$W(m) = S(m) := \{ f \in L^2[0,1],\ f$ admet une dérivée jusqu'à l'ordre m, et $\int_0^1 f^2 < +\infty, \dots, \int_0^1 (f^{(m)})^2 < +\infty \}$

$WP(m) = \{ f \in W(m),\ f(0) = f(1),\ f^{(j)}(0) = f^{(j)}(m),\ j \leq m \}$

Exercice :

Trouver le lien entre $V_S(M)$ et $WP(m)$

Indication :

$f = \sum \theta_k e_k$, $f' = \sum \theta_k' e_k$

θ_k' s'exprime en fonction de θ_k.

On va voir :

- lien espaces fonctionnels $\longleftrightarrow$ approximation.
- Estimateur adaptatif

$X_1, \dots, X_n$ iid de densité f.

2 types :

- Noyau : $\hat{K}_h(x) = \frac{1}{n} \sum K_h(x - X_i)$

$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right)$ $\quad K_h f(x) = \int K_h(x-u) f(u) du$

- $\sum$ orthogonale : $\hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)$

$\hat{f}_K = \sum_{j \leq K} \hat{\theta}_j e_j$

$\mathbb{E} \| \hat{f} - f \|_2^2$

Biais	stoch.
$\| K_h f - f \|_2^2$	$\frac{1}{nh}$
$\sum_{k > K} \theta_k^2$	$\frac{K}{n}$

Si $f \in Lip(\alpha)(M) = \{ f$ densité sur $[0,1]$ $|f(0)| \leq M$, $|f(x) - f(y)| \leq M |x-y|^\alpha,\ \forall x, y \}$ $\quad \alpha \in]0,1]$

$\Rightarrow \exists\, C(M)\ \forall x,\ |K_h f(x) - f(x)| \leq C(M) h^\alpha$

$\Rightarrow \| K_h f - f \|_\infty \leq C(M) h^\alpha$

62

$\Rightarrow \|K_h f - f\|_{L^p[0,1]} \leq C(M)\, h^\alpha$.

$\alpha > 1$: $\alpha = \underbrace{\lfloor \alpha \rfloor}_{= \text{partie entière} - 1} + \beta \quad (\beta \in]0,1]) =: m + \beta$

$V_\alpha(M) := \{ f$ densité sur $[0,1]$ $|f(0)| \leq M$ $|f^{(j)}(0)| \leq M \; \forall j \leq m$
$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq M |x-y|^\beta \; \forall x, y \in [0,1] \}$

On peut montrer qu'on a à nouveau des propriétés d'approximation :

On suppose que K est tq
- $\int |K(u)|^\alpha du < +\infty$
(Concentration de K)
- $\int x^r K(x) dx = \delta_{0r} \quad r \leq \lfloor \alpha \rfloor$
(Condition des moments)

conditions (*)

Proposition :

Si $f \in V_\alpha(M)$, $\forall p \in [1, +\infty]$, $\exists\, C_p(M)$
$\|K_h f - f\|_p \leq C_p(M)$

Démo :

(p 73-79 Hardle, Kerbyacharian, P, Tsybakov).

Idée : $\int K_h(x-u) \underbrace{(f(u) - f(x))}_{} du$

contrôler avec dev^t à l'ordre m de $\sum (u-x) f^{(j)}(x) \to$ last term

K étant un noyau donné.
les fonctions approximables par K :

$\{ f,\ [0,M] \to \mathbb{R},\ \sup_{h \in]0,1]} \|K_h f - f\|_p\, h^{-s} < +\infty \} := B_{s,p}(K)$

C'est cette approx qui est utile, au moins pour l'approximation paramétrique

Si K vérifie les conditions (*) (α)
Alors tous les $B_{s,p}(K) := B_{\alpha,p}(K)$ coïncident.

On le note $B_{\alpha p \infty}$.

(On pourrait remplacer ~~par~~ :

$\sup_h \|K_h f - f\|_p h^{-s}$ par

$$\left(\int_{[0,1]} (\|K_h f - f\|_p h^{-s})^q \frac{dh}{h}\right)^{1/q} \quad q \in [1, +\infty[$$

$\rightarrow B_{\alpha p q}$ (Besov).)

. Propriétés d'approximation et bases orthonormées.

Espaces de Sobolev périodiques :

$W_2^{(P)}(m) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1)\ j \leq m$ et $f^{(m)}$ existe, $\int_{[0,1]} (f^{(m)})^2(x)\, dx < +\infty \}$

Base trigonométrique : sur $[0,1]$:

$e_0(x) = 1 \quad e_{2k}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi k x) \quad e_{2k+1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi k x)$

$f = \sum \theta_i e_i$.

