システム制御理論と統計的機械学習

第 3 章：確率システム

加嶋 健司

October 10, 2025

京都大学 情報学研究科

© 2025 Kenji Kashima

本章の流れ

3.1 確率過程
確率を扱うための数学的な枠組みに時間の概念を導入

3.2 線形確率システム解析
線形確率システムの特徴を時間領域と周波数領域で解析

確率過程

確率過程とは

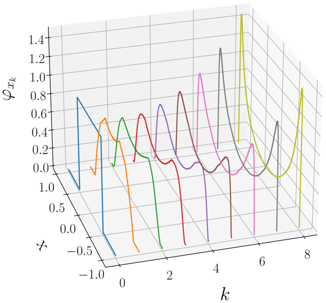
確率過程 (stochastic process)：確率変数の列

- (X-値の) **時系列信号**：X の要素の列（$\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$ から X への関数）
- (X-値の) **確率過程**：$\mathrm{rv}(X)$ の要素の列（$\mathbb{Z}_+$ から $\mathrm{rv}(X)$ への関数）
- 表記
  - x_k : 時刻 k での確率過程 x の値
  - $x_{k:l} := (x_k, x_{k+1}, \cdots, x_l)$
  - $x_{k:} := (x_k, x_{k+1}, \cdots),\ x_: := (x_0, x_1, \cdots)$

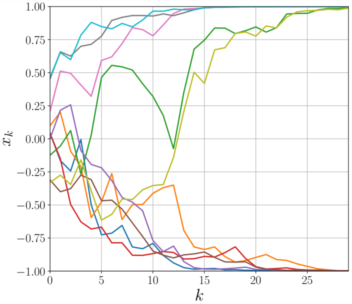
標本経路

$x_k \in \mathrm{rv}(X)$ に対して，$(x_0, x_1, \cdots) \in \mathrm{rv}(X \times X \times \cdots)$

- 確率過程は時系列信号に実現値をとる確率変数
- 実現値を**標本経路** (sample path) とよぶ



x_k の周辺確率密度関数



標本経路

マルコフ過程 (1) 状態変数

現代制御論での状態変数

- 未来の状態が現在の状態にのみ依存，過去の状態に依存しない
- 現在の状態に過去の状態の情報が集約されている

定義 3.1.1 – x と y は z のもとで条件付き独立

任意の $\mathrm{z} \in Z$ に対して，

$$\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}|\mathrm{z}) = \varphi(\mathrm{x}|\mathrm{z})\varphi(\mathrm{y}|\mathrm{z}),\ \forall \mathrm{x},\ \mathrm{y} \tag{3.2}$$

- $\varphi(\mathrm{x}|\mathrm{y}, \mathrm{z}) = \dfrac{\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}|\mathrm{z})}{\varphi(\mathrm{y}|\mathrm{z})} = \varphi(\mathrm{x}|\mathrm{z})$ と等価
- 「x に関して y からは z 以上の情報は得られない」

マルコフ過程 (2) 定義

定義 3.1.2 – マルコフ過程

任意の k に対して，x_{k+1} と $x_{0:k-1}$ は x_k のもとで条件付き独立であるとき，$x_{:}$ はマルコフ過程（Markov process) という．

- 現在の状態が与えられると，未来と過去は独立
- 状態の過去の実現値系列 $x_{0:k} = \mathrm{x}_{0:k}$ のもとで x_{k+1} の事後分布は x_k にのみ依存し，$\mathrm{x}_{0:k-1}$ に依存しない

$$\varphi(\mathrm{x}_{k+1}|\mathrm{x}_{0:k}) = \varphi(\mathrm{x}_{k+1}|\mathrm{x}_k), \ \forall k$$

