Попова Наталья М8О-405Б-20 В-16

8. Исследовать устойчивость, найти свободное движение, вынужденное движение и выходной сигнал дискретной системы двумя способами:
- классическим
- с помощью z - преобразования

а) $x(k+1)+18x(k)=g(k)$, $x(0)=16$ $g(k)=16k$.

б) $x(k+2)-21x(k+1)+68x(k)=g(k)$,

$x(0)=3$, $x(1)=3$, $g(k)=2$.

Классический.

а) Харак-е ур-е $x(0)=0$

$\lambda+18=0 \Rightarrow \lambda=-18$

λ - действ $\Rightarrow$ общее реш-е ур-я имеет вид.

$x(k)=C_1(-18)^k$

$C_1(-18)^0=16 \Rightarrow C_1=16 \Rightarrow x_{св}(k)=16\cdot(-18)^k$

Частное решение неоднородного ур-я:

$g(k)=16k$, $\varphi=0$, $R_q(k)=16k$, $q=1$, $r=1$, $s=0$

$(\underbrace{r}_{1}(\underbrace{\cos\varphi}_{1}+i\underbrace{\sin\varphi}_{0})=1\neq-18)\Rightarrow$

$x_н(k)=1^k\cdot(ak+b)=ak+b\Rightarrow$

$ak+a+b+18ak+18b=16k$

$19ak+(a+19b)=16k$

$\begin{cases}19a=16\\a+19b=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{16}{19},\ b=-\frac{16}{19^2}\Rightarrow$

$x_н(k)=\frac{16}{19}k-\frac{16}{19^2}$

$x(k)=C_1\cdot(-18)^k+\frac{16}{19}k-\frac{16}{19^2}$

$x(0)=C_1-\frac{16}{19^2}=0 \Rightarrow C_1=\frac{16}{19^2}\Rightarrow$

$$x(0) = C_1 - \frac{16}{19^2} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{16}{19^2} \Rightarrow$$

$$x_{вын}(k) = \frac{16}{19^2}(-18)^k + \frac{16}{19}k - \frac{16}{19^2}$$

Выходной сигнал

$$x(k) = x_{св}(k) + x_{вын}(k) = 16\,(-18)^k + \frac{16}{19^2}(-18)^k + \frac{16}{19}k - \frac{16}{19^2} =$$

$$= \frac{5792}{361}(-18)^k + \frac{16}{19}k - \frac{16}{361}$$

б) $x(k+2) - 21x(k+1) + 68x(k) = g(k)$,

$x(0) = 3$, $x(1) = 3$, $g(k) = 2$.

Хар-е ур-е

$$\lambda^2 - 21\lambda + 28 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 17$$

Общее решение одн ур-я

λ_1 и λ_2 - действ и разные $\Rightarrow x(k) = C_1 4^k + C_2 17^k$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ x(1) = 4C_1 + 17C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{48}{13}, \quad C_2 = -\frac{9}{13}$$

$$x_{св}(k) = \frac{48}{13}4^k - \frac{9}{13}17^k$$

Частное решение неоднородного ур-я:

$g(k) = 2$: $r = 1$, $\varphi = 0$, $R_q(k) = 2$, $q = 0$, $s = 0$

$(\underbrace{r}_{1}(\underbrace{\cos\varphi}_{1} + i\underbrace{\sin\varphi}_{0}) = 1$ не совпадает с λ_1 и $\lambda_2) \Rightarrow$

$$x_н(k) = 1^k \cdot A = A \Rightarrow$$

$$A - 21A + 68A = 2$$

$$A = \frac{2}{48} = \frac{1}{4}$$

Общее реш. неодн. ур-я:

$$x(k) = C_1 4^k + C_2 17^k + \frac{1}{\ldots}$$

Общее реш. неодн. ур-я:

$$x(k) = C_1 4^k + C_2 17^k + \frac{1}{24}$$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{47} = 0 \\ x(1) = 4C_1 + 17C_2 + \frac{2}{47} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{2}{39}, \quad C_2 = \frac{1}{104}$$

$$x_{вын}(k) = -\frac{2}{39} 4^k + \frac{1}{104} 17^k + \frac{1}{24}$$

Выходной сигнал

$$x(k) = \frac{48}{13} 4^k - \frac{9}{13} 17^k - \frac{2}{39} 4^k + \frac{1}{104} 17^k + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{142}{39} 4^k - \frac{71}{104} 17^k + \frac{1}{24}$$

Анализ устойчивости:

Критерий устойчивости:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}$$

а) $|-18| > 1 \Rightarrow$ сис-ма не явл-ся устойчивой

б) $|4| > 1$, $|17| > 1 \Rightarrow$ сис-ма не явл-ся устойчивой

С помощью Z-преобразования

а) Изображение входного сигнала

$$G(z) = Z[g(k)] = Z[16k] = \frac{16z}{(z-1)^2}$$

Предаточная функция

$$a_1 = 1, \; a_0 = 18, \; b_0 = 1, \; n = 1, \; m = 0 \Rightarrow W(z) = \frac{1}{z+18}$$

$$D_н(z) = 16z$$

$$D_g(z) = 0 \quad (m = 0)$$

$$D(z) = z + 18$$

Z-преобразование выходного сигнала:

