



Université de Liège  
Faculté des Sciences Appliquées  
Année Académique 2004-2005

---

Structuration dans les milieux  
granulaires

---

*Charles Troupin*

Travail de Fin d'Études présenté  
en vue de l'obtention du titre  
d'Ingénieur Civil Physicien



---

# Structuration dans les milieux granulaires

---

**Promoteurs :**  
P.C. Dauby & N. Vandewalle

Charles TROUPIN  
3<sup>e</sup> technique ingénieur civil physicien  
Orientation Milieux Continus  
Faculté des Sciences Appliquées  
Université de Liège

*Je profite de ces quelques lignes pour faire part de mes remerciements à tous ceux et celles qui m'ont aidé à la réalisation de ce mémoire.*

*Tout d'abord, Geoffroy Lumay, pour m'avoir suivi tout au long de mon travail et pour son aide dans la conception du dispositif expérimental.*

*Mes promoteurs, les professeurs P.C. Dauby et N. Vandewalle, pour m'avoir donné l'opportunité d'étudier un sujet aussi riche et surprenant que les milieux granulaires.*

*Les membres du GRASP, pour les idées et les conseils qu'ils m'ont fournis.*

*Le professeur P.C. Dauby, pour sa disponibilité et ses nombreuses relectures attentives et critiques de mes versions préliminaires.*

*Toutes les personnes qui ont relu l'une ou l'autre partie de ce mémoire et contribué à l'améliorer: Jessica, Florence, Joël, Jérôme, Alex, ...*

*Mes amis qui ont toujours été là quand il fallait.*

*Enfin, mes parents qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris.*

*Merci à tous*

*Que sait du désert ce-  
lui qui ne regarde qu'un  
grain de sable ?* [Erik  
Orsenna]

Extrait de Madame Bâ.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vi</b>
Description du système étudié . . . . .	ix
Paramètres de contrôle . . . . .	ix
<b>I Généralités</b>	<b>1</b>
<b>1 Propriétés générales des matériaux granulaires</b>	<b>2</b>
1.1 Historique . . . . .	2
1.2 Caractéristiques . . . . .	3
1.2.1 Définition . . . . .	3
1.2.2 Aspects énergétiques . . . . .	3
1.2.3 Température granulaire . . . . .	4
1.2.4 Classification . . . . .	4
1.2.5 Exemples de propriétés . . . . .	5
1.3 Solide, liquide ou gaz? . . . . .	7
1.3.1 Régimes . . . . .	7
1.4 Les applications . . . . .	7
1.5 Conclusion . . . . .	8
<b>2 Les structures dissipatives</b>	<b>10</b>
2.1 Généralités sur les structures dissipatives . . . . .	10
2.2 Exemples de structures dissipatives . . . . .	10
2.2.1 L'instabilité de Rayleigh-Bénard . . . . .	11
2.2.2 L'instabilité de Faraday . . . . .	12
2.2.3 L'instabilité de Taylor-Couette . . . . .	13
2.3 Étude comparative . . . . .	15
2.4 Conclusion . . . . .	17
Sites Web . . . . .	18

---

<b>3 Description des phénomènes observés</b>	<b>19</b>
3.1 Types de structurations . . . . .	20
3.1.1 Structure plate ( <i>flat</i> ) . . . . .	20
3.1.2 Structure en carrés ( <i>squares</i> ) . . . . .	20
3.1.3 Structures en lignes ( <i>stripes</i> ) . . . . .	20
3.1.4 Structures en hexagones . . . . .	21
3.1.5 Les interfaces ( <i>kinks</i> ) . . . . .	21
3.1.6 Les bulles de phase ( <i>phase bubbles</i> ) . . . . .	22
3.1.7 Labyrinthes . . . . .	22
3.2 Diagramme de phases . . . . .	23
3.3 Autres structurations . . . . .	24
3.3.1 Les oscillons . . . . .	24
3.3.2 Les groupements d'oscillons . . . . .	24
3.3.3 Les spirales . . . . .	25
3.3.4 Divers . . . . .	25
3.4 La formation de tas . . . . .	25
3.4.1 Approche simple . . . . .	27
3.4.2 Mécanisme de formation . . . . .	27
 <b>II Étude des modèles analytiques et numériques</b>	 <b>30</b>
 <b>4 Simulation de dynamique moléculaire</b>	 <b>31</b>
4.1 Description et limitations de la méthode . . . . .	31
4.2 Simulations et résultats . . . . .	33
4.3 Mise en évidence du rôle du frottement . . . . .	33
4.4 Visualisation de la dynamique de la couche . . . . .	36
4.5 Conclusion . . . . .	36
 <b>5 Description "milieu continu"</b>	 <b>40</b>
5.1 Introduction . . . . .	40
5.2 Signification physique et validité . . . . .	41
5.2.1 Calcul du libre parcours moyen . . . . .	41
5.2.2 Signification physique . . . . .	45
5.3 Dérivation des équations . . . . .	45
5.3.1 Équations d'évolution . . . . .	46
5.3.2 Équations constitutives . . . . .	48
5.3.3 Résumé des équations . . . . .	49
5.3.4 Validité des hypothèses . . . . .	49

---

5.3.5	Problèmes . . . . .	51
5.4	Chocs dans les milieux granulaires . . . . .	51
5.4.1	Ondes de chocs dans les couches granulaires soumises à vibrations .	52
5.4.2	Cône de Mach dans une fluide granulaire peu profond . . . . .	53
5.5	Conclusion . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Les équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau</b>	<b>57</b>
6.1	L'équation de Swift-Hohenberg . . . . .	58
6.2	L'équation de Ginzburg-Landau . . . . .	58
6.3	Structures obtenues . . . . .	59
6.3.1	Structures localisées . . . . .	59
6.3.2	Hexagones et interfaces . . . . .	60
6.3.3	Groupements d'oscillons . . . . .	60
6.3.4	Ondes stationnaires localisées . . . . .	62
6.3.5	Structuration dans l'expérience de Faraday . . . . .	63
6.3.6	Récapitulatif . . . . .	64
6.4	Comparaison avec l'expérience . . . . .	64
6.5	Conclusion . . . . .	66
	Sites Web . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Modèle de la balle complètement inélastique</b>	<b>68</b>
7.1	Description du modèle . . . . .	68
7.1.1	Calcul de la trajectoire de la balle . . . . .	69
7.1.2	Équations adimensionnelles du mouvement . . . . .	70
7.2	Résultat et interprétation . . . . .	71
7.2.1	Résumé . . . . .	74
7.3	Conclusion . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Étude comparative avec l'instabilité de Faraday</b>	<b>77</b>
8.1	Comparaison qualitative . . . . .	78
8.1.1	Similitudes . . . . .	78
8.1.2	Différences . . . . .	80
8.2	Analyse linéaire de stabilité . . . . .	81
8.2.1	Équations d'évolution . . . . .	81
8.2.2	Hypothèses simplificatrices et validité . . . . .	82
8.2.3	Équations linéarisées . . . . .	83
8.2.4	Équations adimensionnelles . . . . .	84
8.2.5	Conditions aux limites et validité . . . . .	84
8.2.6	Analyse de Floquet . . . . .	87

---

8.2.7	Modélisation du terme $G(t)$	89
8.2.8	Méthodes de résolution et résultats	89
8.3	Conclusion	90
<b>III</b>	<b>Étude expérimentale</b>	<b>94</b>
<b>9</b>	<b>Description du dispositif.</b>	<b>95</b>
9.1	Matériel utilisé.	96
9.1.1	Le dispositif vibrant.	96
9.1.2	Le dispositif d'excitation	97
9.1.3	Le dispositif de mesure	98
9.1.4	Acquisition des images.	99
9.1.5	Les ordinateurs.	100
9.2	Problèmes pratiques et solutions.	100
9.2.1	Imperfections du dispositif.	101
9.2.2	Solutions proposées.	103
9.2.3	Améliorations futures du dispositif.	103
9.3	Conclusion	103
<b>10</b>	<b>Structurations observées expérimentalement</b>	<b>104</b>
10.1	Caractéristiques des grains	104
10.2	Structuration dans les couches homogènes	105
10.2.1	Structures observées dans une couche de grains blancs	105
10.2.2	Structures observées dans une couche de grains verts	109
10.3	Diagramme de phases	111
10.4	Structuration dans les couches formées de deux types de granulaire	112
10.4.1	Motifs observés	112
10.4.2	Formation de tas	112
10.5	Autres types de structures	114
10.6	Conclusion	115
<b>11</b>	<b>Mesures et analyse des résultats</b>	<b>116</b>
11.1	Mesures de relations de dispersion	116
11.1.1	Technique de mesure	117
11.1.2	Sources d'erreur	118
11.1.3	Résultats obtenus	118
11.2	Caractérisation de l'ordre	119
11.2.1	Illustration	120

---

11.2.2 Transformée de Fourier de l'image . . . . .	120
11.2.3 Fonction de corrélation . . . . .	122
11.3 Conclusion . . . . .	132
<b>Perspectives</b>	<b>134</b>
Améliorations du dispositif expérimental . . . . .	134
Règlage du niveau . . . . .	134
Fixation du dispositif . . . . .	134
Éclairage . . . . .	134
Aspects théoriques . . . . .	134
Aspects pratiques . . . . .	135
Diagramme de phases . . . . .	135
Méthode de mesures des longueurs d'onde . . . . .	135
Étude des mélanges binaires . . . . .	135
Résumé . . . . .	135
<b>Conclusions</b>	<b>136</b>

# INTRODUCTION

Dans notre vie de tous les jours, il est impossible de passer à côté des milieux granulaires : sucre, sel, café, sable, médicaments... et la liste est encore longue. A de plus grandes échelles, les avalanches, les dunes de sable, les éboulements, les glissements de terrain, constituent également des exemples où les matériaux granulaires interviennent.

Et pourtant, malgré cette omniprésence, les propriétés des milieux granulaires demeurent mal connues, en comparaison avec ce que l'on sait des liquides, des gaz ou des solides. Ces propriétés peuvent d'ailleurs s'apparenter à celles de chacun de ces trois états de la matière, en fonction de la situation dans laquelle le milieu granulaire se trouve. C'est là une des caractéristiques intéressante de ce type de milieu.

Lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations, les milieux granulaires peuvent être le théâtre de phénomènes surprenants. L'objet de ce travail est l'étude d'un de ces phénomènes, à savoir : LA STRUCTURATION DANS LES MILIEUX GRANULAIRES SOUMIS À UNE ACCÉLÉRATION VERTICALE DE FORME SINUSOIDALE (Fig. 0.1 page ix). Si on simplifie les choses, on peut également dire que l'on s'intéresse à l'apparition de formes géométriques (carrés, lignes, hexagones) dans une mince couche de sable que l'on fait vibrer.

Le domaine d'étude est très vaste et touche à de nombreuses branches de la physique : mécanique rationnelle, physique statistique, dynamique des fluides, thermodynamique des phénomènes irréversibles...

Il est amusant de remarquer que Faraday, en 1831, traitait déjà du problème de la formation de tas dans une couche de sable soumise à des vibrations. Toutefois, le thème en est encore à ses premiers pas, c'est seulement depuis une dizaine d'années qu'il est étudié de manière approfondie par différents groupes de recherche et que paraissent des articles dans les revues scientifiques.

C'est pourquoi j'ai décidé d'adopter le point de vue le plus large possible et de présenter l'état des connaissances actuelles dans le domaine.

---

Ce mémoire est composé de trois parties : la PREMIÈRE PARTIE est introductive et comprend trois chapitres : le **chapitre 1** décrit quelques propriétés générales des matériaux granulaires et définit les concepts qui serviront par la suite. Le but n'est pas de résumer l'ensemble des connaissances que l'on a sur les granulaires, mais plutôt d'en donner un léger aperçu, en insistant sur les points qui me semblent essentiels pour comprendre la suite.

Les phénomènes de structuration spatio-temporelle tels que ceux qui font l'objet de ce travail, peuvent apparaître dans de nombreux autres systèmes. J'ai trouvé utile d'en donner quelques exemples, et de mettre en évidence les similitudes et les différences qui existent entre eux. C'est pourquoi le **chapitre 2** traite de ces structures qui apparaissent dans les systèmes amenés loin de l'équilibre : les *structures dissipatives*.

Le **chapitre 3** présente la plupart des types de structures qui ont été observées dans une couche constituée de matériaux granulaires soumise à des oscillations verticales sinusoïdales et les conditions expérimentales dans lesquelles elles se produisent. Ce chapitre nous servira de base afin de comparer nos résultats expérimentaux.

---

La DEUXIÈME PARTIE tente de réaliser une synthèse des différents modèles théoriques et numériques qui permettent de rendre compte des phénomènes de structuration dans le système étudié.

La **chapitre 4** décrit un modèle qui consiste à appliquer la loi de la quantité de mouvement à chacune des particules constituant le milieu afin d'en déterminer les positions au cours du temps : on parle de *simulation de dynamique moléculaire*. Nous verrons quels phénomènes peuvent être reproduits par cette méthode et insisterons sur les ingrédients nécessaires à cette modélisation.

En mécanique des fluides, on dispose des équations de Navier-Stokes pour décrire l'évolution des champs de densité, de vitesse et de température. Le **chapitre 5** décrit un modèle de type "milieu continu", analogue aux équations de Navier-Stokes et qui permet de décrire les milieux granulaires. Nous discuterons la signification physique du concept de *milieu continu*, puis nous développerons ces équations en mettant en évidence les hypothèses qui ont dû être faites.

Dans le **chapitre 6**, nous évoquerons deux modèles capables de reproduire les phénomènes de structurations dans différents types de systèmes physiques : les équations de *Swift-Hohenberg* et de *Ginzburg-Landau*. Nous tenterons d'expliquer la signification physique de ces équations, puis montrerons quelques-unes de leurs solutions, en comparant ces dernières avec les structures décrites dans le chapitre 3.

Nous étudierons ensuite un modèle très simple, qui assimile l'ensemble de la couche de granulaires à un seul objet : une *balle parfaitement inélastique*. Le **chapitre 7** décrit ce modèle et montre les conclusions qu'il peut fournir sur la dynamique de la couche.

Enfin, pour terminer cette deuxième partie, nous présenterons dans le **chapitre 8**, une comparaison entre les instabilités dans une couche de fluide soumise à des vibrations verticales (instabilité de Faraday, décrite dans le chapitre 2) et dans une couche de granulaires soumises aux mêmes excitations. Dans un premier temps, nous comparerons de manière qualitative les deux phénomènes. Ensuite, nous effectuerons une analyse linéaire de stabilité, en partant des équations de Navier-Stokes pour le fluide, et des équations étudiées dans le chapitre 5 pour le milieu granulaire.

---

La TROISIÈME PARTIE de ce mémoire a pour objet l'étude expérimentale du problème. Le **chapitre 9** est consacré à la description du dispositif expérimental que nous avons utilisé. Ce chapitre est indispensable car il met en évidence les qualités et les défauts de notre matériel, défauts qui permettront d'expliquer certains des phénomènes observés.

Les résultats que nous sommes parvenus à obtenir seront exposés dans le **chapitre 10** et comparés avec ce qui a été présenté dans le chapitre 3. Après avoir étudié les structurations dans les couches contenant un seul type de grains, nous caractériserons les comportements dans les mélanges binaires.

Pour terminer, le **chapitre 11** résumera les analyses et les mesures effectuées à partir des images que nous avons acquises.

## Description du système étudié

Le système étudié consiste en une couche de hauteur  $H$  d'un matériau granulaire placée dans un récipient de forme cylindrique, situé sur une plaque soumise à des oscillations verticales sinusoïdales, d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$ . Appelons  $z(t)$  la position verticale de la plaque par rapport à son niveau de référence :

$$z(t) = A \sin(2\pi ft) \quad \text{et donc} \quad a(t) = -4\pi^2 f^2 A \sin(2\pi ft)$$

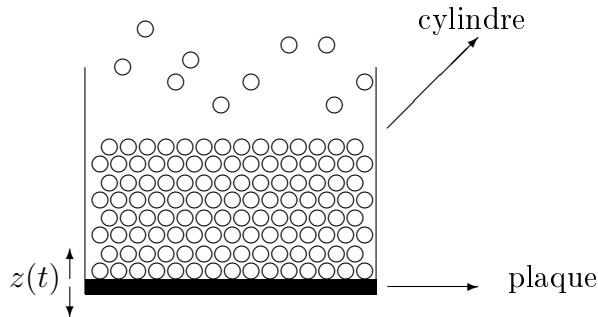


FIG. 0.1 – Schéma de l'expérience.

## Paramètres de contrôle

### Excitation

Les paramètres que nous pouvons contrôler sont :

- la fréquence  $f$  des vibrations;
- l'amplitude  $A$ .

Il est possible de faire varier les paramètres de l'oscillation dans une large gamme de valeurs grâce au générateur. L'intensité de l'accélération est limitée par le dispositif amplificateur. Une description complète du matériel utilisé sera réalisée dans le chapitre 9.

### Type de granulaire

En ce qui concerne le type de matériau granulaire, les paramètres sont les suivants :

- la masse totale des grains introduits dans le récipient;
- la masse volumique  $\rho$ ;
- le diamètre (moyen) des grains  $\sigma$ .

Les grains peuvent être caractérisés par d'autres grandeurs (coefficient de restitution, coefficient de frottement) mais celles-ci sont beaucoup moins évidentes à déterminer et à contrôler.

## Première partie

### Généralités

# Chapitre 1

## Propriétés générales des matériaux granulaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Historique</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>3</b>
1.2.1	Définition	3
1.2.2	Aspects énergétiques	3
1.2.3	Température granulaire	4
1.2.4	Classification	4
1.2.5	Exemples de propriétés	5
<b>1.3</b>	<b>Solide, liquide ou gaz ?</b>	<b>7</b>
1.3.1	Régimes	7
<b>1.4</b>	<b>Les applications</b>	<b>7</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>

---

### 1.1 Historique

L'étude des systèmes granulaires a débuté au 19<sup>ème</sup> avec Faraday, qui étudiait le mouvement convectif des tas lorsqu'on les soumettait à des oscillations verticales. Au début des années 1980, Pierre Gilles de Gennes<sup>1</sup> recommande l'étude de la matière granulaire à de jeunes scientifiques français. Les vingt dernières années ont connu une explosion dans le domaine. Entre 1980 et 1992, une vingtaine d'article sur le sujet ont été publiés. Entre 2000 et 2005, on en compte plus de mille. Malgré le nombre croissant de publications, beaucoup de phénomènes restent mal connus. De nos jours, de nombreux groupes<sup>2</sup> travaillent sur divers aspects des granulaires : écoulements, ségrégation, structuration, convection, avalanches...

---

1. Physicien, Prix Nobel de Physique en 1991; Ex-Directeur de l'École supérieure de physique et chimie de Paris; Professeur au collège de France.

2. Voir par exemple <http://www.granular.com/POWDER/others.html>

## 1.2 Caractéristiques

### 1.2.1 Définition

Plutôt que de consulter des ouvrages spécialisés, nous nous sommes basés sur plusieurs articles ([1], [2], [3], [4] notamment) et avons tenté de résumer les caractéristiques fondamentales qui définissent les milieux granulaires. Voici la définition que nous en tirons :

Un milieu granulaire consiste en un grand nombre  $N$  (supérieur à  $10^6$ ) de particules dissipatives, sans cohésion, interagissant uniquement via des collisions, dont la masse est suffisante pour que leurs énergies cinétique et potentielle soient plusieurs ordres de grandeurs supérieures à leur énergie thermique, et dont la taille est suffisante pour que les interactions avec le fluide environnant puissent être négligées .

### 1.2.2 Aspects énergétiques

Considérons une bille d'aluminium de rayon  $r = 0.1\text{ mm}$ , de masse volumique  $\rho = 2700\text{ kg/m}^3$ , dont la vitesse est de  $1\text{ cm/s}$  et la température de  $300K$ . Calculons les différentes formes d'énergie que possède cette bille :

- l'énergie thermique :

$$E_{th} = k_B T \cong \mathcal{O}(10^{-21})\text{ J}$$

où  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$  est la constante de Boltzmann.

- l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \cong \mathcal{O}(10^{-13})\text{ J}$$

- l'énergie potentielle : on va évaluer l'énergie dont une particule a besoin pour "sauter" par dessus sa voisine.



$$E_p = mg\sigma \cong \mathcal{O}(10^{-11})\text{ J}$$

**Conclusion :** l'énergie thermique est négligeable (environ douze ordres de grandeur inférieure) vis-à-vis des autres formes d'énergie : le système se comporte comme si on avait  $T = 0K$  : c'est une des propriétés essentielles des systèmes granulaires.

Estimons à présent le diamètre d'une particule dont l'énergie thermique est du même ordre de grandeur que l'énergie potentielle à une température ordinaire ( $300K$ ) :

$$k_B T = mg\sigma = \frac{4}{3}\pi \frac{\sigma^3}{8} \rho g \sigma$$

Un calcul grossier donne une valeur de l'ordre de  $10^{-6}$  mètres. Cela signifie que l'on devra tenir compte du mouvement brownien pour des particules dont le diamètre est inférieur à  $\mathcal{O}(10^{-7}\text{ m})$ .

### 1.2.3 Température granulaire

Puisque la température thermodynamique du système peut être considérée comme nulle, le concept de *température granulaire* est introduit: elle est définie telle que  $\frac{3}{2}T$  est égale à l'énergie cinétique moyenne due au mouvement désordonné des particules [5]. Cette définition est traduite mathématiquement par

$$\frac{3}{2}T = \frac{1}{2}\langle|\vec{u} - \bar{\vec{U}}|^2\rangle$$

où  $\vec{u}$  est la vitesse individuelle d'une particule et  $\bar{\vec{U}} = \langle\vec{u}\rangle$  est la vitesse moyenne. On a donc

$$T = \frac{1}{3}\langle|\vec{u} - \bar{\vec{U}}|^2\rangle \quad (1.1)$$

Autrement dit, la température granulaire est proportionnelle au carré des fluctuations de vitesse  $\vec{u}' = \vec{u} - \bar{\vec{U}}$ . Elle traduit donc l'agitation mécanique du milieu (et non plus l'agitation thermique).

### 1.2.4 Classification

Nous allons classer les poudres en différentes catégories, en nous basant sur les interactions entre les particules qui les constituent et le fluide environnant. Ces interactions dépendent de :

- la taille des particules,
- la nature du fluide et sa viscosité,
- la pression du fluide si c'est un gaz.

générique	nom	taille	interactions
poudre	ultra fine	$0.1 - 1.0 \mu m$	température et gaz
poudre	super fine	$1.0 - 10 \mu m$	gaz
poudre	granulaire	$10 - 100 \mu m$	liquide
solide granulaire		$100 - 3000 \mu m$	fluide visqueux
solide cassé		$> 3000 \mu m$	fluide visqueux

TAB. 1.1 – *Classification des matériaux granulaires en fonction des interactions avec le milieu environnant* [3].

Le tableau 1.1 classe les poudres en fonction des tailles de leurs particules et en fonction des milieux environnant avec lesquels ces particules sont susceptibles d'interagir. Par exemple, les poudres dites ultra fines ont un diamètre suffisamment faible pour que la température ait un effet sur leur mouvement. Autre exemple, le solide granulaire est constitué de particules dont la taille fait en sorte que si le milieu environnant est un gaz ou un liquide peu visqueux, celui-ci n'a aucune influence sur lui.

### 1.2.5 Exemples de propriétés

Les matériaux granulaires ont des comportements différents selon les situations et les sollicitations auxquelles ils sont confrontés. C'est de là que proviennent les difficultés de la modélisation. Examinons quelques exemples de propriétés que l'on peut facilement observer [6, 7, 8].

#### Le tas de sable



Tant que la pente du tas de sable reste inférieure à une valeur critique  $\theta_c$ , celui-ci reste stationnaire. Une fois que cette valeur est dépassée, les grains commencent à s'écouler : c'est l'*avalanche*.

#### Le sablier



Apparu chez nous au 14<sup>e</sup>, il est constitué d'une ampoule de verre constituée de deux compartiments. L'orifice séparant les deux chambres a une ouverture d'environ dix diamètres de grains. Des orifices plus étroits se boucheraient.

#### Le silo

Dans un liquide à l'intérieur d'un récipient, la pression au fond est proportionnelle à la masse volumique et à la hauteur du liquide. Dans le cas d'un matériau granulaire, la pression est indépendante de la hauteur, car le frottement des particules sur les bords est suffisamment importante pour soutenir une partie de la masse. Ceci peut être expliquer par un phénomène appelé *arching* : les grains se placent de manière telle qu'ils créent une sorte d'arche, laissant ainsi des espaces vides sous ces structures.



FIG. 1.1 – Silo.

#### Les phénomènes de ségrégation

La ségrégation (ou *démixtion*) constitue un mécanisme très important dans les applications industrielles des granulaires. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de

séparer des particules de tailles différentes. En voici quelques exemples :

- l'effet "noix du Brésil" (*Brazil Nut Effect*) : après agitation d'un mélange de noix de tailles différentes, ce sont toujours les plus grosses qui apparaissent au dessus.
- la vibration dans un container dont le fond a un profil en dents de scie (Fig. 1.2);
- la vibration verticale simple (Fig. 1.3);
- la rotation à l'intérieur d'une cylindre horizontal (Fig. 1.4).

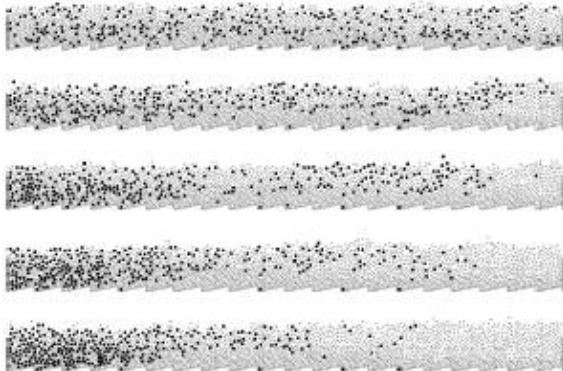


FIG. 1.2 – Ségrégation horizontale à l'aide d'une container avec fond en dents de scie [9].

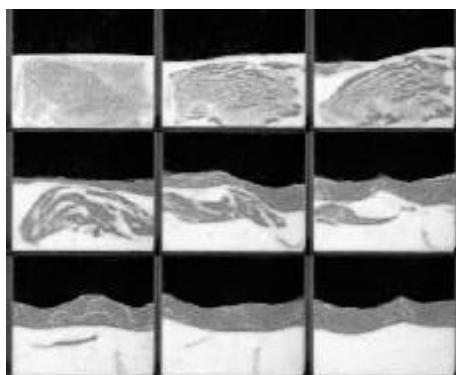


FIG. 1.3 – Evolution d'un mélange de billes de verre et de bronze (grises) soumis à des oscillations verticales ( $\Gamma = 5.5$  et  $f = 35 \text{ Hz}$ ) [10].

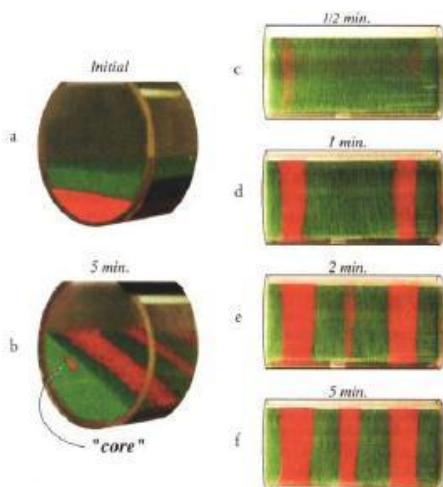


FIG. 1.4 – Ségrégation sous forme de bandes dans un cylindre en rotation : (a) et (b) : vues latérales; (c)-(f) : vues du dessus [11].

La ségrégation pose néanmoins problème lorsqu'il s'agit d'obtenir des mélanges homogènes, c'est pourquoi il convient de maîtriser ce phénomène.

### Exemples

- Le béton : il est constitué d'un mélange de particules dont les tailles varient entre 100 Å et quelques millimètres. Idéalement, les particules doivent être mélangées de manière homogène pour que les propriétés mécaniques du béton soient bien celles auxquelles on s'attend.
- Les poudres utilisées dans les boosters des fusées : là encore, l'homogénéité du mélange est primordiale. Déjà au 15<sup>ème</sup> siècle, les frères Bureau, patrons de l'artillerie de Charles VII, avaient identifié le problème de mélange des poudres explosives comme responsables d'explosions inopinées.

## 1.3 Solide, liquide ou gaz ?

A la question de savoir à quelle catégorie appartient le milieu granulaire, on ne peut donner une réponse unique. On devrait répondre : cela dépend des situations.

Il est évident qu'à l'échelle du grain, on a à faire à un solide. Par contre, pour le comportement collectif, ce n'est pas toujours le cas. Considérons le cas qui nous intéresse principalement dans ce travail : la couche soumise à des vibrations : est-ce :

- un solide ? non, un solide qui serait soumis à ce type de sollicitations ne subirait pas de telles variations de volume.
- un liquide ? oui et non : on observe de nombreuses ressemblances avec le comportement d'un liquide, mais des différences physiques essentielles existent. Nous en reparlerons dans le chapitre 8.
- un gaz ? oui et non : pendant la phase d'expansion, lorsque la couche est projetée vers le haut par la plaque, le comportement est proche de celui d'un gaz, mais ce n'est plus le cas dans la phase de collision.

### 1.3.1 Régimes

Aucune théorie ne permet de décrire l'ensemble des comportements d'un milieu granulaire. C'est pour cela que l'on sépare l'étude des écoulements granulaires en trois régimes :

1. le régime *quasi statique* : c'est le régime obtenu lorsque les déformations sont lentes. Les grains interagissent par contact et frottement. Exemple : le silo.
2. le régime *dense* : c'est le cas intermédiaire entre le quasi statique et le collisionnel. Les grains sont en contact pendant un temps fini avec plusieurs voisins, comme dans le régime quasi statique, mais les effets d'inertie sont importants.
3. le régime *collisionnel* : les particules interagissent principalement par collision lorsque le milieu est agité et très dilué. Il ressemble alors à un gaz dont les grains joueraient le rôle de molécules. C'est ce type de régime qui est étudié dans ce travail.

## 1.4 Les applications

Les granulaires sont présents partout dans notre vie de tous les jours : sucre, sel, farine, céréales, médicaments, poudre à lessiver, sable, graines... On estime à 70 % la proportion des objets que nous utilisons qui sont passés, à un stade ou l'autre de leur fabrication, sous

forme de poudres ou de grains. Les grains viennent en deuxième position, immédiatement après l'eau, dans l'ordre des priorités des habitants de notre planète. On pense également que les usines qui utilisent des granulaires subissent des pertes de capacité de l'ordre de 40 %, dues aux problèmes liés aux transports de ceux-ci [7].

On distingue principalement deux types d'applications [13] : celles se rapportant à l'industrie, les autres se rapportant à la géophysique. Dans la première catégorie, on trouve :

- l'industrie pharmaceutique : fabrication des médicaments par mélange de différents constituants sous forme de poudre; transport de ces médicaments;
- l'industrie agroalimentaire : céréales, graines, nourriture pour animaux...
- activité minière : transport et broyage des minéraux;
- industrie chimique : catalyseurs sous forme de grains, afin d'optimiser les surfaces d'échange.

En ce qui concerne les applications en géophysique, on peut citer

- la formation et l'évolution des dunes;
- les avalanches et les glissements de terrain;
- les écoulements pyroclastiques<sup>3</sup>

## 1.5 Conclusion

Les milieux granulaires possèdent de nombreuses propriétés intéressantes, et qui n'entrent ni dans les propriétés des fluides ni dans celles des solides.

Une analyse des ordres de grandeur des différentes formes d'énergie a montré qu'un milieu granulaire se comportait comme un système à température nulle. C'est pourquoi le concept de température granulaire a été défini.

Les applications sont nombreuses et touchent à de nombreux types d'industries ainsi qu'à plusieurs domaines de la physique.

3. Terme qualifiant une roche constituée à partir de projections volcaniques.

## Bibliographie

- [1] M. Schröter, D.I. Goldman, et H.L. Swinney, *Stationary state volume fluctuations in a granular medium*, soumis à *Phys. Rev. E* (2005), disponible sur <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501264>
- [2] P. Melby, F. Vega Reyes, A. Prevost, R. Robertson, P. Kumar , D.A. Egolf et J.S. Urbach, *The dynamics of thin vibrated granular layers*, 22 Dec 2004, disponible sur <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0412640>
- [3] J. Duran, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 254301.  
*Rayleigh-Taylor Instabilities in Thin Films of Tapped Powder.*
- [4] John R. de Bruyn, B.C. Lewis, M. D. Shattuck, et Harry L. Swinney, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 041305, 1-12.  
*Spiral patterns in oscillated granular layers.*
- [5] J. Bougie, Sung Joon Moon, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 051301 1-8.  
*Shocks in vertically oscillated granular layers.*
- [6] H.M. Jaeger et S.R. Nagel, *Sciences* **255**(1992) 1523.  
*Physics of the Granular State.*
- [7] H.M. Jaeger, S.R. Nagel et R.P. Behringer, *Physics Today* **49** (1996) 32-38.  
*The Physics of Granular Materials.*
- [8] S. Luding, E. Clément, J. Rajchenbach et J. Duran, *Europhys. Lett.* **36** (1996) 247-252.  
*Simulations of pattern formation in vibrated granular media.*
- [9] D.C. Rapaport, *Phys. Rev. E* **64** (2001) 1-4.  
*Mechanism for granular segregation.*
- [10] N. Burtally, P.J. King, M.J. Swift et M.C. Leaper, *Granular Matter* **52** (2003) 57-66.  
*Dynamical Behaviour of Fine Granular Glass/Bronze Mixtures under Vertical Vibration.*
- [11] T. Shinbrot et J. Muzzio, *Physics Today* (2000) 25-30. *Nonequilibrium Patterns in Granular Mixing and Segregation.*
- [12] E. Clément, L. Labous et Loic Vanel, *Europhysics News* (1998) 108-111.  
*Granular Packing under Vibration.*
- [13] O. Pouliquen, *Un tour d'horizon des milieux granulaires*, disponible sur <http://www.spm.cnrs-dir.fr/encre/ENCRe%202001/intervenants/cours/pouliquen.pdf>

# Chapitre 2

## Les structures dissipatives

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Généralités sur les structures dissipatives</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Exemples de structures dissipatives</b>	<b>10</b>
2.2.1	L'instabilité de Rayleigh-Bénard	11
2.2.2	L'instabilité de Faraday	12
2.2.3	L'instabilité de Taylor-Couette	13
<b>2.3</b>	<b>Étude comparative</b>	<b>15</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
	<b>Sites Web</b>	<b>18</b>

---

### 2.1 Généralités sur les structures dissipatives

Lorsqu'un système dynamique se trouve loin de l'équilibre, de nouvelles structures spatio-temporelles peuvent apparaître. Les fluctuations peuvent être amplifiées par des processus irréversibles de dissipation et donner lieu à ce qu'on appelle des *structures dissipatives* [1]. Leur nom vient du fait que ce sont des phénomènes dissipatifs (conduction de chaleur, viscosité...) qui rendent possible l'apparition d'auto-organisation dans le système.

Il existe de nombreux exemples de ce type de structures dans la nature : les dunes de sable formées sous l'action du vent, les cellules convectives à la surface du soleil, certaines réactions chimiques, les croissances de certaines colonies de bactéries...

On trouvera de nombreuses illustrations dans la référence [2].

### 2.2 Exemples de structures dissipatives

Le but de cette section est de présenter quelques phénomènes de structures dissipatives afin d'en dégager quelques caractéristiques communes et de mettre en évidence les différences. Nous allons examiner successivement :

1. l'instabilité de Rayleigh-Bénard;

2. l'instabilité de Faraday;
3. l'instabilité de Taylor-Couette.

Nous ne visons pas une étude approfondie de chaque phénomène, mais simplement une comparaison qualitative des structures observées et des phénomènes physiques qui en sont à l'origine.

Ces phénomènes ont été souvent étudiés aux siècles derniers, et peuvent être expliqués par des modèles basés sur les équations de la dynamique des fluides. Malheureusement, un modèle analogue pouvant décrire l'ensemble des comportements dans les milieux granulaires accélérés n'a pas encore été parfaitement établi. La recherche d'un tel modèle fait l'objet de nombreuses recherches depuis plusieurs années. Nous verrons dans le chapitre 5 un modèle proche des équations utilisées en mécanique des fluides, mais inapte à reproduire les phénomènes de structuration qui seront décrits dans la suite.

### 2.2.1 L'instabilité de Rayleigh-Bénard

Le problème consiste en l'étude d'une couche horizontale de fluide, soumise à une différence de température entre le haut et le bas. Il y a couplage entre effet thermique et effet mécanique : lorsqu'une particule fluide est chauffée, sa masse volumique diminue, et sous l'effet de la poussée d'Archimède, elle a tendance à avoir un mouvement ascendant. Il existe des effets inhibiteurs de ce mouvement : les dissipations visqueuse et thermique.

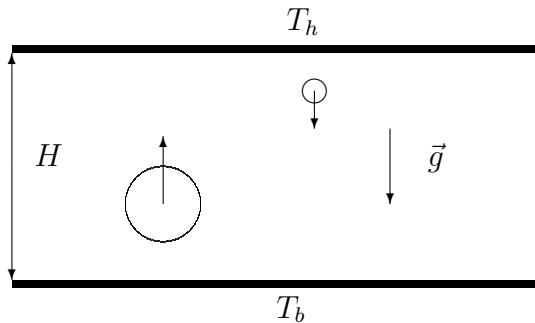


FIG. 2.1 – Schéma de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

L'instabilité se produit lorsqu'une valeur critique de la différence de température entre le haut et le bas est atteinte. Plus précisément, on définit le nombre de Rayleigh, qui mesure le rapport entre les effets moteurs et les effets inhibiteurs du mouvement :

$$Ra = \frac{g\alpha \Delta T H^3}{\kappa \nu}$$

avec  $\kappa$  le coefficient de diffusion thermique,  $\nu$  la viscosité et  $\alpha$ , le coefficient de dilatation volumique avec la température. Il existe un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{cr}$  tel que si  $Ra > Ra_{cr}$ , l'instabilité se produit. On peut alors observer plusieurs types de structures dissipatives sur les figures suivantes.

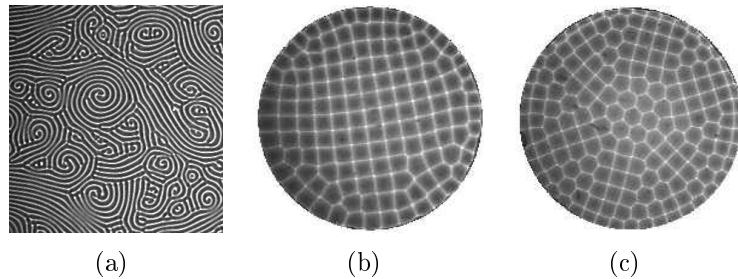


FIG. 2.2 – Spirales (a), carrés (b) et hexagones (c) dans l’expérience de Rayleigh-Bénard.