マルコフ過程 (3) 差分方程式による時間発展の表現

- x_0：初期状態を表す確率変数
- $v_:$：確率的な外生信号（**雑音**）を表す確率過程
- f：時間発展則を表す関数

定理 3.1.4 – 確率システムのマルコフ性

雑音が**無記憶** $(x_0, v_{0:k-1}) \perp\!\!\!\perp v_k,\ \forall k$ であるとき，

$$x_{k+1} = f_k(x_k, v_k) \tag{3.4}$$

によって決まる確率過程 $x_:$ はマルコフ過程である．

- $x_k \in \mathrm{rv}(x_0, v_{0:k-1})$
- 状態変数に直接影響する雑音を**プロセス雑音**や**外乱**という

分布の時間発展 (1) 遷移確率密度関数

定義 3.1.5 – 確率密度関数の時間発展

確率過程 $x_:$ の遷移確率密度関数（transition –）

$$\Psi_k(\mathrm{x}_{k+1}|\mathrm{x}_k) := \varphi(\mathrm{x}_{k+1}|\mathrm{x}_k) \tag{3.5}$$

- 状態の確率密度関数の時間発展（線形）

$$\varphi(\mathrm{x}_{k+1}) = \int_X \Psi_k(\mathrm{x}_{k+1}|\mathrm{x}_k)\varphi(\mathrm{x}_k)\mathrm{d}\mathrm{x}_k \tag{3.6}$$

- 経路の確率密度関数

$$\varphi(\mathrm{x}_{j:k}) = \varphi(\mathrm{x}_j)\prod_{i=j}^{k-1}\Psi_i(\mathrm{x}_{i+1}|\mathrm{x}_i) \tag{3.10}$$

分布の時間発展 (2) 中間時刻の周辺化

演習 3.1 – チャップマン・コルモゴロフ（Chapman-Kolmogorov）の定理

マルコフ過程 $x_:$ および $j < l < k$ に対して，

$$\varphi(\mathrm{x}_k|\mathrm{x}_j) = \int_X \varphi(\mathrm{x}_k|\mathrm{x}_l)\varphi(\mathrm{x}_l|\mathrm{x}_j)\mathrm{d}\mathrm{x}_l \tag{3.7}$$

Proof.

マルコフ性より $\varphi(\mathrm{x}_k|\mathrm{x}_l) = \varphi(\mathrm{x}_k|\mathrm{x}_j, \mathrm{x}_l) = \varphi(\mathrm{x}_j, \mathrm{x}_l, \mathrm{x}_k)/\varphi(\mathrm{x}_j, \mathrm{x}_l)$ が成り立ち，$\varphi(\mathrm{x}_l|\mathrm{x}_j) = \varphi(\mathrm{x}_j, \mathrm{x}_l)/\varphi(\mathrm{x}_j)$ であることから，被積分関数は $\varphi(\mathrm{x}_l, \mathrm{x}_k|\mathrm{x}_j)$ であり，積分により x_l が周辺化される． □

分布の時間発展 (3) 確率的双安定性の例

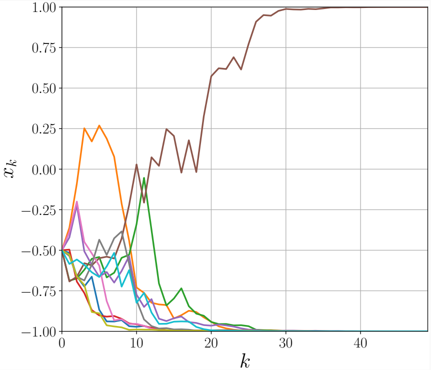
例 3.1.6 – 確率的双安定性

$$x(k+1) = f_{\mathrm{b}}(x(k)),$$
$$f_{\mathrm{b}}(\mathrm{x}) := \mathrm{x} + 0.1(\mathrm{x} - \mathrm{x}^3) \tag{3.8}$$

- $x(0) = 0$ は平衡点
- $x(0) \in [-1, 0) \Rightarrow x(k) \to -1$，
  $x(0) \in (0, 1] \Rightarrow x(k) \to 1$

$$x_{k+1} = f_{\mathrm{b}}(x_k) + 0.5(1 - |x_k|)v_k,$$
$$v_k \sim \textsf{Uni}([-1, 1]) \tag{3.9}$$

- 雑音の大きさは安定平衡点 $\mathrm{x} = \pm 1$ では 0 で，この二点の中点近くでは大きい
- 初期だけで決まらない収束先



確率システム ($x_0 = -0.5$)

