システム制御理論と統計的機械学習

第 1 章：はじめに

加嶋 健司

October 10, 2025

京都大学 情報学研究科

準備

確率密度関数

「x は X に実現値をもつ**確率変数**（random variable）である」ことを，$x \in \mathrm{rv}(X)$ と表記

「$x \in \mathrm{rv}(X)$ の実現値が $\mathrm{x} \in X$ である」などとフォントを使い分け

前提

- $x \in \mathrm{rv}(X)$ に対して規格化条件 $\int_X \varphi_x(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1$ を満たす非負値関数 $\varphi_x : X \to \mathbb{R}_+$ がただ一つ存在（x の**確率密度関数**（probability density function），$x \sim \varphi_x$ と表記）
- $x \in \mathrm{rv}(X),\ y \in \mathrm{rv}(Y)$ に対して $(x, y) \in \mathrm{rv}(X \times Y)$ であり，

$$\varphi_x(\mathrm{x}) = \int_Y \varphi_{(x,y)}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dy}, \quad \varphi_y(\mathrm{y}) = \int_X \varphi_{(x,y)}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx} \tag{1.1}$$

- 積分により確率変数の一部を消去することを**周辺化**という

確率密度関数の例

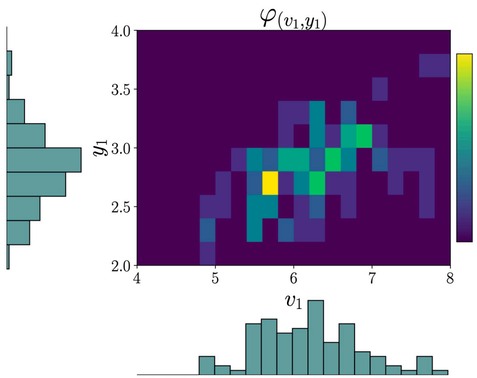
Example (例 1.2.1)

ある風力発電所での時刻 k における風速と発電量を確率変数 v_k, $y_k \in \mathrm{rv}(\mathbb{R})$ により表現

- たとえば

  $(v_1, y_1, v_2, y_2, \dots, v_{10}, y_{10}) \in \mathrm{rv}(\mathbb{R}^{20})$,

  $(v_1, y_1) \in \mathrm{rv}(\mathbb{R}^2)$
- 右図では，風が強いほど発電量が多い



結合確率密度関数 $\varphi_{(v_1,y_1)}$ と周辺確率密度関数 $\varphi_{v_1}, \varphi_{y_1}$

確率と期待値

定義 1.2.2 — 確率・期待値

$x \in \mathrm{rv}(X),\ B \subset X$ に対して

- x の実現値が集合 $B \subset X$ に含まれる**確率**（probability）

$$\mathbb{P}_x(B) := \int_B \varphi_x(\mathrm{x})\mathrm{dx} \tag{1.2}$$

  関数 $\mathbb{P}_x$ を x の**分布**（distribution）

- x の**期待値**（expectation）

$$\mathbb{E}[x] := \int_X \mathrm{x}\varphi_x(\mathrm{x})\mathrm{dx} \tag{1.3}$$

- $\mathbb{P}[x > 1] := \mathbb{P}_x(\{\mathrm{x}|\mathrm{x} > 1\})$ のように条件を直接的に表記
- $x = y$ は $\mathbb{P}[x = y] = 1$（x と y の実現値はいつも等しい），$x > y$ なども同様

独立性

定義 1.2.4 – 独立・同分布

- $\{x_i\}_{1\le i\le l}$ は**独立**（independent）（$x \perp\!\!\!\perp y$ と表記）

$$\varphi_x(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{l} \varphi_{x_i}(\mathrm{x}_i),\ \forall \mathrm{x}_i \in X_i, \qquad (x := (x_1, \dots, x_l)) \tag{1.4}$$

- $x,\ y \in \mathrm{rv}(X)$ が $\varphi_x = \varphi_y$ を満たすとき，**同分布**をもつ（identically distributed）
- $\{x_i\}_i$ が独立かつ同分布をもつとき，**独立同分布**または **i.i.d.**

- $x \in \mathrm{rv}(X)$ と関数 $f : X \to Y$ に対して，$f(x) \in \mathrm{rv}(Y)$ は「x の実現値が x のとき，いつも実現値が $f(\mathrm{x})$ となる確率変数」
- $y = f(x)$ とかけるとき，$y \in \mathrm{rv}(x)$ と表記

同分布であるが独立でない例

注意

$x = y$ ならば x と y は同分布をもつが，逆は成り立たない

- 反例：$x \in \mathrm{rv}(\mathbb{R})$ の確率密度関数が $\varphi_x(\mathrm{x}) \propto \mathbb{1}_{(-1,1)}(\mathrm{x})$ と与えられるとき，x と $y := -x$ は同分布をもつが，$\mathbb{P}(x = y) = 0$

$x \perp\!\!\!\perp y$ の仮定のもとでは，φ_x, φ_y から $\varphi_{(x,y)} = \varphi_x \varphi_y$ が定まる．

指示関数 $$\mathbb{1}_B(\mathrm{x}) := \begin{cases} 1 & (\mathrm{x} \in B) \\ 0 & (\mathrm{x} \notin B) \end{cases}$$

諸定理

定理 1.2.5 – 確率変数の関数の独立性

確率変数 $x,\ y,\ z$ が $x \perp\!\!\!\perp y$ かつ $z \in \mathrm{rv}(y)$ を満たすならば，$x \perp\!\!\!\perp z$

定理 1.2.6 – 確率変数の関数の期待値

確率変数 $f(x)$ の期待値 $\mathbb{E}[f(x)]$ は $\int_X f(\mathrm{x})\varphi_x(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ に等しい

定理 1.2.7 – 期待値演算の線形性

任意の $x_1, x_2 \in \mathrm{rv}(\mathbb{R}^n), a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{E}[a_1x_1 + a_2x_2] = a_1\mathbb{E}[x_1] + a_2\mathbb{E}[x_2]$

定理 1.2.8 – 独立な確率変数の和の確率密度関数

$x,\ y \in \mathrm{rv}(\mathbb{R}^n)$ が $x \perp\!\!\!\perp y$ を満たすとき，$z := x + y$ の確率密度関数は，畳み込み積 $*$ を用いて $\varphi_z(\mathrm{z}) = (\varphi_x * \varphi_y)(\mathrm{z}) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x(\mathrm{x})\varphi_y(\mathrm{z} - \mathrm{x})\mathrm{dx}$