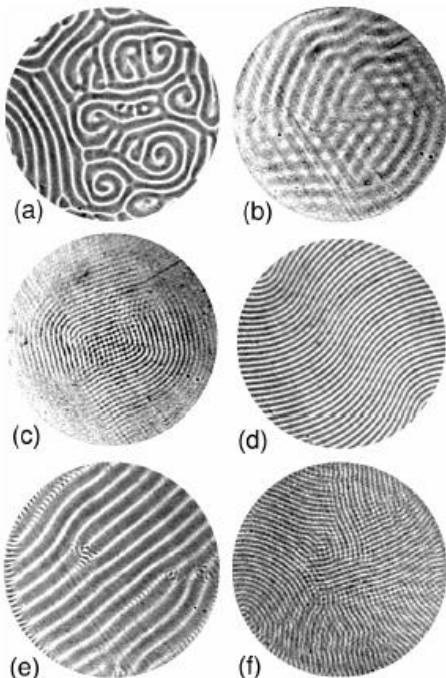


FIG. 2.3 – Exemples de motifs dans l’expérience de Rayleigh-Bénard [3].

### 2.2.2 L'instabilité de Faraday

Ce phénomène a été étudié pour la première fois par Michael Faraday en 1831.

L'expérience consiste en un récipient ouvert contenant un fluide soumis à des oscillations verticales uniformes. Lorsque l'amplitude des oscillations dépasse une valeur limite, une instabilité se développe sur la surface libre et des ondes stationnaires possédant une certaine structure spatiale apparaissent. La fréquence des ondes,  $f_w$ , est la moitié de la fréquence d'excitation.

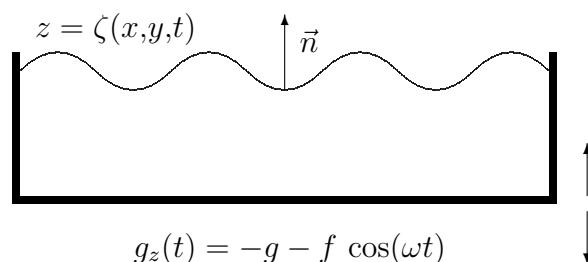


FIG. 2.4 – Schéma de l'instabilité de Faraday.

La géométrie des motifs dépend de la viscosité du fluide et de la fréquence d'oscillation. Un nombre impressionnant de formes différentes peut être observé en variant la composition spectrale du forçage.

Pour des fluides à faible viscosité et dans des récipients de rapport d'aspect élevé, l'instabilité donne lieu à des motifs carrés formés par deux ondes stationnaires orthogonales. Pour des viscosités plus élevées, des lignes ou des spirales peuvent apparaître. Il existe également des hexagones et des triangles, ainsi que formes semblables à des quasi-cristaux<sup>1</sup>.

Le diagramme de phases (Fig. 1.6) résume les différentes formes en fonction de l'accélération relative  $a/g$  et de la fréquence  $f$ , pour une viscosité donnée<sup>2, 3</sup>.

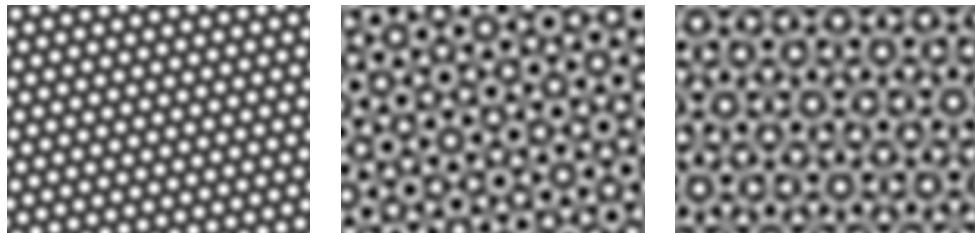


FIG. 2.5 – Exemples de structures observées dans l'expérience de Faraday.

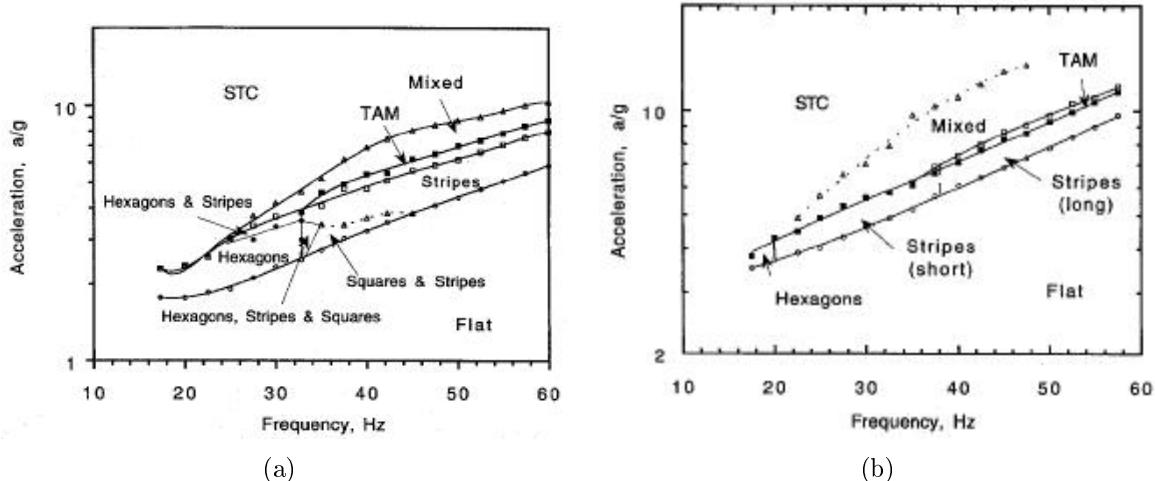


FIG. 2.6 – Espaces des paramètres : (a)  $\nu = 0.5 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$  et (b)  $\nu = 1.0 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$  [5].

### 2.2.3 L'instabilité de Taylor-Couette

Le système consiste en un fluide placé entre deux cylindres coaxiaux en rotation à des vitesses angulaires  $\Omega_1$  (cylindre intérieur) et  $\Omega_2$ . L'écoulement a été étudié par *Couette* en 1901, et les instabilités ont été découvertes par *Taylor* en 1923.

1. Les quasi-cristaux sont des structures qui ne possèdent pas de propriétés d'invariance par translation comme les cristaux, mais dont les règles de constructions engendrent un ordre à longue distance [4].

2. TAM = *transverse amplitude modulation*.

3. STC = *spatio temporal chaos*.

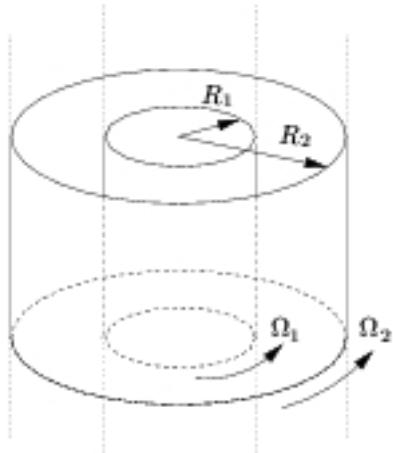


FIG. 2.7 – Schéma de l'écoulement de Couette.

L'instabilité provient de l'effet de la force centrifuge, tandis que les frottements visqueux ont un effet stabilisateur. Pour le problème de Rayleigh-Bénard, nous avions vu que l'instabilité apparaissait lorsque le nombre de Rayleigh critique était dépassé :  $Ra > Ra_c$ . Il existe également un nombre sans dimension, le *nombre de Taylor*, qui mesure en quelque sorte la distance par rapport à l'instabilité. Il est défini comme le rapport

$$Ta = \frac{\Omega^2 R d^3}{\nu^2}$$

où  $\Omega_1$  est la vitesse angulaire du cylindre intérieur,  $R = \frac{R_1+R_2}{2}$  est le rayon moyen,  $d = R_2 - R_1$  est la distance entre les cylindres et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

Le cas le plus simple consiste à fixer le cylindre extérieur :  $\Omega_2 = 0$ .

Pour de faibles vitesses, le champ de vitesse est purement azimutal : c'est l'écoulement circulaire de Couette. Une fois la valeur critique atteinte, l'écoulement de Couette devient instable : les composantes radiale et axiale de la vitesse augmentent jusqu'à atteindre une saturation. On observe alors des tourbillons axisymétriques. C'est ce qu'on appelle le *Taylor Vortex Flow* (TVF).

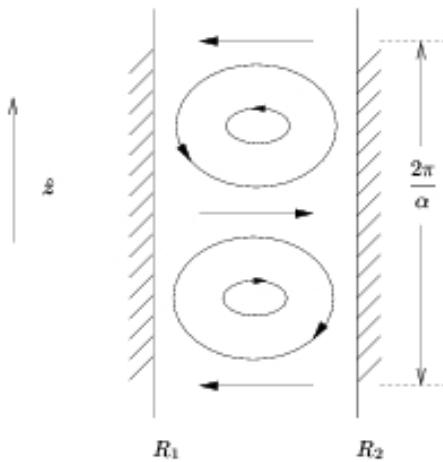


FIG. 2.8 – Illustration du Taylor Vortex Flow.

Si on augmente encore la vitesse du cylindre, le TVF devient instable et des ondes azimutales se forment. L'écoulement devient périodique dans le temps : c'est un exemple de brisure de symétrie temporelle. Au-delà d'une troisième valeur critique, l'amplitude des ondulations subit des modifications temporelles et l'écoulement devient quasi périodique à deux fréquences. Finalement, au-delà d'une troisième fréquence, le système devient chaotique.

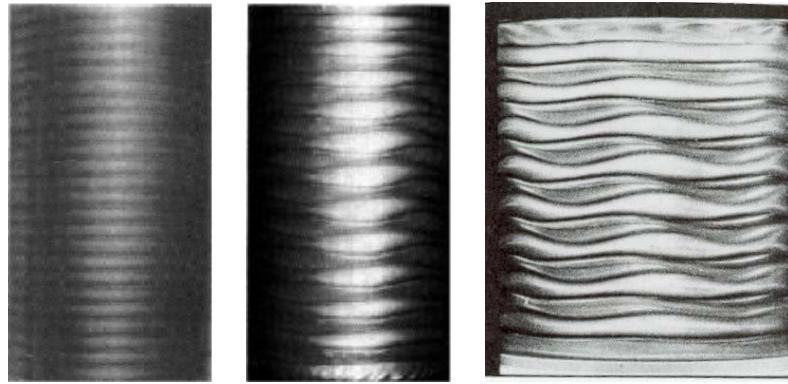


FIG. 2.9 – Exemples d’instabilité dans l’expérience de Taylor-Couette.

## 2.3 Étude comparative

Nous avons vu que ces systèmes, bien que totalement différents, peuvent être le siège de phénomènes relativement proches du point de vue visuel.

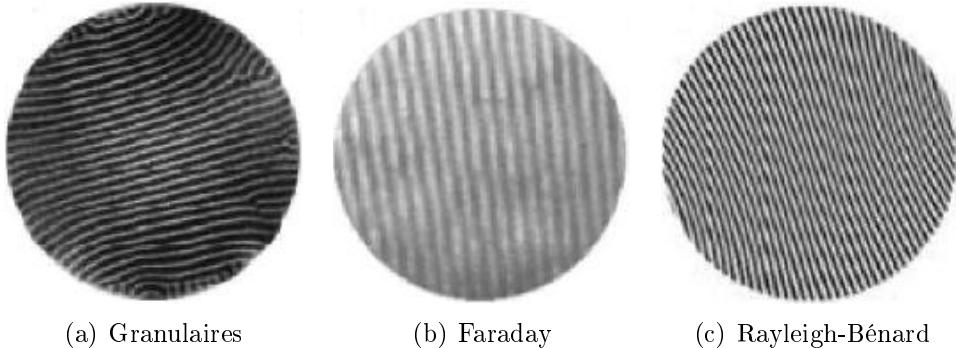


FIG. 2.10 – Similitudes entre les structures dissipatives de différents systèmes physiques [6].

Dans chacune des expériences, il existe un moteur, c'est-à-dire un mécanisme qui permet d'injecter de l'énergie dans le système, et un frein, qui dissipe une partie de l'énergie (Tab.2.1).

Le système étudié dans ce travail n'échappe pas à la règle : l'apport d'énergie se fait par les oscillations de la plaque, la dissipation par les frottements et les chocs entre particules. Nous reviendrons sur cet aspect du problème dans les chapitres 4 et 5.

Expérience	Apport d'énergie	Dissipation	Paramètre de contrôle adimensionnel
Rayleigh-Bénard	chauffage	viscosité diffusion thermique	$Ra = \frac{g\alpha \Delta T H^3}{\kappa \nu}$
Faraday	oscillations	viscosité	--
Taylor-Couette	rotation du cylindre	viscosité	$Ta = \frac{\Omega^2 R d^3}{\nu^2}$
Granulaires	oscillations	frottement chocs entre grains	$\Gamma = \frac{4\pi f^2 A}{g}$

TAB. 2.1 – Modes d'apport et de dissipation de l'énergie dans les différents systèmes étudiés.

Dans les expériences de Rayleigh-Bénard et de Taylor-Couette, les nombres sans dimension sont les rapports entre les effets moteurs et les effets "freins". Par contre, le nombre  $\Gamma$  est simplement une mesure adimensionnelle de l'excitation. Pour chacun de ces nombres, il existe une valeur critique au delà de laquelle l'instabilité se produit.

Dans le cas des granulaires, de nombreux articles citent la valeur de  $\Gamma = 2.5$  comme seuil d'apparition de l'instabilité, indépendamment des propriétés des grains. Par analogie avec les autres systèmes, on serait plutôt amené à penser qu'il existe un nombre faisant intervenir à la fois l'amplitude de l'oscillation, sa fréquence, le coefficient de restitution des grains ainsi que son coefficient de frottement. La difficulté provient du fait qu'il n'est pas aisément d'évaluer les pertes d'énergie par chocs et par frottement en fonction de ces paramètres. De plus, le coefficient de restitution dépend fortement des propriétés de la surface des grains et des vitesses lors des collisions.

On pourrait également se poser la question de savoir si les instabilités dans les milieux granulaires et dans les fluides soumis à des oscillations ont la même origine, ou si les grains individuels jouent le même rôle que les molécules dans le fluide.

La réponse est évidemment *non*, car les interactions entre sont purement répulsives, contrairement aux molécules dans le fluide où il existe une composante attractive. La comparaison entre ces deux systèmes sera réalisée plus en détails dans le chapitre 8, lorsque nous aurons vu les équations de type milieu continu pour le milieu granulaire.

## 2.4 Conclusion

Nous avons vu quelques exemples de systèmes simples capables de produire des instabilités et des structures dissipatives semblables. Nous verrons par la suite que l'instabilité de Faraday et que les couches de particules granulaires soumises à des vibrations possèdent de nombreuses similarités. Il sera donc intéressant d'étudier de manière comparative ces deux problèmes, afin de déterminer si les modèles de description de l'un sont valables pour l'autre.

# Bibliographie

- [1] D. Kondepudi, Ilya Prigogine, *Modern Thermodynamics, From Heat Engines to Dissipative Structures*.
- [2] M.C. Cross et P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 851-1112.  
*Pattern formation outside of equilibrium.*
- [3] J.L. Rogers et M.F. Schatz, J.L. Bougie et J.B. Swift, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 87-90. *Rayleigh-Bénard Convection in a Vertically Oscillated Fluid Layer.*
- [4] J.-P. Gaspard, cours d'*Introduction à la Physique de la Matière Condensée*.
- [5] A. Kudrolli, J.P. Gollub, *Physica D* **97** (1996) 133-154.  
*Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio.*
- [6] H.L. Swinney, E.C. Rericha, (2004), *Pattern formation and shocks in granular gases*, soumis à The Physics of Complex Systems (New Advances and Perspectives)- The International School of Physics Enrico Fermi, édité par F. Mallamace and H.E. Stanley (IOS Press (Amsterdam), 2004).

## Sites Web

### Rayleigh-Bénard

- \* <http://enrgr.smu.edu/~arunn/html/convect/rbconvect/rbcon.html>
- \* <http://physics.ucsd.edu/was-daedalus/convection/rb.html>
- \* <http://www.enseeih.fr/hmf/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb72/rb/rb.htm>
- \* [http://chaos.ph.utexas.edu/research/schatz/sec\\_instab.html](http://chaos.ph.utexas.edu/research/schatz/sec_instab.html)

### Taylor-Couette

- \* <http://www.students.ncl.ac.uk/a.j.youd/tcf/tcf.html>
- \* [http://www.deas.harvard.edu/brenner/taylor/handouts/taylor\\_couette/](http://www.deas.harvard.edu/brenner/taylor/handouts/taylor_couette/)
- \* <http://wuche.wustl.edu/~suresh/ChE515/taylor-couette.htm>

### Faraday

- \* [http://espresso.phy.ncu.edu.tw/~peilong/fwave/fwave\\_pattern.html](http://espresso.phy.ncu.edu.tw/~peilong/fwave/fwave_pattern.html)

# Chapitre 3

## Description des phénomènes observés

L'objet principal de ce travail est l'étude de la structuration dans les milieux granulaires soumis à des accélérations verticales périodiques. La première étape importante du travail de l'ingénieur est l'observation. C'est pourquoi, dans ce chapitre, les différentes structures qui ont été découvertes par les différents groupes de recherche vont être décrites et caractérisées, afin d'être *modélisées* par la suite. Le but de ce chapitre est purement descriptif; les différents modèles seront étudiés dans la deuxième partie.

Il est important de présenter d'abord l'ensemble des phénomènes qui peuvent se produire afin de pouvoir comparer ceux-ci avec les résultats de nos propres expériences.

### Sommaire

---

<b>3.1 Types de structurations . . . . .</b>	<b>20</b>
3.1.1 Structure plate ( <i>flat</i> ) . . . . .	20
3.1.2 Structure en carrés ( <i>squares</i> ) . . . . .	20
3.1.3 Structures en lignes ( <i>stripes</i> ) . . . . .	20
3.1.4 Structures en hexagones . . . . .	21
3.1.5 Les interfaces ( <i>kinks</i> ) . . . . .	21
3.1.6 Les bulles de phase ( <i>phase bubbles</i> ) . . . . .	22
3.1.7 Labyrinthes . . . . .	22
<b>3.2 Diagramme de phases . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>3.3 Autres structurations . . . . .</b>	<b>24</b>
3.3.1 Les oscillons . . . . .	24
3.3.2 Les groupements d'oscillons . . . . .	24
3.3.3 Les spirales . . . . .	25
3.3.4 Divers . . . . .	25
<b>3.4 La formation de tas . . . . .</b>	<b>25</b>
3.4.1 Approche simple . . . . .	27
3.4.2 Mécanisme de formation . . . . .	27

---

## 3.1 Types de structurations

Comme nous venons de le voir, les systèmes amenés loin de l'équilibre peuvent être le siège de structures dissipatives. Les différentes formes observées dans les milieux granulaires soumis à des accélérations verticales sinusoïdales possèdent des caractéristiques communes avec d'autres phénomènes tels que les instabilités de Rayleigh-Bénard ou de Faraday, c'est pourquoi il est intéressant de les passer en revue.

Les valeurs des paramètres ( $f^*$  et  $\Gamma$ ) que nous indiquons dans la suite sont celles que nous avons le plus souvent rencontrées dans la littérature. Cela n'exclut pas que d'autres expériences donnent d'autres valeurs pour ces paramètres<sup>1</sup>.

### 3.1.1 Structure plate (*flat*)

C'est ce qu'on observe dans le domaine des faibles accélérations. Pour  $\Gamma < 1$ , la couche reste à tout instant en contact avec la plaque. A partir de  $\Gamma = 1$ , l'accélération maximale devient suffisante pour que la couche commence à décoller. C'est seulement à partir de  $\Gamma \simeq 2.5$  que des structurations apparaissent.

Il est également possible d'obtenir une couche qui reste plate pour des accélérations plus élevées et ce, pour une large gamme de fréquences (voir Fig. 3.9).

### 3.1.2 Structure en carrés (*squares*)

Pour des accélérations supérieures à  $\Gamma = 2.5$  et des fréquences de l'ordre de  $20\text{ Hz}$ , on observe une structure en carrés, oscillant à une fréquence  $f' = f/2$ . Les points les plus clairs sur la figure suivante correspondent à des sommets, c'est-à-dire les parties où les grains se trouvent à des hauteurs plus élevées que celle de leur entourage. Après un temps  $T'/2 = 1/2f' = T$ , la période d'oscillation de la plaque, ces sommets (zones claires) deviennent des cratères, et les cratères (zones sombres) deviennent des sommets.

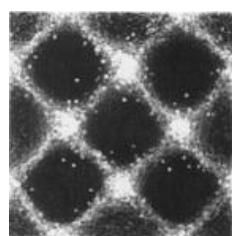


FIG. 3.1 – *Motifs carrés :*  
 $\Gamma = 3$ ,  $f^* = 0.27$ ,  $H = 5.42\sigma$   
*(couche vue du dessus)* [1].

Il existe également des structures en carrés oscillant à une fréquence  $f' = f/4$ . Ils apparaissent pour des accélérations suffisamment élevées ( $\Gamma \simeq 5.5 - 7$ ).

### 3.1.3 Structures en lignes (*stripes*)

Elles sont observées dans le même domaine d'accélérations que les carrés, mais à des fréquences plus élevées. Elles ont également des fréquences d'oscillation de  $f/2$  (faibles accélérations) ou de  $f/4$  (accélérations plus élevées).

---

1. Pour rappel,  $\Gamma = \frac{4\pi^2 f^2 A}{g}$  est l'accélération réduite et  $f^* = \frac{f}{\sqrt{g/h}}$  est la fréquence réduite.

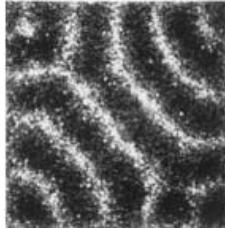


FIG. 3.2 – Structure en lignes ( $\Gamma = 3$ ,  $f = 0.44$  et  $H = 5.42 \sigma$ ) [1].

### 3.1.4 Structures en hexagones

Les hexagones apparaissent dans un intervalle d'accélérations relativement étroit (proche de  $\Gamma = 4$ ). Comme les carrés et les lignes, ils ont une fréquence propre d'oscillation de  $f/2$  ou de  $f/4$ .

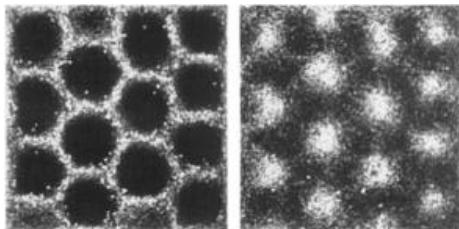


FIG. 3.3 – Phases alternées d'hexagones ( $\Gamma = 4$ ,  $f^* = 0.38$ ,  $H = 5.42 \sigma$ ) [1].

Les hexagones peuvent coexister dans une même couche avec des phases différentes. On trouve alors deux régions séparées par une ligne de discontinuité de phase.

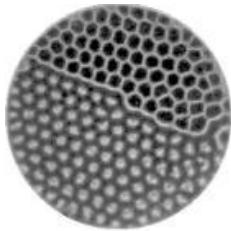


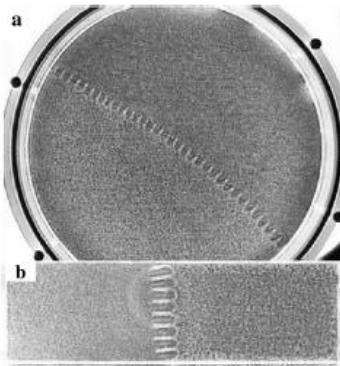
FIG. 3.4 – Coexistence d'hexagones de phases opposées ( $\Gamma = 7.1$ ,  $f^* = 1.0$ ,  $H = 10 \sigma$ ) [4].

### 3.1.5 Les interfaces (*kinks*)

Ce sont des discontinuités de phase séparant des domaines spatiaux de phases relatives différentes. Des interfaces dites "décorées" existent également.

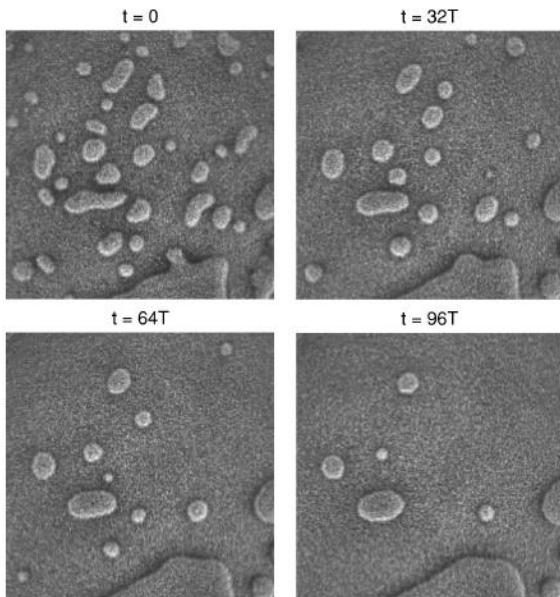


FIG. 3.5 – Interface pour  $f = 67 \text{ Hz}$  et  $\Gamma = 5.8$  [2].

FIG. 3.6 – *Interface décorée* [5].

### 3.1.6 Les bulles de phase (*phase bubbles*)

Lorsque l'accélération dépasse une valeur d'environ  $7g$ , les expériences et simulations ont montré l'apparition de structures baptisées *phase bubbles* [4] : ce sont des régions localisées qui oscillent avec une phase opposée (déphasage de  $\pi$ ) à celle de la région qui l'entoure. Le terme "bulle" a été employé, car la région de phase opposée se comporte comme si elle possédait une tension de surface.

FIG. 3.7 – *Illustration des bulles de phase et évolution temporelle* [4].

### 3.1.7 Labyrinthes

Ils apparaissent lorsqu'on augmente encore l'accélération, au-delà de la valeur donnant lieu aux bulles de phase. Ce type de géométrie a aussi été rencontré dans l'expérience de Rayleigh-Bénard.



FIG. 3.8 – Structure en forme de labyrinthes [6].

## 3.2 Diagramme de phases

Les structures que nous venons de décrire apparaissent lorsque la valeur de  $\Gamma$  est augmentée lentement, avec une valeur de  $f^*$  donnée. D'autres structures peuvent apparaître si l'on soumet le système à des variations brusques de  $f^*$  ou de  $\Gamma$ . C'est ce que nous décrirons dans la section suivante.

Le diagramme de phases (Fig.3.9) reprend les différentes formes en fonction de  $\Gamma$  et de  $f^*$ . Ce diagramme a été repris à titre illustratif : il a été réalisé pour un certain type de grains, et dans certaines conditions extérieures. Il est possible que d'autres expériences donnent des résultats différents de ceux-là.

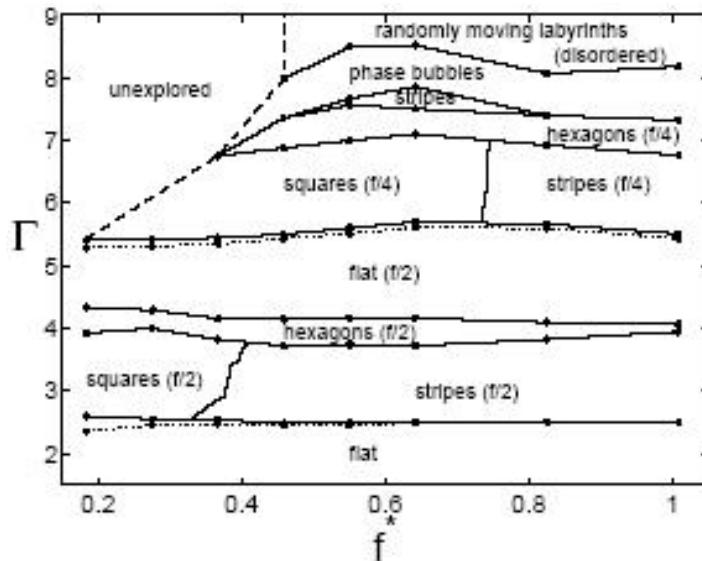


FIG. 3.9 – Diagramme de phases pour une expérience réalisée avec des sphères de bronze de diamètre  $\sigma = 0.165 \text{ mm}$ , dans une couche de hauteur  $5\sigma$  dans un container de diamètre de  $770\sigma$  [3].

Quelques remarques :

- ce sont principalement les variations de  $\Gamma$  qui donnent lieu à des transitions;
- certaines transitions présentent un hystérésis<sup>2</sup> : par exemple pour les carrés, à une fréquence donnée, l'accélération  $\Gamma_a$  à laquelle apparaissent les carrés est supérieure à l'accélération  $\Gamma_d$  à laquelle ils disparaissent lorsqu'on diminue  $\Gamma$ .

2. Représentées par des traits discontinus sur la figure 3.9.

- des structures transitoires de fréquences  $f/3$  et  $f/6$  ont été observées [4];
- certaines régions sont inexplorées : ce sont les régions de faible fréquence et d'accélération élevée.

### 3.3 Autres structurations

Lorsqu'on fait subir des variations brutales d'accélération au système, il est possible d'obtenir d'autres phénomènes intéressants, mais dont la durée de vie est parfois très courte.

#### 3.3.1 Les oscillons

Un *oscillon* est une petite excitation circulaire et symétrique, qui oscille à une fréquence  $f/2$ ; durant un cycle du container, c'est un cratère, durant le cycle suivant, c'est un pic (Fig.3.10). Leur diamètre typique est d'environ trente particules et leur durée de vie peut aller au-delà de  $10^5$  périodes d'oscillation [7]. Ils apparaissent lorsqu'on fait passer brusquement  $\Gamma$  d'une valeur donnant lieu à des carrés, vers une valeur sous le seuil d'instabilité.

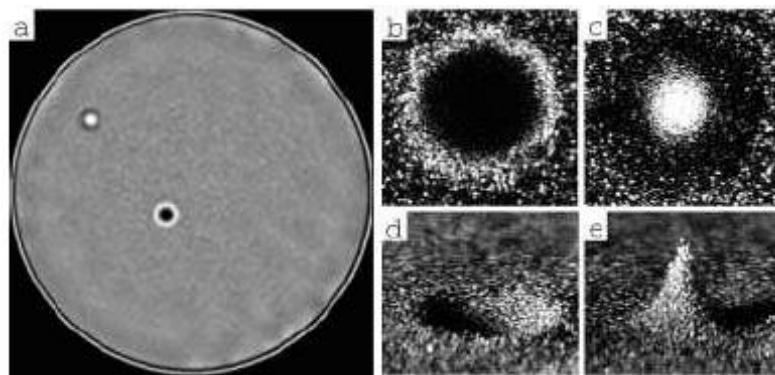


FIG. 3.10 – *Oscillons*: (a) 2 oscillons déphasés de  $\pi$  vus du dessus; (b) et (d): vues du dessus et latérale d'un cratère; (c) et (e): vues du dessus et latérale d'un pic ( $f = 25 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 2.45$ ,  $H = 17\sigma$ ) [7].

#### 3.3.2 Les groupements d'oscillons

Les oscillons sont parfois considérés comme les éléments constitutifs de base de la structure en carrés (analogie avec les ions d'un cristal) [7, 8]. A faible distance, des oscillons de phases opposées s'attirent alors que des oscillons de même phase se repoussent.

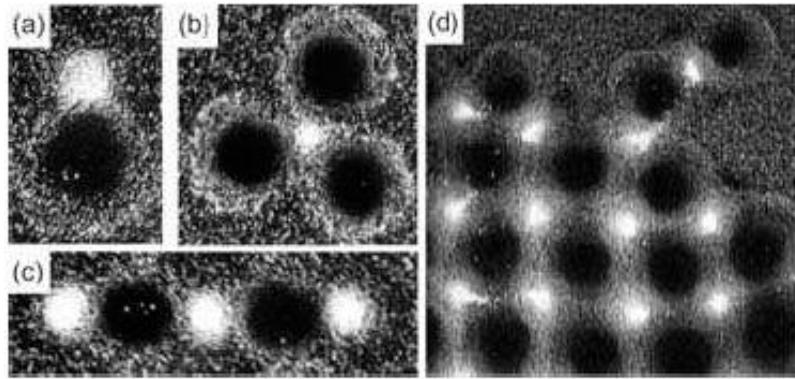


FIG. 3.11 – Groupements d’oscillons : (a) dimère, (b) tétramère, (c) chaîne polymère et (d) croissance d’un réseau carré [7].

### 3.3.3 Les spirales

Les spirales peuvent être observées lorsque l’amplitude de l’oscillation passe soudainement d’une valeur en dessous de la limite d’apparition de structures, à une valeur telle que les lignes apparaissent [6].

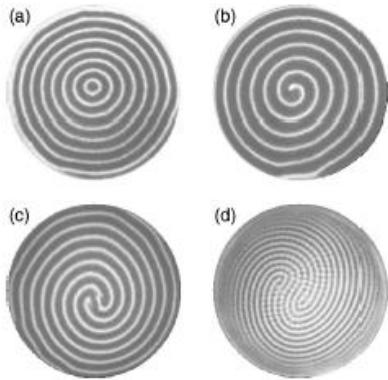


FIG. 3.12 – Exemples de structures en spirales : (a) forme de cible, (b) spirale à un bras, (c) spirale à trois bras et (d) spirale à onze bras [6].

Il est possible d’obtenir plus facilement ce type de géométries en utilisant un récipient dont le fond possède une certaine pente. Cependant, les spirales ont des temps de vie limités.

### 3.3.4 Divers

Nous avons décrit les structures les plus couramment rencontrées dans la littérature. D’autres exemples, tels que les triangles, les cibles, …, sont illustrés dans [9] (Fig. 3.13 et Fig. 3.14).

## 3.4 La formation de tas

La formation de tas a été observée dès 1831 par Faraday, qui justifiait ce phénomène par la présence d’une vide partiel sous les tas.

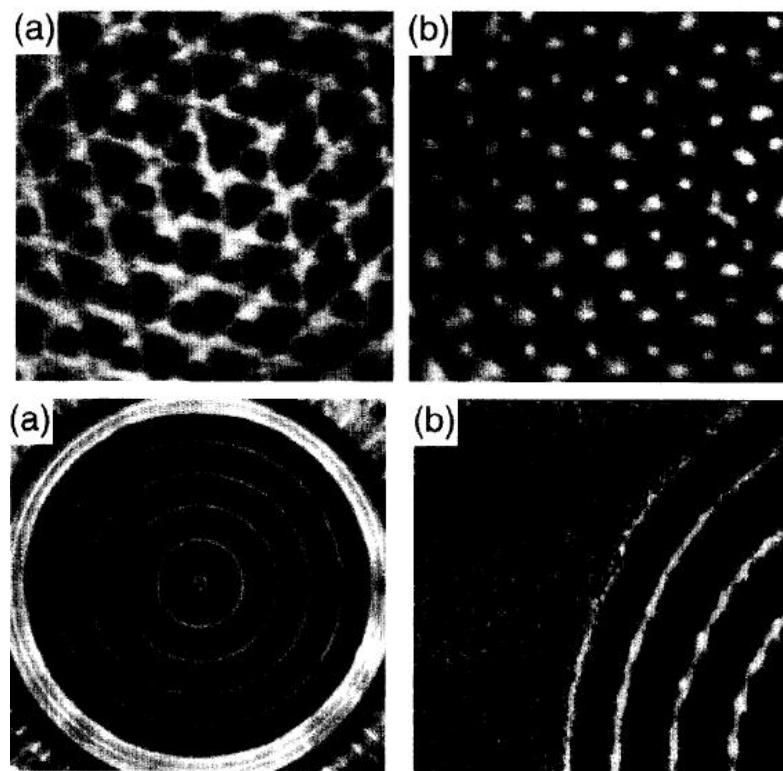


FIG. 3.13 – Motifs en triangles et en forme de cible [9].

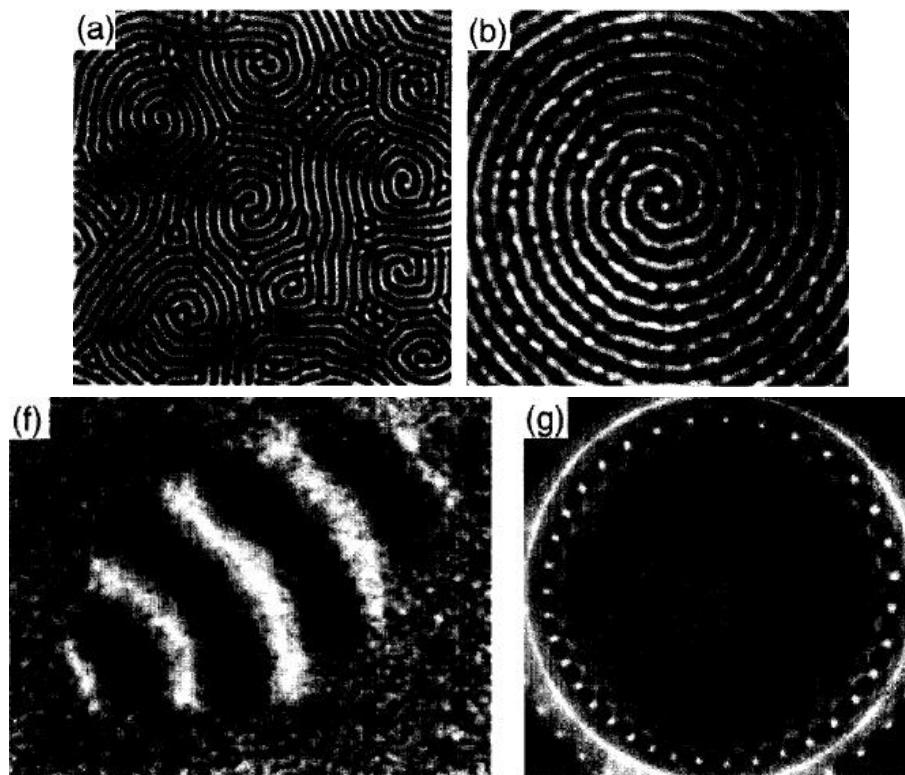


FIG. 3.14 – Autres types de structures [9].

### 3.4.1 Approche simple

Supposons que le frottement entre les parois et les grains soit très important. Nous avons vu qu'à partir de  $\Gamma = 1$ , la couche commence à décoller de la plaque, et son mouvement se décompose en deux parties :

1. une phase de chute libre;
2. une phase de collision avec la plaque en mouvement.

Pendant un certain laps de temps, la vitesse de la couche est dirigée vers le haut, tandis que le container est en mouvement vers le bas. Cette situation provoque des frottements importants au niveau des parois et le développement d'une couche limite. Des rouleaux de convection apparaissent et un tas se forme au centre.

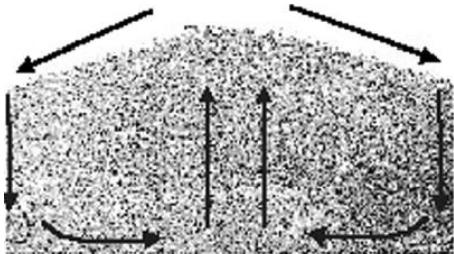


FIG. 3.15 – *Mouvements de convection et formation d'un tas [10].*

### 3.4.2 Mécanisme de formation

En soumettant une plaque couverte d'une couche de sable à des chocs d'amplitude constante, un ensemble de tas de forme conique apparaît, semblables à de petites gouttes de liquide vues du dessus.