安定性 (1) 収束の定義

定義 3.1.8 – 確率過程の収束

1. $x_:$ が $\bar{x}$ に**概収束**する（$x_k \xrightarrow{\text{a.s.}} \bar{x}$ と表記）とは，

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}\right) = 1 \tag{3.11}$$

2. $r \geq 1$ に対して，$x_:$ が $\bar{x}$ にr **次平均収束**する（$x_k \xrightarrow{L^r} \bar{x}$ と表記）とは，

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\|x_k - \bar{x}\|^r\right] = 0 \tag{3.12}$$

3. $x_:$ が $\bar{x}$ に**確率収束**する（$x_k \xrightarrow{p} \bar{x}$ と表記）とは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\|x_k - \bar{x}\| > \epsilon) = 0 \tag{3.13}$$

4. $x_:$ が $\bar{x}$ に**法則収束**する（$x_k \xrightarrow{d} \bar{x}$ と表記）とは，任意の実数値有界連続関数 f に対して，

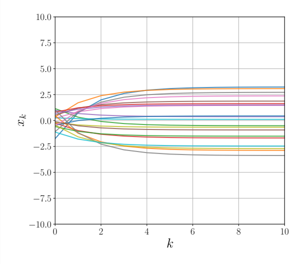
$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f(x_k)] = \mathbb{E}[f(\bar{x})] \tag{3.14}$$

安定性 (2) 確率過程の収束の例

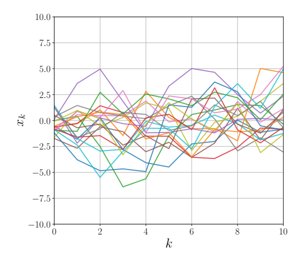
例 3.1.9 – 確率過程の収束

$$x_{k+1} = 0.5x_k + v_k,\ x_0 \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{3.15}$$

- $v_\cdot$ が $v_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ のステップ信号 ($v_0 = v_1 = v_2 = \cdots$) の場合，すべての軌道において $x_k - 2v_0 = 0.5^k(x_0 - v_0) \to 0$ が成り立ち，x_k は $2v_0 \sim \mathcal{N}(0,2^2)$ に概収束
- $v_k \sim \mathcal{N}(0,3)$, i.i.d の場合，$\varphi_{x_k}$ は $\mathcal{N}(0,2^2)$ に法則収束



ステップ応答の概収束



雑音応答の法則収束

リアプノフ安定論 (1) 概要

$\mathbb{R}^n$-値時系列信号 $x(k)$ の振る舞いをリアプノフ関数 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を通して調べる

例

常に $V(x(k))$ が k に関して非増加ならば，$x(k)$ は集合 $\mathrm{Lv}(V; V(x(0)))$ から出ない

- レベルセット

$$\mathrm{Lv}(V; r) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq r\} \tag{3.16}$$

- $x(k+1) = f(x(k))$ の場合の十分条件

$$V(f(\mathrm{x})) - V(\mathrm{x}) \leq 0, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

リアプノフ安定論 (2) 確率システム

定理 3.1.10 – ディンキン (Dynkin) の公式

マルコフ過程 $x_:$，実数値関数 $V : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{E}[V(k, x_k)] = \mathbb{E}[V(0, x_0)] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\mathcal{L}_x[V](i, x_i)] \tag{3.18}$$

- $\mathcal{L}_x[V]$ は期待値の意味での V の x に沿った時間変化量

$$\mathcal{L}_x[V](k, \mathrm{x}) := \mathbb{E}[V(x_{k+1})|x_k = \mathrm{x}] - V(k, \mathrm{x}) \tag{3.17}$$

- 個別のサンプルパスの性質に対しては議論していない
- $x_{k+1} = f(x_k, v_k)$ の場合の十分条件

$$\mathbb{E}[V(f(\mathrm{x}, v_k))|x_k = \mathrm{x}] - V(\mathrm{x}) \leq 0, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

