2. Попова Наталья М8О-405Б-20

2. Для задачи быстродействия

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(T) = 17,$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = 0,$$
$$|u(t)| \le 4{,}25,\ 0 \le t \le T, \quad a > 0,$$
$$I = \int_0^T dt \to \min$$

найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$, оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$ и время T^*.

Положить $b = n$, $a = \frac{n}{4}$.

Указание: см. пример 9.9.

$f_1(t, x, u) = x_2$

$f_2(t, x, u) = u(t)$

$f^0(t, x, u) = 1$

$F(x, u) = 0$

$x_1 = T$

$\Gamma_1(T, x(T)) = x_1, T = 17$

$\Gamma_2(T, x(T)) = x_2, T = 0$

Гамильтониан.

$H(t, \psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - 1$

Условный максимум гамильтониана по управлению.

$u^*(t) = \arg\max H(t, \psi(t), x(t), u) = \frac{17}{4} \operatorname{sign} \psi_2$

Канонические уравнения принципа максимума:

$\dot{x}_1(t) = x_2(t);\ x_1(0) = 0, \quad x_1(T) = 17$

$\dot{x}_2(t) = u^*(t) = 16{,}25 \operatorname{sign} \psi_2(t);\ x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0$

$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$

$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t)$

Т.к. T не задан, а $x_1(T)$ и $x_2(T)$ заданы, то вариация δt_1 произвольна, а $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0 \Rightarrow |-H(t_1)\delta t_1|_{t_1 = T} = 0 \Rightarrow$

$H(T) = H(T, \psi(T), x(T), u(T)) = 0$

Решение двухточечной краевой задачи

$\psi_1(t) = C_1 = const, \quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2$

$\psi_1(t) = C_1 = const$, $\psi_2(t) = -C_1 t + C_2$

$u^*(t) = \frac{17}{4} sign(-C_1 t + C_2)$

Найдём время $T = \tau_1 + \tau_2$, затрачиваемое на переход из (·) $x_0 = (0, 0)$ в (·) $(17, 0)$. τ_1 – время движения с управлением $u^*(t) = \frac{17}{4}$ до (·) переключения, τ_2 – время движения с управлением $u^*(t) = -\frac{17}{4}$

а) На первом участке:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u^*(t) = \frac{17}{4} \Rightarrow x_2(t) = \frac{17}{4} t + C_1$$

$$x_1(t) = \frac{17}{8} t^2 + C_1 t + C_2$$

При $t = 0$: $x_2(0) = C_1 = 0$, $x_1(0) = C_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1(t) = \frac{17}{8} t^2$, $x_2(t) = \frac{17}{4} t$

б) На втором участке

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_2(t) = u^*(t) = -\frac{17}{4} \Rightarrow x_2(t) = -\frac{17}{4} t + C_1$$

$$x_1(t) = -\frac{17}{4} t^2 + C_1 t + C_2$$

При $t = T$: $x_2(T) = -\frac{17}{4} T + C_1 = 0$

$$x_1(T) = -\frac{17}{8} T^2 + C_1 T + C_2 = 17, \quad T = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{17}{4}(\tau_1 + \tau_2), \quad C_2 = 17 - \frac{17}{8}(\tau_1 + \tau_2)^2 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \frac{17}{8} t^2 + \frac{17}{4}(\tau_1 + \tau_2) t + 17 - \frac{17}{8}(\tau_1 + \tau_2)^2$$

$$x_2(t) = -\frac{17}{8} t + \frac{17}{8}(\tau_1 + \tau_2)$$

В силу непрерывности траектории $t = \tau_1$:

$$x_1(\tau_1) = \frac{17}{8} \tau_1^2 + \frac{17}{4}(\tau_1 + \tau_2)\tau_1 + 17 - \frac{17}{8}(\tau_1 + \tau_2)^2 = \frac{17}{8} \tau_1^2$$

$$x_2(\tau_1) = -\frac{17}{4} \tau_1 + \frac{17}{4}(\tau_1 + \tau_2) = \frac{17}{4} \tau_1$$

В результате получаем: $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow$

$$-\frac{17}{8} \tau_1^2 + \frac{17}{2} \tau_1^2 + 17 - \frac{17}{2} \tau_1^2 - \frac{17}{8} \tau_1^2 = 0 \Rightarrow \frac{17}{4} \tau_1^2 = 17 \Rightarrow \tau_1 = 2 \ (\tau_1 \neq -2) \Rightarrow$$