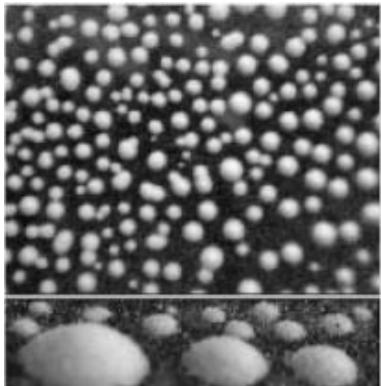


FIG. 3.16 – *Structures obtenues après 40 tapes sur une plaque initialement recouverte d'une couche de particules de poudre. La distance moyenne séparant deux tas voisins est d'environ 5 mm [11].*

L'air ambiant joue un rôle fondamental dans l'apparition et le maintien de ces structures coniques ou pyramidales dans les poudres fines. Sans entrer dans les détails, on peut résumer le mécanisme en disant que l'air s'introduit par aspiration sous les petits dômes coniques, ressort par le sommet en éjectant des particules.

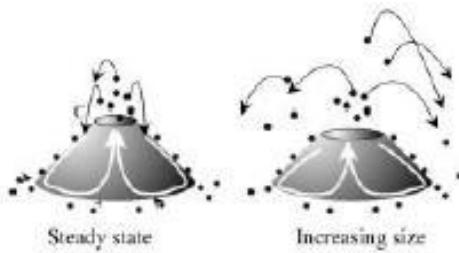


FIG. 3.17 – *Trajectoire des particules qui participent au processus de convection lorsque le tas est projeté par la plaque [11].*

La configuration résultante ressemble à l'instabilité de la couche mince de liquide résultant de la condensation de vapeur d'eau sur une surface plane horizontale (*instabilité de Rayleigh-Taylor*, Fig. 3.18). Duran a montré qu'il existe des similitudes entre les équations gouvernant le mouillage des liquides et le comportement des tas de granulaires [11].

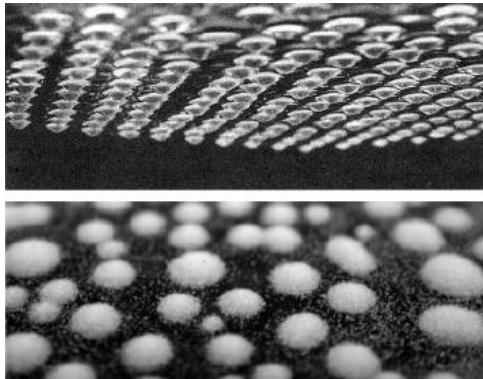


FIG. 3.18 – *Instabilité de Rayleigh-Taylor (en haut) et formation de tas [11].*

Il a également observé que les tas les plus petits avaient tendance à être aspirés par les plus gros, à l'instar de ce qui se passe lorsqu'on connecte deux bulles de tailles différentes.

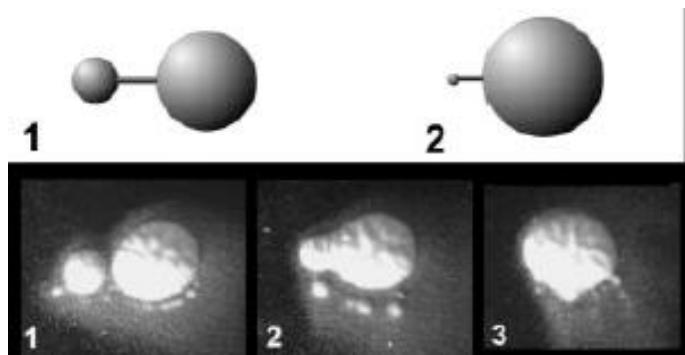


FIG. 3.19 – *Mécanisme de fusion de tas de poudre soumis à des tapes. Les petits tas sont aspirés dans le grand [11].*

# Bibliographie

- [1] M.D. Shattuck, C. Bizon, J.B. Swift, H.L. Swinney, *Physica A* **274** (1999) 158-170.  
*Computational test of kinetic theory of granular media.*
- [2] F. Melo, P.B. Umbanhowar and H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3838-3841.  
*Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers.*
- [3] H.L. Swinney, E.C. Rericha, (2004), *Pattern formation and shocks in granular gases*, soumis à "The Physics of Complex Systems (New Advances and Perspectives)- The International School of Physics Enrico Fermi", édité par F. Mallamace and H.E. Stanley (IOS Press (Amsterdam), 2004); disponible sur <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0408252>
- [4] Sung Joon Moon, M.D. Shattuck, C. Bizon, D.I. Goldman, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 011301 1-10. *Phase Bubbles and Spatiotemporal Chaos in Granular Patterns.*
- [5] I.S. Aranson, D. Blair, W.K. Kwok, G. Karapetrov, U. Welp, G.W. Crabtree, V.M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **82**, (1999) 731-734.  
*Controlled Dynamics of Interfaces in a Vibrated Granular Layer.*
- [6] John R. de Bruyn, B.C. Lewis, M. D. Shattuck, et Harry L. Swinney, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 041305, 1-12. *Spiral patterns in oscillated granular layers.*
- [7] P.B. Umbanhowar, F. Melo et H.L. Swinney, *Nature* **382** (1996) 793-796.  
*Localized excitations in a vertically vibrated granular layer.*
- [8] D.I. Goldman, M.D. Shattuck, Sung Joon Moon, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 104302, 1-4. *Lattice Dynamics and Melting of a Nonequilibrium Pattern.*
- [9] P.B Umbanhowar, F. Melo et H.L. Swinney, *Physica A* **249** (1998) 1-9.  
*Periodic, aperiodic, and transient patterns in vibrated granular layers.*
- [10] E. Clément, L. Labous et Loic Vanel, *Europhysics News* (1998) 108-111.  
*Granular Packing under Vibration.*
- [11] J. Duran, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 254301.  
*Rayleigh-Taylor Instabilities in Thin Films of Tapped Powder.*

## Deuxième partie

### Étude des modèles analytiques et numériques

# Chapitre 4

## Simulation de dynamique moléculaire

Étant donné que dans l'expérience de la couche granulaire accélérée, le nombre de particules peut être assez réduit (de l'ordre de  $10^6$ ), il est possible d'implémenter la loi de mouvement de Newton pour chaque particule, sur un simple ordinateur personnel. Chaque grain est assimilé à une sphère dure, que l'on caractérise par un rayon, un coefficient de restitution et un coefficient de frottement. Cette méthode permet d'obtenir des résultats en accord avec la réalité, pourvu que certaines conditions soient vérifiées.

### Sommaire

---

4.1	Description et limitations de la méthode . . . . .	31
4.2	Simulations et résultats . . . . .	33
4.3	Mise en évidence du rôle du frottement . . . . .	33
4.4	Visualisation de la dynamique de la couche . . . . .	36
4.5	Conclusion . . . . .	36

---

### 4.1 Description et limitations de la méthode

Dans le modèle numérique qui va être décrit, on suppose que les grains interagissent uniquement via des collisions binaires. Entre deux collisions successives, les particules se meuvent uniquement sous l'influence de la gravité. Cette hypothèse est valable si les effets du gaz interstitiel peuvent être négligés. Ce sera le cas si l'on travaille à pression suffisamment faible (de l'ordre de 0.1 Torr)<sup>1</sup>, ou que le diamètre des grains n'est pas trop faible (de l'ordre de 1 mm).

On parle de simulation *Event Driven* (E.D.): les particules suivent une trajectoire parabolique, sous l'influence de la gravité, jusqu'à ce qu'un événement (*event*) se produise [1]. Un événement peut être :

- une collision entre deux particules,

1. Le torr est une unité de pression égale à la pression exercée par une colonne de 1 millimètre de mercure (mmHg) ou encore 1/760 d'atmosphère.

- une collision entre une particule et une paroi,
- une collision entre une particule et le fond du récipient.

A partir des positions et des vitesses des particules, les instants auxquels les collisions se produisent sont calculés. Le temps varie par pas, d'une collision à une autre. La quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés ; l'énergie est dissipée par les collisions (inélastiques) et par le frottement (entre les particules elles-mêmes et entre les particules et les parois).

Les interactions sont décrites par les paramètres suivants [2] :

- $e$ , le coefficient de restitution, défini comme le rapport entre les vitesses normales après ( $v_n^*$ ) et avant collision :

$$e = -\frac{v_n^*}{v_n}$$

Pour une collision parfaitement élastique, on a évidemment  $e = 1$ .

- $\mu$ , le coefficient de frottement en glissement, qui relie les composantes normale et tangentielle de la force de frottement au moment du contact, selon la loi de Coulomb.
- $\beta$ , le coefficient de restitution en rotation, qui représente la restitution tangentielle de la vitesse de la surface lorsque les particules glissent de manière discontinue au point de contact.

Les collisions avec les parois sont traitées comme des collisions entre deux sphères.

Le coefficient de restitution  $e$  doit jouir de certaines propriétés :

1. Lorsque la vitesse normale tend vers zéro,  $e$  doit tendre vers l'unité : cela signifie que pour des collisions à vitesse arbitrairement petite, l'énergie doit être entièrement restituée.
2. Il ne peut prendre une valeur constante, car cela provoquerait un phénomène appelé *Inelastic Collapse* (effondrement inélastique)<sup>2</sup> : c'est un processus au cours duquel des particules inélastiques subissent un nombre infini de collisions durant un laps de temps fini, dissipant ainsi la totalité de leur énergie. De plus, une valeur constante de  $e$  est en désaccord avec les mesures expérimentales [3].

Un modèle plus sophistiqué avec  $e = 1$  pour une vitesse de collision nulle et  $e$  qui décroît de manière monotone pour une vitesse relative qui augmente supprime l'effondrement inélastique. Ceci est démontré assez simplement sur un système composé de trois balles sur une ligne infinie ou sur un anneau. [4]

**Exemples de définitions de  $e$  :**

1.

$$e(v_n) = \begin{cases} 1 - Bv_n^{3/4}, & \text{pour } v_n < v_0; \\ e_0, & \text{pour } v_n \geq v_0. \end{cases} \quad \text{où } v_0 \text{ est une vitesse seuil [5].}$$

Le choix de  $e = \text{cst}$  pour  $v_n \geq v_0$  se justifie par une meilleure efficacité de calcul.

---

2. On trouvera une animation interactive sur :

[http://www.haverford.edu/physics-astro/Gollub/vib\\_granular/inelastic/inelastic.html](http://www.haverford.edu/physics-astro/Gollub/vib_granular/inelastic/inelastic.html)

2.

$$e(v_n) = \begin{cases} 1 - 0.1 \left( \frac{v_n}{\sqrt{g\sigma}} \right)^{3/4}, & \text{pour } v_n < \sqrt{g\sigma}; \\ e_0, & \text{pour } v_n \geq \sqrt{g\sigma}. \end{cases} \quad \text{où } \sigma \text{ est le diamètre d'un grain [6].}$$

3.

$$e(u) = 1 - e_0 \left( \frac{u}{u^*} \right)^{1/5} \quad (\text{modèle de Herz-Kuwabara-Kono}) [7]$$

D'autres exemples peuvent être trouvés dans [3] et [8]. La dépendance de  $e$  avec la vitesse normale n'est pas connue avec précision, les mesures expérimentales indiquent simplement une convergence de  $e$  vers l'unité lorsque  $v_n$  tend vers zéro. La manière dont  $e(v_n)$  décroît importe peu : des simulations avec différents modèles ont donné les mêmes motifs et les mêmes longueurs d'onde.

**Limitations :** il existe évidemment une limitation du nombres de particules traitées : seules des applications simples pourront être simulées par cette méthodes. Pour des problèmes plus complexes, on devra avoir recours à d'autres approches.

## 4.2 Simulations et résultats

Les mêmes structures (Fig. 4.1) et les mêmes longueurs d'onde (Fig. 4.2) ont été observées dans les expériences et dans les simulations pour de larges gammes de fréquences et d'accélérations [3]. Les niveaux de gris correspondent au nombre de particules, intégré sur la hauteur de la couche.

## 4.3 Mise en évidence du rôle du frottement

Dans le régime collisionnel que nous étudions, l'énergie est dissipée par deux mécanismes :

1. les collisions entre particules inélastiques;
2. les frottements entre surfaces.

Les simulations réalisées avec des particules supposées sans frottement [2] montrent que les deux mécanismes ont des effets distincts. En réalité, les grains parfaitement lisses n'existent évidemment pas, mais les simulations ont l'avantage de pouvoir étudier le comportement que ceux-ci auraient.

Le coefficient de restitution des particules a été réduit de manière à augmenter la dissipation d'énergie et ainsi tenter de modéliser la perte d'énergie qu'aurait provoqué le frottement entre les surfaces. La figure (4.4) montre les résultats de ces simulations pour différentes valeurs de  $\mu$  et de  $e$ . On observe une perte de stabilité dans les cas où  $\mu = 0$  : des pics désordonnés apparaissent, l'ordre à longue portée disparaît.

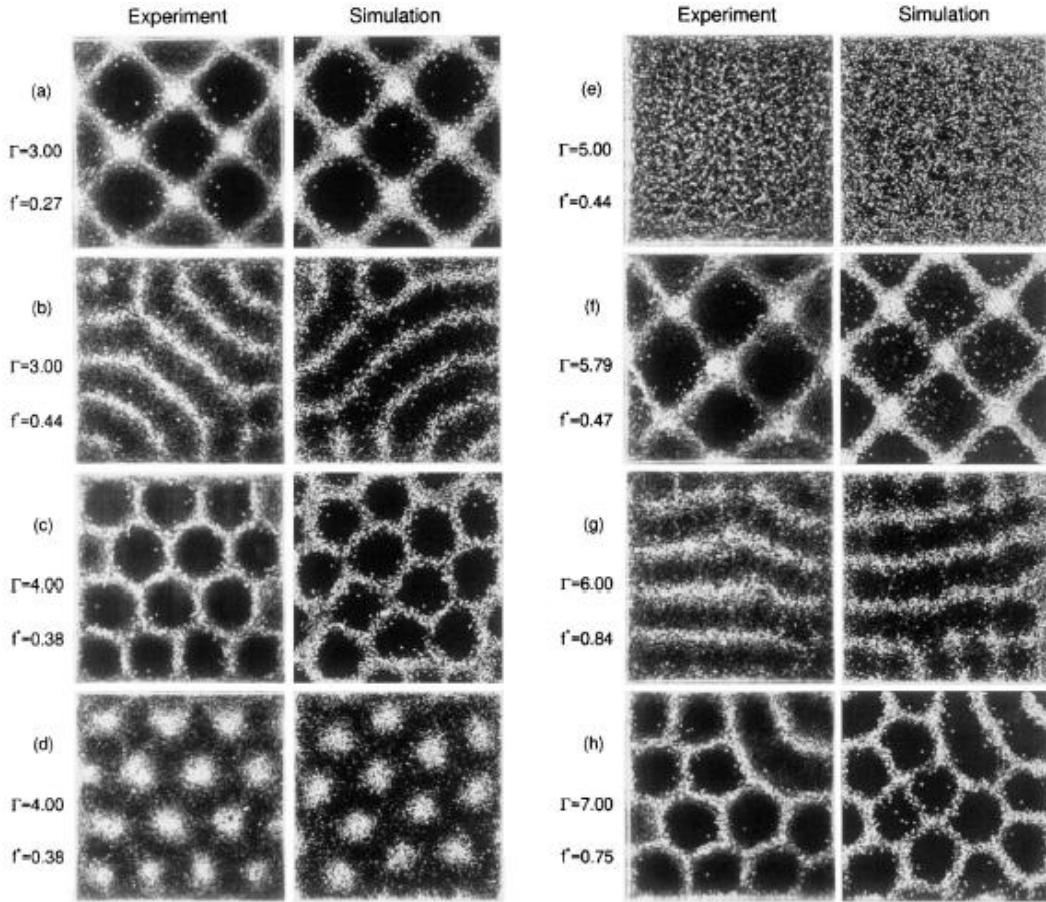


FIG. 4.1 – Expérience réalisée avec des sphères de plomb de diamètre  $\sigma = 0.5 - 0.6 \text{ mm}$  dans une couche d'épaisseur  $H = 5.42\sigma$ , et simulations de dynamique moléculaire : (a) carrés  $f/2$ , (b) lignes  $f/2$ , (c) et (d) hexagones  $f/2$ , (e) couche plate, (f) carré  $f/4$ , (g) lignes  $f/4$  et (h) hexagones  $f/4$  [3].

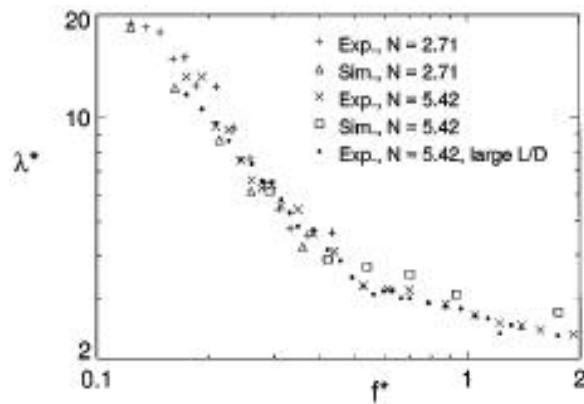


FIG. 4.2 – Longueur d'onde en fonction de la fréquence : simulations et expériences.  $+$  et  $\times$  : expérience avec des sphères de plomb ( $\sigma = 0.55 \text{ mm}$ ) et  $L/D = 100$ .  $\bullet$  : expérience avec des sphères de bronze ( $\sigma = 0.165 \text{ mm}$ ) et  $L/D = 982$ . [3].

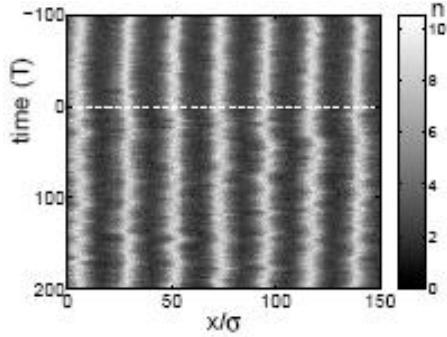


FIG. 4.3 – *Évolution d'un pattern dans une couche quasi bidimensionnelle : les fluctuations autour de la position moyenne sont plus importantes dans le modèle sans frottement ( $e = 0.5$ ,  $\beta = -1$ ,  $\mu = 0$ ; sous la ligne pointillée) que dans le modèle avec frottement ( $e = 0.7$ ,  $\beta = 0.35$ ,  $\mu = 0.5$ ; au-dessus la ligne pointillée) [2].*

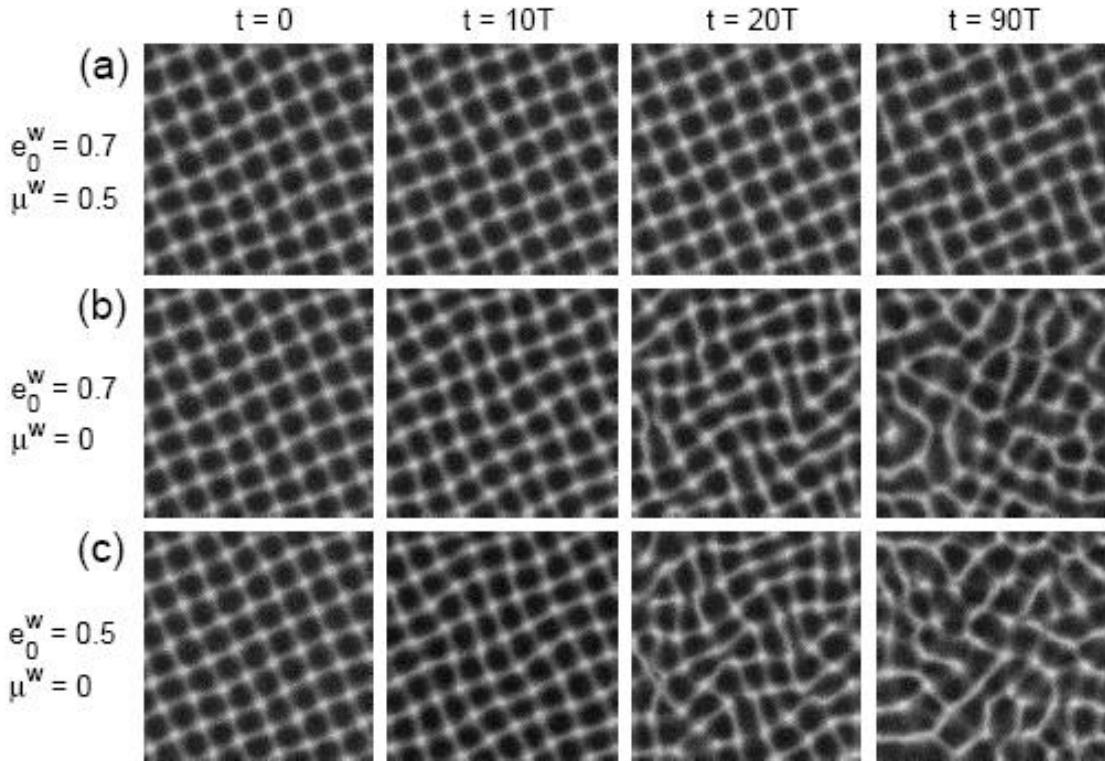


FIG. 4.4 – *Perte de stabilité d'une structure en carrés en l'absence de frottement. (a) : évolution du pattern pour  $\mu = 0.5$ . (b) : perte de stabilité quand  $\mu = 0$ . (c) perte de stabilité pour  $\mu = 0$  et  $e = 0.5$ . La condition initiale est une structure stable obtenue par une simulation de 181390 particules avec frottement ( $e = 0.7$ ,  $\beta = 0.35$  et  $\mu = 0.5$ ) dans une boîte carré de côté  $200\sigma$  avec des conditions aux limites périodiques ( $\Gamma = 3.0$ ,  $f^* = 0.27$ ) [2].*

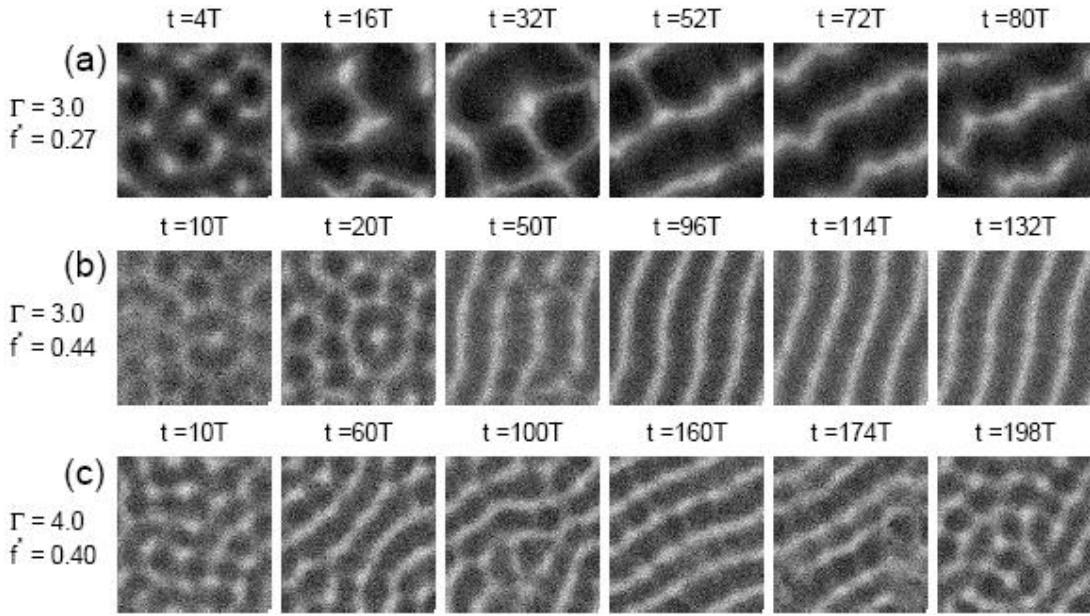


FIG. 4.5 – Résultats de simulations montrant que seuls les patterns en lignes sont stables pour des particules sans frottement. En  $t = 0$ ,  $\Gamma$  et  $f^*$  prennent des valeurs qui donneraient lieu, pour des particules avec frottement: (a) à des carrés; (b) à des lignes; (c) à des hexagones [2].

**Conclusions :** les simulations qui mettent en jeu des particules sans frottement ne sont pas à même de capturer certaines structures observées expérimentalement. Le frottement a également pour rôle de réduire la mobilité des grains et augmenter ainsi le taux de collision. La formation des structures dépend donc des propriétés des surfaces des grains : la valeur de  $\Gamma$  donnant lieu à l'instabilité pourra être différente selon le fini des surfaces.

## 4.4 Visualisation de la dynamique de la couche

Une autre possibilité qu'offrent les simulations de dynamique moléculaire est d'observer le mouvement des grains à l'intérieur d'une couche bidimensionnelle. Plutôt que d'avoir une vue à la verticale du récipient, comme c'était le cas dans les figures (4.1), (4.3) et (4.5), la simulation fournit une vue latérale du système.

La figure (4.6) montre clairement que la période d'oscillation de la couche est le double de la période d'oscillation du récipient : aux endroits où l'on trouvait des maxima en  $t = 0.84 T$ , on trouve des minima en  $t = 1.80 T$ . On observe également que les maxima résultent de la convergence de grains avec des vitesses de sens opposés.

Il est également possible d'illustrer plus clairement le rôle de la dissipation dans la formation des structures (Fig. 4.4). Un coefficient de restitution trop faible rend impossible la formation de maxima et de minima (pour des conditions d'expérience données).

## 4.5 Conclusion

- ★ avantages de la méthode :
  - permet d'éliminer les effets non désirés lors de l'expérience (vibrations para-

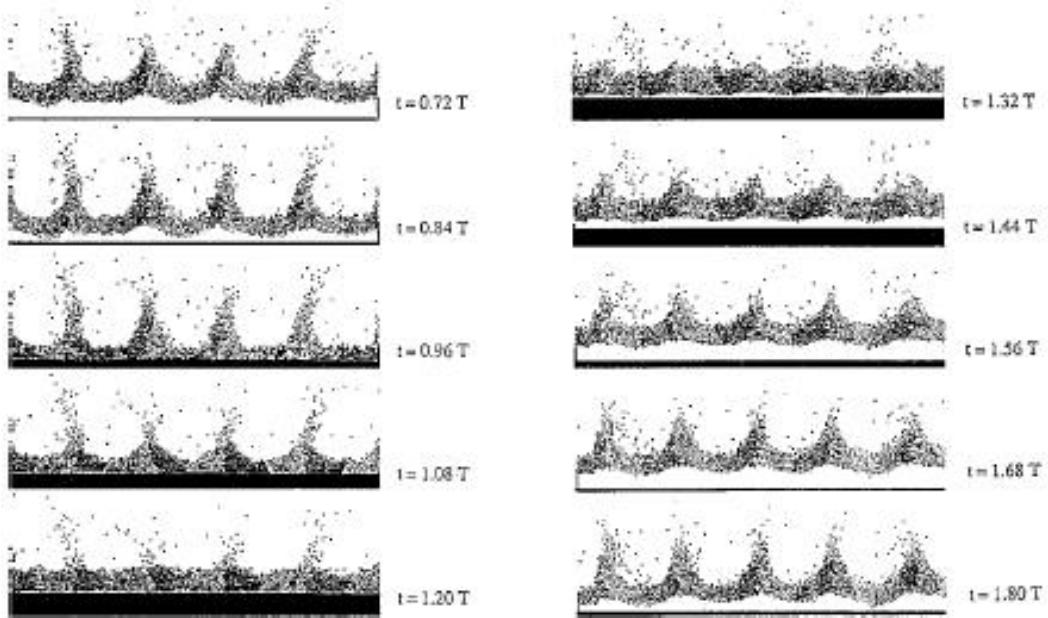


FIG. 4.6 – Évolution de la couche pendant deux périodes de vibration de la plaque. Les particules noires ont une vitesse dirigée vers la droite et les particules grises vers la gauche. Les paramètres de la simulation sont:  $f = 15 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 3.6$ ,  $H = 12\sigma$ ,  $\sigma = 1 \text{ mm}$  [7].

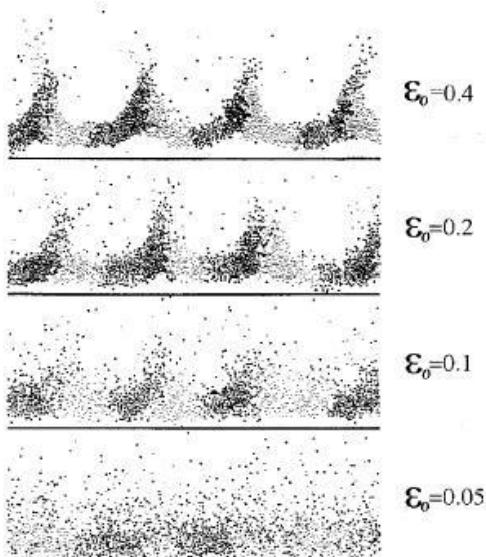


FIG. 4.7 – Influence de la dissipation sur les motifs produits. Les quatre images sont obtenues avec les mêmes conditions, mais pour des paramètres de dissipation différents [7].

sites, effet du gaz interstitiel, humidité de l'air...);

- permet de travailler avec des valeurs de paramètres (accélération, fréquence) qui ne sont pas toujours accessibles avec les dispositifs expérimentaux ;
- ne nécessite pas de réglage préalable ;
- permet de déterminer quels paramètres sont essentiels à la modélisation.

★ inconvénients :

- le temps de calcul et la limitation du nombre de particules en jeu : le pas de temps doit être de l'ordre du temps entre deux collisions successives. Par conséquent, le nombre de particules est limité à quelques millions ;
- ne permet pas de rendre compte des structures qui apparaissent lors de changements brusques des paramètres  $\Gamma$  ou  $f^*$ .

En résumé : les simulations de dynamique moléculaire, mettant en jeu des particules avec frottement, permettent d'obtenir des résultats proches des observations expérimentales. L'inconvénient majeur est que cette méthode ne peut être appliquée à des systèmes plus réalistes contenant un plus grand nombre de particules.

## Bibliographie

- [1] S. Luding, E. Clément, J. Rajchenbach et J. Duran, *Europhys. Lett.* **36** (1996) 247-252.  
*Simulations of pattern formation in vibrated granular media.*
- [2] Sung Joon Moon, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 031301, 1-6.  
*Role of friction in pattern formation in oscillated granular layers.*
- [3] C. Bizon, M.D. Shattuck, J.B. Swift, W.D. McCormick, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 57-60. *Patterns in 3D Vertically Oscillated Granular Layers : Simulation and Experiment.*
- [4] D. Goldman, M.D. Shattuck, C. Bizon, W.D. McCormick, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 4831-4833.
- [5] H.L. Swinney, E.C. Rericha, (2004), *Pattern formation and shocks in granular gases*, soumis à The Physics of Complex Systems (New Advances and Perspectives)- The International School of Physics Enrico Fermi, édité par F. Mallamace and H.E. Stanley (IOS Press (Amsterdam), 2004); disponible sur <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0408252>
- [6] J. Bougie, Sung Joon Moon, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 051301 1-8, *Shocks in vertically oscillated granular layers.*
- [7] E. Clement , L. Labous, *Phys. Rev. E* **62** (2000) 8314-8323.  
*Pattern formation in a vibrated granular layer: the pattern selection issue.*
- [8] J. Bougie, J. Kreft, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Onset of Patterns in an Oscillated Granular Layer: Continuum and Molecular Dynamics Simulations*, soumis à *Phys. Rev. E* (2004).

# Chapitre 5

## Description "milieu continu"

Les nombreuses similitudes entre la couche granulaire soumise à des vibrations et les instabilités de Faraday et de Rayleigh-Bénard laissent à penser qu'une description de type "milieu continu" est possible. Dans un premier temps, nous allons expliciter la signification physique et la validité de l'hypothèse de milieu continu. Ensuite nous développerons les équations de Jenkins et Richman décrivant le mouvement de sphères dures qui interagissent via des forces de contact. Les hypothèses mises en jeu et leur validité seront examinées.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	.	.	.	.	<b>40</b>
<b>5.2</b>	<b>Signification physique et validité</b>	.	.	.	.	<b>41</b>
5.2.1	Calcul du libre parcours moyen	.	.	.	.	41
5.2.2	Signification physique	.	.	.	.	45
<b>5.3</b>	<b>Dérivation des équations</b>	.	.	.	.	<b>45</b>
5.3.1	Équations d'évolution	.	.	.	.	46
5.3.2	Équations constitutives	.	.	.	.	48
5.3.3	Résumé des équations	.	.	.	.	49
5.3.4	Validité des hypothèses	.	.	.	.	49
5.3.5	Problèmes	.	.	.	.	51
<b>5.4</b>	<b>Chocs dans les milieux granulaires</b>	.	.	.	.	<b>51</b>
5.4.1	Ondes de chocs dans les couches granulaires soumises à vibrations	.	.	.	.	52
5.4.2	Cône de Mach dans une fluide granulaire peu profond	.	.	.	.	53
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	.	.	.	.	<b>55</b>

---

### 5.1 Introduction

Dans l'approche "milieu continu", le système va être décrit de manière globale (et non plus grain par grain comme en dynamique moléculaire) en terme de la densité, la vitesse et la température granulaire.

Grâce à cette description continue, il sera possible d'appliquer :

- l'étude de stabilité,

- les équations d'amplitude,
- la théorie des perturbations.

Les avantages de cette méthode sont principalement :

- pas de limitation du nombre de particules considérées (contrairement aux simulations de dynamique moléculaire);
- utilisation des méthodes numériques développées pour la résolution des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides. En effet, la résolution de ces équations fait l'objet de nombreuses recherches depuis plusieurs décennies. On possède donc un certain savoir-faire dans le domaine.

## 5.2 Signification physique et validité

L'hypothèse *Milieu Continu* signifie qu'il est possible d'extraire un volume de contrôle suffisamment petit au sein du milieu étudié, et dont les propriétés sont représentatives de celles du milieu. Prenons l'exemple de la masse volumique : si le volume de contrôle est trop petit, la densité observée en fonction de la position sera une suite de pics de Dirac : la densité sera nulle partout, sauf aux endroits où se trouvent les molécules. Au contraire, si le volume est trop grand, la valeur observée de la densité ne représentera qu'une valeur moyennée sur ce volume, valeur qui ne tiendra pas nécessairement compte des inhomogénéités du milieu.

On suppose donc que les quantités physiques (masse, quantité de mouvement, énergie,...) sont uniformément réparties sur tout le volume, alors qu'en réalité, ces grandeurs sont localisées. Afin de mesurer la validité de cette hypothèse, on définit le *nombre de Knudsen*, qui représente le rapport entre le libre parcours moyen des particules constitutives du milieu ( $\xi$ ) et une longueur caractéristique ( $L$ ) du système :

$$Kn = \frac{\xi}{L} \quad (5.1)$$

Pour qu'un milieu puisse être considéré comme continu, il faut que le nombre de Knudsen soit inférieur à 2 ou 3 % [1]. Lorsque  $0.03 < Kn < 0.20$ , les équations "milieu continu" restent valables, mais les conditions aux limites doivent être modifiées.

### 5.2.1 Calcul du libre parcours moyen

Nous devons exprimer le libre parcours moyen en fonction de grandeurs macroscopiques mesurables. Il n'existe pas de formule donnant le libre parcours moyen pour une particule dans un milieu granulaire. Nous allons donc nous baser sur la *théorie cinétique des gaz* pour établir une formule du libre parcours moyen [2]. Cela se justifie par le fait que lors de la phase d'expansion de la couche, les grains individuels peuvent être considérés comme des particules indépendantes les unes des autres, et qui n'interagissent que lors de collisions. Il aurait été plus rapide de donner directement la formule sans passer par les calculs. Cependant, en procédant de cette manière, les hypothèses mises en jeu n'auraient pas été visibles.

### Distribution de Maxwell-Boltzmann

Pour des particules possédant uniquement de l'énergie cinétique, la fonction de distribution de vitesses<sup>1</sup> s'écrit [3]:

$$f(\vec{v}) = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \quad (5.2)$$

avec  $m$  la masse d'une particule,  $N$  le nombre de particules contenues dans le volume  $V$ ,  $k_B$  la constante de Boltzmann ( $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ). La relation (5.2) peut également être écrite en coordonnées sphériques, en tenant compte que la distribution est isotrope dans l'espace des vitesses :

$$f(v) = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \quad (5.3)$$

A partir de (5.3), on calcule la vitesse la plus probable  $\bar{v}$  en annulant la dérivée de  $f$  par rapport à  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v} = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[ 2v \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) + v^2 \left( \frac{-mv}{k_B T} \right) \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \right] = 0$$

d'où

$$\boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}} \quad (5.4)$$

### Définition du libre parcours moyen

Un gaz est *hors équilibre* lorsque sa fonction de distribution de vitesse est différente de celle de Maxwell-Boltzmann. Exemple : la température, la densité, ou la vitesse moyenne ne sont pas uniformes à l'intérieur du gaz.

Ces non-uniformités sont effacées par les transports de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, pour finalement atteindre un état d'équilibre.

Le mécanisme de transport est la collision entre molécules. On appelle *libre parcours moyen*, la distance moyenne sur laquelle les propriétés moléculaires peuvent être transportée par une collision, ou encore la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions.

Le nombre de collisions par unités de temps et de volume au point  $\vec{r}$  se calcule par

$$Z = \iiint |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) f(\vec{r}, \vec{v}_2, t) \sigma(\Omega) d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

où

- $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  est la fonction de distribution de vitesse,
- $\int \dots d\vec{v}_i$  représente l'intégrale sur toutes les composantes de la vitesse  $\vec{v}_i$ ,
- $\Omega$  représente les angles de diffusion,

---

1. La fonction de distribution de vitesses est telle que  $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$  représente le nombre de particules qui, à l'instant  $t$ , ont une position dans un élément de volume  $d\vec{r}$  centré en  $\vec{r}$  et une vitesse dans un élément de volume  $d\vec{v}$  centré en  $\vec{v}$ .

- $\sigma(\Omega)$  est la section efficace différentielle de collision.

En effectuant l'intégrale sur  $\Omega$ , on a :

$$Z = \iint |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) f(\vec{r}, \vec{v}_2, t) \sigma_{tot} d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 \quad (5.5)$$

Pour qu'une collision se produise, il faut deux particules. Par conséquent, le nombre total de libres parcours par unités de temps et de volume vaut  $2Z$ . Si on a  $n$  molécules par unité de volume, le nombre moyen de libres parcours pour une molécule par seconde vaut  $2Z/n$ . Le libre parcours moyen est donné par

$$\xi = \frac{n}{2Z} \bar{v} \quad (5.6)$$

où  $\bar{v}$  est la vitesse la plus probable d'une molécule.

