Задание

В системе имеется служебная программа для сохранения IP-адресов, по которым обращаются пользователи. Предполагается, что каждый пользователь в любую минуту обращается не более чем по одному IP-адресу; программа записывает в файл для каждого пользователя U и каждой минуты M значение IP(u, m), равное IP-адресу, к которому пользователь U обращался в минуту M. Если пользователь U в минуту M не обращался ни по какому IP-адресу, то IP(U, M):=0

Система была использована для проведения сложной атаки на удаленные сайты. Атака проводилась с обращением к t разным IP-адресам за t последовательных минут; в минуту 1 атакующий обращался по адресу i_1; в минуту 2 он обращался по адресу i_2; и т. д. вплоть до адреса i_t в минуту t.

В журнале не оказалось ни одного пользователя U, который бы обращался по всем атакованным IP-адресам в соответствующее время; другими словами, нет такого U, что IP(U, M) $= i_m$ для каждой минуты m от 1 до t.

Подмножество S пользователей будет называться подозрительной группой, если в каждую минуту m от 1 до t был по крайней мере один пользователь U из S, для которого IP(U, M) $= i_m$. (Другими словами, к каждому IP-адресу в соответствующий момент обращался по крайней мере один пользователь из группы.) Итак, для заданного набора всех значений IP(U, M) и числа K существует ли подозрительная группа с размером не более k?

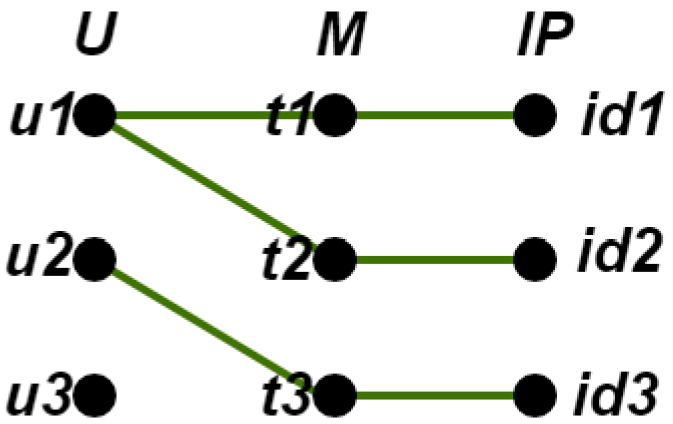
Показать, что это задача является NP-полной.

__Решение__

__Задача ∈ NP__

Если нам известно множество пользователей S, то за полиномиальное время можно *проверить*, что как минимум один пользователь из S обратился к IP-адресу $i_m, m \in [1, t]$ (в i-ю минуту он обратился к i-му IP-адресу) и размер $S \leq k$.

То есть можно каждому пользователю поставить в соответствии какое-то множество минут, когда он обращался к IP-адресу.



__Задана NP-полная__

Задача о вершинном покрытии очень похоже на нашу. В задаче о вершинном покрытии дан граф G = (V, E) и надо найти такое множество вершин S, чтобы покрыть все ребра, при этом размер k этого вершинного покрытия для заданного графа должен быть минимальным.

Задача о вершинном покрытии NP-полная, тогда докажем, что

задача о вершинном покрытии $\leq_p$ наша задача(подозрительная группа пользователей).

За вершины графа примем пользователей, за ребра – обращения к IP-адресам.

Занумеруем ребра графа от 1 до t так, что эти номера будут соответствовать, когда пользователь обратился к i-тому IP-адресу в i-ую минуту. То есть у нас будет |E|=t рёбер и каждой вершине(пользователю) будет соответствовать множество запросов, когда пользователь обратился к i-тому IP-адресу в i-ую минуту.

Если нам удастся найти множество вершин (пользователей) размером ≤ k, которое покроет все рёбра (запросы), то мы найдём вершинное покрытие размера/мощности ≤ k.

Если нам не удастся найти такое множество вершин(пользователей), которое смогло бы покрыть все ребра (запросы), то получится, что какое-то ребро мы не покрыли и соответственно какой-то запрос не пройдёт.

То есть наша задача — это задача о вершинном покрытии.

Наша задача NP-полная.

Пример: Вершинное покрытие ≤ 4.