4. Попова Наталья М8О-405Б-20

4. Для задачи

$$dX(t) = [-\frac{17}{10}X(t) + u(t)]\,dt + 17dW_1, \quad m_0 = 4, \quad D_0^x = 6,$$

$$dY = 17X(t)\,dt + \sqrt{17}dW_2, \quad Y(0) = 0,$$

$$J = M\left\{\frac{1}{2}\int_0^T [\frac{1}{17}u^2(t) + X^2(t)]\,dt\right\} \to \min, \quad T = 2$$

найти управление $u^*(t, Y_0^t)$ из множества допустимых, обеспечивающее минимум функционала.

Указание. См. примеры 11.1-11.3.

Примечания.

1) $\dot{K}_2(t) = -2A\,K_2(t) - \frac{K_2^2(t)B^2}{Q} + S, \quad K_2(T) = -\Lambda; \quad u^*(t,x) = \frac{B}{Q}K_2(t)x.$

Обозначая $r = \frac{Q}{B^2}$, $\beta = \sqrt{A^2 + \frac{S}{r}}$, имеем

$$K_2(t) = r\frac{(A+\beta)\,(-\Lambda + Ar - \beta r)\,e^{2\beta(T-t)} - (A-\beta)(-\Lambda + Ar + \beta r)}{(-\Lambda + Ar + \beta r) - (-\Lambda + Ar - \beta r)\,e^{2\beta(T-t)}}.$$

2) $x' = -2ax - b^2x^2 + c^2, \quad x(0) = d,$

где a, b, c, d - некоторые отличные от нуля числа.

Решение: $x(t) = \frac{d(\beta - a) + c^2 + [d(a+\beta) - c^2]e^{-2\beta t}}{a + \beta + b^2d + (\beta - a - b^2d)e^{-2\beta t}}$, где $\beta = \sqrt{a^2 + b^2c^2}$.

$A = -\frac{17}{10}$, $B = 1$, $\delta_1 = 17$, $l = 17$, $\delta_2 = \sqrt{17}$, $S = 1$, $Q = \frac{1}{17}$,

$\lambda = 0$, $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $R_1 = \delta_1^2 = 289$, $R_2 = \delta_2^2 = 17$

Оптимальное управление имеет вид:

$u^*(t) = u^*(t, Y_{t_0}^t) = 17 \cdot 1 \cdot K_2(t)\hat{x}(t)$, где $\hat{x}(t) = [-\frac{17}{10}\hat{x}(t) + u^*(t)]\,dt +$

$+ K(t)[dY(t) - 17\hat{x}(t)\,dt]$, $\hat{x}(t_0) = m_0 = 4$

$\dot{K}_2(t) = -\frac{34}{10}K_2(t) - 17K_2^2(t) + 1$; $K_2(t_1) = 0$, $K(t) = \Gamma(t) \cdot 17 \cdot \frac{1}{17} = \Gamma(t)$

(*) $\dot{\Gamma}(t) = -\frac{17}{10}\Gamma(t) - \frac{17}{10}\Gamma(t) - 17\Gamma^2(t) + 100$; $\Gamma(t_0) = D_0^x = 6$

Причём, что $r = \frac{Q}{B^2} = \frac{1}{17}$, $\beta = \sqrt{A^2 + \frac{S}{r}} = \sqrt{\frac{289}{100} + 17}$

$$K_2(t) = r\frac{(A+\beta)(-\lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)} - (A-\beta)(-\lambda + Ar + \beta r)}{(-\lambda + Ar + \beta r) - (-\lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{221} - 17)\,e^{-\frac{3\sqrt{221}(-2+t)}{5}} + 3\sqrt{221} + 17}{(3\sqrt{221} + 17)\cdot e^{\frac{3\sqrt{221}(-2+t)}{5}} + 3\sqrt{221} - 17}$$

Т.к. ковариационная матрица ошибки оценивания $\Gamma(t)$ удовл. ур-ю (*), имеющему вид:

$x' = -2ax + b^2x^2 + c^2$, $x(0) = d$, где $a = \frac{17}{10}$, $b = \sqrt{17}$, $c = 17$, $d = 6$,

то решение для x:

$-2\beta t$

то решение для x:

$$x(t)=\frac{d(\beta-a)+c^2+[d(a+\beta)-c^2]\,e^{-2\beta t}}{a+\beta+b^2d+(\beta-a-b^2d)\,e^{-2\beta t}},\quad \text{где}\quad \beta=\sqrt{a^2+b^2c^2}$$

$$\Gamma(t)=\frac{\frac{459\sqrt{21}}{5}+\frac{1394}{5}+\left(-\frac{1394}{5}+\frac{459\sqrt{21}}{5}\right)e^{-\frac{153\sqrt{21}}{5}t}}{\frac{1037}{10}+\frac{153\sqrt{21}}{10}+\left(-\frac{1037}{10}+\frac{153\sqrt{21}}{10}\right)e^{-\frac{153\sqrt{21}}{5}t}}$$

Соотношение для оптимального регулятора:

$$u^*(t)=u^*(t,Y_{t_0}^t)=17K_2(t)\hat{x}(t)=$$

$$=17\,\frac{(3\sqrt{221}-17)\,e^{\frac{-3\sqrt{221}(-2+t)}{5}}+3\sqrt{221}+17}{(3\sqrt{221}+17)\cdot e^{\frac{-3\sqrt{221}(-2+t)}{5}}+3\sqrt{221}-17}\,\hat{x}(t)$$

Соотношение для оптимального фильтра:

$$d\hat{x}=\left[-\frac{17}{10}\hat{x}(t)+u^*(t)\right]dt+\Gamma(t)\left[dY(t)-17\hat{x}(t)\,dt\right],\quad \hat{x}(0)=4$$