3. Для задачи

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 18\,u(t),$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[18^2 x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + u^2(t)\right]dt \to \min$$

найти оптимальный регулятор $u^*(x)$.

Положить $m = 18$.

Указание. См. пример 9.23

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad Q = 1, \quad S = \begin{pmatrix} 324 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } P_{12} = P_{21}$$

Ур-е Рикатти имеет вид: $-A^T P - PA + PBQ^{-1}B^T P - S = 0$

С учётом симметричности м-цы P структура регулятора:

$$-\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{1}_{Q^{-1}}\underbrace{(0\ \ 18)}_{B^T}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 324 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

$$u^*(x) = -Q^{-1}B^T P x = -1\,(0\ \ 18)\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -18\,P_{12}\,x_1 - 18\,P_{22}\,x_2$$

$$\begin{pmatrix} 324\,P_{12}^2 - 324 & 324\,P_{12}P_{22} - P_{11} \\ 324\,P_{12}P_{22} - P_{11} & 324\,P_{22}^2 - 2P_{12} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 324\,P_{12}^2 - 324 = 0 \\ 324\,P_{12}P_{22} - P_{11} = 0 \implies P_{12} = 1, \quad P_{22} = \dfrac{1}{9}, \quad P_{11} = 36 \\ 324\,P_{22}^2 - 2P_{12} - 2 = 0 \end{cases}$$

Проверим знакоопределённость P

$$\begin{pmatrix} 36 & 1 \\ 1 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = 36 > 0, \quad \Delta_2 = \frac{36}{9} - 1 > 0 \quad \text{(Критерий Сильвестра)}$$

Оптимальный регулятор: $u^*(x) = -18\,x_1 - 2\,x_2$