8. Для задачи

$$x_1(k+1) = 18\, x_1(k) + x_2(k), \quad x_{01}^* = 6,$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) + 18\, u(k), \quad x_{02}^* = 5,$$

$$y(k) = 18\, x_1(k) + x_2(k), \quad k = 0,1,2;$$

$$I = \sum_{k=0}^{2}[u^2(k) + x_1^2(k) + 17 x_2^2(k)] + x_1^2(3) + x_2^2(3) \to \min$$

найти регулятор с накоплением информации.

Указание. См. пример 14.2. (использовать только наблюдатель полного порядка)

Сравнивая с общим случаем, имеем:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad C(k) = (18\ \ 1), \quad Q(k) = 1, \quad S(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Синтезируем оптимальный регулятор:

$$L(k) = \left[1 + (0\ \ 18)\, P(k+1) \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} \right]^{-1} (0\ \ 18)\, P(k+1) \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2$$

$$P(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} + L^T(k)L(k) + \left[\begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} L(k) \right]^T P(k+1) \left[\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} L(k) \right], \quad k = 0,1,2$$

$$P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решая их, находим

$$L(2) = \begin{pmatrix} \dfrac{18}{325} & 0 \end{pmatrix}, \quad L(1) = \begin{pmatrix} \dfrac{324}{307} & \dfrac{324}{5833} \end{pmatrix}, \quad L(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{3405277646550}{199011308617} & \dfrac{1714253172}{18091937147} \end{pmatrix}$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} \dfrac{105626}{325} & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix} \quad P(1) = \begin{pmatrix} \dfrac{9924730093}{99775} & \dfrac{551368026}{99775} \\ \dfrac{551368026}{99775} & \dfrac{614226583}{1895725} \end{pmatrix} \quad P(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{3366432483776132}{199011308617} & \dfrac{17002164358099800}{18091937147} \\ \dfrac{17002164358099800}{18091937147} & \dfrac{9476397867855600}{18091937147} \end{pmatrix}$$

Оптимальный регулятор имеет вид:

$$u^*(0,x) = -L(0)x = -\frac{3405277646550}{199011308617} x_1 - \frac{1714253172}{18091937147} x_2$$

$$u^*(1,x) = -L(1)x = -\frac{324}{307} x_1 - \frac{324}{5833} x_2$$

$$u^*(2,x) = -L(2)x = -\frac{18}{325} x_1$$

Синтезируем наблюдатель полного порядка

$$\hat{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (18 x_1(k) + x_2(k) - 18 \hat{x}_1(k) - \hat{x}_2(k))$$

Получим матрицу: $A - KC = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}(18\ \ 1) = \begin{pmatrix} 18 - 18k_1 & 1 - k_2 \\ 1 - 18k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$

Собств. знач. м-цы: $\begin{vmatrix} 18 - 18k_1 - \lambda & 1 - k_1 \\ 1 - 18k_2 & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

Характеристическое ур-е: $\lambda^2 - 18\lambda + 18 k_1 \lambda + k_2 \lambda + k_1 - 1 = 0$

$$\lambda^2 + \lambda(-18 + 18k_1 + k_2) + k_1 - 1 = 0$$

Требуется, чтобы СЗ равнялись нулю: $\begin{cases} -18 + 18k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = 1 \end{cases}$

Наблюдатель полного порядка имеет вид:

$$\hat{x}_1(k+1) = 18\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + (18 x_1(k) + x_2(k) - 18\hat{x}_1(k) - \hat{x}_2(k)) = 18 x_1(k) + x_2(k), \quad \hat{x}_1(0) = 6$$

$$\hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_1(k) + 18 u(k), \quad \hat{x}_2(0) = 5$$

Получим искомое управление с накоплением информации

$$u^*(0) = -L(0)x = -\frac{3405277646550}{199011308617} \hat{x}_1(0) - \frac{1714253172}{18091937147} \hat{x}_2(0)$$

$$u^*(1) = -L(1)x = \frac{324}{\ } \hat{x}_1 \ - \frac{324}{\ } \hat{x}_2$$

$$u^*(0) = -L(0)x = -\frac{3405277646550}{189011308617}\hat{x}_1(0) - \frac{1714253172}{18091957147}\hat{x}_2(0)$$

$$u^*(1) = -L(1)x = -\frac{324}{307}\hat{x}_1(1) - \frac{324}{5833}\hat{x}_2(1)$$

$$u^*(2) = -L(2)x = -\frac{18}{325}\hat{x}_1(2)$$