3. Найти свободное, вынужденное движения и выходной сигнал двумя способами:
- классическим
- с применением преобразования Лапласа.
Исследовать устойчивость, управляемость и наблюдаемость.

$$\begin{cases}\dot x_1 = 18x_1 + x_2 + g_1 \\ \dot x_2 = -40x_1 - 4x_2 + g_2\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 0\end{cases}$$

$y = x_1 + 2x_2$, $\quad g_1(t) = 16$, $g_2(t) = 2$, $\quad t > 0$.

Классический способ:

Найдём переходную матрицу $P(t,\tau)$

Способ 1

$$P(t,\tau) = \varphi(t)\,\varphi^{-1}(\tau)$$

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ -40 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 18-\lambda & 1 \\ -40 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (18-\lambda)(-4-\lambda) + 40 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 16 \end{array}\right.$$

Общее решение одноp. сис-мы

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{16t} \\ x_2(t) = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{16t} \end{cases}$$

Подставим в $\dot x_1 = 18x_1 + x_2$

$$-2C_1 e^{-2t} + 16 C_2 e^{16t} = 18 C_1 e^{-2t} + 18 C_2 e^{16t} + B_1 e^{-2t} + B_2 e^{16t}$$

$$-20 C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{16t} = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{16t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1 = -20 C_1 \\ B_2 = -2C_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{16t} \\ -20 C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{16t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -20 e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{16t} \\ -2e^{16t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{16t} \\ -20e^{-2t} & -2e^{16t} \end{pmatrix}$$

$$|\varphi(t)| = -2e^{14t} + 20e^{14t} = 18e^{14t}$$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{18e^{14t}} \begin{pmatrix} -2e^{16t} & -e^{16t} \\ 20e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{2t} \\ 20e^{-16t} & e^{-16t} \end{pmatrix}$$

$$P(t,\tau) = \varphi(t)\cdot\varphi^{-1}(\tau) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{16t} \\ -20e^{-2t} & -2e^{16t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{2\tau} & -e^{2\tau} \\ 20e^{-16\tau} & e^{-16\tau} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2e^{-2(t-\tau)} + 20e^{16(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{16(t-\tau)} \\ 40e^{-2(t-\tau)} - 40e^{16(t-\tau)} & 20e^{-2(t-\tau)} - 2e^{16(t-\tau)} \end{pmatrix} =$$

Пусть $\eta = t - \tau$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2e^{-2\eta} + 20e^{16\eta} & -e^{-2\eta} + e^{16\eta} \end{pmatrix}$$

Пусть $\eta = t - \tau$

$$\Rightarrow \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2e^{-2\eta}+20e^{16\eta} & -e^{-2\eta}+e^{16\eta} \\ 40e^{-2\eta}-40e^{16\eta} & 20e^{-2\eta}-2e^{16\eta} \end{pmatrix}$$

Способ 2:

$$\Phi(\eta) = e^{A\eta} = \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\lambda_i\eta}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{A-\lambda_j E}{\lambda_i-\lambda_j}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ -40 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} g, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = (1\ 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 16$ (из способа 1)

$$\Phi(\eta) = \sum_{i=1}^{2}\left(e^{\lambda_i\eta}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\frac{A-\lambda_j E}{\lambda_i-\lambda_j}\right) = e^{-2\eta}\frac{A-16E}{-2-16} + e^{16\eta}\frac{A+2E}{16+2} =$$

$$A - 16E = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ -40 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -40 & -20 \end{pmatrix}$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ -40 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ -40 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2e^{-2\eta}+20e^{16\eta} & -e^{-2\eta}+e^{16\eta} \\ 40e^{-2\eta}-40e^{16\eta} & 20e^{-2\eta}-2e^{16\eta} \end{pmatrix}$$

Матрицы перехода совпадают

Законы изменения векторов состояния и выхода:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2e^{-2t}+20e^{16t} & -e^{-2t}+e^{16t} \\ 40e^{-2t}-40e^{16t} & 20e^{-2t}-2e^{16t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2e^{-2(t-\tau)}+20e^{16(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)}+e^{16(t-\tau)} \\ 40e^{-2(t-\tau)}-40e^{16(t-\tau)} & 20e^{-2(t-\tau)}-2e^{16(t-\tau)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}d\tau =$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -e^{-2t}+10e^{16t} \\ 20e^{-2t}-20e^{16t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16e^{-2(t-\tau)}+160e^{16(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}+e^{16(t-\tau)} \\ 320e^{-2(t-\tau)}-320e^{16(t-\tau)}+20e^{-2(t-\tau)}-2e^{16(t-\tau)} \end{pmatrix}d\tau =$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -e^{-2t}+10e^{16t} \\ 20e^{-2t}-20e^{16t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -17e^{-2(t-\tau)}+161e^{16(t-\tau)} \\ 340e^{-2(t-\tau)}-322e^{16(t-\tau)} \end{pmatrix}d\tau =$$

$$\frac{2}{9}\begin{pmatrix} -e^{-2t}+10e^{16t} \\ 20e^{-2t}-20e^{16t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -17e^{-2(t-\tau)}+161e^{16(t-\tau)} \\ 340e^{-2(t-\tau)}-322e^{16(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{9}\begin{pmatrix} -e^{-2t}+10e^{16t} \\ 20e^{-2t}-20e^{16t} \end{pmatrix}}_{x_{св}(t)} + \underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -\frac{297}{16}+\frac{17}{2}e^{-2t}+\frac{161}{16}e^{16t} \\ \frac{1521}{8}-170e^{-2t}-\frac{161}{8}e^{16t} \end{pmatrix}}_{x_{вын}(t)}$$

$$y(t) = (1\ \ 2)\frac{2}{9}\begin{pmatrix} -e^{-2t}+10e^{16t} \\ 20e^{-2t}-20e^{16t} \end{pmatrix} + (1\ \ 2)\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -\frac{297}{16}+\frac{17}{2}e^{-2t}+\frac{161}{16}e^{16t} \\ \frac{1521}{8}-170e^{-2t}-\frac{161}{8}e^{16t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{9}\left(-e^{-2t}+10e^{16t}+40e^{-2t}-40e^{16t}\right) + \frac{1}{9}\left(-\frac{297}{16}+\frac{17}{2}e^{-2t}+\frac{161}{16}e^{16t}+\frac{1521}{4}-340e^{-2t}-\frac{161}{4}e^{16t}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{9}\left(39e^{-2t}-30e^{16t}\right)}_{y_c(t)} + \underbrace{\frac{1}{9}\left(\frac{5787}{16}-\frac{663}{2}e^{-2t}-\frac{483}{16}e^{16t}\right)}_{y_{вын}(t)}$$

Анализ устойчивости:

$Re\ \lambda_i < 0$; $i = 1, .., n$ - условие устойчивости

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 16$ $\Rightarrow$ сис-ма не явл. устойчивой

$A = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ -40 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = (1\ \ 2)$, $n = 2$, $r = 2$, $k = 1$

Критерий управляемости по состоянию:

$rg\,W = rg\,(B\ \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & -40 & -4 \end{pmatrix} = 2 = n$

Критерий управляемости по выходу:

$rg\,P = rg\,(CB\ \ CAB) = (1\ \ 2\ \ -62\ \ -7) = 1 = k$

Критерий наблюдаемости:

$rg\,Q = rg\,(C^T\ \ A^TC^T) = rg\begin{pmatrix} 1 & -62 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -62 \\ -1 & 3,5 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -6,2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n$

Вывод: сис-ма управляема по состоянию и выходу, а также наблюдаема