$\theta_i = \langle f, e_i \rangle$

$f \in W_2^{(P)}(m) \iff \sum_{j=0}^{+\infty} a_j^2 \theta_j^2 < +\infty$

$\left.\begin{array}{l} a_j = j^m \quad j \text{ pair} \\ (j-1)^m, \ j \text{ impair} \end{array}\right\}$ Exo (ou Tsybakov p $\frac{46}{151}$)

$(\langle f^{(m)}, e_i \rangle \underset{\to \, + \, ipp}{=} \int f^{(m)}(x) e_i(x)\, dx.)$

$\{ f = \sum \theta_i e_i,\ \sum a_j^2 \theta_j^2 < +\infty \} = W_2^{(P)}(m)$

$W_2^{(P)}(m)(M) = \{ f = \sum \theta_i e_i,\ (\sum a_j^2 \theta^2)^{1/2} \leq M \}$.

Rappel

Propriétés d'approximations.

$\{ \forall k \ \sum_{k \geq K} \theta_k^2 \leq (M')^2 K^{-2s} \} = W_s(M)$

$\exists M'$ tq $W_2^{(P)}(m)(M) \subset W_s(M')$

Démo :

Soit K arbitraire.

$$\sum_{k \geq K} \theta_k^2 \leq \sum_{k \geq K} \left(\frac{k}{K}\right)^{2m} \theta_k^2 \leq \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \sum_{k \geq K} k^{2m} \theta_k^2$$
$$\leq \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \sum_k (a_k)^2 \theta_k^2 \leq \frac{M^2}{K^{2m}}$$

Base d'ondelettes :

Analyse multi~~linéaire~~ résolution $L^2([0,1])$ où $L^2(\mathbb{R})$

$\exists$ suite $V_j \subset L^2$ $V_j \subset V_{j+1}$ tq $\bigcup V_j = L^2([0,1])$

$$V_j = \left\{ f = \sum_{k \in I_j} \alpha_{jk} \varphi_{jk}(x) \,,\ f \in L^2 \right\}$$
$$\varphi_k(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

φ s'appelle fonction d'échelle ou fonction paire.

- $V_j = V_{j-1} \oplus W_j$

$$W_j = \left\{ f(x) = \sum_{k \in I_j} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \,,\ f \in L^2 \right\}$$

$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ $\quad (I_j = \{0, \dots, 2^j - 1\}$

ψ s'appelle l'ondelette, l'ondelette mère.

Exemple ; base de Haar sur $[0,1]$

$$V_j = \left\{ f \in [0,1] \to \mathbb{R} \text{ constante sur } I_{kj} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right[\right\}$$

$\subset V_{j+1}$ (cste sur I_{jk} $\Rightarrow$ cste sur $I_{j+1\,k}$)

$\varphi(x) := \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) = 2^{j/2} \mathbb{1}_{I_{jk}}(x).$$

on a : $\int \varphi_{jk}^2(x)\, dx = 1$. $\int \varphi_{jk} \varphi_{jk'} = 0$ si $k \neq k'$.

$\Rightarrow$ $\alpha_{jk} = \int_{[0,1]} f \varphi_{jk}$.

$W_j := \left\{ \sum_{k \in I_j} \beta_{jk} \psi_{jk} \right\}$ $\quad \psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$

$\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1[}$

On montre que si $f \in V_j$

$$f = \sum_{k \in I_j} \alpha_{jk} \varphi_{jk} = \sum_{k \in I_{j-1}} \alpha_{j-1\,k} \varphi_{j-1\,k} + \sum_{k \in I_j} \beta_{jk} \psi_{jk}$$

On montre que $V_j = V_{j-1} \oplus W_j$.

car $\langle \psi_{jk}, \varphi_{j-1\,k'} \rangle = 0 \quad \forall k, k'$.

$$\int \varphi_{j-1\,k'} \psi_{jk} = 0$$

$k \neq k' \Leftarrow \varphi_{j-1\,k'}(x)\, \psi_{jk}(x) = 0 \quad \forall x$.

$$\int \varphi_{j-1,k} \psi_{jk} = \int \psi_{jk} = 0$$

Autres bases :

- plus régulières
- overlap : $\psi_{jk} \psi_{jk'}(x) = 0$ (base de Haar)

↳ faux pour les bases d'ondelette regu.

On a $V_j = V_{j-1} \oplus W_j$

$\{\psi_{jk},\ k \in I_{jk}\}$ orthonormée, bon de W_j.

$= V_{j-2} \oplus W_{j-1} \oplus W_j$

$= \dots = V_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j$.

