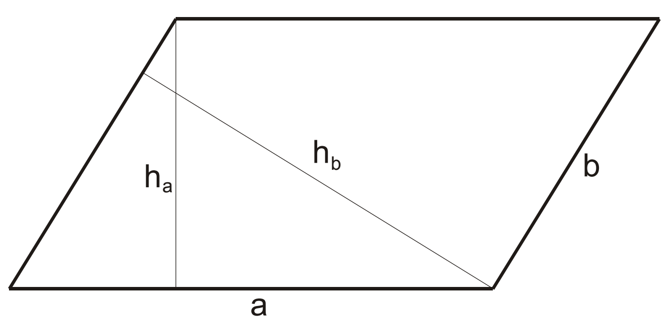
$P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ ili P = ah

Može se upisati kružnica čiji je poluprečnik $r_y = \frac{h}{2}$

Pitagorina teorema se primenjuje na osenčeni trougao: $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$

ROMBOID

- Paralelne stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove
- Centralnosimetrična figura



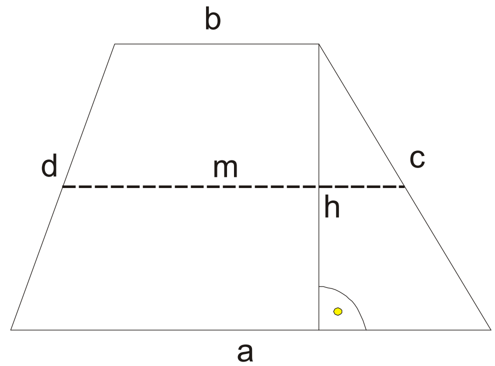
O = 2a + 2b

P= ah_a ili P= bh_b

Ne može da se upiše niti da se opiše kružnica .

Četvorougao čije su samo dve naspramne stranice paralelne zove se TRAPEZ.

Paralelne stranice se zovu osnovice, a druge dve kraci.

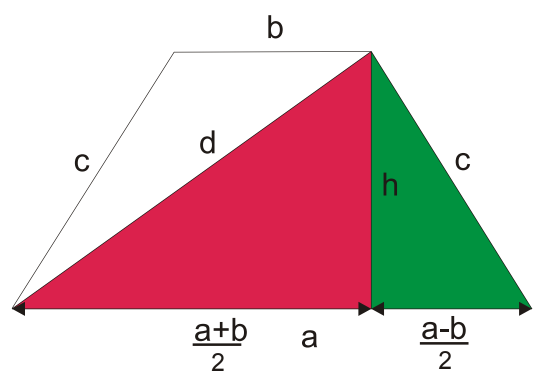


Stranice a i b su osnovice, c i d kraci. Duž koja spaja središta krakova je srednja linija

trapeza m = $\frac{a+b}{2}$. Naravno m je paralelna i sa a i sa b.

O = a+b+c+d ; P= $\frac{a+b}{2} \cdot h$ ili P = mh

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ



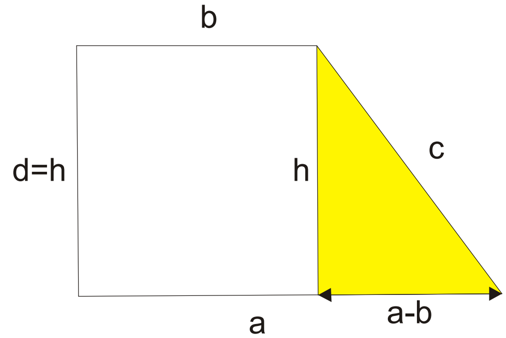
O = a + b + 2c

P= $\frac{a+b}{2} \cdot h$ ili P = mh

Primena Pitagorine teoreme: $(\frac{a-b}{2})^2 + h^2 = c^2$ (na zeleni trougao)

$(\frac{a+b}{2})^2 + h^2 = d^2$ (na crveni trougao)