### Calcul du libre parcours moyen dans le cas d'une distribution de Maxwell-Boltzmann

Effectuons l'intégrale (5.5) en supposant que  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  est une distribution de Maxwell-Boltzmann et que  $\sigma_{tot}$  est indépendant de l'énergie de la collision et peut être remplacé par une constante proportionnelle à  $\pi a^2$ , où  $a$  est le diamètre moléculaire :

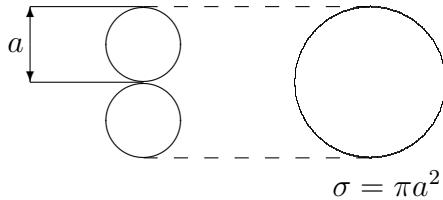


FIG. 5.1 – Section efficace de collision pour deux particules de diamètre  $a$ .

$$Z = \sigma_{tot} n^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^3 \iint |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (v_1^2 + v_2^2) \right] d\vec{v}_1 d\vec{v}_2$$

Utilisons le changement de variable

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ \vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{aligned}$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned} Z &= \pi a^2 n^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^3 \iint |\vec{v}| \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} \left( 2V^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] d\vec{v} d\vec{V} \\ &= \pi a^2 n^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^3 \underbrace{\int |\vec{v}| \exp \left( -\frac{mv^2}{4k_B T} \right) d\vec{v}}_{I_1} \underbrace{\int \exp \left( -\frac{mV^2}{k_B T} \right) d\vec{V}}_{I_2} \end{aligned}$$

Les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  se calculent aisément à partir de la formule de l'intégrale de Poisson<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\pi \int v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{4k_B T}\right) dv = 4\pi \frac{1}{2\left(\frac{m}{4k_B T}\right)^2} \\ I_2 &= 4\pi \int V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{k_B T}\right) dV = 4\pi \frac{1}{4\frac{m}{k_B T}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{k_B T}}} \end{aligned}$$

D'où finalement

$$Z = 4n^2 \sigma_{tot} \sqrt{\frac{k_B T}{\pi m}} = n^2 \sigma_{tot} \frac{\bar{v}}{\sqrt{2\pi}}$$

et, introduisant ce résultat dans (5.6)

$$\boxed{\xi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n \sigma_{tot}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n \pi a^2}} \quad (5.7)$$

### Ordres de grandeur

- Pour l'air dans les basses couches de l'atmosphère (température de l'ordre de  $300\text{ K}$  et pression de l'ordre de  $10^5\text{ Pa}$ ), la valeur du libre parcours moyen est de l'ordre de  $10^{-8}\text{ m}$ . Pour une longueur caractéristique de l'ordre  $10^{-1}\text{ mètre}$ , le nombre de Knudsen vaut :  $Kn = 10^{-8}/10^{-1} = 10^{-7} \ll 1$ : le milieu peut être considéré comme continu.
- Dans les hautes couches de l'atmosphère, la densité  $n$  décroît fortement, et  $\xi$  prend des valeurs de l'ordre de  $10^{-2}\text{ m}$ .  $Kn$  est de l'ordre de 10%.
- Dans un milieu granulaire constitué de particules sphériques de rayon  $r = 0.1\text{ mm}$ : le nombre de particules par unité de volume est le rapport entre le volume total occupé  $\mathcal{V}'$  et le volume d'une sphère. Le volume occupé  $\mathcal{V}'$  est égal au volume total multiplié par la compacité<sup>3</sup>  $c$ . La valeur maximale de la compacité est atteinte lors de la phase de collision de la couche avec la plaque et est de l'ordre de 0.7. Toutefois, il faut garder à l'esprit que la valeur de la densité peut être fort différente en fonction de l'endroit où on se trouve dans la couche. Comme nous l'avons dans le chapitre 1, la distribution des forces dans un milieu granulaire est très complexe, et les grains ne sont pas nécessairement arrangés de manière homogène : des zones moins denses peuvent exister (phénomène d'*arching*).

Un calcul rapide donne une valeur  $\xi$  proche du rayon des particules. Si l'on prend la hauteur de la couche comme longueur caractéristique de problème, le nombre de Knudsen résultant est de l'ordre du pour cent: l'hypothèse de milieu continu est discutable. Lorsque les grains sont dans leur phase de vol libre, la valeur de la densité  $n$  diminue et le libre parcours moyen augmente.

---

2.  $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

3. Pour un réseau cubique centré:  $c = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \cong 0.68$ ;  
pour un réseau cubique à faces centrées:  $c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \cong 0.74$ .

### 5.2.2 Signification physique

La signification du nombre de Knudsen est que, pour avoir un milieu continu, il doit exister une séparation dans les échelles spatiales et temporelles : les variations spatiales doivent être faibles et se produire sur de grandes distances : le comportement de groupements locaux de particules peut être moyenné et remplacé par de petits éléments fluides.

De plus, les changements temporels qui se produisent dans l'écoulement doivent se produire pendant des laps de temps longs par rapport au temps moyen entre deux collisions consécutives. Les particules qui se meuvent entre les éléments fluides n'affectent pas les grandeurs moyennes d'un élément fluide.

Le problème est que la séparation des échelles microscopiques est assez floue dans un milieu granulaire, en comparaison des gaz et liquides moléculaires. Par exemple, l'écoulement sur un tas de sable se fait sur des épaisseurs de l'ordre de la dizaine de grains.

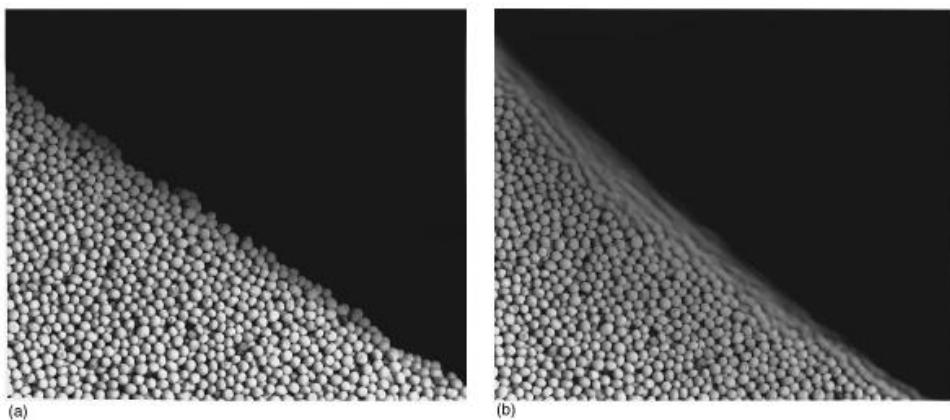


FIG. 5.2 – *Écoulement dans un milieu granulaire : seules les particules en surface sont en mouvement [4].*

Rappelons encore que le calcul d'un libre parcours moyen dans le cas d'une couche granulaire n'est pas parfaitement rigoureux et est réalisé dans le but d'avoir un ordre d'idée. En réalité les choses sont un peu plus compliquées. Non seulement la densité varie fortement au cours du temps, mais elle varie aussi très fortement d'un endroit à l'autre de la couche, même pour un empilement statique. La notion de libre parcours moyen n'est donc pas toujours évidente à cerner dans certains cas.

## 5.3 Dérivation des équations

Les équations vont être dérivées à partir de la *théorie cinétique des gaz*, comme cela a été fait pour les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides. Pour commencer, nous allons voir quelles sont les conditions qui doivent être réalisées pour que les équations puissent être établies. Ensuite, nous développerons ces équations en mettant en évidence les différences avec celles de la mécanique des fluides.

Dans la théorie cinétique, l'irréversibilité temporelle et la conservation de l'énergie lors des interactions locales sont des ingrédients fondamentaux à partir desquels on peut établir les lois de la thermodynamique macroscopique. Or, dans le système étudié, les

interactions sont dissipatives. Nous verrons également que d'autres hypothèses doivent être formulées. Nous en vérifierons la validité.

### 5.3.1 Équations d'évolution

Les équations qui découlent de cette théorie sont les équations de *Jenkins et Richmann* [5].

Ce sont des équations similaires aux équations de *Navier-Stokes* pour les fluides, mais qui sont modifiées de manière à inclure les effets dissipatifs provoqués par les collisions entre grains. Les champs utilisés sont :

- $n$ , la densité numérique, qui représente le nombre de particules par unité de volume ;
- $\vec{u}$ , le vecteur vitesse (voir équ. 5.8 ci-après) ;
- $T$ , la *température granulaire* : elle est définie telle que  $3/2 T$  est l'énergie cinétique moyenne due au mouvement désordonné des particules.

Partons de la fonction de distribution pour une particule seule,  $f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . L'intégration de  $f^{(1)}$  sur tout l'espace des vitesses donne la densité de particule  $n$  à la position  $\vec{r}$  :

$$\int f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = n(\vec{r}, t)$$

L'intégrale de la densité sur toutes les positions  $\vec{r}$  donne le nombre total  $N$  de particules dans le volume considéré :

$$\int n(\vec{r}, t) d\vec{r} = \iint f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v} = N$$

La connaissance de  $f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  permet de calculer la valeur moyenne d'une grandeur  $\psi$  donnée :

$$\langle \psi \rangle = \frac{\int \psi(\vec{v}) f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}$$

Ainsi, la *vitesse moyenne locale* des particules est définie par :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\int (\vec{v}) f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}} = \frac{\int (\vec{v}) f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{n(\vec{r}, t)} \quad (5.8)$$

### Équation de Boltzmann

Le but de l'équation de Boltzmann est de décrire l'évolution temporelle de la fonction de distribution des vitesses [6]. Supposons que la seule force s'exerçant sur les particules et la force extérieure  $\vec{F}$ . En l'absence de collision, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = 0$$

L'effet des collisions est modélisé par la modification du second membre de l'équation. On écrit formellement :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} \quad (5.9)$$

On introduit la notation

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^+ - \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^-$$

où  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^+$  est appelé terme entrant et  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^-$  terme sortant.

$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^+ d\vec{r} d\vec{v} dt$  représente le nombre moyen de particules effectuant une collision entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , l'une des molécules se trouvant, *avant* la collision, dans l'élément de volume  $d\vec{r} d\vec{v}$  autour du point  $(\vec{r}, \vec{v})$ ;  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.}^- d\vec{r} d\vec{v} dt$  représente le nombre moyen de particules effectuant une collision entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , l'une des molécules se trouvant, *après* la collision, dans l'élément de volume  $d\vec{r} d\vec{v}$  autour du point  $(\vec{r}, \vec{v})$ .

Dans le cas de sphères élastiques, les termes de collision sont calculés en faisant les hypothèses suivantes :

- seules les collisions binaires sont prises en compte (valable pour un milieu suffisamment dilué) ;
- les effets des parois du récipient sont négligés ;
- les collisions sont considérées comme locales et instantanées (les effets éventuels de la force  $\vec{F}$  sur les collisions sont négligées) ;
- dans une collision entre deux particules, on néglige toutes les corrélations éventuelles entre les vitesses des deux molécules avant la collision.

La dernière hypothèse, fondamentale dans la théorie, est appelée *hypothèse du chaos moléculaire*. Nous verrons dans la suite que cette approximation n'est pas parfaitement vérifiée.

### Passage aux équations hydrodynamiques

Le passage de l'équation de Boltzmann aux équations hydrodynamiques s'effectue par intégration de (5.9) sur l'espace des vitesses : l'intégrale sur  $\vec{v}$  donne la vitesse moyenne  $\vec{u}$  et l'intégrale sur  $f^{(1)}$  donne la densité  $n$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) = 0 \quad (5.10)$$

Cette équation est analogue à celle rencontrée en mécanique des milieux continus pour la conservation de la masse ;  $n$  joue le même rôle que la masse volumique  $\rho$ .

Multiplions à présent (5.9) par  $\vec{v}$  et intégrons le résultat ; on obtient l'équation de la quantité de mouvement [7] :

$$n \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} - n g \vec{e}_z \quad (5.11)$$

L'équation d'évolution de l'énergie s'obtient en multipliant (5.9) par  $v^2$  et en l'intégrant :

$$\frac{3}{2} n \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \mathbf{P} : \mathbf{E} - \gamma \quad (5.12)$$

où  $T$  est la température granulaire<sup>4</sup>,  $\mathbf{P}$  est le tenseur des contraintes,  $\mathbf{E}$  est le tenseur des gradients de vitesse et  $\gamma$  est le terme de dissipation d'énergie due aux collisions entre particules.

Supposons que la distribution de vitesse soit proche d'une gaussienne et que les dérivées spatiales de  $n$ ,  $\vec{u}$  et  $T$  sont faibles. Avec ces hypothèses, les différents termes s'écrivent

- $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$ , avec  $\kappa$  la conductivité thermique (loi de Fourier) ;
- $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

### 5.3.2 Équations constitutives

Le tenseur des contraintes est modélisé par

$$P_{ij} = \left[ -p + \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) E_{kk} \right] \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

où  $\lambda$  est la viscosité en volume et  $\mu$  est la viscosité en cisaillement.

Le terme  $\gamma$ , qui prend en compte la perte de température due aux collisions inélastiques, distingue ce modèle de celui d'un gaz de particules élastiques :

$$\gamma = \frac{12}{\pi} (1 - e_0^2) \frac{nT^{3/2}}{\sigma} G(\nu)$$

La quantité  $e_0$  est le coefficient de restitution.  $G(\nu)$  est déterminé à partir de  $g(r,\nu)$ , qui est la probabilité d'avoir deux particules dont la distance relative se trouve dans l'intervalle  $[r, r + dr]$ , pour une fraction volumique  $\nu$ .

$$G(\nu) = \nu g_0(\nu) \quad \text{avec} \quad g_0(\nu) = \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_{\max}} \right)^{\frac{4}{3}\nu_{\max}} \right]^{-1},$$

la fonction de distribution radiale au contact. La quantité  $\nu$  représente la fraction volumique dans l'écoulement et  $\nu_{\max} = 0.65$  est la fraction volumique d'un assemblage aléatoire tridimensionnel compact de sphères.

Les différents coefficients phénoménologiques sont déterminés par la théorie d'un gaz dense de sphères dures :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{8}{\sqrt{3}\pi} n\sigma T^{1/2} G(\nu) \\ \mu &= \frac{\sqrt{\pi}}{6} n\sigma T^{1/2} \left[ \frac{5}{16} \frac{1}{G(\nu)} + 1 + \frac{4}{5} \left( 1 + \frac{12}{\pi} \right) G(\nu) \right] \\ \kappa &= \frac{15\sqrt{\pi}}{16} n\sigma T^{1/2} \left[ \frac{5}{24} \frac{1}{G(\nu)} + 1 + \frac{6}{5} \left( 1 + \frac{32}{9\pi} \right) G(\nu) \right] \end{aligned}$$

Pour fermer le système, on utilise une équation d'état :

$$p = nT [1 + 2(1 + e_0)G(\nu)]$$

---

4. Pour rappel, la température granulaire est une mesure des fluctuations de vitesse :  $T = 1/3(\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)$ .

### 5.3.3 Résumé des équations

Le tableau 5.1 ici les équations d'évolution et constitutives du modèle présenté dans ce chapitre.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) = 0 \quad (5.13)$$

$$n \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} - n g \vec{e}_z \quad (5.14)$$

$$\frac{3}{2} n \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \mathbf{P} : \mathbf{E} - \gamma \quad (5.15)$$

$$\gamma = \frac{12}{\pi} (1 - e_0^2) \frac{n T^{3/2}}{\sigma} G(\nu) \quad (5.16)$$

$$\lambda = \frac{8}{\sqrt{3\pi}} n \sigma T^{1/2} G(\nu) \quad (5.17)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{6} n \sigma T^{1/2} \left[ \frac{5}{16} \frac{1}{G(\nu)} + 1 + \frac{4}{5} \left( 1 + \frac{12}{\pi} \right) G(\nu) \right] \quad (5.18)$$

$$\kappa = \frac{15\sqrt{\pi}}{16} n \sigma T^{1/2} \left[ \frac{5}{24} \frac{1}{G(\nu)} + 1 + \frac{6}{5} \left( 1 + \frac{32}{9\pi} \right) G(\nu) \right] \quad (5.19)$$

TAB. 5.1 – *Équations du modèle de Jenkins et Richman.*

### 5.3.4 Validité des hypothèses

Les hypothèses de chaos moléculaire et de distribution de Maxwell-Boltzmann ont été testées par une simulation de dynamique moléculaire [8]. Les conclusions sont résumées ici.

#### Distribution de Maxwell-Boltzmann

La figure 5.3 reprend les fonctions de distribution des vitesses lorsque le système est sollicité par une accélération du type

$$\vec{a}_i = a_0 \vec{r}_i$$

où  $a_0$  est la norme de l'accélération et a la même valeur pour toutes les particules, tandis que la direction  $\vec{r}_i$  est aléatoire. Dans un premier temps, la température (granulaire) est maintenue constante, et la fraction volumique est variée. Dans un second temps, c'est l'influence des variations de  $T$  qui est étudiée.

On remarque que les points fournis par la simulation numérique coïncident d'autant mieux avec la courbe continue (Maxwell-Boltzmann) que  $\nu$  et  $T$  sont faibles. Les différences sont de plus en plus marquées lorsque la vitesse réduite  $v' = v/\sqrt{T}$  est augmentée.

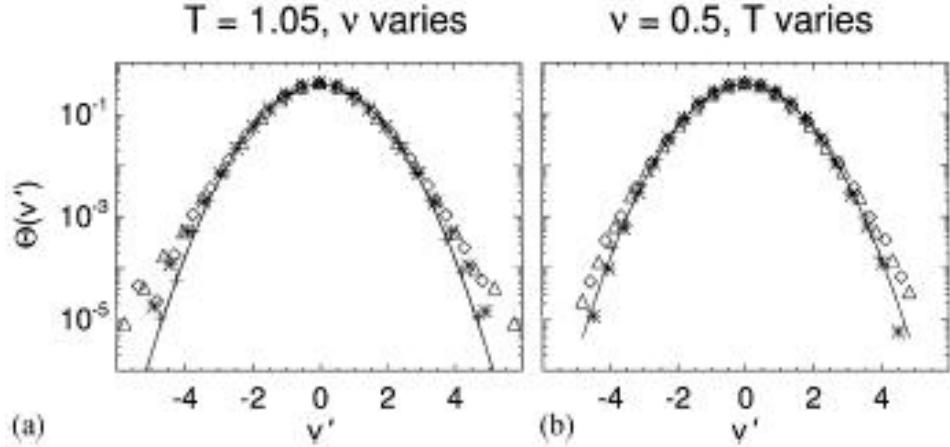


FIG. 5.3 – Fonction de distribution de vitesses lors d'une accélération:  $v' = v/\sqrt{T}$  et  $\theta(v') = P(v')\sqrt{T}$  Maxwell-Boltzmann (courbe continue).

(a)  $T$  est fixé et  $\nu$  est varié: (+)  $\nu = 0.1$ , (\*)  $\nu = 0.4$ , (◊)  $\nu = 0.6$  et (Δ)  $\nu = 0.8$ .  
(b)  $\nu$  est fixé et  $T$  est varié: (+)  $T = 3.0 \cdot 10^{-5}$ , (\*)  $T = 1.1 \cdot 10^{-2}$ , (◊)  $T = 1.05$  et (Δ)  $T = 256$  [8].

### Chaos moléculaire

Cette hypothèse signifie que la fonction de distribution vitesse-vitesse<sup>5</sup>  $f^{(2)}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est égale au produit des fonctions de distribution pour une seule particule :

$$f^{(2)}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f^{(1)}(\vec{v}_1)f^{(1)}(\vec{v}_2)$$

Appelons  $\vec{k}$ , le vecteur joignant le centre de la particule 1 au centre de la particule 2. La vitesse peut être décomposée en deux composantes :  $v^{\parallel}$ , la composante parallèle au vecteur  $\vec{k}$  et  $v^{\perp}$ , la composante perpendiculaire à  $\vec{k}$ . Les fonctions de corrélations sont alors définies par

$$\langle v_1^{\parallel} v_2^{\parallel} \rangle = \sum \frac{v_1^{\parallel} v_2^{\parallel}}{N_r} \quad (5.20)$$

$$\langle v_1^{\perp} v_2^{\perp} \rangle = \sum \frac{v_1^{\perp} v_2^{\perp}}{N_r} \quad (5.21)$$

où les sommes portent sur  $N_r$  particules telles que la distance entre deux particules a une valeur comprise entre  $r - \delta r$  et  $r + \delta r$ . Si les vitesses n'étaient pas corrélées les deux sommes (5.20) et (5.21) devraient donner zéro.

D'après [8], des corrélations de l'ordre de 40 % ont été trouvées entre les composantes  $v_i^{\parallel}$ . Elles sont de l'ordre de 20 % pour les composantes perpendiculaires.

5. La fonction de distribution vitesse-vitesse donne la probabilité d'avoir simultanément une particule 1 avec une vitesse comprise entre  $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$  et une particule 2 avec une vitesse entre  $\vec{v}_2 + d\vec{v}_2$ .

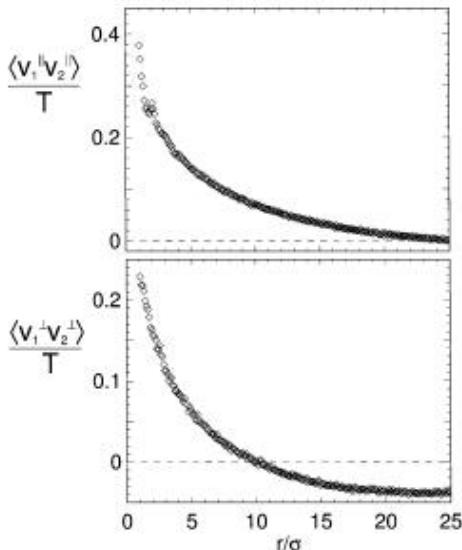


FIG. 5.4 – Corrélations de vitesse en fonction de la séparation des particules avec  $\nu = 0.5$  et  $T = 1.05$  dans une boîte de côté  $52.6\sigma$  soumise à accélération [8].

## Conclusions

Les hypothèses et prédictions de la théorie cinétique sont en accord avec les simulations de dynamique moléculaire d'un gaz inélastique. La distribution des vitesses est proche de celle de Maxwell-Boltzmann. Par contre, les corrélations entre vitesses ne sont pas nulles, l'hypothèse du chaos moléculaire n'est donc pas parfaitement rigoureuse.

### 5.3.5 Problèmes

Il existe quelques problèmes, provenant de la nature granulaire du milieu, pour la résolution des équations de Jenkins et Richman :

- la présence de forts gradients (pour la température  $T$  et la fraction volumique  $\nu$  notamment). Ces gradients impliquent des pas de discrétisation suffisamment petits et par conséquent, des temps de calculs plus élevés.
- les fortes variations de température (jusqu'à 3 ordres de grandeur) : les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\kappa$  ne peuvent pas être traités comme des constantes ; ils doivent être recalculés en chaque point du maillage à chaque instant. Dans de nombreux problèmes de mécanique des fluides, les variations de température sont suffisamment faibles pour que leurs effets sur les coefficients soient négligés.
- les conditions aux limites à imposer ne sont pas encore parfaitement établies. Le fait d'imposer des conditions aux limites qui ne sont pas correctes risque de provoquer l'instabilité numérique de la solution. Pour un fluide usuel, les conditions aux limites sur la vitesse consiste à annuler ses composantes normale et tangentielle aux parois. Ce n'est cependant pas valable pour un écoulement de particules granulaires.

## 5.4 Chocs dans les milieux granulaires

Bien que le phénomène des chocs n'intervienne pas directement dans l'étude des structurations, il est intéressant d'y faire référence, car il constitue une application des équations développées précédemment et un argument en la faveur d'une description milieu

continu de la couche granulaire. En effet, il existe des analogies entre le comportement d'une fluide classique et celui d'une couche de grains en présence d'un obstacle.

En mécanique des fluides, un *choc* est une discontinuité dans les propriétés de l'écoulement (densité, température, pression). Il se forme lorsque la vitesse relative  $v$  entre le fluide et l'obstacle est supérieure à la vitesse de propagation  $c$  d'une onde dans le milieu.

Le *nombre de Mach* est défini comme le rapport entre ces deux vitesses :

$$Ma = \frac{v}{c}$$

### 5.4.1 Ondes de chocs dans les couches granulaires soumises à vibrations

Dans les fluides ordinaires, les chocs sont obtenus dans des conditions de vitesse que l'on peut difficilement obtenir en laboratoire<sup>6</sup>. Ce n'est pas le cas pour les granulaires : la vitesse du son est de l'ordre du  $cm/s$ , vitesse que l'on obtient sans problème en laboratoire.

Elle se calcule par

$$c^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \frac{C_p}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$$

où  $S$  désigne l'entropie,  $C_P$  et  $C_V$  sont les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, respectivement.

Pour un gaz dense inélastique, on a :

$$c^2 = T\chi \left(1 + \frac{2}{3}\chi + \frac{\nu}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right)$$

$$\text{où } \chi = 1 + 2(1 + e)G(\nu).$$

#### Formation du choc

A chaque cycle de la plaque, une onde de choc se forme et se propage dans la couche. Elle sépare deux régions : une région qui subit une compression, à proximité de la plaque, et une région non perturbée, dont les particules sont en mouvement de chute libre vers la plaque.

Dans les simulations, le choc, est identifié comme la région dans laquelle la température passe d'une valeur maximale sur le dessus de la région perturbée à sa valeur minimale sur le dessous de la surface non perturbée.

L'épaisseur du choc est définie comme la différence entre ce maximum et ce minimum, et sa position est définie comme l'altitude à laquelle se produit la diminution la plus forte. Les résultats ont été obtenus par résolution numérique des équations (5.10-5.12) et par dynamique moléculaire (Fig.5.5).

Les grandeurs  $T/g\sigma$  et  $\nu$  ont été calculées pour différentes valeurs du temps adimensionnel  $ft$  en ayant recours à des simulations et au modèle "milieu continu" (équations 5.13-5.19).

---

6. La vitesse de propagation du son dans l'air vaut approximativement  $340 m/s$ , soit plus de  $1200 km/h$ .

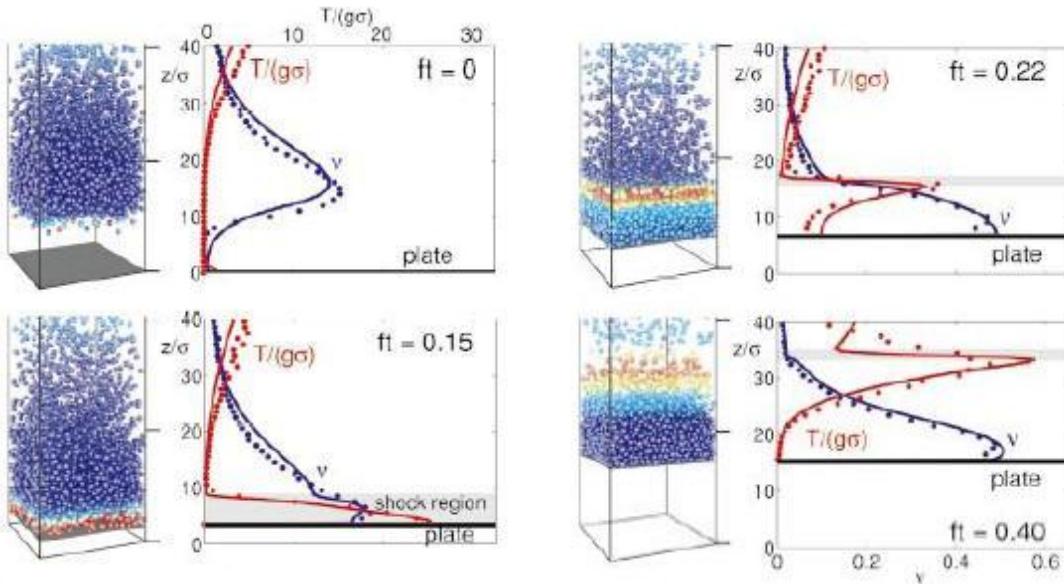


FIG. 5.5 – Température adimensionnelle et fraction volumique en fonction de la hauteur adimensionnelle pour différents temps. Parties gauches des figures : résultats des simulations de dynamique moléculaire (le rouge correspond aux hautes températures). Parties droites : les points correspondent à la dynamique moléculaire, les lignes aux simulations continuum [9].

### Résultats obtenus

La figure 5.5 reprend les résultats des différentes simulations numériques.

- **$ft = 0$**  : la couche tombe sur la plaque. Le container est à sa hauteur minimale. La température est pratiquement nulle partout et augmente légèrement dans la région de faible densité, sur le dessus de la couche.
- **$ft = 0.15$**  : formation du choc quand la couche heurte la plaque.  $\nu$  et  $T'$  augmentent fortement au voisinage de la plaque. Le choc n'est pas encore complètement développé.
- **$ft = 0.22$**  : propagation du choc. Le choc est totalement développé et s'est propagé à travers une partie significative de la couche. Il reste toutefois de nombreux grains en train de tomber sur la plaque.
- **$ft = 0.40$**  : la couche commence à décoller de la plaque. Celle-ci va bientôt atteindre sa hauteur maximale. Le choc est entré dans la région très diluée de la couche. Cette dernière commence à se refroidir.

On constate que les résultats fournis par les deux méthodes sont relativement proches.

#### 5.4.2 Cône de Mach dans une fluide granulaire peu profond

L'expérience consiste en l'étude du mouvement d'un cylindre dont l'axe est placé verticalement et qui se trouve en mouvement dans une fine couche granulaire soumise à des vibrations [10].

Le but est d'étudier les interactions entre l'écoulement granulaire et un obstacle

(comme cela peut être le cas dans des écoulements industriels). Le milieu granulaire vibré joue le rôle de fluide. Le cylindre décrit un mouvement circulaire à vitesse constante. Le container est évacué à une pression de  $4 \text{ Pa}$  afin de réduire les effets de l'air.

Dans un fluide newtonien non dispersif<sup>7</sup>, la relation donnant l'*angle de Mach* s'écrit :

$$\sin \theta = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma} \quad (5.22)$$

où  $\theta$  est l'angle de Mach,  $c$  la vitesse de l'onde et  $v$  la vitesse de l'obstacle.

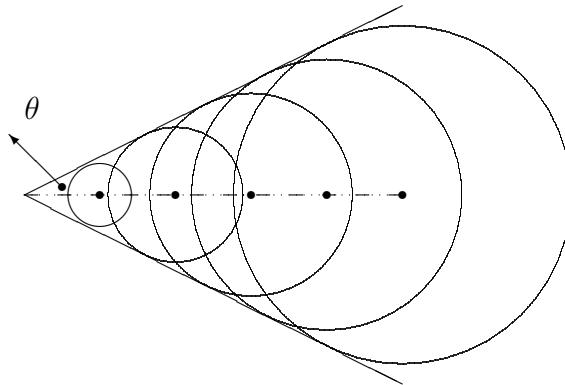


FIG. 5.6 – Définition de l'*angle de Mach*.

La hauteur de la couche est mesurée par une technique utilisant le laser. La figure suivante montre que la relation (5.22) est également valable dans cette expérience. De plus, la vitesse de propagation des ondes est en accord avec la *théorie des eaux peu profondes* :

$$c = \sqrt{gh}$$

où  $h$  est la profondeur locale.

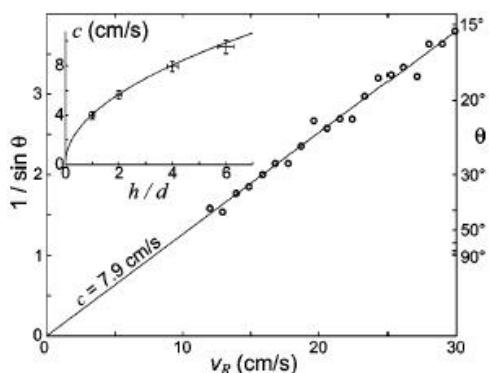


FIG. 5.7 – Dépendance de l'*angle de Mach* en fonction de la vitesse de l'obstacle et dépendance de la vitesse des ondes avec la profondeur. La ligne continue est donnée par la théorie des eaux peu profondes [10].

7. La vitesse de propagation des ondes de choc dans le milieu ne dépend pas de leur longueur d'onde.

## 5.5 Conclusion

Nous avons vu que les équations de Jenkins et Richman pouvaient décrire le système étudié dans une certaine mesure, malgré le fait que les conditions de validité de la description en tant que milieu continu ne sont pas rigoureusement satisfaites.

Les hypothèses nécessaires au développement de ce modèle ont été vérifiées *a posteriori* grâce à des résultats de simulation de dynamique moléculaire.

Le calcul des chocs dans les milieux granulaires à partir de ces équations donne des résultats en accord avec la théorie des eaux peu profondes en mécanique des fluides. Nous verrons une autre application de ce modèle lorsque nous comparerons le milieu granulaire accéléré avec l'instabilité de Faraday.

Notons enfin qu'il existe d'autres modèles de type milieu continu, mais que ceux-ci ne sont pas encore parfaitement établis.

## Bibliographie

- [1] J.-A. Essers, *Mécanique des Fluides*, notes de cours (1<sup>o</sup> technique ingénieur civil physicien, ULg).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics, 2nd ed.* Wiley, New York (1987) 93-95.
- [3] N. Vandewalle, *Physique statistique*, notes de cours (1<sup>o</sup> licence en sciences physique, ULg).
- [4] H.M. Jaeger, S.R. Nagel et R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 1259-1273 .  
*Granular solids, liquids, and gases.*
- [5] J.T. Jenkins, M.W. Richman, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **87** (1985) 355.
- [6] N. Pottier, *Physique statistique hors d'équilibre : équation de Boltzmann, réponse linéaire*, notes de cours (DEA de Physique des Solides de la région parisienne). Disponible sur <http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/pottier.html>
- [7] H.L. Swinney, E.C. Rericha, (2004), *Pattern formation and shocks in granular gases*, soumis à The Physics of Complex Systems (New Advances and Perspectives)- The International School of Physics Enrico Fermi, édité par F. Mallamace and H.E. Stanley (IOS Press (Amsterdam), 2004).
- [8] M.D. Shattuck, C. Bizon, J.B. Swift, H.L. Swinney, *Physica A* **274** (1999) 158-170.  
*Computational test of kinetic theory of granular media.*
- [9] J. Bougie, Sung Joon Moon, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 051301 1-8.  
*Shocks in vertically oscillated granular layers.*
- [10] P. Heil, E.C. Rericha, D.I. Goldman, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **70** (2004) 060301 1-4.  
*Mach cone in a shallow granular fluid.*

# Les équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau

Plutôt que de tenter de modéliser le milieu granulaire soumis à des vibrations par un ensemble d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites, certains chercheurs ont étudié le système au seuil de l'instabilité, grâce à des équations existantes dont des solutions présentaient des géométries proches des structures observées dans la couche granulaire : les équations de *Swift-Hohenberg* et de *Ginzburg-Landau*.

De nombreux articles traitant de la structuration dans les milieux granulaires parlent de ces équations et des formes de leurs solutions. Le problème est que la signification physique de ces équations, dans le cadre des milieux granulaires en tout cas, est rarement expliquée. C'est pourquoi je me contenterai d'une définition succincte des termes de ces équations, insistant plutôt sur les types de solutions obtenues.

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>L'équation de Swift-Hohenberg</b>	<b>58</b>
<b>6.2</b>	<b>L'équation de Ginzburg-Landau</b>	<b>58</b>
<b>6.3</b>	<b>Structures obtenues</b>	<b>59</b>
6.3.1	Structures localisées	59
6.3.2	Hexagones et interfaces	60
6.3.3	Groupements d'oscillons	60
6.3.4	Ondes stationnaires localisées	62
6.3.5	Structuration dans l'expérience de Faraday	63
6.3.6	Récapitulatif	64
<b>6.4</b>	<b>Comparaison avec l'expérience</b>	<b>64</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>
	<b>Sites Web</b>	<b>66</b>

---

## 6.1 L'équation de Swift-Hohenberg

Les détails des phénomènes physiques non linéaires dépendent des systèmes en question. Cependant, suffisamment près du seuil d'instabilité, l'équation qui régit la dynamique est universelle : elle ne dépend que des symétries de translation et de rotation.

La physique du problème est contenue dans les coefficients de l'équation. L'équation de *Swift-Hohenberg* a été introduite comme modèle simple de la convection de Rayleigh-Bénard, et est basée sur les équations de Navier-Stokes. Elle prend la forme :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \left[ \varepsilon - \left( k_c^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] u - u^3} \quad (6.1)$$

où

- $\varepsilon = (Ra - Ra_{cr})/Ra_{cr}$  est une mesure de la distance relative par rapport au seuil d'instabilité ;
- $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu}$  est le nombre de Rayleigh ;
- $u$  est une quantité représentant le système dynamique. En ce qui nous concerne, elle représentera l'amplitude complexe des oscillations des particules de la couche granulaire.

D'un point de vue phénoménologique, l'équation est basée sur trois règles[1] :

1. le système subit une instabilité qui génère une structure dont le vecteur d'onde est proche de la valeur critique  $k_c$  ;
2. l'équation doit être invariante si on remplace  $u$  par  $-u$ . Physiquement, pour notre expérience, cela signifie que l'on peut remplacer les pics (ou maxima) par des cratères (minima) et inversement.
3. le système a une bifurcation supercritique à proximité du seuil d'instabilité, bifurcation due au terme d'interaction non linéaire  $u^3$ .

Les récentes expériences suggèrent que cette équation peut décrire correctement certains des phénomènes apparaissant dans les milieux granulaires accélérés.

## 6.2 L'équation de Ginzburg-Landau

Ce modèle a été développé il y a une cinquantaine d'année par le physicien Landau pour décrire les transitions de phase entre liquide et solide ou les transitions entre un matériau magnétique et un matériau normal. Elle prend la forme générale

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + ia) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + ic)u - (1 - id)|u|^2 u} \quad (6.2)$$

où  $a$ ,  $c$  et  $d$  sont des coefficients complexes en général, et dont la signification dépend du système étudié.

L'équation de Ginzburg-Landau complexe décrit qualitativement et souvent quantitativement un large éventail de phénomènes, parmi lesquels : les ondes non-linéaires, les transitions de phase du second ordre, la convection de Rayleigh-Bénard et la supraconductivité. Elle décrit l'évolution des amplitudes des modes instables, c'est pourquoi on l'appelle également *équation d'amplitude*.

Elle peut être vue comme une forme normale générale pour une large gamme de bifurcations et d'ondes non-linéaires dans des systèmes étendus spatialement. L'instabilité d'une couche de fluides soumise à des vibrations verticales en constitue en exemple (voir section 6.3.5 page 63).

## 6.3 Structures obtenues

Nous allons voir que les solutions de ces équations peuvent donner de nombreuses structures spatiales intéressantes. En réalité, on devrait plutôt parler *des* équations de Swift-Hohenberg et *des* équations de Ginzburg-Landau, car il en existe plusieurs variantes. Le tableau 6.1 page 65 reprend quelques exemples de ces équations. Les équations de base (6.1) et (6.2) sont modifiées par l'ajout de termes dont on pense qu'ils pourraient donner lieu à des solutions de géométrie désirée.

Ces équations modifiées permettent de produire un large éventail de solutions similaires aux motifs tels que ceux décrit dans le chapitre 3. Le problème est que les modifications des équations modèles (6.1) et (6.2) ne se basent pas toujours sur des arguments physiques.

Néanmoins, nous essayerons d'interpréter les différents termes apparaissant dans les équations.

