6. Попова Наталья М8О-405Б-20

6. Для задачи

$$x(k+1) = 18\,x(k) + u(k), \quad k = 0,1, \quad x(0) = 6,$$

$$I = \sum_{k=0}^{1}\left[\,18u^2(k) + x^2(k)\,\right] + 17x^2(2) \to \min$$

найти

а) оптимальное программное управление и соответствующую траекторию;

б) оптимальный регулятор $u^*(k,x)$.

Указание. См. пример 12.1, 12.3, 12.11.

а) Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$f(k,x,u) = 18x + u$, $f^0(k,x,u) = 18u^2 + x^2$, $F(x) = 17x^2$, $u(k) \in R$, $N = 2$

Решается задача Больца:

Гамильтониан: $H(k,\psi,x,u) = \psi(18x+u) - (18u^2 + x^2)$

Найдём максимум гамильтониана по управлению. Т.к. ограничений на управление нет, применяем необх. условие безусловного экстремума.

$$\frac{\partial H(k,\psi(k+1),x(k),u(k))}{\partial u} = \psi(k+1) - 36u(k) = 0 \Rightarrow u^*(k) = \frac{\psi(k+1)}{36}$$

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -36 < 0 \Rightarrow$ найденное управление обеспечивает максимум функции

Составим краевую задачу:

$$x^*(k+1) = 18x^*(k) + \frac{\psi(k+1)}{36}, \quad x^*(0) = 6$$

$$\psi(k) = \frac{\partial H(k,\psi(k+1),x^*(k),u^*(k))}{\partial x} = 18\psi(k+1) - 2x^*(k), \quad \psi(2) = -\frac{\partial F(x^*(2))}{\partial x} = -34x^*(2)$$

Решение краевой задачи.

$$\left.\begin{aligned} &k=0 \Rightarrow x(1) = 18x(0) + \frac{\psi(1)}{36} = 108 + \frac{\psi(1)}{36}, \quad x(0) = 6, \quad u^*(0) = \frac{\psi(1)}{36} \\ &k=1 \Rightarrow \psi(1) = 18\psi(2) - 2x(1) \\ &\qquad x(2) = 18x(1) + \frac{\psi(2)}{36}, \quad \psi(2) = -34x(2), \quad u^*(1) = \frac{\psi(2)}{36} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x^*(0) = 6$, $x^*(1) = \dfrac{68040}{99179}$, $x^*(2) = \dfrac{629856}{99179}$

$\psi(1) = -3888$ $\quad \psi(2) = -\dfrac{21415104}{99179}$

$u^*(0) = -108$ $\quad u^*(1) = -\dfrac{594864}{99179}$

Оптимальная траектория $x^*(\cdot) = \left\{6; \dfrac{68040}{99179}, \dfrac{629856}{99179}\right\}$

$u^*(\cdot) = \left\{-108, -\dfrac{594864}{99179}\right\}$

б) $A(k) = 18$, $B(k) = 1$, $S(k) = 1$, $Q(k) = 18$, $\Lambda = 17$, $N = 2$

Решается задача Больца:

Решается задача Больца:

Составим уравнения

$$L(k) = [18 + P(k+1)]^{-1} \cdot 18 P(k+1)$$

$$P(k) = 1 + 18 L^2(k) + [18 - L(k)]^2 P(k+1), \quad P(2) = 17$$

Решение уравнений:

$k = 1$: $L(1) = [18 + P(2)]^{-1} \cdot 18 P(2) = \frac{306}{35}$

$P(1) = 1 + 18 L^2(1) + [18 - L(1)]^2 P(2) = \frac{99179}{35}$

$k = 0$: $L(0) = [18 + P(1)]^{-1} \cdot 18 P(1) = \frac{1785222}{99809}$

$P(0) = 1 + 18 L^2(0) + [18 - L(0)]^2 P(1) = \frac{578511737}{99809}$

Находим оптимальный регулятор

$$u^*(0, x) = -L(0) x = -\frac{1785222}{99809} x$$

$$u^*(1, x) = -L(1) x = -\frac{306}{35} x$$

Оптимальное значение функционала

$$\min I = \frac{578511737}{99809} x^2(0) = \frac{2{,}08264 \cdot e^{10}}{99809}$$

Найдём значение функционала:

$$18 u^2(0) + x^2(0) + 18 u^2(1) + x^2(1) + 17 x^2(2) = \frac{2{,}08264 \cdot e^{10}}{99809}$$