PRAVOUGLI TRAPEZ



O = a + b + c + h

P= $\frac{a+b}{2}\cdot$ h   ili   P = mh

Primena Pitagorine teoreme: $(a-b)^2 + h^2 = c^2$

Najpoznatiji trapezoid je **deltoid.**

DELTOID

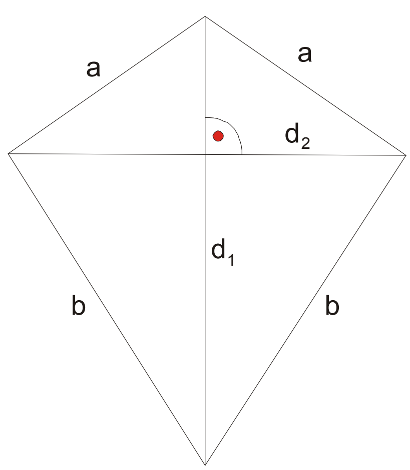
-Deltoid je trapezoid koji ima dva para jednakih uzastopnih stranica.

-Dijagonale deltoida su među sobom normalne.

-Simetrala deltoida je simetrala i njegovih uglova koje obrazuju jednake stranice

-Uglovi koje obrazuju nejednake stranice su među sobom jednaki.

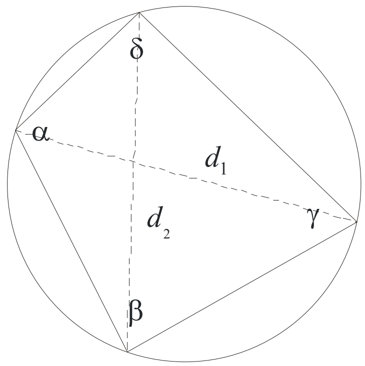
-Dijagonale su istovremeno i simetrale uglova.



O = 2a + 2b   P= $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Tetivni četvorougao

To je četvorougao oko koga može da se opiše kružnica.
Uslov je: $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^{o}$



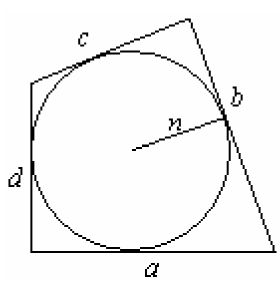
$$d_1=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \rightarrow \text{ Jedna dijagonala}$$

$$d_2=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}} \rightarrow \text{Druga dijagonala}$$

$$P=\frac{d_1d_2}{2}\cdot\sin\varphi \rightarrow (\varphi \text{ je ugao izmedju dijagonala})$$

Tangentni četvorougao

To je četvorougao u koji može da se upiše kružnica.
Uslov je: $a+c=b+d$



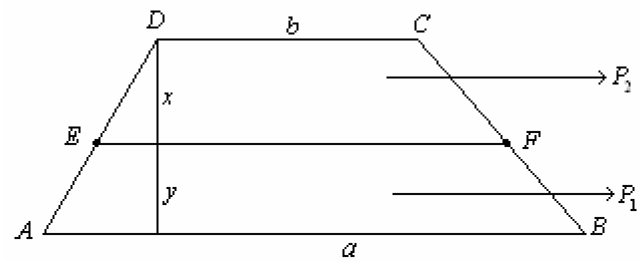
$P=(a+c)r$ ili
$P=(b+d)r$

$O=2(a+c)$ ili
$O=2(b+d)$

Primeri

1) Trapez osnovica a i b podeljen je odsečkom EF koji je paralelan osnovicama na dva dela jednakih površina. Odrediti EF.

Rešenje:



$$x+y=h$$

$$P_1=P_2 \Rightarrow \frac{a+EF}{2}\cdot y=\frac{EF+b}{2}\cdot x$$

(površine su jednake)

$$y(a+EF)=x(EF+b) \Rightarrow x=\frac{y(a+EF)}{EF+b}$$

$P_1+P_2=P$ (zbir ove dve površine daje površinu celog trapeza)

$$\frac{a+EF}{2}\cdot y+\frac{EF+b}{2}\cdot x=\frac{a+b}{2}(x+y) \rightarrow$$ sve podelimo sa 2 i zamenimo x

$$(a+EF)y+(EF+b)\frac{y(a+EF)}{EF+b}=(a+b)\left(\frac{y(a+EF)}{EF+b}+y\right) \rightarrow$$ y je zajednički...