### 6.3.1 Structures localisées

Nous avons repris les équations utilisées dans [3] pour décrire les structures localisées dans les couches granulaires soumises à des vibrations. Le paramètre d'ordre  $\psi$  est l'amplitude complexe des oscillations de la couche :  $h = \psi \exp(i 2\pi \frac{f}{2} t) + \text{c.c.}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma \psi^* - (1 - i\omega) \psi + (1 + ib) \Delta \psi - |\psi|^2 \psi - \rho \psi \quad (6.3a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \alpha \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{\nabla} |\psi|^2] + \beta \Delta \rho \quad (6.3b)$$

★ équation (6.3a)

- le terme  $\gamma \psi^*$  constitue un forçage paramétrique qui provoque l'excitation des ondes stationnaires ;  $\gamma$  est l'amplitude du forçage.
- le terme  $|\psi|^2 \psi$  rend compte de la saturation non linéaire des oscillations due aux collisions inélastiques ;
- le dernier terme est un terme de couplage entre la paramètre d'ordre  $\psi$  et la densité locale  $\rho$  ;
- $\omega$  caractérise la fréquence de l'excitation ;
- $b$  caractérise le rapport dispersion/ diffusion.

★ équation (6.3b) : elle traduit la conservation de la masse :

- $\rho$  est la masse du matériau granulaire par unité de surface, moyennée sur une période de vibration ;

- le premier terme du second membre est un flux additionnel causé par les oscillations non uniformes du matériau granulaire : les particules essaient d'échapper aux régions de fortes fluctuations.
- le terme  $\beta\Delta\rho$  modélise une diffusion de masse.

La figure suivante montre quelques exemples intéressants de solutions fournies par le système (6.3a-6.3b). En plus structures localisées, il est également possible d'obtenir un réseau carré, semblable à ce qu'on observe dans les expériences

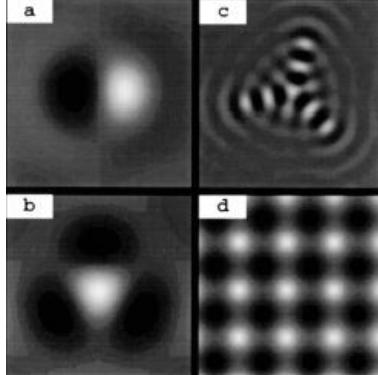


FIG. 6.1 – Structures produites par le système (6.3a-6.3b) pour différentes valeurs des paramètres. Le noir correspond à des maxima de  $\Re(\psi)$ , le blanc à des minima [3].

### 6.3.2 Hexagones et interfaces

Ils apparaissent dans le domaine des accélérations et des fréquences élevées. Reprenons le système (6.3a-6.3b). On peut montrer que, pour les hautes fréquences, le couplage entre  $\psi$  et  $\rho$  devient moins important et le modèle se réduit à la seule équation :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \gamma\psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + ib)\Delta\psi - |\psi|^2\psi$$

Cette équation permet de capturer de nombreuses géométries : hexagones, bandes, interfaces, superoscillons et labyrinthes [4]. Quelques exemples sont illustrés sur la figure 6.2. L'ajustement des paramètres de l'équation permet de modifier la géométrie des solutions.

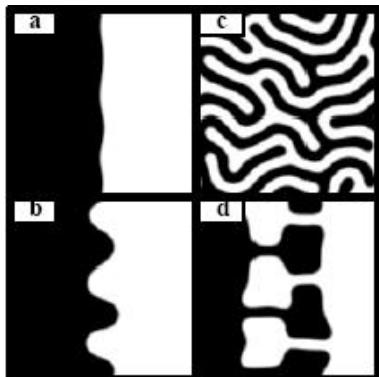


FIG. 6.2 – (a)-(c) : instabilité de surface et formation de labyrinthe ( $\omega = 2$ ,  $b = 4$ ,  $\gamma = 2.9$ ) sur un domaine de taille  $100 \times 100$  aux instants  $t = 1000$ ,  $t = 1600$  et  $t = 4640$ ; (d) interface décorée stationnaire ( $\omega = 6$ ,  $b = 4$ ,  $\gamma = 7.4$ ) en  $t = 10000$  [4].

### 6.3.3 Groupements d'oscillons

L'équation (6.1) a été modifiée de manière à obtenir ce type de structures [5]. Les oscillons sont des éléments importants dans la formation des structures, car on pense

qu'ils sont les "briques" constitutives des motifs en carrés. C'est pourquoi il est intéressant d'étudier leurs comportements (naissance, destruction, interactions) par l'intermédiaire de simulations numériques. Le problème est qu'à nouveau, les significations physiques des différents coefficients restent obscures. On considère l'équation à deux dimensions suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = R\psi - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right)^2 \psi + b\psi^3 - c\psi^5 + e\vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{\nabla}\psi \right)^3 \right] - \beta_1\psi \left( \vec{\nabla}\psi \right)^2 - \beta_2\psi^2 \Delta\psi \quad (6.4)$$

Les choix des termes non linéaires sont basés sur les arguments suivants :

- l'équation doit être invariante pour une symétrie de réflexion  $\psi \rightarrow -\psi$ . Par conséquent, seules les puissances impaires de  $\psi$  sont admises. Les termes non linéaires  $\psi^3$  et  $\psi^5$  servent à provoquer une bifurcation sous-critique.
- la seule présence des termes en  $\psi^3$  et  $\psi^5$  ne permet pas d'obtenir des structures en carrés stables ;
- le terme proportionnel à  $e$  est destiné à favoriser l'apparition des carrés ;
- les termes en  $\beta_i$  fournissent d'autres possibilités d'ajustement de l'équation.

### Géométries produites par les solutions

A partir de (6.4), on dérive l'équation d'amplitude en réalisant une analyse faiblement non linéaire avec une solution de la forme  $\psi = Ae^{ix} + Be^{iy} + c.c.$ . On déduit

$$\frac{\partial A}{\partial t} = RA - \beta |A|^2 A - \gamma |B|^2 A - \delta |A|^4 A - 2\rho |A|^2 |B|^2 - \rho |B|^4 A \quad (6.5)$$

où  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\rho$  sont des fonctions des coefficients  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . L'équation pour  $B$  est obtenue simplement en permutant  $A$  et  $B$  dans (6.5).

La résolution numérique de l'équation d'amplitude donne une solution proche de la géométrie de l'oscillon.

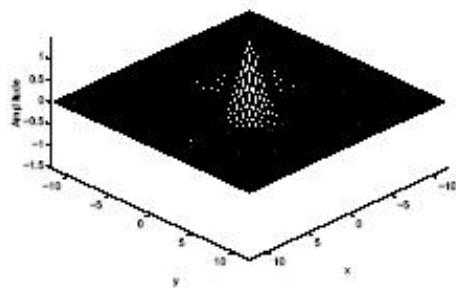


FIG. 6.3 – Oscillon, solution de l'équation de Swift-Hohenberg, pour les valeurs des paramètres  $R = -0.5$ ;  $b = c = 1.0$ ,  $e = 0.75$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 2.0$  [5].

Lorsque l'oscillon devient instable, il peut donner lieu soit à des raies, soit à des carrés.

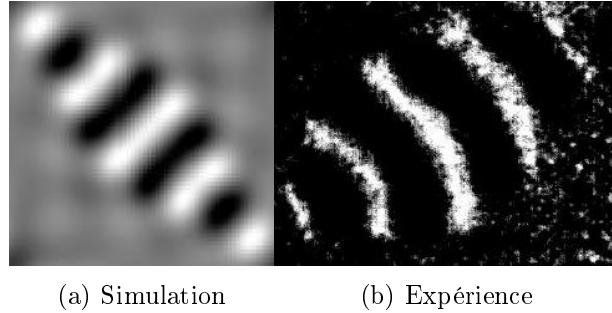


FIG. 6.4 – Transition d'un oscillon en raies (a) solution numérique de l'équation (6.4) pour  $R = -0.264$ ,  $b = c = 1.0$ ,  $e = 0.5$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 2.0$  [5] et (b) expérience [6].

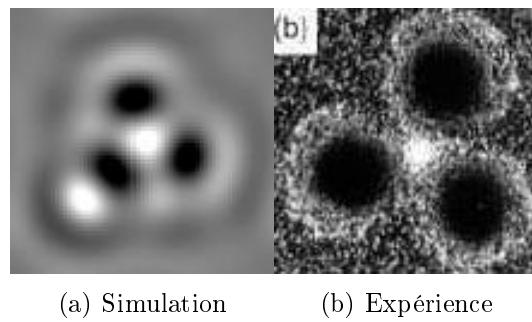


FIG. 6.5 – Transition d'un oscillon en carrés (a) solution numérique de (6.4) pour  $R = -0.205$ ,  $b = c = 1.0$ ,  $e = 0.75$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 2.0$  [5] et (b) expérience [7].

Les interactions entre oscillons, telles que décrites dans [7], ont pu être reproduites par ce modèle (à comparer avec Fig. 3.11 page 25).

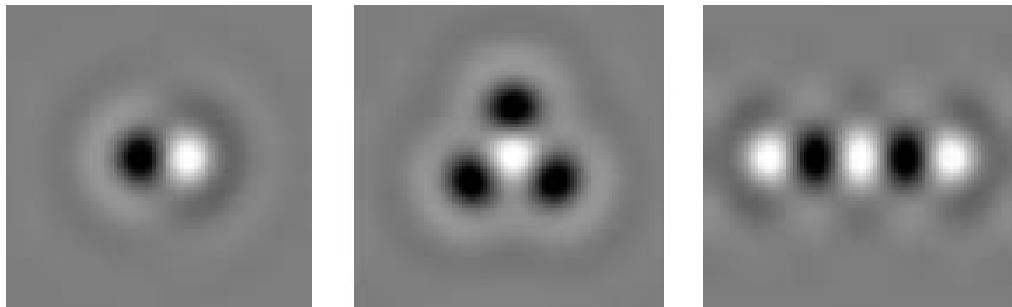


FIG. 6.6 – Interactions d'oscillons de polarités opposées : dimère, tétramère et chaîne polymère [5].

#### 6.3.4 Ondes stationnaires localisées

L'équation utilisée fournissant ce type de solution, tirée de [8], est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a u + b|u|^2 u - c|u|^4 u - d(q_0^2 + \Delta_\perp)^2 u + e \vec{\nabla} \cdot \left[ |\vec{\nabla} u|^2 \right] + i f \Delta_\perp u \quad (6.6)$$

où  $u$  est un champ complexe,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des coefficients complexes en général. Le terme cubique a un effet déstabilisant, tandis que le terme en  $u^5$  est stabilisant.

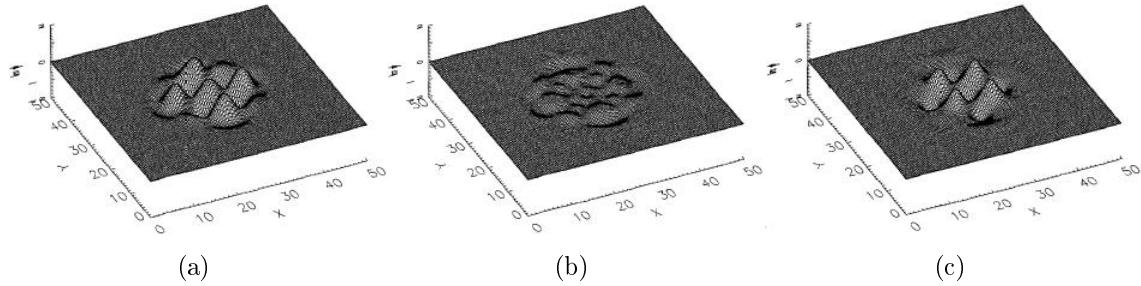


FIG. 6.7 – Évolution temporelle de l'onde pour  $a = -0.2$ ,  $b = 2.0 + 0.7i$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $e = 2.0 + 0.2i$ ,  $f = 0.3$  et  $q_0 = 1.0$  : (a) en  $T + 3$ , (b) en  $T + 6$ , (c) en  $T + 9$  [8].

Un autre modèle capable de produire ce type de solution est présenté dans [9]. L'équation utilisée est la suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\psi + b\psi^3 - c\psi^5 - d(q_0^2 + \Delta_{\perp})^2 \psi \quad (6.7)$$

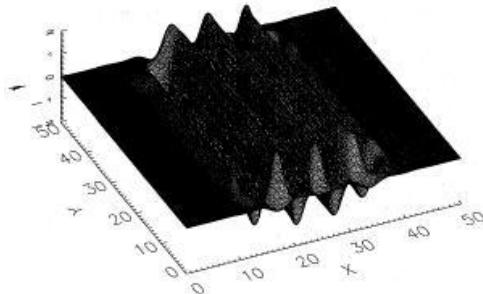


FIG. 6.8 – Solution stationnaire localisée de l'équation 6.7:  $a = -1.4$ ,  $b = 3.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 1.0$  et  $q_0 = 1.0$ . [9].

### 6.3.5 Structuration dans l'expérience de Faraday

L'équation de Ginzburg-Landau est également utilisée pour décrire les instabilités apparaissant dans une couche de fluide soumises à des oscillations verticales. Citons par exemple le modèle tiré de [10]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\gamma\psi + if\psi^* + \frac{3i}{4}(1 + \Delta)\psi + (1 - \gamma_n)|\psi|^2\psi \quad (6.8)$$

$\psi$  est relié au déplacement  $h$  de la surface libre et au potentiel des vitesses  $\phi$  à la surface par

$$\begin{aligned} h(x,y,t) &= \exp\left(-\frac{i\Omega}{2}t\right)\psi + \text{c.c.} \\ \phi(x,y,t) &= -i \exp\left(-\frac{i\Omega}{2}t\right)\psi + \text{c.c.} \end{aligned}$$

où

- $\Omega$  est la fréquence angulaire de l'accélération sinusoïdale.

- $f = \frac{f_0 q_0}{\Omega^2}$  est l'amplitude adimensionnelle de l'accélération,  
 $q_0$  est le nombre d'onde pour lequel l'instabilité apparaît,  
 $f_0$  est l'amplitude dimensionnelle de l'accélération.
- $\varepsilon = \frac{f - \gamma}{\gamma}$  est la distance relative par rapport au seuil d'instabilité.

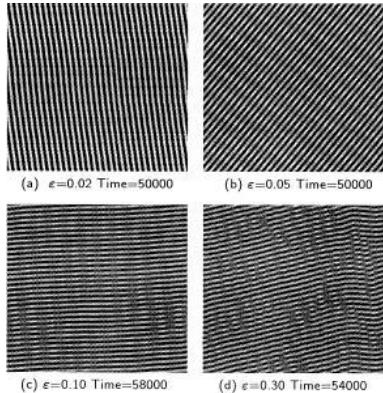


FIG. 6.9 – Représentation de  $\Re(\psi)$  en niveau de gris. Les figures sont obtenues à partir d'une configuration initiale aléatoire. L'augmentation du paramètre  $\varepsilon$  provoque l'apparition de modulations transversales des structures en lignes [10].

Ce qui nous intéresse, à savoir le niveau de la surface libre, est calculé à partir des parties réelle et imaginaire de  $\psi$ :

$$h(x,y,t) = 2 \left[ \cos \frac{\Omega}{2} t \Re(\psi) + \sin \frac{\Omega}{2} t \Im(\psi) \right]$$

### 6.3.6 Récapitulatif

Le tableau 6.1 reprend quelques exemples des équations rencontrées et les types de solutions qu'elles ont fournis.

## 6.4 Comparaison avec l'expérience

Après avoir passé en revue différentes formes de ces équations et les structures spatiales qu'elles pouvaient produire, nous allons illustrer l'efficacité du modèle. Le paramètre de contrôle  $\varepsilon$  de l'équation (6.1) correspond à  $(\Gamma - \Gamma_c)/\Gamma_c$  et le paramètre d'ordre  $u(\vec{r},t)$  correspond à l'élévation de la surface libre de la couche. Les parties claires correspondent aux parties basses de la surface libre, tandis que les régions claires correspondent aux reliefs.

Phénomène(s) étudié(s)	référence(s)	équation(s)
hexagones et interfaces	[4]	$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \gamma\psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + ib)\Delta\psi -  \psi ^2\psi$
rouleaux, carrés, oscillons	[3, 11, 12]	$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \gamma\psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + ib)\Delta\psi -  \psi ^2\psi - \rho\psi$ $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \alpha\vec{\nabla}\cdot[\rho\vec{\nabla} \psi ^2] + \beta\Delta\rho$
solutions localisées	[8]	$\frac{\partial u}{\partial t} = a u + b u ^2u - c u ^4u - d(q_0^2 + \Delta_\perp)^2u$ $+ e\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}u]^2 + i f\Delta_\perp u$
groupements d'oscillons	[5]	$\frac{\partial\psi}{\partial t} = R\psi - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)^2\psi + b\psi^3 - c\psi^5$ $+ e\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi)^3 - \beta_1\psi(\vec{\nabla}\psi)^2 - \beta_2\psi^2\Delta\psi$
émergence de l'ordre	[2, 13, 14]	$\frac{\partial u}{\partial t} = (\varepsilon - (\Delta + k_0^2)^2)u - u^3 + \nu(\vec{\nabla}u)^2 + \eta(\mathbf{x},t)$
raies	[1]	$\frac{\partial u}{\partial t} = (\varepsilon - (\Delta + k_c^2)^2)u - u^3$

TAB. 6.1 – Résumé des structures produites par les équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau.

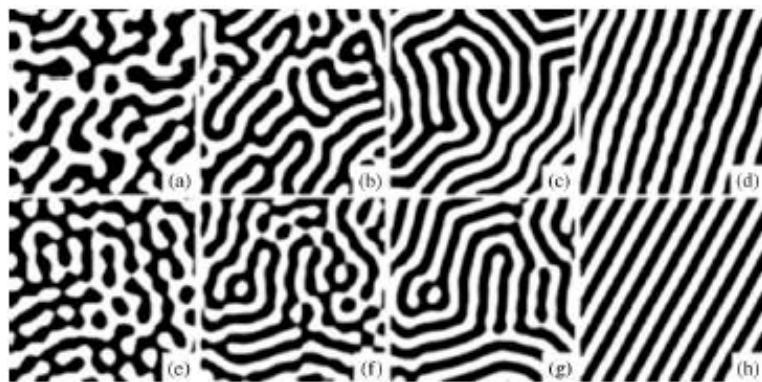


FIG. 6.10 – Évolution des structures dans le temps : images réelles de la couche pour  $\Gamma = 2.8$  (a) en  $t = 2$ , (b)  $t = 10$ , (c)  $t = 200$ , (d)  $t = 1000$ . (e)-(h) : images des résultats numériques de l'équation de Swift-Hohenberg à 2 dimensions avec  $\varepsilon = 0.2$  [1].

La configuration de départ est totalement désordonnée. Ensuite, des structures en rouleaux de longueur d'onde déterminée se développent avec des orientations aléatoires. Pour finir, ces rouleaux prennent une orientation commune. La figure 6.10 illustre les similitudes frappantes dans les évolutions spatio-temporelles dans le cas d'une expérience et dans le cas d'une simulation.

## 6.5 Conclusion

Les modèles de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau permettent de reproduire de nombreux motifs apparaissant dans les milieux granulaires soumis à des oscillations.

L'inconvénient est qu'ils décrivent la formation de motifs au voisinage de l'instabilité, d'où un domaine de validité limité.

De plus, l'identification des paramètres de l'équation avec ceux du système physique étudié n'est pas immédiate car les modèles ne sont pas dérivés des équations fondamentales décrivant système granulaire.

## Sites Web

- ★ Pierre C. Hohenberg, Département de Physique, Université de Yale :  
<http://www.eng.yale.edu/faculty/vita/hohenberg.html>
- ★ Ginzburg-Landau :  
<http://www.lorentz.leidenuniv.nl/~saarloos/Patternf/cgl.html>  
<http://mathworld.wolfram.com/Ginzburg-LandauEquation.html>  
<http://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/pmxdmw/tutorial/>

Quelques animations sont disponibles sur :

- ★ [http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Patterns/Demo13\\_5.html](http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Patterns/Demo13_5.html)

## Bibliographie

- [1] K. Kim, H.K. Pak, *Physica A* **315** (2002) 181-186.  
*Ordering dynamics of stripped patterns in vertically vibrated granular layer.*
- [2] D.I. Goldman, M.D. Shattuck, H.L. Swinney, G.H. Gunaratne, *Physica A* **306** (2002) 180-188.  
*Emergence of order in an oscillated granular layer.*
- [3] L.S. Tsimring, I.S. Aranson, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 213-216.  
*Localized and Cellular Patterns in a Vibrated Granular Layer.*
- [4] I.S. Aranson, L.S. Tsimring, et V.M. Vinokur, *Phys. Rev. E* **59** (1999) 1327-1330.  
*Hexagons and interfaces in a vibrated granular layer.*
- [5] C. Crawford, H. Riecke, *Physica D* **129** (1999) 83-92. *Oscillon-type structures and their interaction in a Swift-Hohenberg model.*
- [6] P.B Umbanhowar, F. Melo et H.L. Swinney, *Physica A* **249** (1998) 1-9.  
*Periodic, aperiodic, and transient patterns in vibrated granular layers.*
- [7] P.B. Umbanhowar, F. Melo et H.L. Swinney, *Nature* **382** (1996) 793-796.  
*Localized excitations in a vertically vibrated granular layer.*
- [8] H. Sakaguchi et H.R. Brand, *J. Phys. II France* **7** (1997) 1325-1330.  
*Standing Wave Localized Squares in Pattern-Forming Nonequilibrium Systems.*
- [9] H. Sakaguchi, H.R. Brand, *Physica D* **97** (1996) 274-285 .  
*Stable localized solutions of arbitrary length for the quintic Swift-Hohenberg equation.*
- [10] W. Zhang et J.Vinals, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 690-693.  
*Secondary Instabilities and Spatiotemporal Chaos in Parametric Surface Waves.*
- [11] Igor S. Aranson, Lev S. Tsimring, *Physica A* **249** (1998) 103-110.  
*Formation of periodic and localized patterns in an oscillating granular layer.*
- [12] D. Blair ; I.S. Aranson, G.W. Crabtree, V. Vinokur, L.S. Tsimring, C. Josserand, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 5600-5610.  
*Patterns in thin vibrated granular layers : interfaces, hexagons and superoscillons.*
- [13] J. Bougie, J. Kreft, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Onset of Patterns in an Oscillated Granular Layer: Continuum and Molecular Dynamics Simulations*, soumis à *Phys. Rev. E* (2004).
- [14] D.I. Goldman, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 174302.  
*Noise, Coherent Fluctuations, and the Onset of Order in an Oscillated Granular Fluid.*

# Modèle de la balle complètement inélastique

De nombreux articles (par exemple [1], [2], [3]) utilisent le modèle de la balle inélastique pour décrire le mouvement vertical de la couche de particules granulaires. Ce modèle est principalement utilisé pour donner une justification à certaines des valeurs de  $\Gamma$  qui donnent lieu à des transitions. Par contre, le modèle ne donne aucune information sur les types de structures dans la couche, compte tenu qu'il ne considère les mouvements verticaux de celle-ci.

Dans ce chapitre, nous allons donc examiner la trajectoire de cette balle pour différentes valeurs des paramètres de l'oscillation, et voir s'il est possible de relier son comportement avec le mouvement de la couche. On ne peut toutefois pas s'attendre à obtenir des valeurs extrêmement précises, vu la simplicité du modèle.

## Sommaire

---

<b>7.1 Description du modèle</b>	68
7.1.1 Calcul de la trajectoire de la balle	69
7.1.2 Équations adimensionnelles du mouvement	70
<b>7.2 Résultat et interprétation</b>	71
7.2.1 Résumé	74
<b>7.3 Conclusion</b>	75

---

## 7.1 Description du modèle

Au lieu d'étudier le mouvement de plusieurs millions de grains interagissant par des collisions inélastiques, on va supposer que le mouvement du centre de masse de la couche peut être assimilé à celui d'une balle parfaitement inélastique (le coefficient de restitution est nul) sur un plan horizontal en mouvement oscillatoire vertical de fréquence  $f$  et d'amplitude  $A$ .

Il est légitime d'assimiler la couche à une balle complètement inélastique, car les collisions des particules entre elles et avec la plaque dissipent en grande partie leur énergie cinétique. Ceci peut se voir assez facilement en arrêtant brusquement les oscillations de la plaque : les particules s'arrêtent quasi instantanément en gardant la structuration qu'elles

avaient au moment de la collision. Ce modèle a été étudié en détail dans [4] au début des années nonante.

### 7.1.1 Calcul de la trajectoire de la balle

Appelons  $z_P$  la coordonnée verticale du plan par rapport à une position de référence et  $z_B$ , la coordonnée verticale de la balle. On a

$$z_P(t) = A \sin(\omega t) \quad (7.1)$$

La trajectoire de la balle se calcule de la manière suivante:

1. Supposons qu'initialement, la balle est en contact avec le plan horizontal. Tant que l'accélération du plan est supérieure à  $-g$ , la balle suit le mouvement de celui-ci :  $z_B(t) \equiv z_P(t)$ .

En effet si l'on se place dans un référentiel lié au mouvement (accéléré) de la plaque, la balle est soumise à trois forces (ou trois accélérations) :  $\vec{g}$ , l'accélération de la pesanteur,  $\vec{R}$ , la réaction normale de la plaque et  $\vec{F}$ , la force fictive provenant du fait qu'on travaille dans un référentiel accéléré.

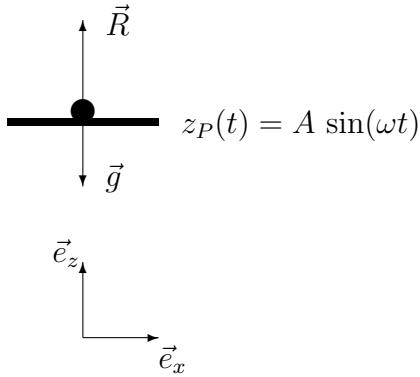


FIG. 7.1 – Système balle + plaque: la balle est soumise à  $\vec{g}$  et à une force de réaction de la plaque.

Tant que la balle reste en contact avec la plaque, son accélération par rapport à cette dernière est nulle. On a donc l'égalité

$$\ddot{z}_B = 0 = -g + R - a_P$$

où  $a_P$  est l'accélération de la plaque. A l'instant du décollement, la réaction normale s'annule. Par conséquent

$$a_P = -g.$$

Avant le décollement,

$$g + a_P = R > 0, \quad \text{d'où} \quad a_P > -g$$

2. Une fois que l'accélération devient inférieure à  $-g$ , la balle décolle et poursuit son mouvement en chute libre sous l'effet de la gravité :

$$z_B(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + z_0, \quad (7.2)$$

où  $v_0$  et  $z_0$  sont respectivement la vitesse et l'altitude au moment du décollement.

3. La balle entre en collision (inélastique) avec la plaque à un instant  $t_C$ . Selon la valeur de l'accélération à cet instant, on retourne à l'étape 2 ou 3.

On relie aisément  $z_0$  et  $v_0$  aux données du problème : appelons  $t_D$ , l'instant où se produit le décollement. On a

$$a_P(t = t_D) = -A\omega^2 \sin(\omega t_D) = -g \quad \text{et donc}$$

$$t_D = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \frac{g}{\omega^2 A} \right) = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \frac{1}{\Gamma} \right)$$

Cette formule montre que, pour des valeurs de  $\Gamma < 1$ ,  $t_D$  n'est pas défini. Cela traduit simplement le fait que l'accélération de la plaque doit être inférieure à  $-g$  pour que le décollement se produise. A partir de la connaissance de  $t_D$ , on déduit  $z_0$  et  $v_0$ :

$$\begin{aligned} z_0 &= z_P(t = t_D) = A \sin(\omega t) = A \sin \left( \arcsin \frac{1}{\Gamma} \right) = \frac{A}{\Gamma} \\ v_0 &= v_P(t = t_D) = A\omega \cos(\omega t) = A\omega \cos \left( \arcsin \frac{1}{\Gamma} \right) = A\omega \sqrt{1 - \frac{1}{\Gamma^2}} \end{aligned}$$

Après cette phase de trajectoire balistique, la balle entre en collision avec la plaque. Appelons  $z_c$ , la position verticale au moment de la collision. Selon la valeur de  $z_c$ , deux possibilités se présentent :

- soit  $z_c < z_0$  : la balle reste en contact avec la plaque jusqu'à ce que l'accélération de celle-ci dépasse  $g$ .
- soit  $z_c > z_0$  : la balle décolle instantanément et poursuit son mouvement selon l'équation (7.2).

### 7.1.2 Équations adimensionnelles du mouvement

Pour rendre les équations du mouvement adimensionnelles, nous allons utiliser les échelles de longueur, de temps et de vitesse suivantes :

$$\ell_c = A, \quad \tau_c = \frac{1}{\omega}, \quad \mathcal{V}_c = A\omega.$$

Ainsi, l'équation (7.1) prend la forme<sup>1</sup>

$$\bar{z}_P = \sin(\bar{t}) \tag{7.3}$$

tandis que l'équation (7.2) s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{z}_B &= \bar{z}_0 + \bar{v}_0 \bar{t} - \frac{1}{2\Gamma} \bar{t}^2, \\ \text{avec} \quad \bar{z}_0 &= \frac{1}{\Gamma} \quad \text{et} \quad \bar{v}_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\Gamma^2}} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ces équations adimensionnelles ont l'avantage de montrer que l'ensemble du mouvement de la balle (et donc du centre de masse de la couche) est déterminé par la valeur de  $\Gamma$ . Le problème est suffisamment simple pour qu'on puisse écrire un programme pour le calcul des trajectoires.

---

1. Les symboles surmontés d'une barre représentent les quantités rendues adimensionnelles.

## 7.2 Résultat et interprétation

Selon les valeurs que prend l'accélération de la plaque, différents comportements sont possibles. Nous allons décrire ces comportements pour quelques valeurs de  $\Gamma$ :

- $\Gamma > 1$ :

- la balle quitte la plaque et continue son mouvement dans le champ de pesanteur;
- elle entre en collision avec la plaque
- elle reste en contact avec la plaque tant que l'accélération de celle-ci est supérieure à  $-g$ .

La balle quitte toujours la plaque à la même phase de l'oscillation de celle-ci. Elle possède donc la même vitesse de décollage. On qualifie ce comportement de **période 1,  $n = 1$** : la trajectoire a la même période que l'oscillation (période 1), et la balle entre en collision avec la plaque à chaque cycle ( $n = 1$ ).

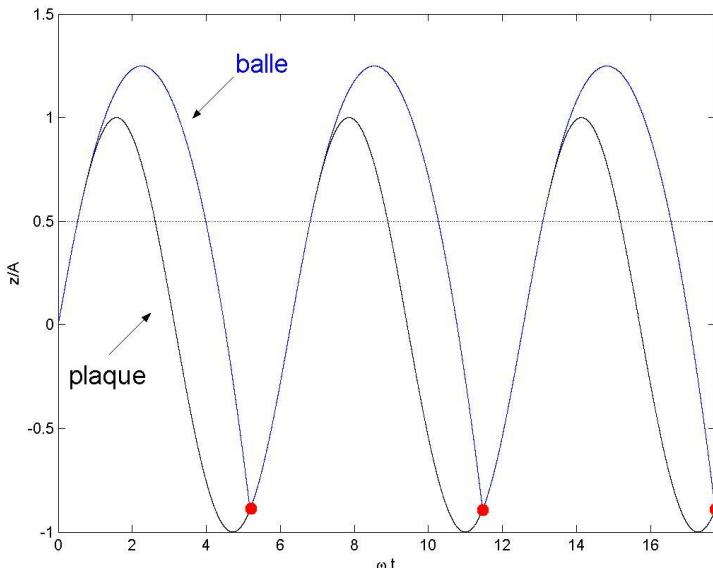


FIG. 7.2 – Trajectoires de la plaque (noir) et de la balle (bleu) pour  $\Gamma = 2$ . La ligne horizontale indique la hauteur pour laquelle l'accélération de la plaque est égale à l'accélération de la pesanteur. Les cercles rouges indiquent les points de collision entre la balle et la plaque.

**Motifs présents pour ces valeurs de  $\Gamma$ :** entre  $\Gamma = 1$  et  $\Gamma = 2.5$ , la couche reste plate. A partir de  $\Gamma = 2.5$ , les carrés et les lignes se développent. Le modèle de la balle inélastique ne prévoit pas cette transition, la trajectoire de la balle a la même allure pour  $\Gamma < 2.5$  et  $\Gamma > 2.5$ .

- $\Gamma \gtrsim 4$ : la trajectoire se décompose en deux parties : dans un premier temps, la balle est en chute libre et entre en collision avec la plaque lorsque celle-ci a une accélération inférieure à  $-g$  (points bleus sur la figure 7.2). Elle rebondit donc instantanément. Dans un second temps, après ce rebond, elle reprend un mouvement

en chute libre, pour finalement entrer en collision avec la plaque, dont l'accélération est maintenant supérieure à  $-g$  (points rouges). Il y a donc deux temps de vol différents.

Plusieurs expériences ont montré que, pour les valeurs de  $\Gamma$  telles que la trajectoire est de la forme de celle de la figure 7.2, c'est-à-dire une trajectoire composée de deux temps de vols différents, les motifs présents dans la couche sont des hexagones. Il n'y a pas de justification physique à ce phénomène, mais il est intéressant de constater que les valeurs expérimentales sont proches de ce que prédit la présente théorie (voir notamment le diagramme de phases page 23 et celui de la figure 7.8 à la fin de ce chapitre).

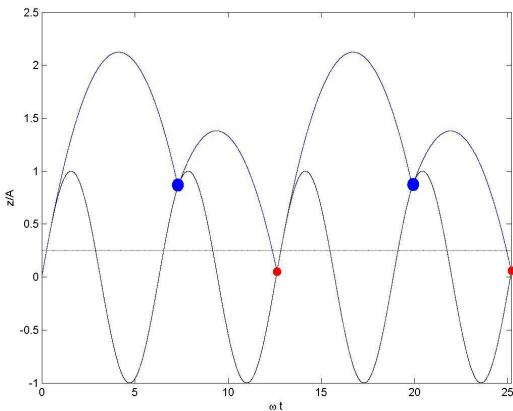


FIG. 7.3 – Trajectoires de la plaque et de la balle pour  $\Gamma = 4$ : les points bleus sont les points de collision pour lesquelles l'accélération de la plaque est inférieure à  $-g$ .

**Motifs présents :** hexagones.

- $\Gamma \geq 4.5$ : la trajectoire est dégénérée: la couche peut entrer en contact avec la plaque sur des cycles pairs ou impairs. Il est alors possible d'avoir des domaines de phases différentes et des discontinuités qui les séparent. Ces discontinuités sont effectivement observées dans les structures hexagonales et dans les couches plates (voir chapitre 3 et 9).

Pour ces valeurs de  $\Gamma$ , les patterns ont toujours une fréquence égale à la moitié de la fréquence de l'excitation.

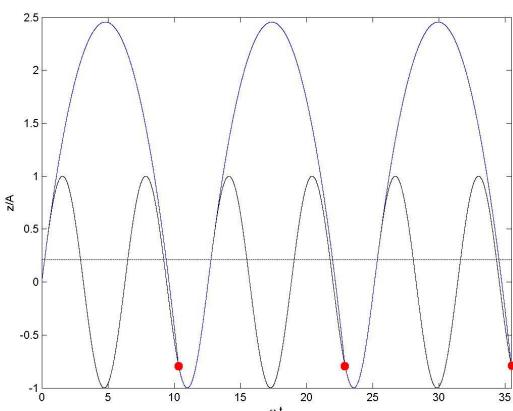


FIG. 7.4 – Trajectoires de la plaque et de la balle pour  $\Gamma = 4.7$ .

**Motifs présents :** couche plate avec présence éventuelle de discontinuités de phase.

- $\Gamma \geq 5.5$ : [période 1,  $n = 2$ ]: la vitesse de décollage est telle que le temps de vol excède  $T$ . C'est à partir de cette valeur de l'accélération que les structures oscillant à  $f/4$  (carrés ou lignes) vont apparaître dans la couche. Le modèle ne prédit pas cette valeur de  $\Gamma$ . Si l'on se base sur la trajectoire de la balle, c'est à partir de  $\Gamma \cong 4.65$  que le temps de vol commence à devenir supérieure à la période d'oscillation de la plaque.

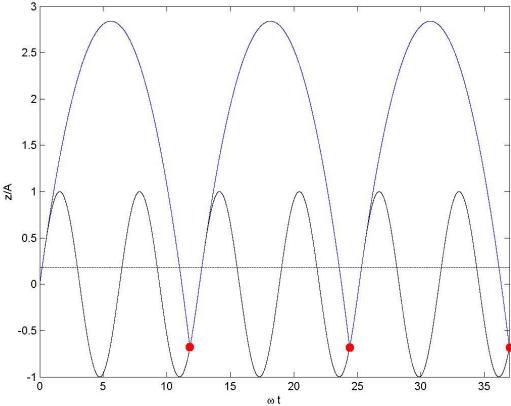


FIG. 7.5 – Trajectoires de la plaque et de la balle pour  $\Gamma = 5.5$ .

- $\Gamma \gtrsim 6.5$ : [période 2,  $n = 2$ ]: la trajectoire se décompose à nouveau en deux parties. On se trouve dans la région des hexagones de fréquence  $f/4$ .

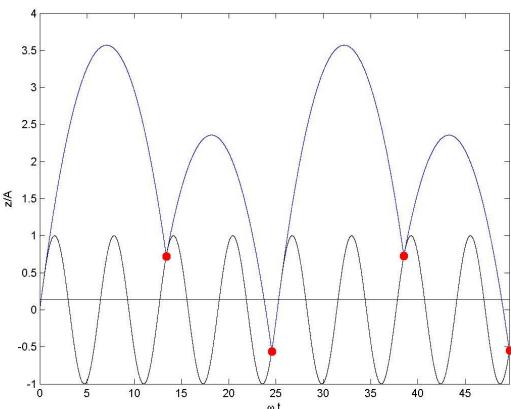


FIG. 7.6 – Trajectoires de la plaque et de la balle pour  $\Gamma = 7$ .

- $\Gamma \gtrsim 8$ : [période 1,  $n = 3$ ]: la vitesse de décollage est telle que la balle ne rencontre la plaque que toutes les  $3T$  secondes. Si l'on se base sur la séquence des structures apparues auparavant (plat  $f \rightarrow$  carrés ou lignes  $f/2 \rightarrow$  hexagones  $f/2 \rightarrow$  plat  $f/2 \rightarrow$  carrés ou lignes  $f/4 \rightarrow$  hexagones  $f/4 \rightarrow \dots$ ), on devrait obtenir une structure plate de fréquence propre  $f/3$ . Ce genre de structures n'a pu être observé que de manière transitoire [3].

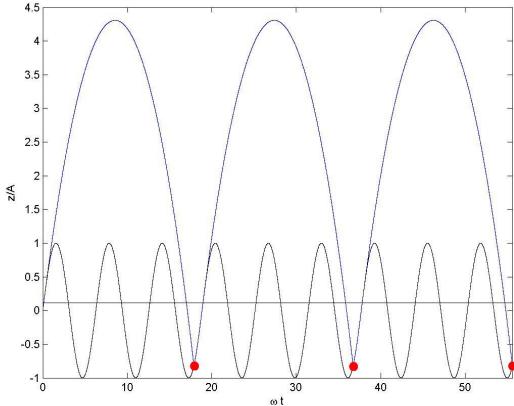


FIG. 7.7 – Trajectoires de la plaque et de la balle pour  $\Gamma = 8.5$ .