リアプノフ安定論 (3) 指数安定性

系 3.1.12 – 指数安定性

X-値マルコフ過程 $x_:$ および $V : X \to \mathbb{R}$，$\beta > 0$ に対して，

$$\mathbb{E}[V(x_{k+1})|x_k = \mathrm{x}] \leq \beta V(\mathrm{x}), \ \forall k, \ \mathrm{x} \tag{3.19}$$

ならば，

$$\mathbb{E}[V(x_k)] \leq \beta^k \mathbb{E}[V(x_0)] \tag{3.20}$$

- $\beta \in (0,1)$，$V(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x} - \bar{\mathrm{x}}\|^p$ に対して式 (3.19) が成り立てば，x_k は $\bar{\mathrm{x}}$ に p 次平均収束

リアプノフ安定論 (4) 期待値による裾の確率の評価

定理 3.1.13

1. （マルコフ（Markov）の不等式）非負確率変数 x が有限の期待値 $\mathbb{E}[x] < \infty$ をもつとき，任意の $a > 0$ に対して，

$$\mathbb{P}(x \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[x] \tag{3.21}$$

2. （チェビシェフ（Chebyshev）の不等式）実数値確率変数 x と任意の $a > 0,\ p > 0$ が $\mathbb{E}[|x|^p] < \infty$ を満たすとき，

$$\mathbb{P}(|x| \geq a) \leq \frac{1}{a^p}\mathbb{E}[|x|^p] \tag{3.22}$$

- $\mathbb{E}[|x_k|^p]$ の値から分布の裾の重さ $\mathbb{P}(|x_k| \geq a)$ を評価

線形確率システム解析

本節で扱うシステム

行列 $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ とプロセス雑音 $v_:$ を用いた線形の差分方程式

$$x_{k+1} = Ax_k + v_k \tag{3.24}$$

により与えられる確率過程 $x_:$

時間領域 (1) 状態の期待値，分散の時間発展

定理 3.2.1 – 線形確率システムの期待値，分散の時間発展

$x_{k+1} = Ax_k + v_k$ において，$v_:$ が無記憶ならば，

$$\mathbb{E}[x_{k+1}] = A\mathbb{E}[x_k] + \mathbb{E}[v_k] \tag{3.26}$$

$$\mathrm{Var}[x_{k+1}] = A\mathrm{Var}[x_k]A^\top + \mathrm{Var}[v_k] \tag{3.27}$$

- 再帰的に用いると，

$$\mathbb{E}[x_k] = A^k\mathbb{E}[x_0] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}\mathbb{E}[v_i],\ k \geq 1 \tag{3.28}$$

$$\mathrm{Var}[x_k] = A^k\mathrm{Var}[x_0](A^\top)^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i\mathrm{Var}[v_{k-1-i}](A^\top)^i \tag{3.29}$$

時間領域 (2) 安定性とリアプノフ方程式

$x(k+1) = Ax(k)$ において，A のスペクトル半径（固有値の絶対値の最大値）$\rho(A)$ が 1 未満（**シューア安定**（Schur stable））であることは，$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$ の必要十分条件

定理 3.2.3 – 安定性とリアプノフ方程式

A がシューア安定ならば，任意の $Q \succeq O$ に対して，リアプノフ方程式

$$AGA^\top + Q = G \tag{3.30}$$

$$A^\top \Pi A + Q = \Pi \tag{3.31}$$

はそれぞれ唯一解 $\bar{G}, \bar{\Pi}$ を持ち，$\bar{G} \succeq Q, \bar{\Pi} \succeq Q$ を満たす．

逆に，ある $Q \succ O$ に対していずれかが正定解を持てば，A はシューア安定である．

時間領域 (3) リアプノフ方程式の解

線形確率システム $x_{k+1} = Ax_k + v_k$ において，A がシューア安定

定理 3.2.4 – 初期値応答（$A^\top \Pi A + Q = \Pi$）

$v_: = 0$，$x_0 = \mathrm{x_i}$ のもとで

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^\top Q x_k = \mathrm{x_i}^\top \bar{\Pi} \mathrm{x_i} \tag{3.35}$$

定理 3.2.4 – 定常分散（$AGA^\top + Q = G$）

$v_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$, i.i.d. のとき，$x_k$ は $\mathcal{N}(0, \bar{G})$ に法則収束する.