$f \in L^2$.

$$f = \sum_{k \in I_0} \alpha_{0k} \varphi_{0k} + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in I_j} \beta_{jk} \psi_{jk}.$$

$$\alpha_{0k} = \int f \varphi_{0k} \qquad \beta_{jk} = \int f \psi_{jk}.$$

$\{\varphi_{0k},\ k \in I_0,\ \psi_{jk},\ j \geq 0,\ k \in I_j\}$ bon de $L^2([0,1])$.

$\varphi_{0k} = \psi_{-1k} \quad I_0 =: I_{-1}$

Donc $f = \sum_{j \geq -1} \sum_{k \in I_j} \beta_{jk} \psi_{jk}$

$\{\psi_{jk},\ k \in I_j,\ j \geq -1\}$ bon de $L^2([0,1])$.

- J fixe

$$f = \pi_{V_J} f + \sum_{j \geq J} \pi_{W_j} f$$

$$= \sum_{k \in I_J} \alpha_{Jk} \varphi_{Jk} + \sum_{j \geq J} \beta_{jk} \psi_{jk}$$

$$\alpha_{Jk} = \int f \varphi_{Jk} \qquad \beta_{jk} = \int f \psi_{jk}.$$

66

Estimation par série orthogonales.

Prendre une b.o.n. $\{e_i, i \geq 0\}$

$$\hat{f} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\theta}_j e_j \quad \hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)$$

$\{\varphi_{jk}, j \geq -1, k \in I_j\}$ $i = (jk)$

· $$\hat{f}_J(x) = \sum_{j \geq -1}^{J} \sum_{k \in I_j} \hat{\beta}_{jk} \varphi_{jk}$$

$$\hat{\beta}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{jk}(X_i)$$

$$= \Pi_{V_J} \left(\sum_{j \geq -1} \sum_{k} \hat{\beta}_{jk} \varphi_{jk} \right)$$

$$= \sum_{k \in I_J} \alpha_{Jk} \varphi_{Jk}$$

où $$\hat{\alpha}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{Jk}(X_i)$$

↳ On a alors un rapport avec la methode des ker.

$$\hat{K}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

donc

$$\hat{f}_j(x) = \sum_{k \in I_j} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{Jk}(X_i) \varphi_{Jk}(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k \in I_j} \varphi_{Jk}(X_i) \varphi_{Jk}(x)}_{K_J(x, X_i)}$$

$$K_J(x, X_i) = \sum_{k \in I_J} 2^J \varphi(2^J X_i - k) \varphi(2^J x - k)$$

$$\sum_{k \in I_J} \varphi(x - k) \varphi(u - k)$$

$$=: K(x, u)$$

$$K_J(x, X_i) = 2^J K(2^J X_i, 2^J u)$$

$$\hat{f}_J(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2^J K(2^J X_i, 2^J u)$$

$$2^J = \frac{1}{h}$$

Biais $\Longleftrightarrow$ Approximation.

$$\sum_{j \geq J} \sum_k \beta_{jk}^2 .$$

$$W_s(M) = \left\{ f \text{ densité}, \ \sup_J 2^{+Js} \left(\sum_{j \geq J} \sum_k \beta_{jk}^2 \right)^{1/2} \leq M \right\}$$

On avait vu en (ST) :

Biais $\leq 2^{-2J}$

terme stoch. $\dfrac{2^J}{n}$ $\to$ nbe de termes estimés.

$$\mathring{B}_{s,p,\infty} = \left\{ f = \sum_{j \geq -1} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}, \right.$$
$$\left. \sup_j 2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_k |\beta_{jk}|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$
(ou k ?)

$p=2$ on retrouve l'espace dont $W_s(M)$ est la boule.

$\mathring{B}_{s,p,\infty}$ coïncide avec $B_{s,p,\infty}$ (propriété sur ondelette).

$$B_{s,p,\infty} = \left\{ f, \ \sup_h \|K_h f - f\|_p \, h^s < +\infty \right\}.$$

indépendant de K pourvu que K ait des propriétés (*)

$= \mathring{B}_{s,p,\infty}$

Exercice $\qquad \alpha \in]0,1[$.

1) Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad$ (E)
f Lip(α), alors $f \in B_{\alpha,\infty\infty}$
(φ, ψ) base de Haar.
$\mathrm{Lip}(\alpha) \subset B_{\alpha\infty\infty}$

2) Montrer que si $f \in B_{\alpha\infty\infty}$,
(φ, ψ) sont des fonctions au moins Lip(α), alors $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$
$B_{\alpha\infty\infty} = \mathrm{Lip}(\alpha)$ si φ, ψ sont suffisament réguliers

Adaptivité :

$\longrightarrow \hat{K}_h$

$\longrightarrow \hat{f}_K$ estimateur optimal au sens minimax

$h_s \simeq n^{-\frac{1}{1+2s}}$, $K = n^{\frac{1}{1+2s}}$

Ce choix dépend de la régularité (s).