Il est possible de procéder de cette manière pour des valeurs croissantes de  $\Gamma$  et obtenir des trajectoires de type  $\boxed{\text{période } 2, n = 3}$ ,  $\boxed{\text{période } 1, n = 4}$ , ...

### 7.2.1 Résumé

Le modèle prédit une infinité de bifurcation lorsqu'on augmente  $\Gamma$ . Expérimentalement, ce n'est que jusque  $\Gamma = 7.5$  que ces bifurcations sont observées. Les valeurs prédictes par le modèle ne sont tout à fait exacte, mais elles ont le mérite de donner un ordre d'idée sur les valeurs pour lesquelles on assistera à un changement de comportement.

$\Gamma > 1$	période 1, $n = 1$	plat $f/2$
$\Gamma \gtrsim 2.5$	période 1, $n = 1$	carrés/ lignes $f/2$
$\Gamma \gtrsim 4$	période 2, $n = 1$	hexagones $f/2$
$\Gamma \gtrsim 4.5$	période 1, $n = 2$	plat $f/2$
$\Gamma \gtrsim 5.5$	période 1, $n = 2$	carrés/ lignes $f/4$
$\Gamma \gtrsim 6.5$	période 2, $n = 2$	hexagones $f/4$
$\Gamma \gtrsim 8$	période 1, $n = 3$	plat $f/3?$

TAB. 7.1 – Types de trajectoires et structurations en fonction de  $\Gamma$ .

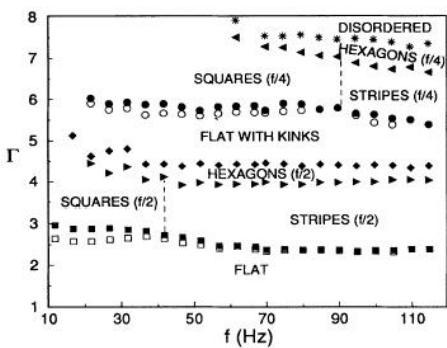


FIG. 7.8 – Diagramme de phases obtenu dans une couche de 1.2 mm de particules de bronze de diamètre  $\sigma = 0.15 - 0.18$  mm [1].

## 7.3 Conclusion

Comme on pouvait s'y attendre, un modèle aussi simple ne peut donner que des résultats qualitatifs. Les résultats qu'il prévoit pour des valeurs élevées de  $\Gamma$  ne sont pas observés, ou alors se produisent seulement de manière transitoire. Le modèle n'est pas non plus suffisant pour l'influence de  $f^*$  sur les structures. Toutefois, il est capable de prédire certaines valeurs de l'accélération qui donneront lieu à des transitions.

## Bibliographie

- [1] F. Melo, P.B. Umbanhowar and H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3838-3841.  
*Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers.*
- [2] C. Bizon, M.D. Shattuck, J.B. Swift, W.D. McCormick, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 57-60.  
*Patterns in 3D Vertically Oscillated Granular Layers : Simulation and Experiment.*
- [3] Sung Joon Moon, M.D. Shattuck, C. Bizon, D.I. Goldman, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **65** (2001) 011301 1-10.  
*Phase Bubbles and Spatiotemporal Chaos in Granular Patterns.*
- [4] A. Mehta et J.M. Luck, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 393.  
*Novel Temporal Behaviour of a Nonlinear Dynamical System : The Completely Inelastic Bouncing Ball.*

# Chapitre 8

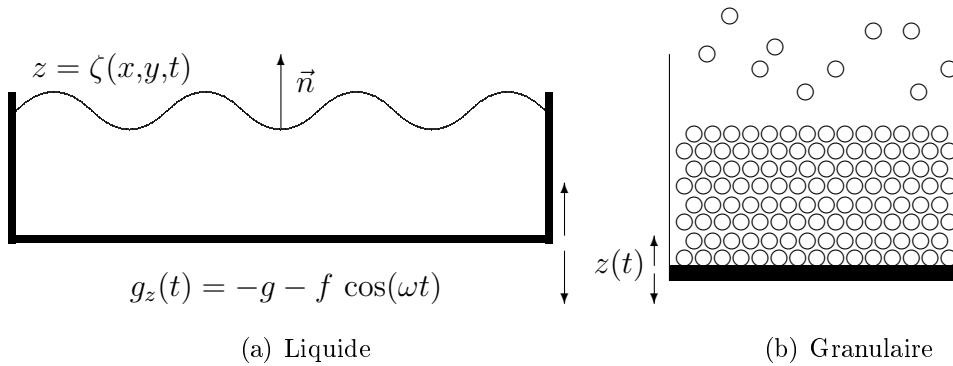
## Étude comparative avec l'instabilité de Faraday

Nous avons vu dans le chapitre 2 plusieurs exemples de structures dissipatives. L'instabilité de Faraday (fluide soumis à des vibrations verticales) est étudiée depuis de nombreuses années et on peut penser que les modèles développés pour son analyse seront applicables au problème étudié dans ce travail.

Dans un premier temps, nous mettrons en évidence les points communs et les différences entre les deux systèmes. Ensuite, nous procéderons à une analyse linéaire de stabilité pour chacun d'entre eux, afin de comparer les équations de Navier-Stokes aux équations de Jenkins et Richman (chapitre 5).

### Sommaire

<b>8.1 Comparaison qualitative . . . . .</b>	<b>78</b>
8.1.1 Similitudes . . . . .	78
8.1.2 Différences . . . . .	80
<b>8.2 Analyse linéaire de stabilité . . . . .</b>	<b>81</b>
8.2.1 Équations d'évolution . . . . .	81
8.2.2 Hypothèses simplificatrices et validité . . . . .	82
8.2.3 Équations linéarisées . . . . .	83
8.2.4 Équations adimensionnelles . . . . .	84
8.2.5 Conditions aux limites et validité . . . . .	84
8.2.6 Analyse de Floquet . . . . .	87
8.2.7 Modélisation du terme $G(t)$ . . . . .	89
8.2.8 Méthodes de résolution et résultats . . . . .	89
<b>8.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>90</b>



## 8.1 Comparaison qualitative

Nous allons montrer que les instabilités dans les fluides et les milieux granulaires soumis à des oscillations verticales présentent de nombreux traits communs, sans entrer, dans un premier temps, dans les détails de l'analyse. Nous verrons également ce qui distingue physiquement les deux problèmes.

### 8.1.1 Similitudes

Dans les deux cas, on trouve une couche de particules (des grains pour l'un, des molécules de fluide pour l'autre) dans un container soumis à l'accélération de la gravité et à une oscillation verticale sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$ . Les similitudes que présentent les structures observées sont frappantes, comme le montrent les figures 8.1-8.5.

Le tableau 8.1 reprend les types de structures en fonction de la viscosité cinématique du liquide et de la fréquence de l'excitation dans l'expérience de Faraday. Les différentes géométries (hexagones, carrés et raies) peuvent également apparaître dans la couche granulaire (chapitre 3).

Viscosité ( $m^2 s^{-1}$ )	Basse ( $f_0 < 25 \text{ Hz}$ )	Intermédiaire ( $25 < f_0 < 50 \text{ Hz}$ )	Haute ( $f_0 > 50 \text{ Hz}$ )
0.04	hexagones	carrés	carrés
0.1	hexagones	carrés	carrés
0.2	hexagones	carrés	carrés
0.3	hexagones	carrés	raies
0.5	hexagones	carrés	raies
1.0	hexagones	raies courtes	raies

TAB. 8.1 – Types de géométries observées pour les fluides en fonction de la viscosité et de la fréquence [1].

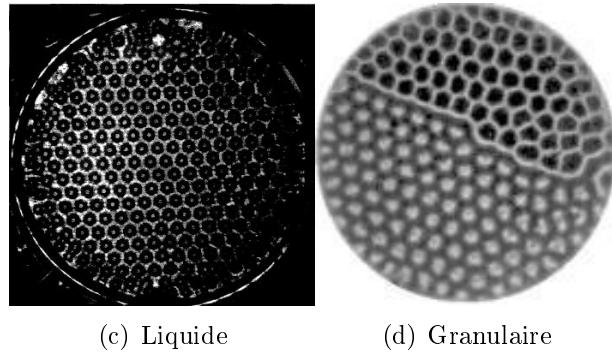


FIG. 8.1 – Structures en hexagones pour (c) un liquide ( $\nu = 0.2 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $f = 22.5 \text{ Hz}$ ) [1] et (d) une couche de granulaires ( $\Gamma = 7.1$ ,  $f^* = 1$ ,  $N = 10$ ) [2].

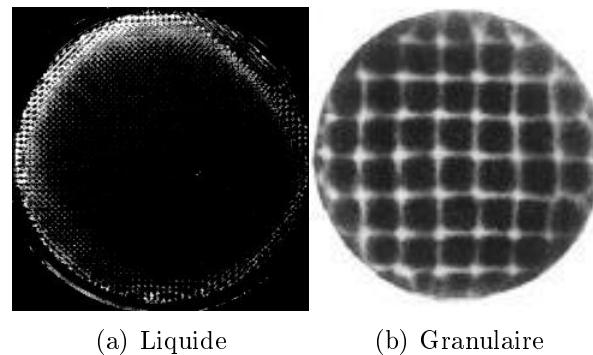


FIG. 8.2 – Structures en carrés pour (a) un liquide ( $\nu = 0.1 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $f = 35 \text{ Hz}$ ) [1] et (b) une couche de granulaires ( $\Gamma = 3.5$ ,  $f = 23.2 \text{ Hz}$ ) [3].

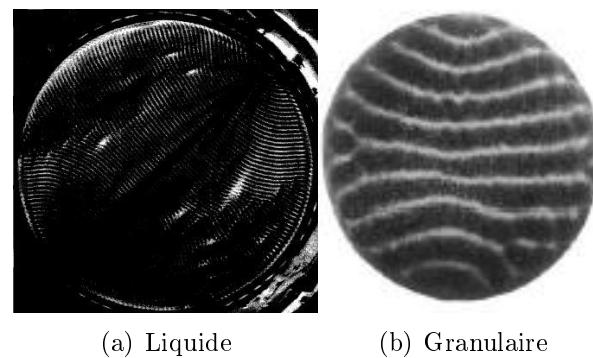


FIG. 8.3 – Structures en lignes pour (a) un liquide ( $\nu = 1 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $f = 45 \text{ Hz}$ ) [1] et (b) une couche de granulaires ( $\Gamma = 4.23$ ,  $f = 27.6 \text{ Hz}$ ) [3].

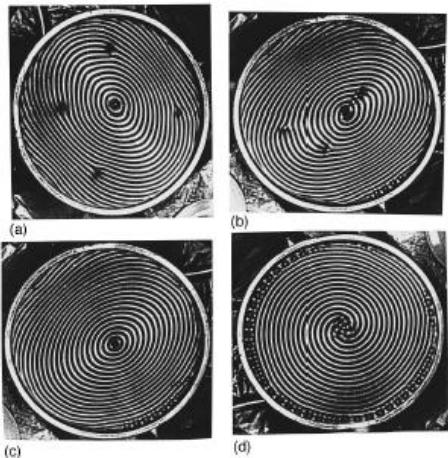


FIG. 8.4 – Structures en spirale dans l’expérience de Faraday: (a) forme de cible avec quatre dislocations; (b) formation d’une spirale quand une dislocation est attirée par le cœur de la cible; (c) annihilation des dislocations au centre de la spirale; (d) spirale à trois bras [4].

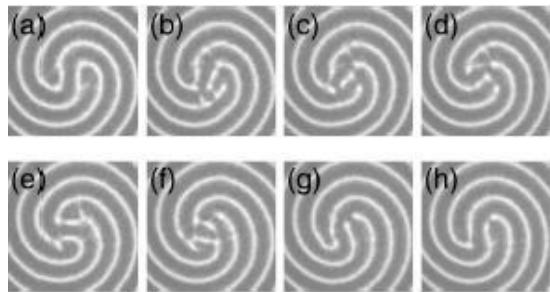


FIG. 8.5 – Structures en spirale dans un milieu granulaire ( $\Gamma = 3.23$ ,  $f = 31 \text{ Hz}$ ,  $N = 15.4$ ); (a)  $t = 0 \text{ s}$ , (b)  $1.10 \text{ s}$ , (c)  $1.82 \text{ s}$ , (d)  $2.14 \text{ s}$ , (e)  $2.86 \text{ s}$ , (f)  $3.64 \text{ s}$ , (g)  $4.35 \text{ s}$ , (h)  $4.68 \text{ s}$  [5].

### 8.1.2 Différences

Les ressemblances entre les instabilités exhibées par les deux systèmes constituent un argument en la faveur d’une description de la couche granulaire comme milieu continu. Cependant, nous allons voir qu’il existe des différences fondamentales dans les mécanismes donnant lieu à ces instabilités.

1. Les interactions entre particules<sup>1</sup>: dans le système de granulaires, elles sont purement répulsives, tandis que dans le fluide, le potentiel d’interaction possède une partie répulsive et une partie attractive.
2. La tension de surface: elle est définie comme une force par unité de longueur et est créée par l’attraction entre molécules. Elle est inexistante dans la couche granulaire, alors qu’elle joue le rôle de force de rappel dans l’instabilité de Faraday (plus généralement dans les ondes de capillarité.)
3. La couche granulaire quitte la plaque oscillante chaque fois que l’accélération de celle-ci est supérieure à l’accélération de la gravité et dirigée vers le bas. La couche de fluide, elle, reste constamment en contact avec le fond du container, même pour des accélérations importantes.
4. La dissipation par collisions entre particules dans le milieu granulaire: nous verrons que c’est principalement ce phénomène qui crée une différence dans les équations d’évolution des systèmes. On peut se rendre compte de ce phénomène de manière assez simple:
  - en “écoutant” le système: les chocs entre grains créent un certain bruit, tandis que le fluide reste “silencieux”.

1. Nous emploierons le terme particule pour désigner aussi bien les molécules du fluide que les grains individuels.

- en supprimant brusquement l'excitation : le fluide reste en mouvement pendant un certain temps, alors que les grains s'immobilisent (quasi-)instantanément.
5. les variations de température : dans les conditions de l'expérience, le fluide peut être considéré comme isotherme. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, en étudiant les ordres de grandeur des différentes formes d'énergie, le système granulaire peut être considéré comme un système à température (thermodynamique) nulle. C'est pour cela que la température granulaire avait été définie. Il est évident qu'elle subit d'importantes variations (jusqu'à trois ordres de grandeur), puisqu'elle mesure les fluctuations de vitesses, et que ces dernières sont beaucoup plus importantes dans la phase de collision que dans la phase d'expansion.
  6. les variations en volume : le fluide peut être considéré comme incompressible. Pour les grains, ce n'est pas le cas : les variations de volume sont importantes : lorsque la couche entre en collision avec la plaque, elle subit une compression, et quand elle décolle, son volume augmente (Fig. 5.5 page 53).
  7. les conditions sur les vitesses à la paroi : pour un fluide usuel, les composantes normale et tangentielle de la vitesse s'annulent. Par contre, rien ne dit que les grains individuels ont aussi une vitesse nulle à la paroi.

## 8.2 Analyse linéaire de stabilité

Pour déterminer les valeurs des paramètres conduisant à l'instabilité d'un système, il est fréquent d'avoir recours à une analyse linéaire. Bien que certaines hypothèses soient nécessaires pour ce type d'analyse, les résultats obtenus peuvent être relativement proches de la réalité. Les buts poursuivis dans cette partie sont principalement :

1. de mettre en évidence les différences entre les modèles décrivant les fluides (équations de Navier-Stokes) et les granulaires (équations de Jenkins et Richman, chapitre 6).
2. d'analyser les hypothèses mises en jeu pour arriver aux équations permettant l'analyse linéaire.
3. de montrer que les équations de Jenkins et Richman, déduites de la théorie cinétique, peuvent être utilisées pour obtenir des résultats proches de ce qui est observé expérimentalement.

Nous avons donc comparé les analyses réalisées dans [6] et [7] pour l'instabilité de Faraday, et dans [8] pour la couche granulaire soumise à des vibrations.

### 8.2.1 Équations d'évolution

Les équations (8.2a-8.2c) sont les équations de la mécanique des fluides, tandis que les équations (8.1a-8.1c) proviennent du modèle de Jenkins et Richman pour des sphères dures. Pour plus de facilités, on travaillera dans un système d'axes relatifs liés à la plaque en mouvement.

Les équations (8.1a) et (8.2a) traduisent la conservation de la masse ; (8.1b) et (8.2b) sont les bilans de quantité de mouvement ; (8.1c) et (8.2c) modélisent l'évolution de l'énergie au cours du temps

Couche granulaire	Couche de liquide (Faraday)
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$
$\rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{G}(t)$	$\rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{G}(t)$
$\rho \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{E} - \gamma$	$\rho \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{E}$

avec

- $\vec{q}$ , le flux de chaleur, donné par la loi de Fourier  $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$ ,
- $\mathbf{E}$ , le tenseur des taux de déformation, défini par  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- $\boldsymbol{\tau} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'$ , le tenseur des tensions. Le terme  $\boldsymbol{\tau}'$  constitue la partie visqueuse des tensions. On le calcule par  $\boldsymbol{\tau}' = 2\mu \mathbf{E}$ .

Les équations d'évolution des deux systèmes semblent très proches ; néanmoins, elles se distinguent par trois termes :

- le terme de dissipation d'énergie par collision,  $\gamma$ , inexistant pour le fluide ;
- la définition de la température  $T$  : dans le premier problème, c'est de la *température granulaire* dont il est question ; dans l'autre, c'est la température thermodynamique.
- le terme de force extérieure  $\vec{G}(t)$  : dans l'expérience de Faraday,  $\vec{G}(t)$  contient l'accélération de la gravité et une fonction sinusoïdale du temps ; dans l'autre expérience,  $\vec{G}(t)$  doit en plus tenir compte des collisions de la couche avec le fond du container.

### 8.2.2 Hypothèses simplificatrices et validité

Nous allons supposer que nous traitons des systèmes incompressibles et isothermes. Ces hypothèses sont parfaitement plausibles pour le liquide. Elles doivent cependant être discutées dans le cas du milieu granulaire.

L'hypothèse de système isotherme serait valable si l'apport d'énergie dû aux chocs avec la plaque était exactement compensée par les pertes par collisions inélastiques. Ce n'est cependant pas le cas : en réalité, on observe des pics de température à chaque fois que la couche entre en collision avec la plaque. Cependant, cette collision se produit pendant un laps de temps très court par rapport à la période de l'excitation, c'est pourquoi on peut accepter cette simplification.

En ce qui concerne l'incompressibilité, la justification est similaire : l'augmentation du volume de la couche se fait de manière lente durant son vol libre et l'augmentation de la densité au moment de la collision se produit durant un laps de temps très bref.

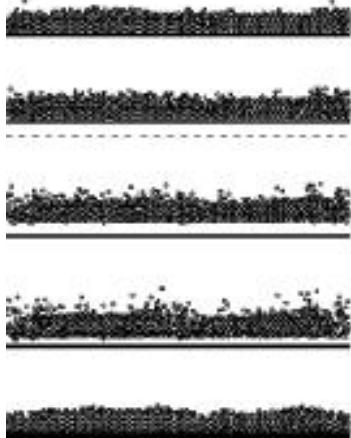


FIG. 8.6 – Dynamique de la couche granulaire : chaque image est séparée de  $T/4$ .

### 8.2.3 Équations linéarisées

Les équations (8.1c) et (8.2c) ne doivent plus être considérées, étant donné l'hypothèse de système isotherme. L'incompressibilité permet de simplifier l'équation de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (8.3)$$

Afin de linéariser les équations restantes, nous allons considérer une perturbation par rapport à un état de référence :

$$\vec{U} = \vec{\mathcal{U}} + \vec{u}' \quad \text{et} \quad P = \mathcal{P} + p'$$

où  $\vec{\mathcal{U}}$  et  $\mathcal{P}$  sont les valeurs de référence de la vitesse et de la pression et  $\vec{u}'$  et  $p'$  sont des perturbations infinitésimales de cet état de référence.

#### État de référence

On considère les couches au repos par rapport à la plaque en mouvement sinusoïdal. La vitesse de référence est donc nulle (dans les axes relatifs). On fixe  $z = 0$  au niveau des surfaces libres au repos.

Granulaire	Liquide
La couche est au repos et la pression est donnée par une équation d'état :	Le liquide est au repos et la pression équilibre la force extérieure
$\vec{\mathcal{U}} = \vec{0}$	$\vec{\mathcal{U}} = \vec{0}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P} = P_0 - \rho G(t)z$

En tenant compte du fait que les champs de référence vérifient les équations (8.1b), (8.2b) et (8.3), et en négligeant les termes quadratiques en les perturbations, on obtient les équations linéarisées suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot p' + \mu \Delta \vec{u}' - G(t) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot p' + \mu \Delta \vec{u}' \end{aligned} \quad (8.5)$$

### 8.2.4 Équations adimensionnelles

Nous allons rendre les équations sans dimension à partir des grandeurs suivantes : la hauteur de la couche  $H$ , l'accélération  $g$  et la densité  $\rho$ . Sachant que<sup>2</sup>

$$[H] = L \quad , \quad [g] = LT^{-2} \quad , \quad [\rho] = ML^{-3} ; ,$$

on définit

- une vitesse caractéristique :  $U_c = \sqrt{gH}$ ,
- un temps caractéristique :  $\tau_c = \sqrt{H/g}$ ,
- une pression caractéristique :  $p_c = \rho gH$ ,
- une force caractéristique :  $F_c = \rho g$ .

L'équation de continuité s'écrit<sup>3</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

pour les deux systèmes, tandis que les équations de quantité de mouvement deviennent<sup>4</sup>

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} - G(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} \quad (8.6)$$

où  $\nu = \mu / (\rho \sqrt{H^3 g})$  est une mesure adimensionnelle de la viscosité. La différence entre les deux équations provient du fait que nous avons considérés des états de référence différents.

Nous allons rechercher les instabilités apparaissant sur la surface supérieure de la couche. En réalité, il pourrait exister une instabilité sur la surface inférieure de la couche granulaire, étant donné que celle-ci ne reste pas constamment en contact avec le fond du container. Néanmoins, nous ferons l'hypothèse simplificatrice que le bas de la couche reste fixée en  $z = -1$ , comme c'est le cas dans l'expérience de Faraday.

Nous devons obtenir l'équation d'évolution de la composante verticale de la vitesse. Pour ce faire, nous appliquons deux fois l'opérateur rotationnel aux équations (8.6) afin d'éliminer la pression :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta w = 0 \quad (8.7)$$

### 8.2.5 Conditions aux limites et validité

L'équation (8.7) nécessite la connaissance de conditions aux limites pour être résolue. Celles-ci vont évidemment dépendre du système étudié.

2. [...] signifiant : la dimension de ...

3. Les grandeurs sans le ' sont des grandeurs sans dimension.

4. Le symbole  $\Delta$  représente l'opérateur Laplacien,  $\Delta \cdot \equiv \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}$ .

**Au fond ( $z = -1$ ) :**

Granulaire	Liquide
<p>La condition d'adhérence aux parois n'est pas valable pour les granulaires, car les particules ne restent pas en contact avec le fond du container à tout instant. Néanmoins, pour simplifier l'analyse, on supposera que c'est le cas et que</p> $w = 0 \quad (8.8)$ <p>De plus, les grains n'ont pas nécessairement une vitesse nulle à la paroi. Afin de simplifier le problème, on supposera que les grains au fond de la couche ne subissent aucune contrainte, d'où</p> $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (8.9)$	<p>Les conditions d'imperméabilité et de non glissement à la paroi permettent d'écrire <math>\vec{u} = \vec{0}</math>, d'où</p> $w = 0 \quad (8.10)$ <p>De plus, en utilisant l'équation de continuité, on a</p> $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ <p>et donc</p> $\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8.11)$

### Condition cinématique en surface

On exprime qu'une particule initialement située sur la surface libre y reste au cours de son mouvement. Cela se traduit mathématiquement par

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) F = 0$$

où  $F \equiv z - \zeta(x, y, t) = 0$  est l'équation décrivant la surface libre. En négligeant le terme non linéaire, on trouve

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (8.12)$$

On a supposé que les déformations de la surface libre étaient suffisamment faibles pour que cette condition cinématique soit appliquée en  $z = 0$  et non en  $z = \zeta/H$ .

### Condition dynamique à la surface

Au niveau de la surface libre, le tenseur des contraintes est donné par

$$\tau_{ij} = -p' \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) + \rho G(t) \zeta \delta_{iz} \delta_{jz}$$

où le dernier terme prend en compte les déformations de la surface libre.

**Composantes tangentielles :** il n'existe aucune contrainte tangentielle à la surface libre, et donc

$$\tau_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{yz} = 0$$

De plus, ces contraintes tangentielles étant nulles sur toute la surface, on peut écrire :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

En développant ces équations, en les sommant et en utilisant l'équation de continuité pour éliminer les vitesses horizontales, on trouve finalement

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) = 0$$

que l'on peut encore écrire<sup>5</sup>

$$\left( \Delta_h - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' = 0 \quad (8.13)$$

**Composante normale :** l'équilibre de la surface libre implique que la composante normale des tensions doit être égale à la tension de surface  $\sigma$  multipliée par la courbure de la surface libre :

Granulaire	Liquide
Dans le milieu granulaire, la tension de surface est inexistante :	$\tau_{zz} = \sigma \Delta_h \zeta \quad \text{en } z = 0$ ou encore
$\tau_{zz} = 0 \quad \text{en } z = 0$ d'où	$-p' + 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z} + \rho G(t) \zeta = \sigma \Delta_h \zeta \quad (8.17)$
En prenant la divergence horizontale de (8.4), on a	Prenons la divergence horizontale de (8.5). On trouve
$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_h \cdot \vec{u}') = -\Delta_h p' + \mu \Delta (\vec{\nabla}_h \cdot \vec{u}') \quad (8.15)$	$\Delta_h p' = \left[ \rho \frac{\partial}{\partial t} - \mu \Delta \right] \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (8.18)$
L'élimination de la pression des équations (8.14) et (8.15) fournit la relation	En éliminant la pression de (8.17) et (8.18), on obtient
$\left[ 2\mu \Delta_h + \mu \Delta - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial w}{\partial z} = \rho G(t) \Delta_h \zeta \quad (8.16)$	$\begin{aligned} & 2\mu \Delta_h \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \rho G(t) \Delta_h \zeta \\ &= \sigma \Delta_h (\Delta_h \zeta) + \left[ \rho \frac{\partial}{\partial t} - \mu \Delta \right] \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \quad (8.19)$

### Forme adimensionnelle des conditions aux limites

L'analyse dimensionnelle des équations (8.16) et (8.19) fait apparaître deux nombres sans dimension :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma}{\rho g H^3}, \text{ qui constitue une mesure adimensionnelle de la tension de surface, et} \\ \nu &= \frac{\mu}{\sqrt{H^3 g \rho}}, \text{ la viscosité adimensionnelle, que nous avons définie précédemment.} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>. Le symbole  $\Delta_h$  désigne le Laplacien horizontal, i.e. l'opérateur réalisant la somme des dérivées secondes horizontales.

Étant donné que les milieux sont supposés infinis dans les directions horizontales, les solutions recherchées seront de la forme

$$w(x,y,z,t) = w(z,t)e^{i(k_x x + k_y y)},$$

Après quelques calculs, l'équation (8.7) devient

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w = 0 \quad (8.20)$$

assorti des conditions aux limites

Granulaire	Liquide
en $z = -1$ :	en $z = -1$ :
$w = 0$	$w = 0$
$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$
en $z = 0$ :	en $z = 0$ :
$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w$	$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w$
$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) w = 0$	$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) = 0$
$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\nu k^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= k^2 \zeta G(t) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\nu k^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= k^2 \zeta (G(t) + \eta k^2) \end{aligned}$

### 8.2.6 Analyse de Floquet

L'étude de stabilité se fait grâce à la *théorie de Floquet* : la déformation de la surface libre est écrite sous la forme

$$\zeta(x,y,t) = \zeta(t)e^{i(k_x x + k_y y)} \quad \text{avec}$$

$$\zeta(t) = e^{\mu t} Z(t \mod \frac{2\pi}{\omega})$$

où  $\mu$  est l'*exposant de Floquet* et  $Z$  est une fonction périodique du temps, de période  $\frac{2\pi}{\omega}$ . L'exposant peut être décomposé en une partie réelle et une partie imaginaire :  $\mu = s + i\alpha\omega$ . Le cas  $\alpha = 1$  correspond à une réponse harmonique;  $\alpha = \frac{1}{2}$  à une réponse sous-harmonique. Puisque  $Z$  est périodique, elle peut être développée en une série de Fourier :

$$Z(t \mod \frac{2\pi}{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n e^{in\omega t}$$

et donc finalement, la déformation de la surface libre s'écrit

$$\zeta(x,y,t) = e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(s+i\alpha\omega)t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n e^{in\omega t} \quad (8.23)$$

La condition (8.21c) donne, après simplification par  $e^{i(k_x x + k_y y)}$

$$\begin{aligned} & (s + i\alpha\omega)e^{(s+i\alpha\omega)t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n e^{in\omega t} + e^{(s+i\alpha\omega)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega \zeta_n e^{in\omega t} \\ &= e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(\mu + in\omega) \zeta_n(t)}_{w_n(z=0)} e^{in\omega t} = w(z=0, t) \end{aligned}$$

La vitesse verticale devra se réduire à cette forme en  $z = 0$  pour tous les instants  $t$ . On supposera donc que  $w$  peut être également développé de la même que le déplacement de la surface,  $\zeta$  :

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) &= w(z,t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad \text{avec} \\ w &= e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

En utilisant cette relation dans (8.20), on trouve

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - q_n^2 \right) w_n(z) = 0 \\ \text{où} \quad q_n^2 &\equiv k^2 + \frac{s + i(\alpha + n)\omega}{\nu}, \end{aligned}$$

dont la solution générale est une combinaison de sinus et de cosinus hyperboliques :

$$w_n(z) = A_n \operatorname{ch}(kz) + B_n \operatorname{sh}(kz) + C_n \operatorname{ch}(q_n z) + D_n \operatorname{sh}(q_n z)$$

Les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont déterminés grâce aux relations (8.21) et (8.22). Après calculs, on trouve

- pour le milieu granulaire :

$$\begin{aligned} A_n &= \nu (q_n^2 + k^2) \zeta_n \\ B_n &= \nu \coth(k) (q_n^2 + k^2) \zeta_n \\ C_n &= -2\nu k^2 \zeta_n \\ D_n &= -2\nu \coth(q_n) k^2 \zeta_n \end{aligned}$$

- pour le liquide :

$$\begin{aligned} A_n &= \nu (q_n^2 + k^2) \zeta_n \\ B_n &= C_n [q_n \operatorname{sh}(q_n) \operatorname{ch}(k) - k \operatorname{ch}(q_n) \operatorname{ch}(k)] \\ &\quad - D_n [q_n \operatorname{ch}(q_n) \operatorname{ch}(k) - k \operatorname{sh}(q_n) \operatorname{sh}(k)] \\ C_n &= -2\nu k^2 \zeta_n \\ D_n &= -\frac{[k A_n + C_n (k \operatorname{ch}(q_n) \operatorname{ch}(k) - q_n \operatorname{sh}(q_n) \operatorname{sh}(k))]}{[q_n \operatorname{ch}(q_n) \operatorname{sh}(k) - k \operatorname{sh}(q_n) \operatorname{ch}(k)]} \end{aligned}$$

### 8.2.7 Modélisation du terme $G(t)$

Nous avons vu précédemment que ce terme différait dans les deux problèmes. En effet, dans l'instabilité de Faraday, on a simplement :

$$G(t) = 1 - \Gamma \cos(\omega t) \quad (\text{sous forme adimensionnelle}).$$

Le problème est plus compliqué dans le cas de la couche granulaire, car il faut tenir compte des collisions avec le récipient. Dans [8], l'accélération s'écrit

$$G(t) = \chi(t, t_{\text{on}}, t_{\text{off}})[1 - \Gamma \sin(\omega t)] + G^\delta(t, t_{\text{on}})$$

où  $t_{\text{on}}$ ,  $t_{\text{off}}$  sont les instants auxquels la couche entre en contact avec le fond du récipient et décolle,  $\chi(x, a, b)$  est une fonction qui vaut un pour  $x$  compris entre  $a$  et  $b$  et zéro partout ailleurs.  $G^\delta(t, t_{\text{on}})$  est une fonction qui décrit la forte accélération ressentie au moment de la collision.

$$G^\delta(t, t_{\text{on}}) = \frac{v_c}{\sqrt{\pi}\tau} e^{-[(t-t_{\text{on}})/\tau]^2}$$

où  $v_c$  est la vitesse relative entre la plaque et la couche,  $\tau$  est un paramètre qui contrôle la largeur du pic de la collision. Les instants  $t_{\text{on}}$  et  $t_{\text{off}}$  sont calculés grâce au modèle de la balle inélastique, dont les principes de base ont été présentés dans le chapitre 7.

### 8.2.8 Méthodes de résolution et résultats

Les équations peuvent être mises sous la forme d'un problème aux valeurs propres. Nous n'entrerons pas dans les détails des calculs et des méthodes numériques utilisées pour résoudre ce problème, puisque le but était de montrer une application des équations de Jenkins et Richman et de les comparer avec celles de Navier-Stokes.

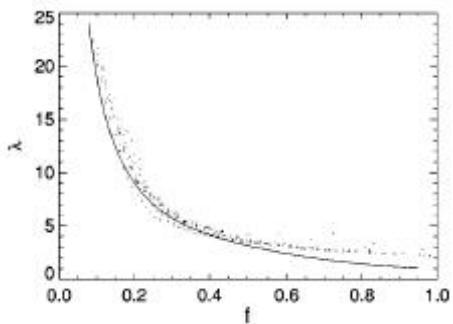


FIG. 8.7 – Longueur d'onde adimensionnelle en fonction de la fréquence pour l'expérience (points) et l'analyse linéaire de stabilité (ligne continue) [8].

Pour plus de détails, on pourra consulter [6], [7] et [8].

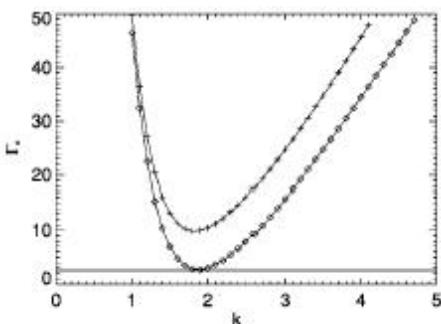


FIG. 8.8 – Courbes de stabilité marginale pour  $\omega = 3.0$  et  $\nu = 0.2$  (+) et  $\nu = 0.176$  (◇) [8].

## 8.3 Conclusion

En comparant l'instabilité de Faraday avec le système granulaire, nous avons pu mettre en évidence les aspects similaires des motifs produits et les différences physiques dans les mécanismes.

L'analyse linéaire basée sur les équations de Jenkins et Richman a montré que, malgré des hypothèses parfois discutables, les résultats sont proches de données expérimentales.

Ces arguments sont certainement insuffisants pour affirmer que ce modèle peut décrire parfaitement les couches granulaires soumises à des oscillations.

## Bibliographie

- [1] A. Kudrolli, J.P. Gollub, *Physica D* **97** (1996) 133-154.  
*Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio.*
- [2] Sung Joon Moon, M.D. Shattuck, C. Bizon, D.I. Goldman, J.B. Swift, et H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **65** (2001) 011301 1-10.  
*Phase Bubbles and Spatiotemporal Chaos in Granular Patterns.*
- [3] F. Melo, P.B. Umbanhowar, H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 172-175.  
*Transition to parametric Wave Patterns in a Vertically Oscilled Granular Layer.*
- [4] S.V. Kiyashko, L.N. Korzinov, M.I. Rabinovich, et L.S. Tsimring, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 5037-5040 .  
*Rotating spirals in a Faraday experiment.*
- [5] John R. de Bruyn, B.C. Lewis, M. D. Shattuck, et Harry L. Swinney, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 041305, 1-12.  
*Spiral patterns in oscillated granular layers.*
- [6] K. Kumar, L.S. Tuckerman, *J. Fluid Mech.* **279** (1994) 49-68.
- [7] K. Kumar, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **452** (1996) 1113-1125.
- [8] C. Bizon, M.D. Shattuck, et J.B. Swift, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 7210-7216. *Linear stability analysis of a vertically oscillated granular layer.*

# CONCLUSIONS

Nous avons vu dans cette partie qu'il existait plusieurs manières de modéliser la couche de granulaires soumise à des vibrations verticales. Les techniques sont relativement différentes mais apportent chacune des éléments intéressants concernant la structuration.

La question qui se pose est évidemment : "*Quel modèle choisir ?*"

Idéalement, il faudrait avoir recours non pas à *un*, mais à *plusieurs* modèles simultanément. Les simulations de dynamique moléculaire donnent de très bons résultats quand il s'agit de reproduire les motifs observés dans la réalité.

Le modèle de la balle inélastique, bien qu'inapte à rendre compte des motifs apparaissant sur la couche de granulaires, fournit quelques informations intéressantes sur la mouvement du centre de masse de la couche.

Les équations de Ginzburg-Landau et de Swift-Hohenberg sont certainement intéressantes pour leur universalité et pour la variété des solutions qu'elles peuvent exhiber. Malheureusement, la liaison des paramètres de ces équations avec des grandeurs physiques du problème n'est pas toujours possible.

Enfin, le modèle *continuum*<sup>6</sup> donne des résultats en accord avec les mesures expérimentales et avec les simulations de dynamique moléculaire pour la propagation des chocs dans le milieu granulaire. Un ensemble de conditions aux limites correctes restent encore à établir.

---

6. Jenkins et Richman dans notre cas.

Modèle	Avantage(s)	Inconvénient(s)
Dynamique moléculaire	suppression des imperfections expérimentales, valeurs des paramètres inaccessibles expérimentalement	limitation du nombre de particules/ temps de calcul
Équations milieu continu	dérivation à partir de la physique du problème, analogies avec équations de Navier-Stokes	conditions aux limites, résolution numérique, hypothèses pour les établir
Équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau	universalité, possibilité de modifications du modèle variété des solutions	signification physique, interprétation
Balle inélastique	modèle très simple, interprétations physiques	une balle pour modéliser plusieurs millions de particules ...

TAB. 8.2 – Avantages et inconvénients des différents modèles décrivant la couche granulaire.

## Troisième partie

### Étude expérimentale

# Chapitre 9

## Description du dispositif.

Dans ce chapitre, nous allons décrire notre dispositif expérimental. Comme dans toute expérience, le dispositif ne s'est pas fait en un jour. Il résulte d'une série de modifications et d'améliorations que nous avons dû réaliser au fur et à mesure de nos nombreuses expérimentations. Nous nous sommes d'abord basés sur les descriptions de matériel faites dans différents articles afin d'obtenir quelque chose s'en rapprochant au maximum.

Certains groupes travaillent dans le domaine depuis plus de dix ans et possèdent donc un certain savoir-faire quant à la mise en oeuvre de l'expérience. Ce n'est donc pas en quelques mois que nous parviendrons à leur niveau (délais de livraison des pièces, budget), mais ce travail de fin d'études aura tout de même contribué à préparer la voie aux personnes qui poursuivront ces recherches.

