Попова Наталья М80-405Б-20

B-16

② Найти свободное, вынужденное движения и выходной сигнал двумя способами:

— классическим

— с применением преобразования Лапласа.

а) $\ddot{x} - 14\dot{x} - 32x = g$, $x(0) = 16$, $\dot{x}(0) = 0$, $g(t) = 16e^{-4t}$, $t > 0$

б) $\ddot{x} + 32\dot{x} + 257x = g$, $x(0) = 16$, $\dot{x}(0) = 9$, $g(t) = e^{-16t}\sin t$, $t > 0$

Классическим способом:

а) Свободное движение:

$$\ddot{x} - 14\dot{x} - 32x = 0, \quad x(0) = 16, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\lambda^2 - 14\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 16$$

Общее реш. одн. ур-я: $x_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{16t}$

$\dot{x}_0(t) = -2C_1 e^{-2t} + 16C_2 e^{16t}$

$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 16 \\ \dot{x}(0) = -2C_1 + 16C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \dfrac{128}{9}, \quad C_2 = \dfrac{16}{9}$

$$x_c(t) = \frac{128}{9}e^{-2t} + \frac{16}{9}e^{16t}$$

Вынужденное движение:

$$\ddot{x} - 14\dot{x} - 32x = 16e^{-4t}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Общ. реш. одн.: $x_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{16t}$

Частное решение: $x_{_H}(t) = Ae^{-4t}$

$\dot{x}_{_H}(t) = -4Ae^{-4t}$, $\ddot{x}_{_H}(t) = 16Ae^{-4t}$

$16Ae^{-4t} + 14\cdot 4 Ae^{-4t} - 32\cdot Ae^{-4t} = 16e^{-4t} \Rightarrow A = -8 \Rightarrow x_{_H}(t) = -8e^{-4t}$

Вынужденное движение: $x_{вын}(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{16t} - 8e^{-4t}$

$\dot{x}_{вын}(t) = -2C_1 e^{-2t} + 16C_2 e^{16t} + 32e^{-4t}$

$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 8 = 0 \\ \dot{x}(0) = -2C_1 + 16C_2 + 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \dfrac{80}{9}, \quad C_2 = -\dfrac{8}{9} \Rightarrow$

$$x_{вын}(t) = \frac{80}{9}e^{-2t} + \left(-\frac{8}{9}\right)e^{16t} - 8e^{-4t}$$

Выходной сигнал: $x(t) = \dfrac{128}{9}e^{-2t} + \dfrac{16}{9}e^{16t} + \dfrac{80}{9}e^{-2t} + \left(-\dfrac{8}{9}\right)e^{16t} - 8e^{-4t} =$

$$= \frac{208}{9}e^{-2t} + \frac{8}{9}e^{16t} - 8e^{-4t}$$

б) Свободное движение:

$$\ddot{x} + 32\dot{x} + 257x = 0, \quad x(0) = 16, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$\lambda^2 + 32\lambda + 257 = 0$

$D = -4 = i^2 4$

$\lambda_1 = \dfrac{-32 + 2 \; i}{2}$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{-32 - 2 \; i}{2} = -16 - i$

$\qquad\qquad \parallel$

$\qquad -16 + i$

$\alpha = -16, \quad \beta = 1$

Общее решение одн. ур-я: $x_0(t) = C_1 \cos t \cdot e^{-16t} + C_2 \sin t \, e^{-16t}$

$\cdot \sin t \, e^{-16t} + C_2 \cos t \, e^{-16t}$ $\qquad \dot{x}_0(t) = -16 C_1 \cos t \cdot e^{-16t} - C_1 \sin t \cdot e^{-16t} - 16 C_2$

$x_0(0) = C_1 = 16,$ $\qquad\qquad C_1 = 16$

$\dot{x}_0(0) = -16 C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 256$

$x_c(t) = 16 \cos t \cdot e^{-16t} + 256 \sin t \, e^{-16t}$

Вынужденное движение:

$\ddot{x} + 32 \dot{x} + 257 x = e^{-16t} \sin t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

Общ. реш. одн. ур-я: $x_0(t) = C_1 \cos t \cdot e^{-16t} + C_2 \sin t \cdot e^{-16t}$

$g = e^{-16t} \sin t, \quad \alpha = -16, \quad \beta = 1, \quad q = 0, \quad m = 0, \quad S = 1, \quad \text{т.к. } \alpha + i\beta \text{ совп}$ с корнем кратности 1.

Частное решение: $x_н(t) = e^{-16t} (A \cos t + B \sin t) t$

$\dot{x}_н(t) = -16 e^{-16t} t (A \cos t + B \sin t) + (B \cos t - A \sin t) e^{-16t} t + e^{-16t} (A \cos t + B \sin t) = \sin t \cdot e^{-16t}(-16 B t - A t + B) + \cos t \cdot e^{-16t}(-16 A t + B t + A)$

$\ddot{x}_н(t) = \cos t \cdot e^{-16t}(-16 B t - A t + B) - 16 \sin t \cdot e^{-16t}(-16 B t - A t + B) + \sin t \cdot e^{-16t}(-16 B - A) - \sin t \cdot e^{-16t}(-16 A t + B t + A) - 16 \cos t \cdot e^{-16t}(-16 A t + B t + A) + \cos t \cdot e^{-16t}(-16 A + B)$

Подставив всё в $\ddot{x} + 32 \dot{x} + 257 x = 0$ получим:

$2B \cos t - 2A \sin t = \sin t \Rightarrow B = 0, A = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_н(t) = e^{-16t} \cdot t \cdot (-\dfrac{1}{2} \cos t)$

Вынужденное движение: $x_{вын}(t) = C_1 \cos t \cdot e^{-16t} + C_2 \sin t \cdot e^{-16t} - \dfrac{1}{2} e^{-16t} t \cos t$

$\dot{x}_{вын}(t) = -16 C_1 \cos t \, e^{-16t} - C_1 \sin t \cdot e^{-16t} - 16 C_2 \sin t \, e^{-16t} + C_2 \cos t \cdot e^{-16t} - \dfrac{1}{2} e^{-16t} \cos t + \dfrac{1}{2} e^{-16t} t \sin t + 8 e^{-16t} t \cos t$

$x_{вын}(0) = C_1 = 0$ $\qquad\qquad C_1 = 0$

$\dot{x}_{вын}(0) = -16 C_1 + C_2 - \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \dfrac{1}{2}$

$$x_{вых}(t) = \frac{1}{2}\sin t \cdot e^{-16t} - \frac{1}{2}e^{-16t} \cdot t \cos t$$ ③

Выходной сигнал: $x(t) = 16\cos t \cdot e^{-16t} + 256\sin t \cdot e^{-16t} + \frac{1}{2}\sin t \cdot e^{-16t} -$

$- \frac{1}{2}e^{-16t} \cdot t \cos t = \cos t \cdot e^{-16t}\left(16 - \frac{1}{2}t\right) + \sin t \cdot e^{-16t} \cdot 256{,}5$