Z - преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{D_н(z)}{D(z)} + W(z)\cdot G(z) - \frac{D_g(z)}{D(z)} = \frac{16z}{z+18} + \frac{16z}{(z+18)(z-1)^2} =$$

$$\frac{16z}{(z+18)(z-1)^2} = A\frac{z}{z+18} + B\frac{z}{(z-1)^2} + C\frac{z}{z-1} \quad /:z$$

$$16 = A(z-1)^2 + B(z+18) + C(z-1)(z+18)$$

$$z = 1 \Rightarrow 16 = 19B \Rightarrow B = \frac{16}{19}$$

$$z = -18 \Rightarrow 16 = (-19)^2 A \Rightarrow A = \frac{16}{361}$$

$$z = -1 \Rightarrow 16 = \frac{16}{361}\cdot 4 + \frac{16}{19}\cdot 17 - 2\cdot 17\,C \Rightarrow C = -\frac{16}{361}$$

$$= \frac{16z}{z+18} + \frac{16}{361}\frac{z}{z+18} + \frac{16}{19}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{16}{361}\frac{z}{z-1}$$

Выходной сигнал:

$$x(k) = \frac{5792}{361}(-18)^k + \frac{16}{19}k - \frac{16}{361}$$

б) Изображение входного сигнала

$$G(z) = Z[g(k)] = Z[2] = \frac{2z}{z-1}$$

б) $x(k+2) - 21\,x(k+1) + 68\,x(k) = g(k)$,

$x(0) = 3$, $x(1) = 3$, $g(k) = 2$.

Передаточная функция

$a_2 = 1$, $a_1 = -21$, $a_0 = 68$, $b_0 = 1$, $n = 2$, $m = 0$

$$W(z) = \frac{1}{z^2 - 21z + 68}$$

$$D(z) = z^2 - 21z + 68$$

$$D_н(z) = 3(z^2 - 21z) + 3z = 3z^2 - 60z$$

$$D_g(z) = 0$$

Z - преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{D_н(z)}{D(z)} + W(z)\cdot G(z) - \frac{D_g(z)}{D(z)} = \frac{3z(z-20)}{(z-4)(z-17)} +$$

$$X(z) = \frac{[illegible]}{D(z)} + W(z)\cdot G(z) - \frac{Wg(z)}{D(z)} = \frac{[illegible]}{(z-4)(z-17)} +$$

$$+ \frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-17)} \; =$$

1) $$\frac{3z^2}{(z-4)(z-17)} = A\frac{z}{z-4} + B\frac{z}{z-17}$$

$$3z = A(z-17) + B(z-4)$$

$$z = 17 \Rightarrow B = \frac{3\cdot 17}{13} = \frac{51}{13}$$

$$z = 4 \Rightarrow A = -\frac{3\cdot 4}{13} = -\frac{12}{13}$$

2) $$\frac{-60z}{(z-4)(z-17)} = A\frac{z}{z-4} + B\frac{z}{z-17}$$

$$-60 = A(z-17) + B(z-4)$$

$$z = 17 \Rightarrow B = \frac{-60}{13}$$

$$z = 4 \Rightarrow A = \frac{60}{13}$$

3) $$\frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-17)} = A\frac{z}{z-1} + B\frac{z}{z-4} + C\frac{z}{z-17}$$

$$2 = A(z-4)(z-17) + B(z-1)(z-17) + C(z-1)(z-4)$$

$$z = 4 \Rightarrow B = -\frac{2}{3\cdot 13} = -\frac{2}{39}$$

$$z = 17 \Rightarrow C = \frac{2}{16\cdot 13} = \frac{1}{8\cdot 13} = \frac{1}{104}$$

$$z = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{3\cdot 16} = \frac{1}{24}$$

$$= -\frac{12}{13}\frac{z}{z-4} + \frac{51}{13}\frac{z}{z-17} + \frac{60}{13}\frac{z}{z-4} - \frac{60}{13}\frac{z}{z-17} +$$

$$+ \frac{1}{[illegible]}\frac{z}{[illegible]} - \frac{2}{[illegible]}\frac{z}{[illegible]} + \frac{1}{[illegible]}\frac{z}{[illegible]} = \frac{331}{[illegible]}\frac{z}{[illegible]} -$$

$$+\frac{1}{24}\frac{z}{z-1}-\frac{2}{39}\frac{z}{z-4}+\frac{1}{104}\frac{z}{z-17}=\frac{331}{39}\frac{z}{z-4}-$$

$$-\frac{575}{104}\frac{z}{z-17}+\frac{1}{24}\frac{z}{z-1}$$

Выходной сигнал:

$$x(k)=\frac{142}{39}4^k-\frac{71}{104}17^k+\frac{1}{24}$$