- $\mathrm{Var}[x_{k+1}] = A\mathrm{Var}[x_k]A^\top + \mathrm{Var}[v_k]$ の不動点

時間領域 (4) 可到達性

確定システム $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ の可制御性

$x(k)$ の一般解は可到達性行列 C_k を用いて

$$x(k) = A^k \mathrm{x}_0 + \mathrm{C}_k \left[u(k-1)^\top \cdots u(0)^\top \right]^\top \tag{3.38}$$

$$\mathrm{C}_k := \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

- 「任意の $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ に対して $x(k) = \mathrm{x}$ を実現する入力が存在する」（時刻 k においてシステムは**可到達**という）ことと C_k の行フルランク性，もしくは**可到達性グラミアン**

$$\mathrm{G}_k^r := \mathrm{C}_k \mathrm{C}_k^\top = \sum_{i=0}^{k-1} A^i B B^\top (A^\top)^i \tag{3.40}$$

  の正則性は等価
- シューア安定な A に対して，$\mathrm{G}_\infty^r := \lim_{k\to\infty} \mathrm{G}_k^r$ は，$A\mathrm{G}A^\top + BB^\top = \mathrm{G}$ の唯一解

時間領域 (5) 可到達性と探索雑音

確定システム

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{3.37}$$

への入力として，雑音 $z_k \sim \mathcal{N}(0, I)$，i.i.d. を印加した場合の挙動

- $x_{k+1} = Ax_k + v_k$ において $v_k = Bz_k$, $z_k \sim \mathcal{N}(0, I)$
- $Q = \mathrm{Var}[v_k] = BB^\top$ であり，$x_k \sim \mathcal{N}(A^k x_0, \mathrm{G}_r^k)$
- 可到達性 $\Longleftrightarrow$ x_k の分布が非退化
  - 各入力チャネルに独立な正規分布にしたがう雑音が印加されると，状態変数の分布が状態空間を覆いつくす
  - 強化学習における探索雑音

周波数領域 (1) z 変換

Definition (z 変換)

ベクトルや行列の列 $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ に対してベクトル値もしくは行列値複素関数

$$Z_x(\mathbf{z}) := \sum_{k\geq 0} \mathbf{z}^{-k} x(k), \mathbf{z} \in \mathbb{C} \tag{3.43}$$

を x の z 変換と定義し，$Z_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})$, $\varpi \in [0, 2\pi)$ を x の離散フーリエ変換とよぶ．

$Z_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})$ は信号 x に含まれる周波数 ϖ 成分

$$x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi k}\mathrm{d}\varpi, \ \forall k$$

周波数領域 (2) パワースペクトル密度

Definition (パワースペクトル密度)

確率過程 $x_:$ のパワースペクトル密度 (Power Spectral Density)

$$\mathrm{S}_x(\varpi) := \lim_{\bar{k}\to\infty} \frac{1}{\bar{k}} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{\bar{k}} x_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varpi k}\right|^2\right] \tag{3.44}$$

- 標本経路ごとの離散フーリエ変換の絶対値の二乗の期待値
- 長時間平均なので時間的に減衰しない確率過程にも適用可能

周波数領域 (3) インパルス応答，伝達関数行列

Definition (インパルス応答，伝達関数行列)

線形システム $x(k+1) = Ax(k) + Bv(k), y(k) = Cx(k)$ において

$$g(0) = O, g(k) := CA^{k-1}B, k \geq 1 \tag{3.45}$$

をこのシステムのインパルス応答 (impulse response)，その $\mathbf{z}$ 変換

$$G(\mathbf{z}) := C(\mathbf{z}I - A)^{-1}B \tag{3.46}$$

を伝達関数行列 (transfer function matrix) と呼ぶ．

- インパルス応答は，インパルス信号を入力した場合の出力信号
- $G(\mathbf{z})$ の分母多項式の根は極と呼ばれ，A の固有値と一致
- $x(0) = 0$ ならば $Z_y(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z})Z_v(\mathbf{z})$