$$(a+EF)\cancel{y}+(EF+b)\frac{\cancel{y}(a+EF)}{EF+b}=(a+b)\frac{\cancel{y}\left[(a+EF)+(b+EF)\right]}{EF+b} \rightarrow$$ sve pomnozimo sa $EF+b$

$$(a+EF)(EF+b)+(EF+b)(a+EF)=(a+b)\left[(a+EF)+(b+EF)\right]$$

$$2(a+EF)(EF+b)=(a+b)(a+b+2EF)$$

$$2(aEF+ab+EF^2+bEF)=(a+b)(a+b)+2EF(a+b)$$

$$2EF(a+b+EF)-2EF(a+b)=(a+b)^2-2ab$$

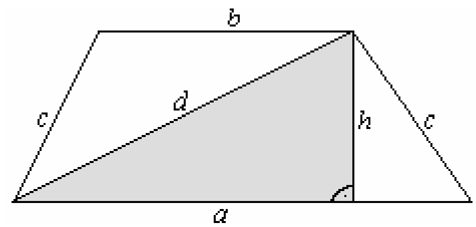
$$\cancel{2EF(a+b)}+2EF^2-\cancel{2EF(a+b)}=a^2\cancel{+2ab}+b^2\cancel{-2ab}$$

$$2EF^2=a^2+b^2$$

$$\boxed{EF=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

2) U jednakom trapezu površine P=32 i visine $h=4$, razlika osnovica je 6. Odrediti dužinu dijagonale .

Rešenje:



$P=32$

$h=4$

$a-b=6$

$d=?$

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$32=\frac{a+b}{2}\cdot 4$$

$$32=(a+b)\cdot 2$$

$$a+b=16$$

Sa ova dva podatka pravimo sistem

$$\left.\begin{aligned}a+b&=16\\a-b&=6\end{aligned}\right\}\oplus$$

$$2a=22$$

$$a=11\Rightarrow b=5$$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2$$

$$d^2=\left(\frac{11+5}{2}\right)^2+4^2$$

$$d^2=64+16$$

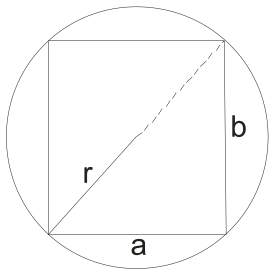
$$d^2=80$$

$$d=\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}$$

$$d=4\sqrt{5}$$

3) U krugu obima $O = 10\pi$ upisan je pravougaonik čije se stranice odnose kao 3:4. Odrediti površinu pravougaonika

Rešenje:



$$O = 10\pi$$
$$a : b = 3 : 4$$
$$P = ?$$

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2r$$
$$O = 2r\pi$$
$$10\pi = 2r\pi$$
$$r = 5 \Rightarrow d = 10$$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$a^2 + b^2 = d^2$$
$$(3k)^2 + (4k)^2 = 10^2$$
$$9k^2 + 16k^2 = 100$$
$$25k^2 = 100$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2$$

Pošto je $a : b = 3 : 4$

Onda je: $\begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \end{cases}$

$$a = 3 \cdot 2 = 6$$
$$b = 4 \cdot 2 = 8$$
$$P = a \cdot b$$
$$P = 6 \cdot 8$$
$$P = 48$$

4) Stranica romba je $a=5$ a manja dijagonala $d_1=6$. Odrediti površinu upisanog kruga.

Rešenje:

$a=5$

$d_1=6$

$P_{kr}=?$

Najpre ćemo naći drugu dijagonalu d_2.

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=5^2$$

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=16$$

$$\frac{d_2}{2}=4 \Rightarrow d_2=8$$

Kako imamo 2 obrasca za P romba, to ćemo iskoristiti da nadjemo visinu:

$$P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$$

$$P=ah \Rightarrow h=\frac{P}{a}=\frac{24}{5}=4{,}8$$

$$r=\frac{h}{2} \Rightarrow r=\frac{4{,}8}{2}=2{,}4$$

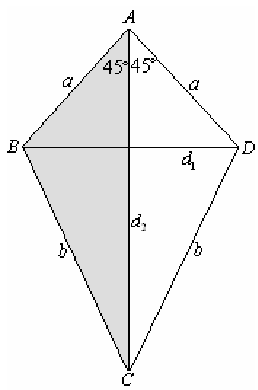
$$P_{kr}=r^2\pi$$

$$P_{kr}=(2{,}4)^2\pi$$

$$P_{kr}=5{,}76\pi$$

5) Kraće stranice deltoida obrazuju prav ugao. Ako je obim deltoida $O = 6 + 2\sqrt{17}$, a dužina dijagonala $d_2 = 4\sqrt{2}$, odrediti površinu.