En pratique, s inconnu

Plug-in :

s $\longrightarrow$ on estime par $\hat{s}$.

$h = n^{\frac{1}{1+2\hat{s}}}$.

On montre que s est une quantité non estimable

4 grandes méthodes pour aborder ce problème :

- CV
- Lepski
- Seuillage
- Méthode de pénalisation

- CV (leave-one-out)

$\hat{K}_h(x)$ problème : choisir h

$CV(h) = \mathbb{E}_f \|\hat{K}_h - f\|_2^2$

densité $X_1, \dots, X_n$ densité f

$\rightarrow$ On retire l'espérance

$$CV1(h) = \int (\hat{K}_h - f)^2 dx$$

$$= -2\int \hat{K}_h(x) f(x)\, dx + \underbrace{\int f^2(x)\, dx}_{\perp\!\!\!\perp \text{ de } h} + \int \hat{K}_h^2(x)\, dx$$

$$CV2(h) = -2\int \hat{K}_h(x) f(x)\, dx + \int \hat{K}_h^2(x)\, dx$$

$$J(h) = \underbrace{\int \hat{K}_h(x)^2 dx - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{K}_h^{(-i)}(X_i)}_{\text{Calculable}}$$

Jackknife ou Leave one out.

$\hat{K}_h(x)$ calculé :

$\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$

(échantillon privé de x_i)

On choisit h qui minimise $J(h) = \hat{h}$.

'bonnes ptés de CV' de h.

vers $h^* = \arg\inf CV(h)$

Pas de propriété de minimax établie.

<u>Méthode de Lepski</u> :

<u>Idées</u> :

① On choisit une fenêtre h pour chaque point.

2 termes : 1) $\|K_h f - f\|^2$

2) $\left(\frac{1}{nh}\right)^{1/2}$ → terme stoch.

& choisir h le + grand possible à condition que le biais reste correct.

② Sorte d'estimation du biais :

$h \in \underbrace{\{2^{-j}, j \in \{1, \dots, J\}\}}_{:= D_J}$ $2^J = \frac{n}{\log n}$

$\tilde{A}(x) := \{h_j = 2^{-j} \in D_J \ , \ \forall J \geq j' > j$
$|\hat{K}_{h_j}(x) - \hat{K}_{h_{j'}}(x)| \leq S(j, j', n)\}$

La procédure consiste à prendre $\hat{h}$ tq

$\hat{h}(x) = \sup\{h \in \tilde{A}(x)\}$

& si $\tilde{A}(x)$ $\hat{h}(x) = 2^{-J}$

$\hat{f}^*(x) = \hat{K}_{\hat{h}(x)}(x)$.

Estimation du biais

$$|\hat{K}_h(x) - \hat{K}_{h'}(x)| \quad h' < h$$

(Le biais au point x est $|K_h(x) - f(x)|$)

Pour la borne $s(j, j', n)$,

on prend $s(j,j',n) = c\sqrt{\frac{\log n}{n h_{j'}}}$

Pourquoi ? :

Lemme :

$\forall x \in [0,1]$, $h > h'$, $\exists c'(c)$ tq

$$\mathbb{P}\left(|\hat{K}_h(x) - K_{h'}(x)| > c\sqrt{\frac{\log n}{n h'}}\right) \leq n^{-c'}$$

↳ inégalité de concentration de $\hat{K}_h - K_{h'}$

Démo

Hoeffding ne marche pas

→ Inégalité de Bernstein :

X_i iid $\mathbb{E}X_i = 0$, $b_n = n\,\mathbb{E}X_i^2$.

$|X_i| \leq M$, $\forall \vartheta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \vartheta\right) \leq 2e^{\frac{-\vartheta^2}{2\left(b_n^2 + \frac{\vartheta M}{3}\right)}}$$

↳ On l'applique avec :

$$X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{K_h(x - X_i) - \mathbb{E}K_h(x-X_i)}_{:= Y_i}$$

K borné par $M \Rightarrow |Y_i| \leq \frac{2M}{h}$.

$\mathbb{E}Y_i = 0$.

$$b_n = n\,\mathbb{E}_f\left(K_h(x - X_i) - K_h f(x)\right)^2 = n\frac{M}{h}$$

On prend $\vartheta = nc\sqrt{\frac{\log n}{nh}}$

Cela donne pour l'exponentielle :

$$\exp\left[\left(\frac{-mc\,\frac{\log c}{m^{\delta}h}}{\frac{n}{h}+mc\sqrt{\frac{\log m}{m^{\delta}h}\,\frac{M}{h}}}\right)\right] \leq n^{-C'}$$

$$n \geq \frac{\log n}{n}.$$