周波数領域 (4) 白色雑音と伝達関数

定理 3.2.6 – 雑音の白色性

実数値確率過程 $v_:$ が無相関かつ $\mathbb{E}[v_k] = 0,\ \mathrm{Var}[v_k] = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$

- $\mathrm{S}_v(\varpi) = 1,\ \forall \varpi \in \mathbb{R}$
- シューア安定な一出力システム $\bar{x}_{k+1} = A_\mathrm{w}\bar{x}_k + B_\mathrm{w}v_k,\ \bar{v}_k = C_\mathrm{w}\bar{x}_k$ の出力 $\bar{v}_:$ は

$$\mathrm{S}_{\bar{v}}(\varpi) = |G_\mathrm{w}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})|^2,\ G_\mathrm{w}(\mathbf{z}) := C_\mathrm{w}(\mathbf{z}I - A_\mathrm{w})^{-1}B_\mathrm{w} \tag{3.48}$$

- この v のように全周波数帯域に同一の強度を持つ確率過程を白色雑音 (white noise)，それ以外を有色雑音 (colored noise) と呼ぶ
- 白色雑音を安定な「周波数重みフィルタ」に通すことで有色雑音を生成できる

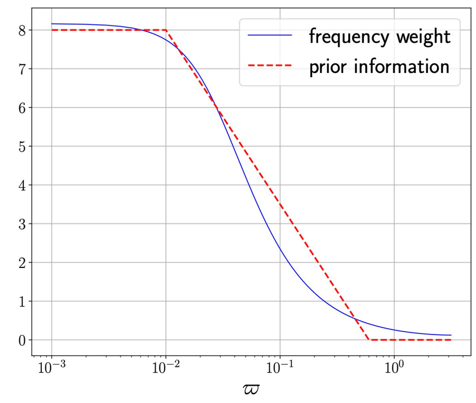
周波数領域 (5) 有色雑音の例

例 3.2.7 – 有色雑音

天候の不確実性により変動する風力発電量 $\bar{v}$ の挙動をモデリングする際，物理法則（タービンの慣性が大きく，発電量は高周波振動しないなど）や過去の実績から破線のような周波数特性をもつことがわかっているとする．

実線の周波数ゲイン $|G_{\mathrm{w}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})|$ をもつ線形システムを用意することは難しくない

- $G_{\mathrm{w}}(\mathbf{z}) := C_{\mathrm{w}}(\mathbf{z}I - A_{\mathrm{w}})^{-1}B_{\mathrm{w}}$

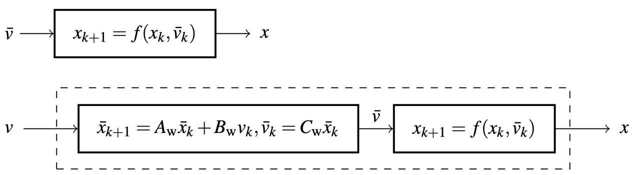


周波数ゲイン $|G_{\mathrm{w}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi})|$

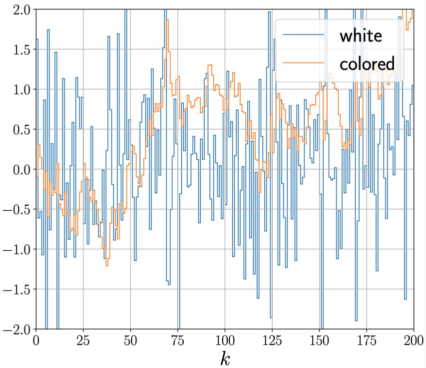
周波数領域 (6) 有色雑音の例

例 3.2.7 – 有色雑音 (つづき)

- 白色雑音 v は i.i.d.
- 有色雑音 $\bar{v}$ の高周波成分は限定的
- 定常分散は等しい



有色雑音 $\bar{v}$ に駆動されるシステム



雑音の標本経路

第 3 章

1. 確率過程
    - マルコフ過程
    - 分布の時間発展
    - 安定性
    - リアプノフ安定論
2. 線形確率システム解析
    - 時間領域
    - 周波数領域