Après avoir passé en revue les différents éléments employés, nous verrons les problèmes que nous avons rencontrés en pratique, les solutions qui ont été apportées, et les améliorations qui restent à faire. Il est important d'être conscient des défauts de notre matériel et des répercussions qu'ils peuvent avoir sur les résultats obtenus.

Pour terminer ce chapitre, quelques propositions d'améliorations seront faites en vue de supprimer les quelques défauts subsistants.

### Sommaire

<b>9.1 Matériel utilisé.</b>	<b>96</b>
9.1.1 Le dispositif vibrant.	96
9.1.2 Le dispositif d'excitation	97
9.1.3 Le dispositif de mesure	98
9.1.4 Acquisition des images.	99
9.1.5 Les ordinateurs.	100
<b>9.2 Problèmes pratiques et solutions.</b>	<b>100</b>
9.2.1 Imperfections du dispositif.	101
9.2.2 Solutions proposées.	103
9.2.3 Améliorations futures du dispositif.	103
<b>9.3 Conclusion</b>	<b>103</b>

## 9.1 Matériel utilisé.

La figure 9.1 reprend les différents éléments du dispositif et les branchements nécessaires au fonctionnement de celui-ci. Nous allons décrire ces éléments dans la section suivante.

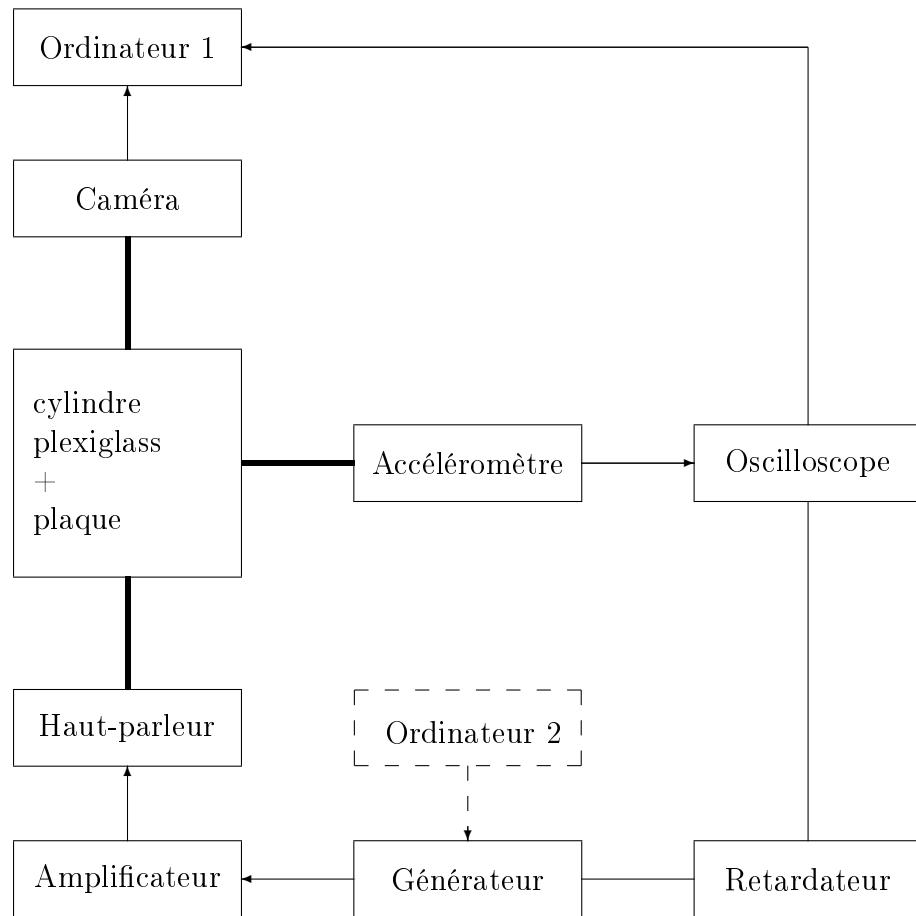


FIG. 9.1 – Schéma du dispositif expérimental.

### 9.1.1 Le dispositif vibrant.

#### Le cylindre.

Il constitue les frontières latérales du système. Il est en plexiglas, car ce matériau est assez léger, rigide et transparent (important car l'éclairage du système joue un rôle dans la visualisation des patterns). Caractéristiques : diamètre intérieur : 15,25 cm ; hauteur : 5 cm ; masse : 93.9 grammes. Nous le fixons solidement sur la plaque à l'aide d'un pistolet à colle. Il est important qu'il soit fixé correctement, surtout lorsque nous travaillons avec de fortes accélérations, afin d'éviter qu'il se détache comme ce fut parfois le cas.



FIG. 9.2 – *Dispositif vibrant* : (a) plaque de cuivre ; (b) cylindre en plexiglas ; (c) sonde de l'accéléromètre.

### La plaque.

La plaque sur laquelle est fixé le cylindre est en époxy et en fibre de verre de manière à être suffisamment rigide. Le tout est recouvert d'une fine couche de cuivre (bon conducteur) afin de réduire les effets électrostatiques avec les grains. Elle est fixée horizontalement sur le haut-parleur à l'aide de colle liquide.

### 9.1.2 Le dispositif d'excitation

Il est constitué d'un générateur de signaux, relié à un amplificateur. La fréquence de vibration est directement contrôlée sur le générateur, tandis que l'amplitude est réglée sur l'amplificateur.

#### Le générateur (TEKTRONIX AFG 210)

Il est utilisé pour produire un signal sinusoïdal de fréquence donnée. Il peut également être contrôlé par un ordinateur, lequel permet de créer des signaux différents (superposition de plusieurs signaux de fréquences différentes, balayage d'amplitudes, ...).

#### L'amplificateur.

Son rôle est simplement d'amplifier le signal que le générateur fournit avant de l'envoyer vers l'ampli audio.

#### Le haut-parleur (XXL POWER SOUND PAW-305)

Sans entrer dans les détails, on peut dire qu'un haut-parleur est constitué d'une bobine de fil, d'une bague servant de support au fil de la bobine, d'un aimant et d'autres pièces capables de transporter le flux magnétique. Les mouvements de va-et-vient sont créés en alternant la polarité de l'électro-aimant, alors que celle de l'aimant permanent reste

toujours la même : lorsque les polarités de ces aimants sont opposées, une attraction est créée, et lorsque les polarités sont les mêmes, on aura une répulsion.

Les caractéristiques sont : bobine en aluminium ; impédance de  $8\Omega$ . C'est sur le haut-parleur qu'est directement posée la plaque. Sa membrane transmet les oscillations au récipient contenant la couche de granulaires. Nous avons utilisé un haut-parleur relativement puissant, constitué d'un gros aimant et d'une grosse bobine.

### 9.1.3 Le dispositif de mesure

Il a pour but la mesure des paramètres de l'oscillation : l'amplitude et la fréquence. Il est constitué d'un accéléromètre relié à l'oscilloscope, dont la sonde est fixée sur la plaque de cuivre.

#### L'accéléromètre.

L'accéléromètre est constitué de deux parties : la sonde, que l'on peut voir sur la figure 9.2, collée sur la plaque, et l'alimentation [Fig. 9.3(a)]. Comme son nom l'indique, il mesure l'accélération de la plaque, la convertit en une différence de potentiel ( $0.380$  Volt  $\leftrightarrow 1g$ ) qui est transmise à l'oscilloscope.<sup>1</sup> Il est construit à partir d'un ADXL 150 dont le schéma est repris sur la figure 9.3(b) (pour les connaisseurs). Il est capable de mesurer des accélérations allant jusqu'à  $50$  g.

Il est indispensable d'avoir recours à l'accéléromètre, car l'accélération réellement subie par la plaque et le cylindre n'a pas nécessairement la même forme que le signal fourni par le générateur. Nous montrerons quelques exemples par la suite.

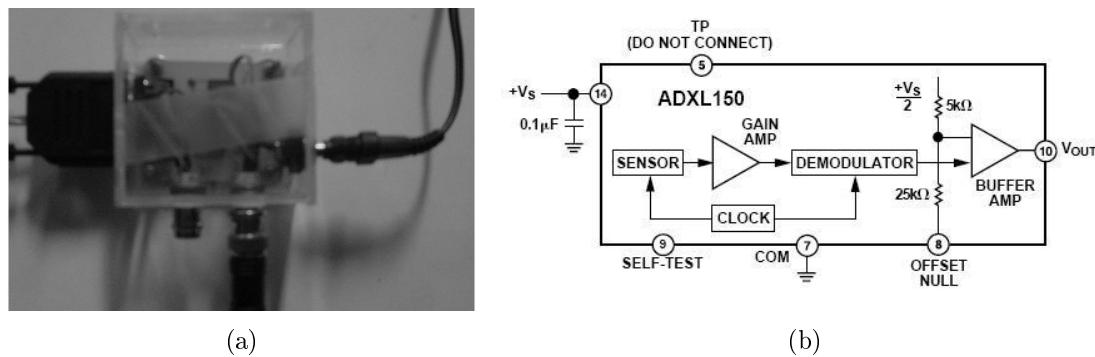


FIG. 9.3 – Boîtier d'alimentation de l'accéléromètre et schéma de l'ADXL 150.

#### L'oscilloscope (TEKTRONIX TDS 210).

Il permet de suivre l'évolution du signal et d'effectuer des mesures de tensions crête à crête (et par conséquent d'accélérations) ainsi que des mesures de fréquences. Il est également utiliser pour vérifier que le signal de synchronisation de la caméra avec le générateur est correct.

1. Pour plus de détails sur l'accéléromètre, veuillez consultez la page web de Geoffroy : <http://www.grasp.ulg.ac.be/staff/geoffroy/electronics.html>

### 9.1.4 Acquisition des images.

#### La lampe halogène.

Afin de mieux distinguer les reliefs dans la couche, une lampe annulaire est placée autour du cylindre. Ainsi, les zones les plus claires correspondent à des régions de plus haute altitude. L'observation des motifs reste possible sans l'éclairage latéral, mais le contraste est alors beaucoup moins bon.

#### La caméra (REDLAKE).

Elle est utilisée pour étudier la dynamique du système et l'évolution temporelle des structures. Il est possible de la synchroniser avec les oscillations de la plaque : une image est prise toutes les  $2T$  secondes,  $T$  étant la période l'oscillation<sup>2</sup>. On obtient ainsi une vision *stroboscopique* du système.



FIG. 9.4 – Caméra et objectif.

Nous avons pris les images avec une résolution de  $728 \times 728$  pixels, avec une vitesse allant de 25 à 400 images par seconde.

#### L'appareil photo numérique (SONY DSC-P7).

Résolution : 3.2 Megapixels. L'appareil est placé à la verticale du cylindre contenant la couche granulaire et fixé sur le support. L'avantage est qu'il fournit des images en couleur de très bonne qualité. L'inconvénient est que les photos obtenues seront complètement différentes en fonction de la phase de l'oscillation à laquelle le cliché est pris : si on se trouve dans la phase de collision de la couche avec la plaque, l'image donnera l'impression d'une couche quasiment plate, alors qu'à d'autres instants, les structures apparaîtront avec de manière plus ou moins nette.

---

2. Nous avons vu que les structures, telles que les carrés ou les hexagones, oscillaient à une fréquence de  $f/2$ , d'où l'intérêt de prendre une image toutes les  $2T$  secondes.

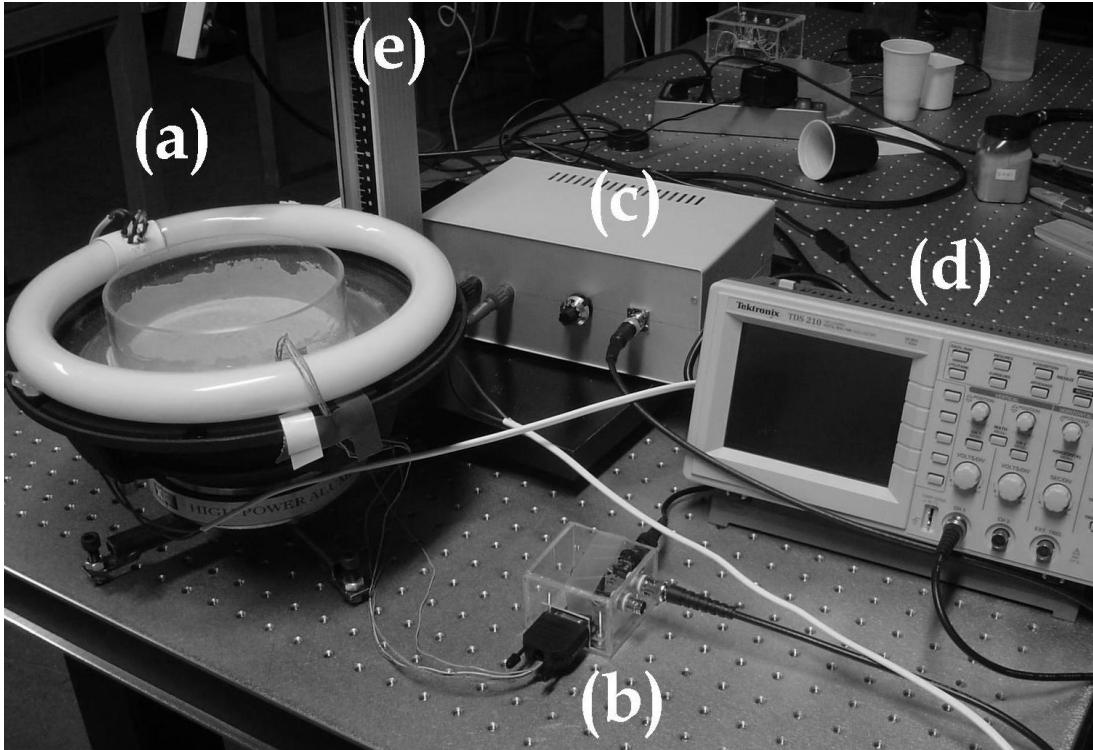


FIG. 9.5 – Dispositif: (a) dispositif vibrant; (b) accéléromètre; (c) amplificateur; (d) oscilloscope; (e) support pour caméra ou appareil photo.

### Le retardateur.

C'est un dispositif électronique qui permet de synchronise la caméra avec l'oscillation. Il possède deux paramètres de réglage :

- *npulse* : permet de choisir le nombre de périodes d'oscillation entre deux images consécutives.
- *timer* : sert à contrôler la phase de l'oscillation au moment du déclenchement de la caméra.

#### 9.1.5 Les ordinateurs.

Nous avons eu recours à deux P.C.: le premier a servi à l'acquisition des séquences d'images et à leur visualisation par le logiciel MIDAS. Le second peut être utilisé lorsque l'on désire introduire un signal d'excitation différent du signal sinusoïdal habituel.

## 9.2 Problèmes pratiques et solutions.

Le but de cette section est de passer en revue les différentes imperfections de notre dispositif expérimental, et d'exposer les changements effectués afin de les réduire au maximum. Il est important d'être conscient de ces défauts, car ils conduisent à des effets non désirés qui risquent d'influencer les résultats.

### 9.2.1 Imperfections du dispositif.

Malgré le choix des matériaux pour le cylindre et la plaque, il subsiste plusieurs défauts dont il n'est pas toujours facile de se débarrasser :

1. **Problèmes inhérents aux vibrations :** les vibrations devraient être appliquées uniquement au container. Le problème est que c'est la structure entière qui est soumise à ces effets : vis de réglage, lampe halogène, support de la caméra, réglage de l'objectif, table... Tous ces objets reprennent une partie des vibrations et peuvent créer des effets non désirés.

En pratique, nous avons observé un déplacement d'une roulette de réglage de l'objectif de la caméra sous certaines amplitudes et fréquences. Cela a provoqué évidemment une perte de netteté progressive de l'image.

2. **Horizontalité de la plaque :** dans un premier temps, l'ajustement s'est fait à l'aide d'un niveau (Fig.9.6). Cette technique n'a malheureusement pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants, les grains se dirigeant et s'accumulant systématiquement à proximité d'un bord.

Une autre technique a été adoptée : le réglage s'est simplement fait lorsque le dispositif était en fonctionnement. De cette manière, il était possible d'équilibrer plus précisément le plateau, en contrôlant le sens de déplacement des grains.

Là encore, cette technique n'était pas parfaite, car un changement de fréquence ou d'amplitude pouvait déstabiliser l'horizontalité.

3. **Effets de la masse des grains sur le plateau :** dans un système idéal, la masse totale des grains est négligeable vis-à-vis de celle du container. Ce sont les conditions que l'on peut obtenir en simulation, mais qui ne sont pas vérifiées en pratique. Le rebond de la couche sur la plaque peut avoir une influence sur le mouvement de celle-ci.

4. **Effets des conditions extérieures :** l'humidité de l'air joue un rôle dans la formation de tas, car elle renforce l'adhésion entre les grains. Le gaz interstitiel (en l'occurrence l'air) peut également influencer la dynamique des grains et ce, de manière d'autant plus importante que les grains sont petits. La figure 9.7 montre également que dans certains cas, les grains ont tendance à se coller sur les parois latérales du cylindre. Cela n'a pas d'influence sur la dynamique du système, mais il convient d'être attentif au fait que la masse de grains introduits dans le container n'est pas nécessairement égale à la masse des grains qui constituent la couche.

5. **Forme du signal :** idéalement, la couche de granulaires est excitée par un accélération sinusoïdale de fréquence et d'amplitude données. Nous avons cependant remarqué que ce n'était pas toujours le cas : pour certaines fréquences, le signal observé sur l'oscilloscope est loin d'être sinusoïdal (Fig. 9.8). Dans un premier temps, nous avons pensé que ces défauts étaient dus à l'effet de la masse des grains sur la plaque. Nous avons alors testé le mouvement de la plaque sans rien dessus, et le résultat était le même : le signal est déformé.

Il est assez délicat de donner le domaine de fréquences et d'accélérations pour lequel le signal est bien sinusoïdal, car celui-ci n'est jamais parfait, il existe très souvent de légers écarts par rapport à la sinusoïde attendue. En gros, on peut considérer que pour des fréquences supérieures à  $20\text{ Hz}$  et des amplitudes supérieures à environ  $2\text{ V}$ , le signal est "propre".

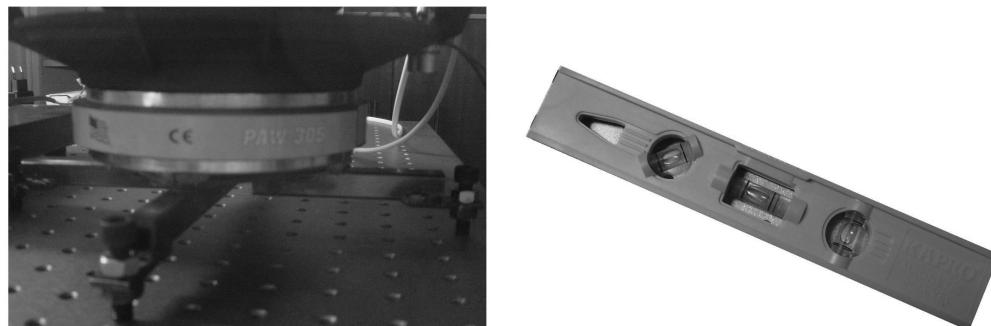


FIG. 9.6 – Vis de réglage et niveau.



FIG. 9.7 – Adhésion des grains à la paroi du cylindre.

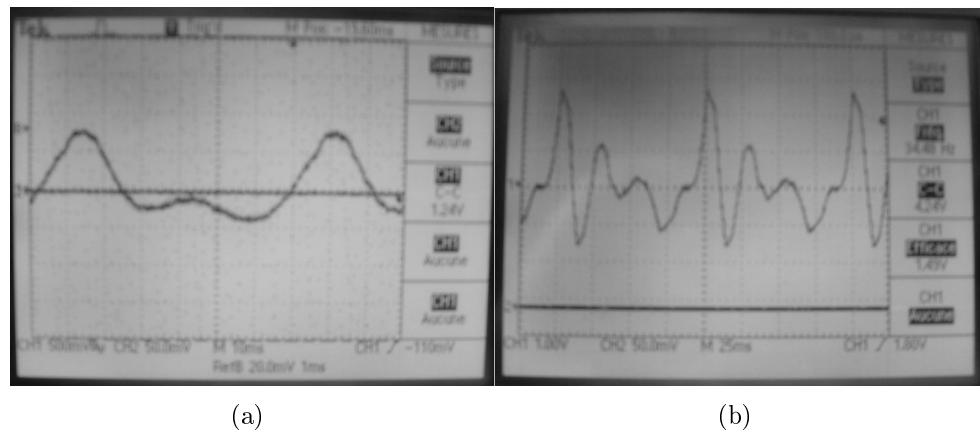


FIG. 9.8 – Signal de l'accélération de la plaque pour: (a)  $15 < f < 20 \text{ Hz}$ ; (b)  $\Gamma \cong 5.6$ ,  $f = 10 \text{ Hz}$ .

### 9.2.2 Solutions proposées.

**Problème 1:** au lieu d'installer le système sur une table classique, nous avons utilisé des *tables d'optique*, dont la stabilité est assurée par une masse de 300 kilogrammes. Les vibrations parasites ont ainsi été fortement réduites. Nous avons aussi constaté que la stabilité était renforcée grâce à l'aimant se trouvant dans le haut-parleur : les pieds du support étaient à leur tour aimantés et collaient en quelque sorte à la table.

**Problème 2:** tel qu'il est, le dispositif ne nous permet pas d'éliminer systématiquement les réglages de l'inclinaison du plateau. Un support à trois pieds au lieu de quatre facilitera les opérations.

**Problème 3:** nous essayons de travailler avec des paramètres qui font en sorte que le signal de l'accéléromètre soit très proche d'une sinusoïdale. Ceci était le cas pour des fréquences supérieures à  $20\text{ Hz}$ .

### 9.2.3 Améliorations futures du dispositif.

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, le dispositif qui vient d'être décrit permet d'observer de nombreuses structurations différentes dans la couche, en accord avec les figures du chapitre 3. Cependant, pour réaliser des mesures précises et des études plus poussées, certains changements devraient être effectués :

- utilisation d'un vibrateur électro-mécanique. Celui-ci permettra de contrôler de manière indépendante la fréquence et l'amplitude de l'oscillation. Les problèmes de vibrations parasites devraient être supprimés, tout comme ceux liés aux effets de la masse des grains sur la plaque.
- si on a à nouveau recours à un cylindre, il serait préférable qu'il ait une hauteur plus élevée de manière à ce que les grains n'en sortent pas.
- travailler dans une enceinte à pression réduite, afin de réduire au maximum les effets de l'air sur les grains. Cela devrait permettre d'éliminer les phénomènes de formations de tas et les accumulations de grains en certains endroits du container.

## 9.3 Conclusion

Nous avons présenté dans les grandes lignes les éléments qui constituent notre dispositif expérimental. Les différentes améliorations exposées ont permis de réduire les temps de réglage et les effets parasites des vibrations.

Quelques changements sont encore nécessaires avant d'obtenir un système peu influencé par les conditions extérieures et permettant des mesures précises.

# Chapitre 10

## Structurations observées expérimentalement

Nous avons principalement étudié deux types de matériaux granulaires, que nous désignerons dans la suite par *grains blancs* et *grains verts*. Dans un premier temps, nous allons voir quels motifs apparaissent dans les couches homogènes. Dans un second temps, nous illustrerons quelques phénomènes se produisant dans les mélanges binaires.

### Sommaire

---

<b>10.1 Caractéristiques des grains . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>10.2 Structuration dans les couches homogènes . . . . .</b>	<b>105</b>
10.2.1 Structures observées dans une couche de grains blancs . . . . .	105
10.2.2 Structures observées dans une couche de grains verts . . . . .	109
<b>10.3 Diagramme de phases . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>10.4 Structuration dans les couches formées de deux types de gra-</b>	
<b>nulaire . . . . .</b>	<b>112</b>
10.4.1 Motifs observés . . . . .	112
10.4.2 Formation de tas . . . . .	112
<b>10.5 Autres types de structures . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>10.6 Conclusion . . . . .</b>	<b>115</b>

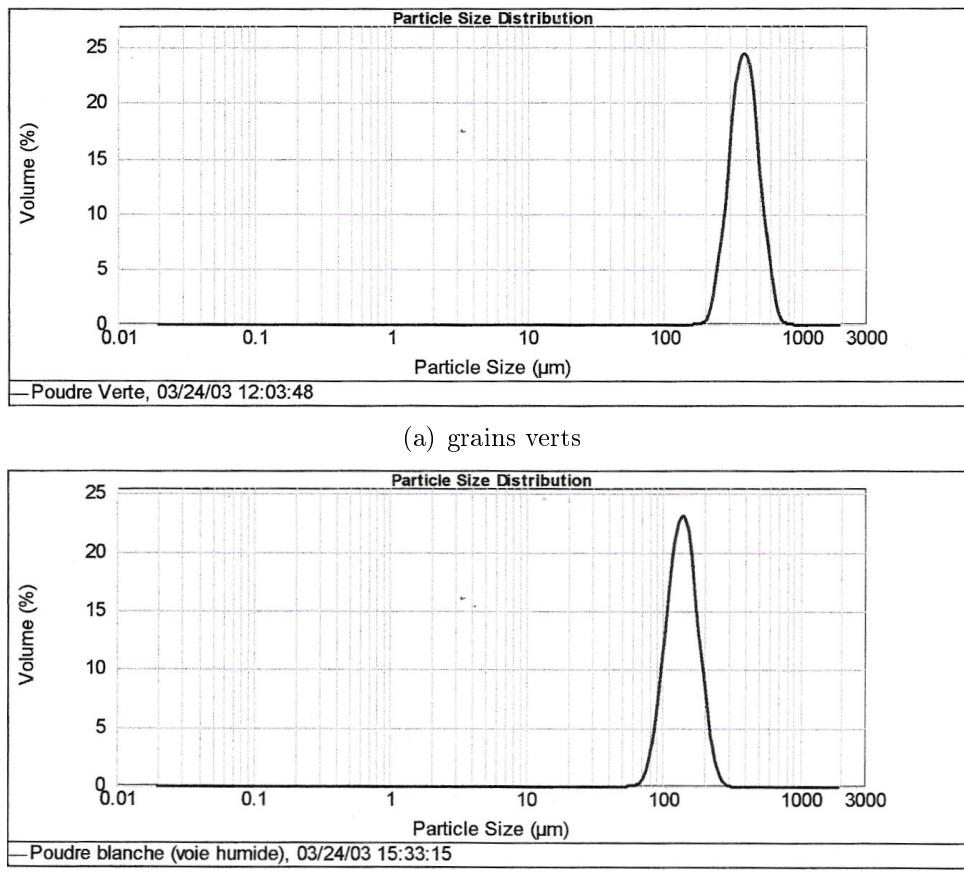
---

### 10.1 Caractéristiques des grains

Les deux types de milieux granulaires étudiés sont constitués de particules plus ou moins sphériques. Les grains verts sont de petites billes métalliques de diamètre moyen<sup>1</sup>  $\sigma \cong 390 \mu m$ ; les blancs ont un diamètre moyen  $\sigma \cong 142 \mu m$ . Les distributions de tailles sont reprises sur les figures 10.1(a) et 10.1(b).

---

1. Mesures effectuées de manière précise par l'appareil MASTERSIZER 2000.

FIG. 10.1 – *Distributions de tailles des particules.*

## 10.2 Structuration dans les couches homogènes

Les comportements de deux types de grains sont totalement différents, c'est pourquoi nous décrirons leurs propriétés séparément. Nous attribuons ces différences à deux causes : la différence des tailles des particules et la différence des coefficients de restitution : les grains verts semblent rebondir beaucoup mieux que les autres, l'énergie dissipée par les collisions est donc moins importante.

### 10.2.1 Structures observées dans une couche de grains blancs

Nous avons obtenu la plupart de ces structures avec une masse de 18.1 g de grains blancs, c'est pourquoi nous ne précisons pas la masse utilisée à chaque figure. Pour avoir une idée des longueurs sur les figures, il faut savoir que les images en forme de disque correspondent à l'intérieur du récipient cylindrique et que ce dernier a un diamètre de 15.25 cm.

#### Carrés

Pour des fréquences inférieures à 30 Hz, nous avons observés les structures en carrés oscillant à une fréquence  $f' = f/2$ ,  $f$  étant la fréquence de l'excitation. Ceci a pu être

vérifié grâce à la caméra rapide, en comparant deux images séparées de  $2T$  secondes (Fig. 10.2) : les sommets deviennent des cratères et inversement. Nous ne sommes pas parvenus à obtenir les carrés de fréquence  $f' = f/4$ , car l'accélération maximale fournie par le dispositif était insuffisante.

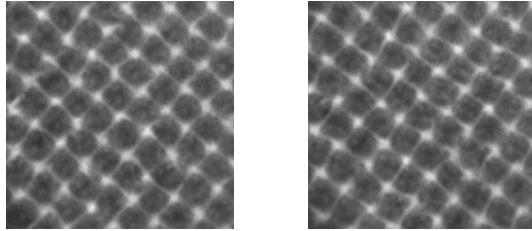


FIG. 10.2 – *Images du réseau carré prises à  $T = 1/25$  seconde d'intervalle : les points blancs (maxima) de l'image de gauche deviennent des zones sombres sur l'image de droite et inversement.*

### Lignes

Pour des fréquences de l'ordre de  $40\text{ Hz}$ , des structures en lignes sont apparues. Comme pour les carrés, nous avons seulement observé ces structures avec une fréquence propre d'oscillation de  $f/2$ . Les lignes remplissaient rarement la totalité du récipient et avaient parfois tendance à créer des sortes de labyrinthes.

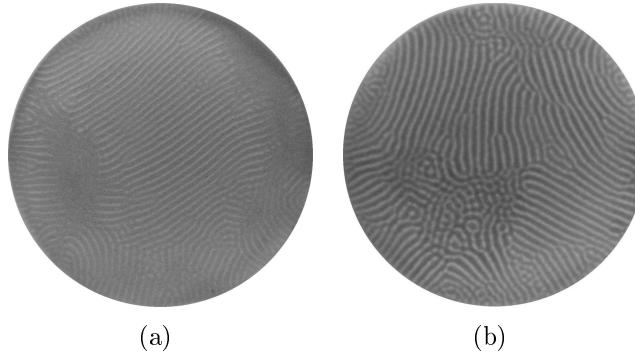


FIG. 10.3 – *Structures en lignes : (a)  $f = 41.5\text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5$  ; (b)  $f = 40\text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5$ .*

### Hexagones

Nous avons observé les hexagones pour de faibles fréquences (10-15 Hz) et des amplitudes élevées (de l'ordre de  $\Gamma = 5.7$ ). Différents articles suggèrent que ces structures apparaissent sur une plus large gamme de fréquences que ce que nous avons obtenu. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, pour ces fréquences inférieures à  $20\text{ Hz}$ , le signal de l'accélération de la plaque est plutôt mauvais. On serait tenté de penser que c'est la forme de ce signal qui est à l'origine des hexagones, mais d'autres expériences et simulations ont également montré l'apparition d'un réseau d'hexagones pour un signal parfaitement sinusoïdal.

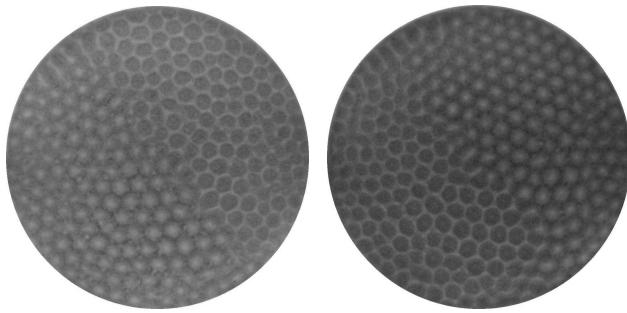


FIG. 10.4 – *Structures en hexagones* (images séparées de d'un multiple de la période d'oscillation) :  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.63 - 5.68$ .

La figure précédente montre bien la coexistence de deux domaines dont les phases sont différentes (en accord avec ce qui a été montré sur la figure 8.1(d) page 79). Ceci s'explique par le fait que pour ces valeurs de l'accélération, la couche peut entrer en contact avec le container sur un cycle pair ou impair : la trajectoire est dégénérée (voir également le modèle de la balle inélastique, chapitre 7).

### Oscillons

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, les oscillons apparaissent lors d'une diminution brusque de l'amplitude à partir d'une région où l'on a des carrés.

Les oscillons observés ici n'ont pas toujours mêmes caractéristiques que ceux décrits dans la littérature :

- leur durée de vie n'est pas très longue : souvent de l'ordre de 30 secondes, c'est-à-dire de l'ordre de 750-1000 périodes d'oscillation du container ;
- ils ne se forment pas partout avec une même probabilité. Ceci est certainement dû à un léger défaut d'horizontalité de la plaque ;
- ils semblent parfois ne pas être axisymétriques, ressemblent plutôt à un élément du réseau carré isolé (Fig. 10.6) ;
- un oscillon peut coexister avec une région présentant un réseau carré (Fig. 10.5).

Pour visualiser ces structures, deux techniques ont été essayées :

1. diminution de l'amplitude directement sur l'amplificateur. Le problème est qu'il est difficile de diminuer brusquement  $\Gamma$  de manière précise, c'est-à-dire en restant dans un intervalle de valeur donnant lieu aux oscillons.
2. diminution de la fréquence sur le générateur : cette diminution s'accompagnait automatiquement d'une diminution de  $\Gamma$ . Exemple : le passage de  $f$  de 25 à 22 Hz provoquait la passage de  $\Gamma$  de 4.10 à 2.89.

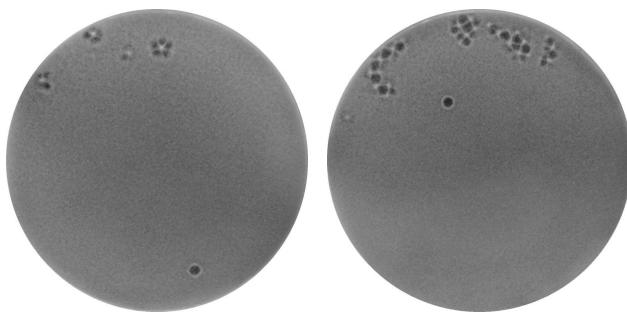


FIG. 10.5 – *Oscillons obtenus en diminuant  $f$  de 26 à 23 Hz dans une couche de 18.1 g de grains blancs.*

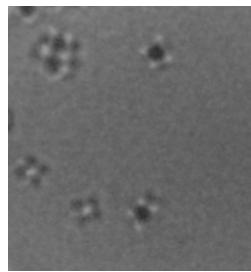


FIG. 10.6 – *Agrandissement montrant des structures isolées non axisymétriques : la taille de ces objets est d'environ 60 mm*

Des groupements d'oscillons existent également, comme nous l'avons vu sur la figure 3.11 page 25. Ces derniers sont illustrés sur la figure suivante, sur laquelle on peut voir des oscillons de phases opposées, des dimères et des trimères.

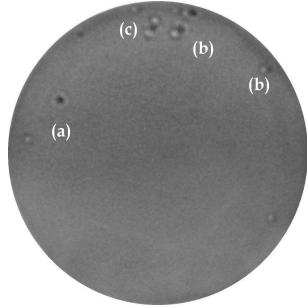


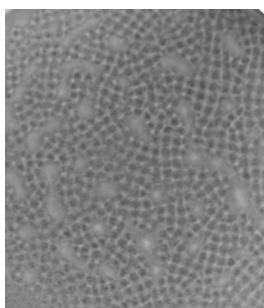
FIG. 10.7 – *Groupements d'oscillons : (a) oscillons de phases opposées ; (b) dimères ; (c) trimère.*

### Formation de tas

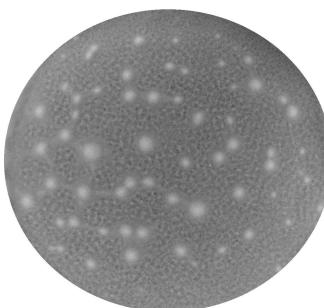
Sous certaines conditions, nous avons observé la formation de tas circulaires. Le problème est que ce phénomène était difficilement reproductible. Il est possible que ce soit l'humidité de l'air qui en soit responsable, car sous les mêmes conditions de fréquence et d'amplitude, ces tas ne sont pas apparus systématiquement.

La séquence de la figure 10.8 montre les différentes étapes de la formation des tas lors d'une diminution progressive de l'accélération. La fréquence a été fixée à 25 Hz et la quantité de grain  $m = 7.8 \text{ g}$ .

- $\Gamma \cong 4.7$  : la couche présente un désordre géométrique.
- $\Gamma \cong 3.6$  : les carrés commencent à apparaître.
- $\Gamma \cong 3.3$  : formation d'"îles" : ce sont des régions possédant un relief plus important que leur environnement.
- $\Gamma \cong 2.6$  : des petits amas d'environ 5 mm de diamètre se forment aux endroits où se trouvaient les îles.



(a) apparition d'îles



(b) formation d'amas

FIG. 10.8 – *Formation de tas dans la couche granulaire.*

### Désordre

Pour de grandes accélérations ( $\Gamma > 6$ ) et des fréquences supérieures ou égales à  $15\text{ Hz}$ , des structures désordonnées apparaissent. Nous les appelons "désordonnées" car il n'est pas possible de les caractériser par des formes géométriques et que l'on ne peut pas non plus les qualifier de "sans pattern". En effet, il semble qu'il y ait une certaine longueur caractéristique entre des maxima de la couche, même si ces maxima n'apparaissent pas aux mêmes endroits d'une période à l'autre (à l'inverse de ce qui se passe dans les réseaux carrés).

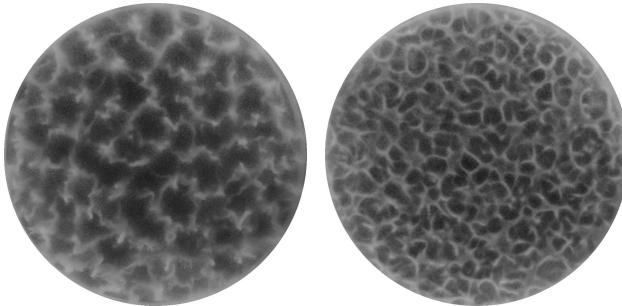


FIG. 10.9 – *Désordre observé pour de fortes accélérations :  $f = 15\text{ Hz}$ ,  $\Gamma > 6.20$ .*

### Combinaisons de structures

Lorsque la plaque n'était pas parfaitement horizontale, nous avons observé des effets dus à la variation de profondeur dans la couche. En effet il a été établi que la profondeur joue un rôle dans le type de motifs qui apparaissent, pour une accélération et une fréquence donnée. Dans certaines conditions, la couche a présenté plusieurs types de motifs (lignes, carrés, hexagones) qui coexistaient [Figs. 10.10(a) et 10.10(b)]. La figure 10.10(c) montre un assemblage de carrés, de pentagones et d'hexagones.

