Попова Наталья М8О-405Б-20 В-16

4 октября 2023 г. 13:06

4. а) Найти ИПФ системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + \frac{16\,t}{t^2+16}x = g\,.$$

б) Найти ИПФ системы и ее реакцию на входное воздействие при нулевых начальных условиях.

1) $t^2\dot{x} + t\,x = -g,\quad g(t) = t^{16}1(t-5)\,, \; = \begin{cases} t^{16}, & t > 5 \\ 0, & t \le 5 \end{cases}$

2) $t\,\dot{x} - x = t^2\cos t\; g\,,\quad g(t) = \sin^{16} t \cdot 1(t)\,. \; = \begin{cases} \sin^{16} t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

а) $n = 1,\; a_1 = 1,\; a_0(t) = \dfrac{16t}{t^2+16}$

Найдём общее решение ОДУ $\dot{k}(t) + \dfrac{16t}{t^2+16}k(t) = 0$

$$\frac{dk_0(t)}{dt} = -\frac{16\,t}{t^2+16}k_0(t)$$

$$\frac{dk_0(t)}{k_0(t)} = -\frac{16\,t}{t^2+16}\,dt$$

$$\ln|k_0(t)| = -8\ln|t^2+16| + \ln c$$

$$k_0(t,c) = \frac{c}{(t^2+16)^8}$$

$$k_0(t,\tau)\Big|_{t=\tau+0} = \frac{1}{a_1(t)} = 1 \Rightarrow \frac{c}{(\tau^2+16)^8} = 1 \Rightarrow c = (\tau^2+16)^8$$

Тогда $k_0(t,\tau) = \left(\dfrac{\tau^2+16}{t^2+16}\right)^8$

б) 1. ИПФ: $a_1(t) = t^2,\; a_0(t) = t,\; b_0 = -1$

Найдём общее решение ОДУ $t^2\dfrac{dk_0(t)}{dt} + t\,k_0(t) = 0$

$$\frac{dk_0(t)}{k_0(t)} = -\frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln|k_0(t)| = -\ln|t| + \ln|c| \Rightarrow k_0(t) = \frac{c}{t}$$

$$k_0(t,\tau)\Big|_{t=\tau+0} = \frac{1}{a_1(t)} = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \frac{c}{\tau} = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow c = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

$$k_0(t,\tau) = \frac{1}{t\cdot\tau}$$

З-н изменения выходного сигнала:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} k(t,\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_5^t -\frac{1}{t\cdot\tau}\cdot\tau^{16}\,d\tau = -\frac{1}{t}\int_5^t \tau^{15}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(\frac{\tau^{16}}{16}\right)\Big|_5^t = -\frac{1}{t}\left(\frac{t^{16}}{16} - \frac{5^{16}}{16}\right) = 5^{15} - t^{15}$$

t_0 0 5 5

$$= -\frac{1}{t}\left(\frac{\tau^{16}}{16}\right)\Big|_5^t = -\frac{1}{t}\left(\frac{t^{16}}{16} - \frac{5^{16}}{5}\right) = \frac{5^{15}}{t} - \frac{t^{15}}{16}$$

2. ИПР: $a_1(t) = t$, $a_0 = -1$, $b_0(t) = t^2\cos t$

Найдём общее решение ОДУ $t\frac{dk_0(t)}{dt} - k_0(t) = 0$

$$\frac{dk_0(t)}{k_0(t)} = \frac{dt}{t}$$

$$\ln|k_0(t)| = \ln|t| + \ln|C| \Rightarrow k_0(t,C) = Ct$$

$$k_0(t,\tau)\Big|_{t=\tau+0} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow C\tau = \frac{1}{\tau} \Rightarrow C = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow k_0(t,\tau) = \frac{t}{\tau^2}$$

$$k(t,\tau) = k_0(t,\tau)\, b_0(\tau) = t\cos\tau$$

З-н изменения выходного сигнала:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} k(t,\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t t\cos\tau \cdot \sin^{16}\tau \, d\tau = t\int_0^t \sin^{16}\tau \, d\sin\tau =$$

$$= t\cdot\frac{\sin^{17}\tau}{17}\Big|_0^t = \frac{t\sin^{17}t}{17}$$