1. Попова Наталья М8О-405Б-20

1. Для задачи

$$\dot{x}(t) = -17x(t) + u(t), \quad x(0) = 6{,}5$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{18}\left[\frac{1}{17}u^2(t) + x^2(t)\right]dt \to \min,$$

найти

а) оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$.

б) управление с полной обратной связью $u^*(t,x)$.

Указание.

а) см. пример 9.2.

б) см. пример 9.21

$$\dot{K}_2(t) = -2A\,K_2(t) - \frac{K_2^2(t)B^2}{Q} + S, \quad K_2(T) = -\Lambda; \quad u^*(t,x) = \frac{B}{Q}K_2(t)x.$$

Обозначая $r = \frac{Q}{B^2}$, $\beta = \sqrt{A^2 + \frac{S}{r}}$, имеем

$$K_2(t) = r\frac{(A+\beta)\,(-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)} - (A-\beta)(-\Lambda + Ar + \beta r)}{(-\Lambda + Ar + \beta r) - (-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)}}.$$

а) $f(x,t,u) = -17x + u$, $f^0(t,x,u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}u^2 + x^2\right)$, $F(t_1, x) = 0 \Rightarrow$

Задача Лагранжа. $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 18$

Гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \psi(-17x + u) - \frac{1}{34}u^2 - \frac{1}{2}x^2$

Максимум гамильтониана по управлению.

$$\frac{\partial}{\partial u}H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi - \frac{1}{17}u = 0 \Rightarrow u^*(t) = 17\psi \to \max, \text{ т.к.}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -\frac{1}{17} < 0$$

Уравнения системы.

$$\dot{x}(t) = -17x(t) + u^*(t) = -17x(t) + 17\psi, \quad x(0) = 6{,}5$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(t, \psi(t), x(t), u) = -(-17\psi - x) = 17\psi + x$$

Условие трансверсальности:

т.к $F(t,x) = 0$, то $\delta F = 0$ и $[-H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)]\Big|_{t_1=18} = 0$

Поскольку $t_1 = 18$, то $\delta t_1 = 0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено $\Rightarrow \delta x$ - произвольна $\Rightarrow \psi(t_1)\delta x\Big|_{t_1=18} = 0 \Rightarrow \psi(18) = 0$

Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}(t) = -17x(t) + 17\psi(t), \quad x(0) = 6{,}5$$

$$\dot{\psi}(t) = 17\psi(t) + x(t), \quad \psi(18) = 0$$

$$x^*(t) = \frac{13\cdot e^{-3(-36+t)\sqrt{34}}\left((3\sqrt{34}-17)e^{6\sqrt{34}(t-18)} + 3\sqrt{34} + 17\right)}{(6\sqrt{34} + 34)e^{108\sqrt{34}} + 6\sqrt{34} - 34}$$

$$\psi^*(t) = \frac{13\cdot e^{-3(-36+t)\sqrt{34}}\left(e^{6\sqrt{34}(t-18)} - 1\right)}{}$$

$$\psi^*(t) = \frac{13 \cdot e^{-3(-36+t)\sqrt{34}} \left(e^{6\sqrt{34}(t-18)} - 1\right)}{(6\sqrt{34}+34)\, e^{108\sqrt{34}} + 6\sqrt{34} - 34}$$

$$u^*(t) = 17\psi^* = \frac{221 \cdot e^{-3(-36+t)\sqrt{34}} \left(e^{6\sqrt{34}(t-18)} - 1\right)}{(6\sqrt{34}+34)\, e^{108\sqrt{34}} + 6\sqrt{34} - 34}$$

б) $A(t) = -17, \quad B(t) = 1, \quad Q(t) = \frac{1}{17}, \quad S(t) = 1, \quad \Lambda = 0$

Для общего случая однородных систем:

$\dot{K}_2(t) = -2A\,K_2(t) - \dfrac{K_2^2(t) B^2}{Q} + S, \quad K_2(T) = -\Lambda; \quad \boldsymbol{u}^*(t, x) = \dfrac{B}{Q} K_2(t)\, x.$

Обозначая $r = \dfrac{Q}{B^2}$, $\beta = \sqrt{A^2 + \dfrac{S}{r}}$, имеем

$$K_2(t) = r\frac{(A+\beta)(-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)} - (A-\beta)(-\Lambda + Ar + \beta r)}{(-\Lambda + Ar + \beta r) - (-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)}}.$$

$$r = \frac{\frac{1}{17}}{1} = \frac{1}{17}, \quad \beta = \sqrt{17^2 + 17} = 3\sqrt{34}$$

$$K_2(t) = \frac{1}{17} \cdot \frac{(3\sqrt{34} - 17)\left(-1 - 3\frac{\sqrt{34}}{17}\right) e^{6\sqrt{34}(18-t)} - (17 + 3\sqrt{34})\left(-1 + 3\frac{\sqrt{34}}{17}\right)}{\left(-1 + 3\frac{\sqrt{34}}{17}\right) - \left(-1 - 3\frac{\sqrt{34}}{17}\right) e^{6\sqrt{34}(18-t)}} =$$

$$= \frac{1 - e^{6\sqrt{34}(18-t)}}{(3\sqrt{34} - 17) - (-17 - 3\sqrt{34})\, e^{6\sqrt{34}(18-t)}}$$

$$u^*(t, x) = \frac{B}{Q} K_2(t)\, x^* = 17 K_2(t)\, x^*$$

Уравнение модели объекта

$$\dot{x}(t) = -17x(t) + 17K_2(t)x, \quad x(0) = 6{,}5$$

Задача Коши имеет решение.

$$x^*(t) = -\frac{13\left(e^{-6\sqrt{34}(t-18)}\right)^{\frac{3\sqrt{34}-17}{34-6\sqrt{34}}} e^{\frac{918\sqrt{34}-5508}{17-3\sqrt{34}}} \left(e^{-6\sqrt{34}(t-18)} + 35 - 6\sqrt{34}\right)}{-2e^{108\sqrt{34}} - 70 + 12\sqrt{34}}$$

$$u^*(t) = 17K_2(t)\,x^*(t) = \frac{221\left(e^{-6\sqrt{34}(t-18)} - 1\right) e^{\frac{5508 - 918\sqrt{34}}{3\sqrt{34}-17}} \left(e^{-6\sqrt{34}(t-18)} + 35 - 6\sqrt{34}\right)}{2\, e^{-6\sqrt{34}(t-18)} \left(3e^{-6\sqrt{34}(t-18)} + 3\sqrt{34} - 17\right)\left(-e^{108\sqrt{34}} - 35 + 6\sqrt{34}\right)}$$