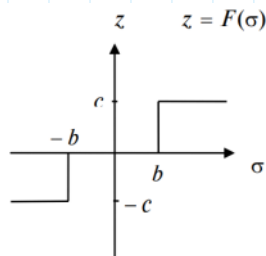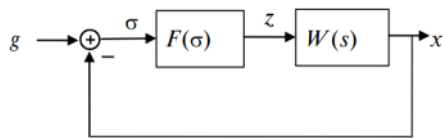12. При каких значениях коэффициента усиления k в системе управления (см. задание 11) возможны автоколебания?

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad T_1 = \frac{16}{10}; \quad T_2 = \frac{16}{100}; \quad T_3 = \frac{16}{1000},$$

$$F(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > \frac{16}{10}, \\ 0, & -\frac{16}{10} \le \sigma \le \frac{16}{10}, \\ -1, & \sigma < -\frac{16}{10} \end{cases}$$

$$c = 1, \quad b = \frac{16}{10}$$

Годограф частотной хар-ки лин. части разомкн. сис-мы $\omega \in [0; +\infty)$

$$W(i\omega) = \frac{k\left(1 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)\omega^2\right)}{\left(1 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2\right)^2} +$$

$$+ i \frac{k\omega\left(T_1 T_2 T_3 \omega^2 - T_1 - T_2 - T_3\right)}{\left(1 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2\right)^2}$$

$U(\omega)$

$V(\omega)$

Комплексный коэффициент усиления

$$W_H(a) = q(a) + i \, q_1(a) = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + i \cdot 0 = \frac{4c}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

Обратная х-ка:

$$M_H(a) = -\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Определим значение a, обеспеч. макс. величину $M_H(a)$ с помощью необх. условия экстремума:

$$\frac{dM_H(a)}{da} = -\frac{2\pi a b^2 - \pi a^3}{4c\sqrt{a^2 - b^2}\,(a^2 - b^2)} = 0 \implies 2b^2 - a^2 = 0 \implies$$

$$a^* = \sqrt{2}\,b \quad (a > 0)$$

$$da \qquad \qquad a^* = \sqrt{2}\,b \quad (a > 0)$$

$$M_{_H}(a^*) = -\frac{\pi b}{2c}$$

Для $b = \frac{16}{10}$, $c = \ell$: $a^* \approx 2{,}26$, $M_{_H}(a^*) \approx -2{,}51$

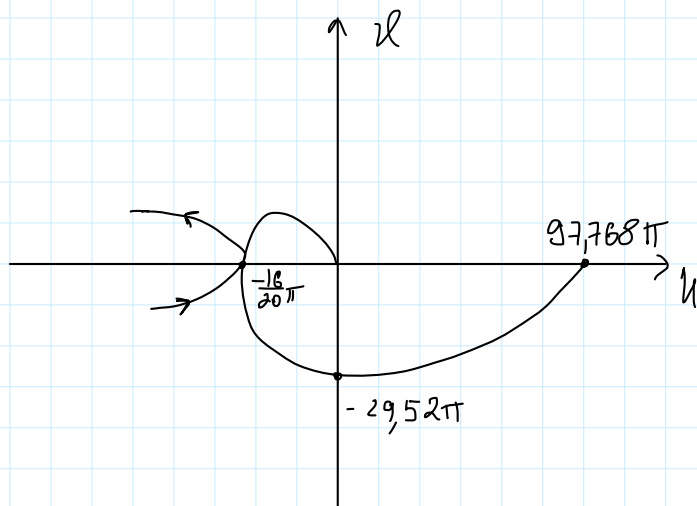Построим годограф $M_{_H}(a) = -\dfrac{\pi a^2}{4\sqrt{a^2 - \frac{256}{100}}}$

a	2	2,1	2,4	3
$M_{_H}(a)$	−2,62	−2,55	−2,52	−2,79

ω	0	1,88	20,82	∞
$U(\omega)$	k	0	$-\frac{16\pi}{20}$	0
$V(\omega)$	0	−29,52π	0	0

Подбор коэф. усиления, чтобы годограф проходил через крайнюю точку:

$$U(\omega) = -\frac{16}{20}\pi$$

$\Rightarrow U(20{,}82) = -\dfrac{16}{20}\pi \Rightarrow k \approx 97{,}768\pi$

$$V(\omega) = 0$$

Точка пересечения имеет коорд. $u = \dfrac{-16}{20}\pi$, $v = 0$ $\Rightarrow$
частота автоколебаний $\omega_{_\Pi} = 20{,}82$

Амплитуда:

$$M_{_H}(a) = -\frac{\pi a^2}{4\sqrt{a^2 - \frac{256}{100}}} = -\frac{16}{20}\pi \Rightarrow a_1 = \frac{16}{10}\sqrt{2}$$

При $a = a_1$ точка не охватывается годографом $W(i\omega)$ $\Rightarrow$ можно сделать вывод, что это пересечение опред. устойчивые автоколебания с парам. $\omega_\pi = 20{,}82$, $a_n = 1{,}6\sqrt{2}$

$k \geq 97{,}768\pi \approx 306{,}992$