$$T = \tau_1 + \tau_2 = 4 \Rightarrow$$

$$u^*(t) = \frac{17}{4} sign(-C_1 t + C_2)$$

На первом участке: $x_1^*(t) = \frac{17}{8} t^2$, $x_2^*(t) = \frac{17}{4} t$

На первом участке: $x_1^*(t) = \frac{17}{8}t^2$, $x_2^*(t) = \frac{17}{4}t$

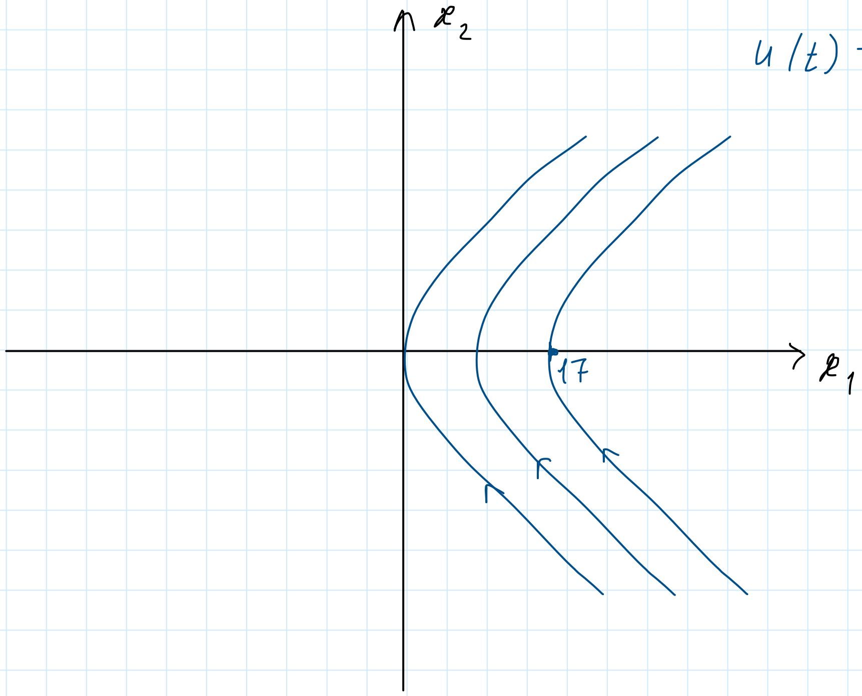
На втором участке: $x_1^*(t) = -\frac{17}{8}t^2 + 17t - 17$, $x_2^*(t) = -\frac{17}{4}t + 17$

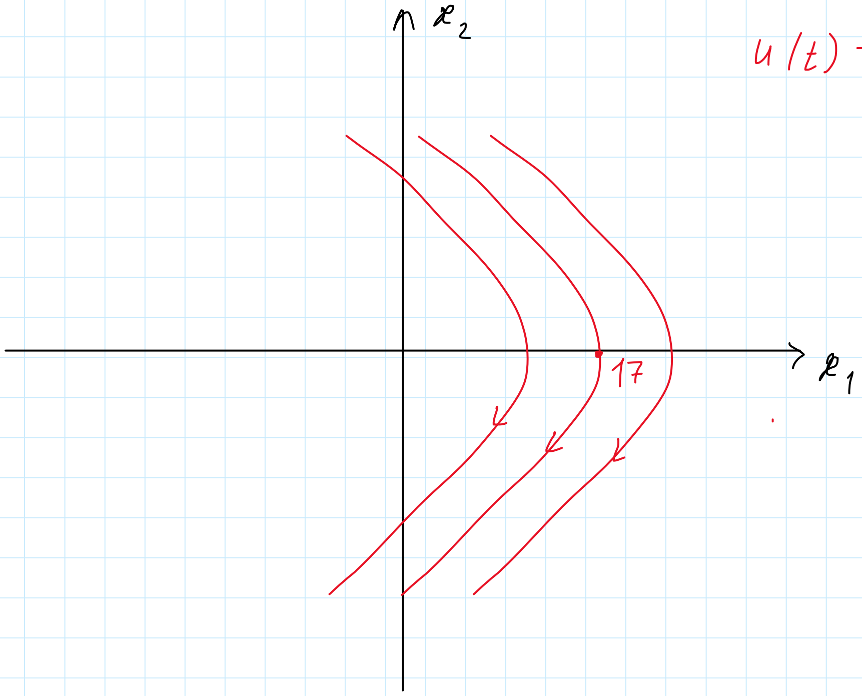
$T^* = 4$

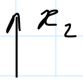
Построим фазовый портрет:

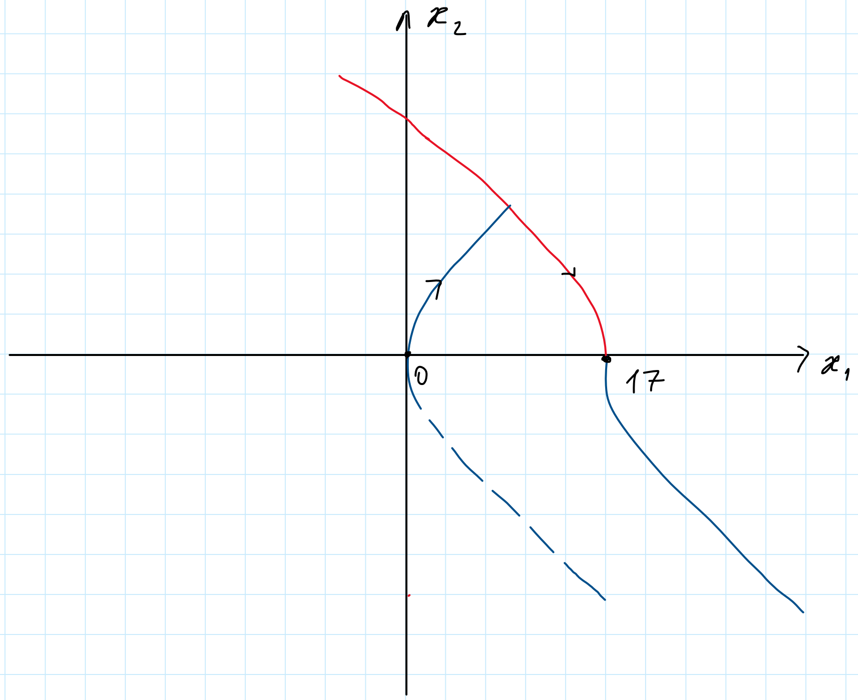
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ $\qquad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u} \Rightarrow dx_1 = \frac{x_2}{u}dx_2 \qquad x_1 = \frac{x_2^2}{2u} + C$

$\dot{x}_2(t) = u(t) = const$








x2
x1
0
17