Rešenje:



$$O = 6 + 2\sqrt{17}$$
$$d_2 = 4\sqrt{2}$$
$$P = ?$$

$$O = 2a + 2b$$
$$6 + 2\sqrt{17} = 2a + 2b$$
$$3 + \sqrt{17} = a + b \Rightarrow b = 3 + \sqrt{17} - a$$

Primenimo kosinusnu teoremu na trougao ABC pošto je $\angle \ BAC = 45^o$

$$b^2 = a^2 + d_2^2 - 2ad_2 \cos 45^o$$
$$(3 + \sqrt{17} - a)^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2a4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PAZI: $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

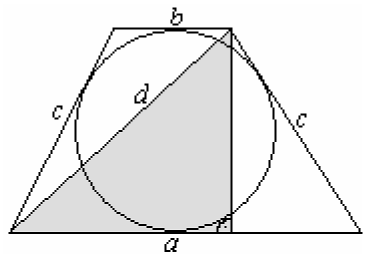
$$9 + 17 + a^2 + 6\sqrt{17} - 6a - 2\sqrt{17}a = a^2 + 32 - 8a$$

Sredimo

$$2a\left(1 - \sqrt{17}\right) = 6\left(1 - \sqrt{17}\right)$$
$$2a = 6$$
$$a = 3 \Rightarrow b = \sqrt{17}$$
$$d_1 = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$$

6) Oko kruga poluprečnika $r=\dfrac{3}{2}$ je opisan jednakokraki trapez površine $P=15$. Izračunati dužinu dijagonale trapeza.

Rešenje:



Ovo je tangentni četvorougao!!!

$a+b=2c$ (ali nam sada neće trebati)

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$15=\frac{a+b}{2}\cdot 3$$

$$\frac{a+b}{2}=5$$

$$a+b=10$$

$r=\dfrac{3}{2}, P=15$

$d=?$

$$h=2r=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

$$d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2$$

$$d^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+3^2$$

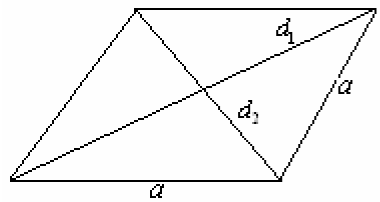
$$d^2=25+9$$

$$d^2=34$$

$$d=\sqrt{34}$$

7) Jedna dijagonala romba je za 20% kraća od druge. Ako je visina romba $h=\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}}$, odrediti površinu romba.

Rešenje:



Zapišimo najpre podatke:

$$d_2 = 80\% d_1$$
$$d_2 = \frac{80}{100} d_1$$
$$d_2 = \frac{4}{5} d_1$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$
$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{4}{5}d_1}{2}\right)^2 = a^2$$
$$\frac{d_1^2}{4} + \frac{4d_1^2}{25} = a^2$$
$$25d_1^2 + 16d_1^2 = 100a^2$$
$$41d_1^2 = 100a^2$$
$$a^2 = \frac{41d_1^2}{100}$$
$$a = \frac{\sqrt{41}d_1}{10}$$

$$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$
$$\frac{\cancel{\sqrt{41}} \cdot \cancel{d_1}}{\cancel{10}} \cdot \frac{4\cancel{0}\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{41}}} = \frac{\cancel{d_1} \cdot \frac{4}{5} d_1}{2}$$
$$4\sqrt{2} = \frac{2}{5} d_1$$
$$d_1 = 10\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = \frac{4}{5} 10\sqrt{2}$$
$$d_2 = 8\sqrt{2}$$
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 80$$
$$\boxed{P = 80}$$