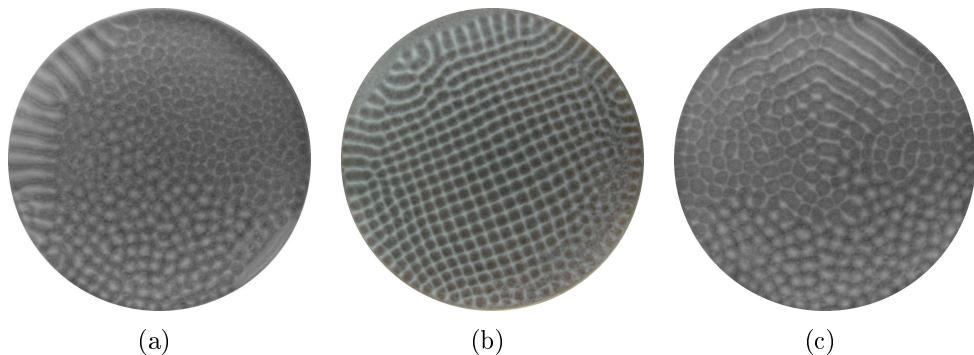


FIG. 10.10 – *Coexistence des plusieurs motifs : (a) lignes et hexagones :  $f = 10\text{ Hz}$ ,  $\Gamma > 5.68$ ; (b) lignes et carrés :  $f = 16\text{ Hz}$  et  $\Gamma = 5.7$ ; (c) lignes, carrés, hexagones et pentagones  $f = 10\text{ Hz}$ ,  $\Gamma > 5.68$ .*

### 10.2.2 Structures observées dans une couche de grains verts

Pour que des structures commencent à apparaître dans la couche, nous avons dû utiliser une masse de grains beaucoup plus importante que pour le grains blancs. Ce n'est que dans l'intervalle  $[20 - 25\text{ Hz}]$  que nous avons obtenu des carrés ou des lignes.

La figure 10.11 montre l'apparition progressive des structures lorsque nous augmentons la masse de grains dans le container. Pour une masse de l'ordre de 20 grammes, on commence à observer localement des reliefs et des creux.

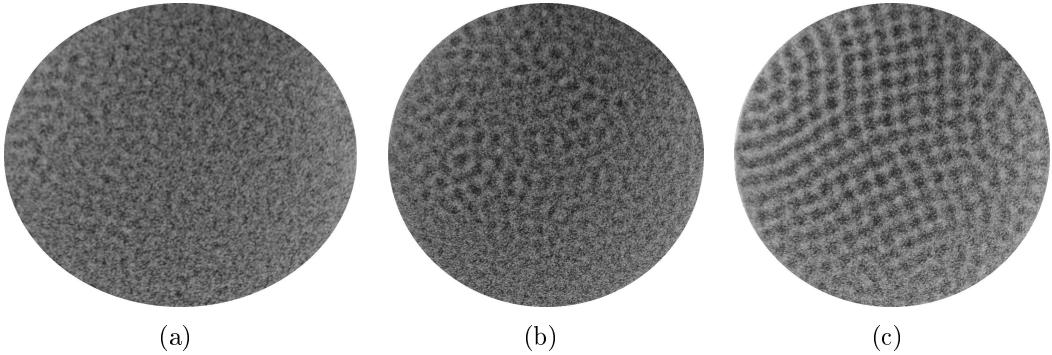


FIG. 10.11 – Apparition progressive d'un réseau carré lorsque la masse de granulaires est augmentée :  $f = 25 \text{ Hz}$ , (a)  $\Gamma = 3.3$ ,  $m = 19.4 \text{ gr}$ ; (b)  $\Gamma = 3.6$ ,  $m = 35.8 \text{ gr}$ ; (c)  $\Gamma = 3.7$ ,  $m = 42.6 \text{ gr}$ .

### Carrés

Pour des fréquences entre 20 et 25  $\text{Hz}$ , la figure 10.12 montre clairement que l'augmentation de la fréquence a tendance à diminué le pas du réseau. Nous tenterons de mesurer plus précisément cette tendance. En dehors de cet intervalle, nous ne sommes pas parvenus à obtenir d'autres structurations, quelles que soient la masse et l'accélération.

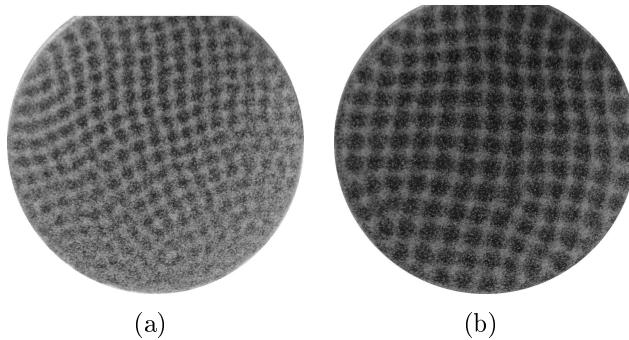


FIG. 10.12 – Réseau carré: (a)  $f = 25 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 3.7$ ,  $m = 42.7 \text{ gr}$ ; (b)  $f = 20 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 3.8$ ,  $m = 44 \text{ gr}$ .

### Lignes

Les lignes ont été obtenues non plus en augmentant la fréquence d'excitation, mais en augmentant la masse de grains dans le container et en augmentant l'amplitude. Les mêmes remarques concernant l'influence de la fréquence sont valables : une augmentation de  $f$  diminue la longueur d'onde du pattern.

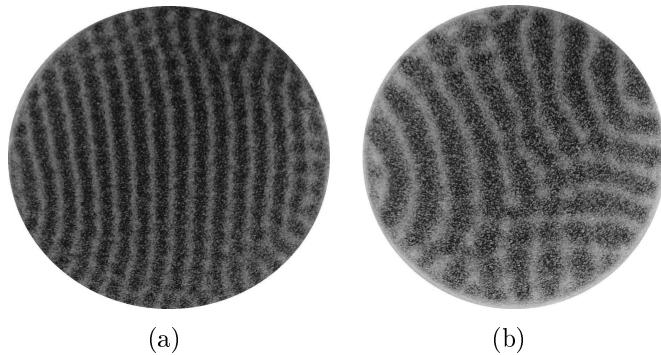


FIG. 10.13 – *Structure en lignes* : (a)  $f = 25 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.8$ ,  $m = 76.3 \text{ gr}$  ; (b)  $f = 20 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.5$ ,  $m = 76 \text{ gr}$ .

### 10.3 Diagramme de phases

Nous avons tenté de construire un diagramme de phases pour les grains blancs (18.1 grammes), en procédant de la manière suivante : pour une fréquence donnée, on augmente lentement l'accélération, et on note les valeurs de  $\Gamma$  auxquelles se produisent les apparitions ou les changements de structuration. Notre but est de pouvoir comparer qualitativement nos résultats avec ceux de la figure 3.9 page 23 par exemple. Il est délicat d'obtenir des mesures précises pour différentes raisons :

- la mesure de l'accélération indiquée par l'oscilloscope a tendance à fluctuer autour d'une valeur, les écarts pouvant aller jusqu'à  $0.10 \text{ Volt}$ , c'est-à-dire d'une imprécision d'environ 0.13 sur  $\Gamma$ .
- il est assez difficile de déterminer précisément pour quelles valeurs des paramètres apparaissent les structures. Par exemple, les carrés : les premiers commencent à se développer dans les régions où la profondeur est plus faible pour une accélération  $\Gamma_1$ . Par contre, pour que la totalité de la couche présente des carrés, il faut une accélération  $\Gamma_2 > \Gamma_1$ .
- de même, déterminer à quelle moment une structure disparaît est subjectif. Par exemple, les lignes ont tendance à devenir de plus en plus courtes pour des amplitudes croissantes. A partir de quand doit-on dire que ces lignes n'existent plus ? Il n'existe pas réellement de critère permettant de le dire.

Quelques remarques sont à faire à propos de ce diagramme :

- à partir de  $f = 32 \text{ Hz}$ , les carrés n'apparaissent plus que dans une zone limitée où la profondeur est plus faible qu'ailleurs, à proximité des parois.
- au-delà de  $50 \text{ Hz}$ , rien de particulier n'a été observé, c'est pourquoi le diagramme est limité à ces fréquences.
- en dessous de  $10 \text{ Hz}$  rien ne se passe, l'amplitude de l'accélération n'est pas assez forte et la forme du signal n'est pas satisfaisante.
- la zone "pas de mouvement" est délicate à déterminer : nous avons tenté de voir à partir de quelle accélération les premiers mouvements sur la surface de la couche se produisaient.
- la région "pas de structure" signifie que la couche ne présente pas de maxima et minima

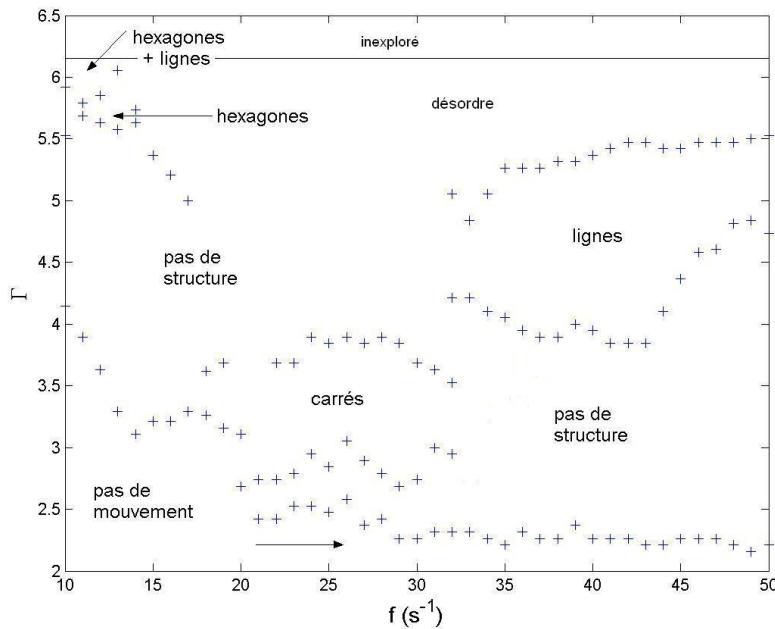


FIG. 10.14 – Diagramme de phases obtenu avec 18.1 grammes de grains blancs.

## 10.4 Structuration dans les couches formées de deux types de granulaire

La plupart des articles traitent de la structuration dans les couches homogènes. Il est donc intéressant d'étudier les comportements que peuvent présenter les mélanges. Nous avons travaillé avec un mélange des deux types de granulaires définis précédemment : le mélange contient 10 grammes de grains blancs et 5 grammes de grains verts.

### 10.4.1 Motifs observés

En résumé, on peut dire que les grains blancs forment des structures habituelles (carrés, lignes,...) et que les grains verts se placent sur ces structures<sup>2</sup>. Nous avons repris quelques illustrations de ce phénomène sur la figure suivante. Dans certains cas, on observe une ségrégation (Figs. 10.15(h) et 10.15(i)), mais les patterns restent les mêmes dans les deux régions. Les variations de profondeur de la couche peuvent donner lieu à deux réseaux carrés, mais dont les pas sont différents (Fig. 10.15(g)).

### 10.4.2 Formation de tas

Comme dans le cas de la couche homogène, nous avons pu observer l'apparition de petits agglomérats de grains blancs dans la couche (voir ci-dessous) pour de faibles fréquences (de l'ordre de 10 Hz) et de faibles accélérations ( $\Gamma = 2 - 2.5$ ). Il est intéressant de remarquer qu'ici les grains de plus faible diamètre parviennent à se retrouver sur le dessus de la couche, contrairement au cas précédents. Les petits amas ont tendance à se déplacer dans

2. Un peu comme dans le *Brazil Nut Effect* où les plus grosses particules ont tendance à se retrouver sur le dessus du mélange.

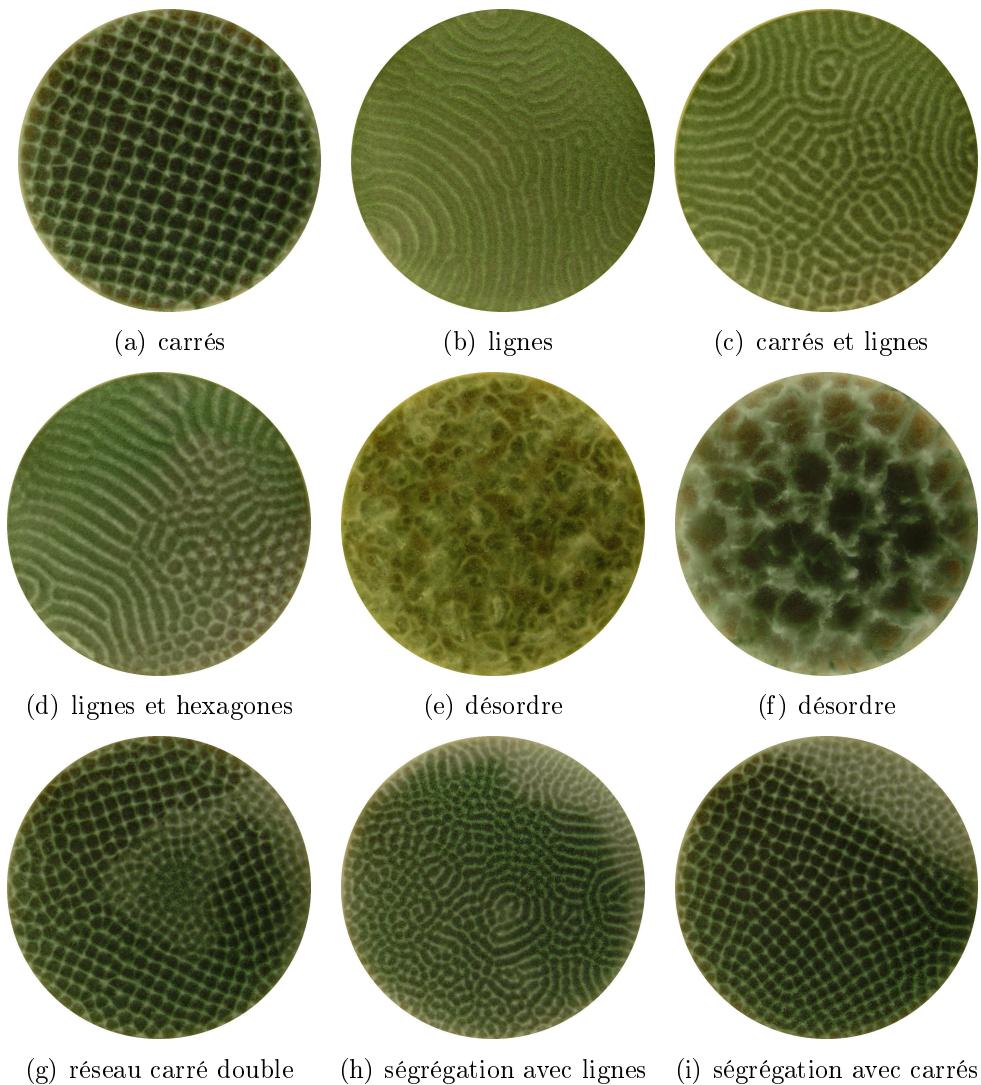


FIG. 10.15 – Exemple de structures dans les couches formées de deux types de granulaire (10 gr de blancs et 5 gr de verts) :

(a)  $f = 22 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 4.2$  ; (b)  $f = 11 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.9$  ; (c)  $f = 11 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.6$  ;  
 (d)  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.7$  ; (e)  $f = 12 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma > 6.2$  ; (f)  $f = 12 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma > 6.2$  ;  
 (g)  $f = 26 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 3.9$  ; (h)  $f = 33 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 4.5$  ; (i)  $f = 27 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 3.9$ .

le sens de la pente. Lorsqu'un petit tas rencontre un plus gros, il se fait "aspirer" par celui-ci, conformément à ce qui a été décrit dans la section 3.4 page 25.



FIG. 10.16 – Formation de tas dans une couche formée de deux types de granulaires (10 grammes de blancs, 5 grammes de verts) :  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 2.4$ . Les petits tas sont "aspirés" par les plus gros (zone entourée).

## 10.5 Autres types de structures

Les tiroirs du laboratoire regorgent de nombreux types de granulaires. Plusieurs types ont été testés, mais c'est principalement les deux types décrits au début de ce chapitre (particules sphériques) qui ont produit les meilleurs résultats. Des grains plus anguleux, plus proches du sable que l'on trouve sur les plages, ont donné des formes quelque peu inhabituelles (Figs. 10.17(c)-10.17(f)), en plus des patterns déjà connus. Le problème de ce type de matériau est qu'il semble plus sensible à l'humidité de l'air et il a tendance à se fixer sur les parois du cylindre et sur la plaque vibrante.

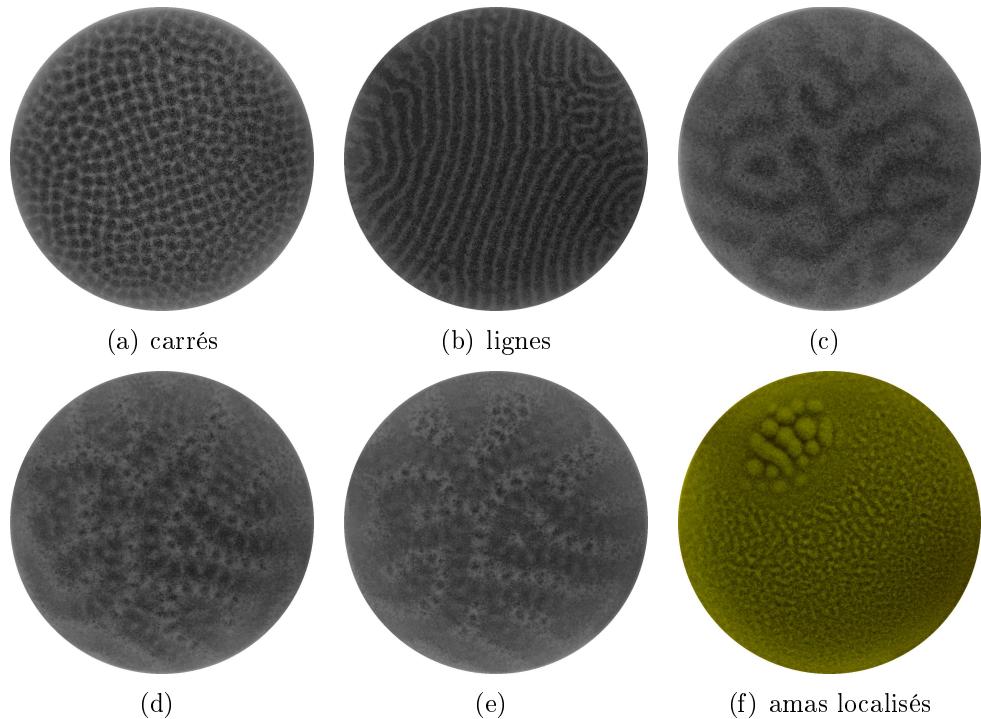


FIG. 10.17 – Structures avec grains anguleux (taille des grains entre 0.20 et 0.25 mm) : (a) carrés ; (b) lignes :  $f = 27 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.7$  ; (c)-(e)  $f = 40 \text{ Hz}$ , amplitudes croissantes ; (f)  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\Gamma = 5.7$ .

## 10.6 Conclusion

Grâce à notre matériel, nous avons pu reproduire la plupart des patterns décrits dans le chapitre 3. Nous avons pu constater que les comportements observés dépendent fortement du type de granulaires utilisés : les patters n'ont pu être reproduits dans tous les cas.

Nous avons également caractérisé les comportements dans les mélanges binaires de manière qualitative : les grains de plus grand diamètre se placent sur les patterns formés par les plus fin. A de faibles amplitudes, la formation de tas a été observée.

Enfin, des grains non sphérique (sable) ont produit des patterns particuliers.

# Chapitre 11

## Mesures et analyse des résultats

Maintenant que nous avons acquis de nombreuses séquences d'images de la couche et de son évolution, nous pouvons nous livrer à quelques analyses et mesures. De nombreuses mesures sont réalisées par différents groupes de recherche depuis quelques années, c'est pourquoi, compte tenu de notre matériel, nous viserons plutôt le qualitatif que le quantitatif.

### Sommaire

---

<b>11.1 Mesures de relations de dispersion . . . . .</b>	<b>116</b>
11.1.1 Technique de mesure . . . . .	117
11.1.2 Sources d'erreur . . . . .	118
11.1.3 Résultats obtenus . . . . .	118
<b>11.2 Caractérisation de l'ordre . . . . .</b>	<b>119</b>
11.2.1 Illustration . . . . .	120
11.2.2 Transformée de Fourier de l'image . . . . .	120
11.2.3 Fonction de corrélation . . . . .	122
<b>11.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>132</b>

---

### 11.1 Mesures de relations de dispersion

En toute généralité, une relation de dispersion est une relation qui donne la longueur d'onde d'une onde en fonction de sa fréquence. Par exemple, dans les eaux peu profondes, cette relation prend la forme :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) = 2\pi \frac{g}{\lambda} \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire,  $k$  le nombre d'onde,  $h$  la profondeur locale et  $\lambda$  la longueur d'onde. Dans notre problème, la relation de dispersion exprimera la dépendance de  $f$ , la fréquence d'excitation<sup>1</sup> et la longueur d'onde  $\lambda$ , définie telle que sur la figure 11.1.

---

1.  $f$  est également un multiple de la fréquence propre des patterns, comme nous l'avons vu dans les chapitres 3 et 10.

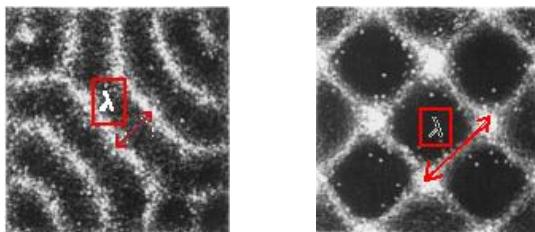


FIG. 11.1 – Définition de la longueur d'onde.

A première vue, en comparant les figures suivantes, une augmentation de la fréquence provoque une diminution de  $\lambda$ . C'est ce que nous allons tenter de représenter graphiquement.

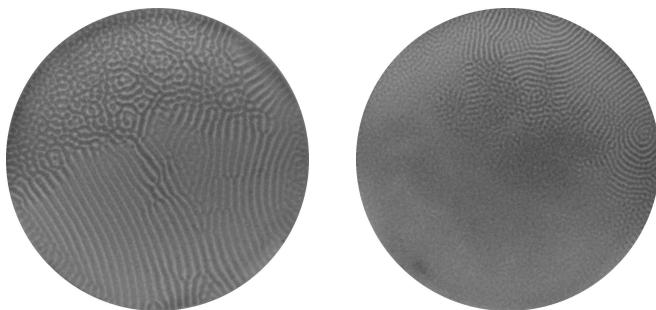


FIG. 11.2 – Structures en lignes :  $\Gamma = 5$ ; à gauche  $f = 40 \text{ Hz}$ , à droite  $f = 50 \text{ Hz}$ .

### 11.1.1 Technique de mesure

La technique utilisée est très simple : à partir des images de la couche obtenues à une accélération constante ( $\Gamma = 5$  en l'occurrence) et à des fréquences allant de 40 à 50 Hz (région dans laquelle nous avons observé des lignes), nous mesurons le profil d'intensité en niveau de gris<sup>2</sup> le long d'un segment perpendiculaire aux lignes [Fig. 11.3(a)].

Le résultat est un ensemble de pics plus ou moins équidistants [Fig. 11.3(b)] dont la distance moyenne nous donne la longueur d'onde recherchée, exprimée en pixels. La conversion des pixels en centimètre s'effectue aisément en mesurant le diamètre du cylindre sur l'image (mesure en pixels) et qui vaut 15.25 cm en réalité.

La même technique est évidemment applicable aux structures en carrés.

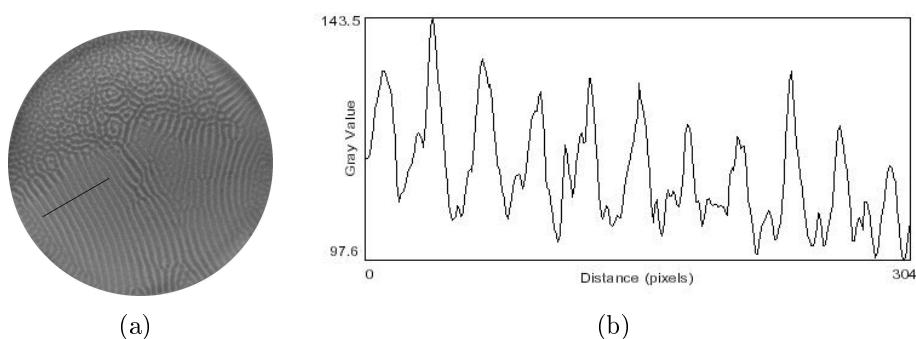


FIG. 11.3 – Méthode de mesure la longueur d'onde : (a) segment perpendiculaire aux lignes ; (b) profil de niveau de gris le long du segment.

2. Utilisation du logiciel ImageJ et de la commande Plot Profile.

### 11.1.2 Sources d'erreur

Voici les sources d'erreurs que nous avons identifiées. Comme dit précédemment, nous ne visons pas à obtenir des mesures extrêmement précises, mais nous essayerons de limiter au maximum l'influence de ces erreurs.

1. le tracé du segment le long duquel on mesure le profil d'intensité se fait manuellement. Il se peut donc qu'il ne soit pas parfaitement perpendiculaire aux lignes. De plus, les lignes ne sont pas toujours parallèles entre elles.
2. la mesure de la fréquence : la fréquence indiquée sur l'oscilloscope fluctue autour d'une valeur moyenne, ces fluctuations pouvant aller jusqu'à  $0.1\text{ Hz}$ .
3. la profondeur dans la couche n'est pas parfaitement uniforme : il existe des régions où la profondeur est plus importante. Or, la profondeur de la couche influence la longueur d'onde.

### 11.1.3 Résultats obtenus

Les figures 11.4 et 11.5 ont été obtenues en mesurant la longueur d'onde de la manière qui vient d'être exposée, dans une couche de 18.1 grammes de grains blancs. Pour le premier graphe, l'accélération était maintenue constante à  $\Gamma = 5$  et les fréquences allaient de 40 à  $50\text{ Hz}$  (domaine dans lequel on avait des lignes distinctes) avec un pas de  $0.50\text{ Hz}$ . Le second a été réalisé à une accélération  $\Gamma = 3.26$  pour des fréquences entre 20 et  $27\text{ Hz}$  (domaine des carrés) avec un pas de  $1\text{ Hz}$ .

Deux séries de mesures ont été effectuées, les points des graphiques sont les moyennes de ces deux séries.

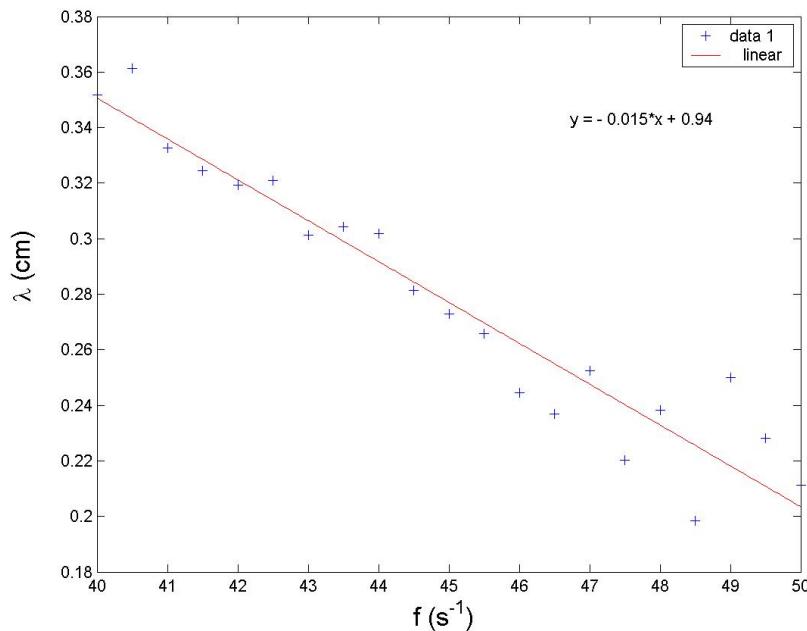


FIG. 11.4 – Longueur d'onde en fonction de la fréquence pour les structures en lignes :  $\Gamma = 5$  et  $f$  est varié entre 40 et  $50\text{ Hz}$ .

Les courbes montrent clairement la décroissance de  $\lambda$  avec  $f$ , en accord (qualitatif)

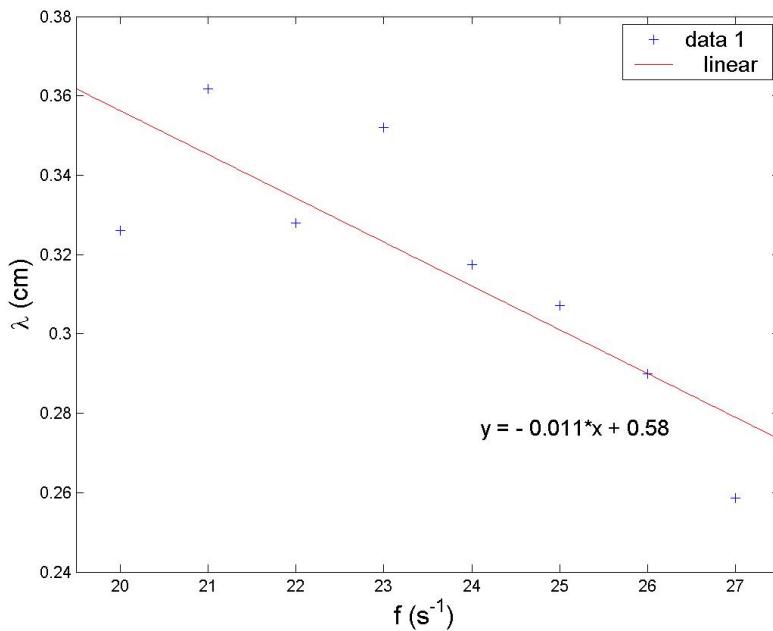


FIG. 11.5 – Longueur d’onde en fonction de la fréquence pour les structures en lignes :  $\Gamma = 3.26$  et  $f$  est varié entre 20 et 27 Hz.

avec ce que l’on trouve dans [1], à savoir

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{H} = 1.0 + 1.1 \left( \frac{f}{\sqrt{\frac{g}{H}}} \right)^{-1.32 \pm 0.03}.$$

Nous n’avons pu comparer en détail cette relation avec notre courbe vu le faible nombre de points expérimentaux dont nous disposions et les nombreuses sources d’erreurs qui influencent nos résultats.

Nous avons également mesuré la longueur d’onde pour différentes amplitudes, à des fréquences fixées. D’autres expériences et simulations ont montré que  $\lambda$  reste constant à quelques pour cent près lorsque l’accélération est variée. Nos résultats (Fig. 11.6) ne reproduisent pas véritablement cette tendance. Nous attribuons cette différence de comportement aux différentes sources d’erreurs qui affectent nos résultats, en particulier au fait que la profondeur de la couche n’était pas toujours la même partout dans le récipient.

## 11.2 Caractérisation de l’ordre

Nous avons utilisé la haute vitesse de la caméra pour étudier plus en détails la manière dont une structure ordonnée (réseau carré) apparaissait à partir d’un désordre complet. Nous disposons de divers outils pour caractériser l’ordre dans ce type de structure :

- la transformée de Fourier : elle permet de mettre en évidence les longueurs caractéristiques de l’image;
- la fonction de corrélation, utilisée en cristallographie.

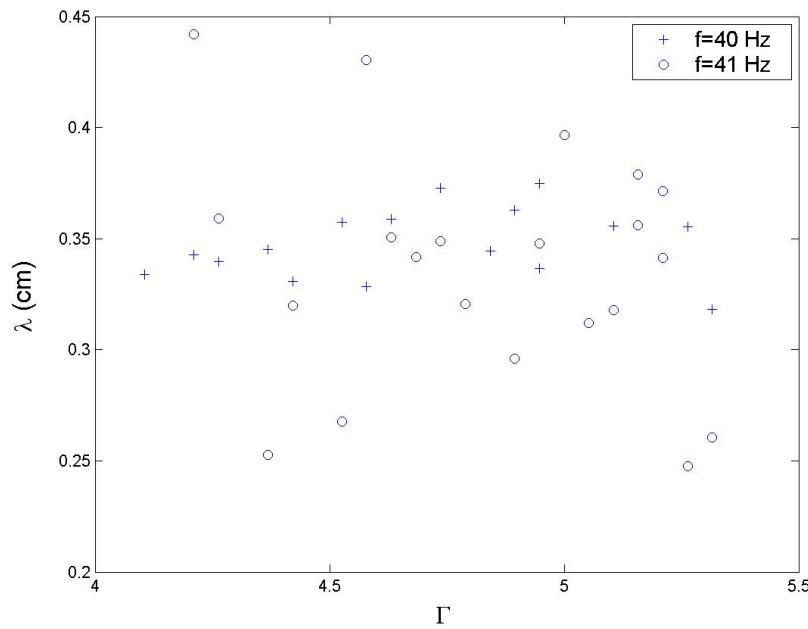


FIG. 11.6 – Longueur d’onde en fonction de l’accélération pour  $f = 40\text{ Hz}$  et  $f = 41\text{ Hz}$ .

### 11.2.1 Illustration

La séquence d’images de la figure 11.7 montre les premiers instants de la formation d’un réseau carré à partir d’une couche initialement plate. La vitesse de la caméra est de 400 images à la seconde. Les images ont été traitées<sup>3</sup> de manière à augmenter le contraste et à avoir le même éclairage pour toutes<sup>4</sup>. On remarque la rapidité avec laquelle les premières structurations se forment. La couche est encore loin d’un réseau carré parfait, mais on distingue certaines régions mieux ordonnées que d’autres sur les images (m)-(p).

### 11.2.2 Transformée de Fourier de l’image

La transformée de Fourier permet de mettre en évidence les longueurs caractéristiques d’une image. Nous avons appliqué cette opération à des images représentant les différentes étapes de la formation d’un réseau carré presque parfait.

La séquence d’image qui est traitée ici a été obtenue en synchronisant la caméra avec le générateur : une image est prise toutes les  $2T$  secondes où  $T$  est la période de l’oscillation. On a alors une vision stroboscopique du système qui nous permet d’étudier l’évolution des structures de période en période, à une même phase de l’oscillation.

La première étape est l’apparition de quelques maxima (points les plus clairs sur l’image) sur une partie de la couche. Ces maxima ne présentent aucune structure entre eux [Fig. 11.8(a)]. Cette première étape se produit dès les premières périodes de l’oscillation. La deuxième étape consiste en le développement de pics sur l’ensemble de la couche [Figs. 11.8(d)-11.8(g)]. La transformée de Fourier montre déjà l’apparition d’une longueur

3. Utilisation du logiciel **Matlab** et de la commande **Histeq** qui permet l’égalisation d’histogrammes des images.

4. En filmant à 400 images à la seconde, à cause de la lampe fonctionnant à 50 Hz, certaines images apparaissent fort sombres, tandis que d’autres sont plus claires.

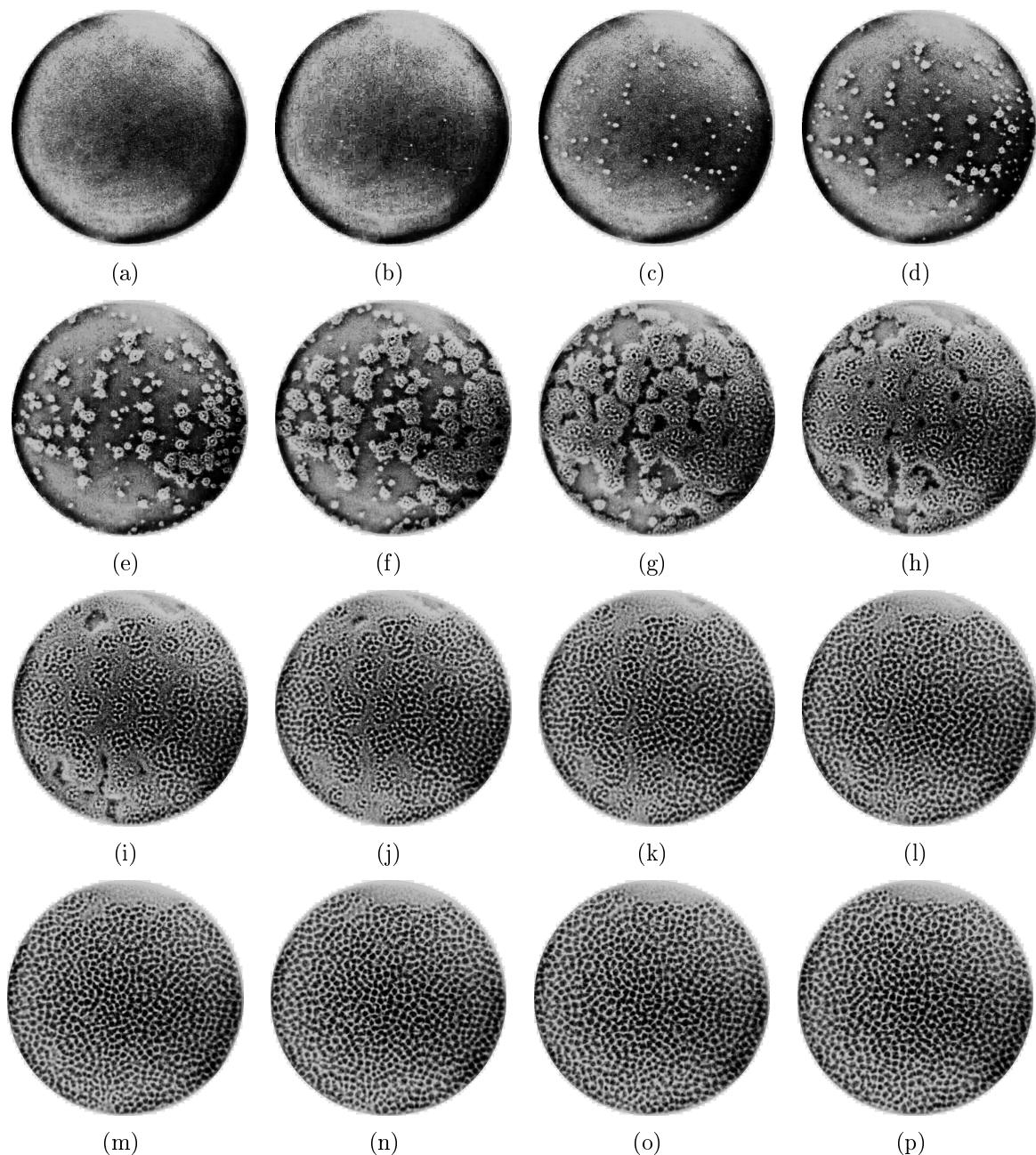


FIG. 11.7 – Séquence montrant l'apparition du réseau carré à partir d'une couche plate (400 images à la seconde). Les images (a) et (p) sont séparées d'une période d'oscillation.

caractéristique [Fig. 11.8(e)].

Les images 11.8(g)-11.9(a) montrent le début de la phase de réarrangement : les pics se déplacent d'une période à l'autre et l'ordre apparaît petit à petit. On remarque sur les images 11.8(i)-11.9(c) une diminution du rayon du cercle représentant la longueur caractéristique du réseau, mais dans l'espace de Fourier. Autrement dit, au cours de cette phase de réarrangement, on assiste à une augmentation de la distance moyenne entre des pics voisins.

Après quelques centaines de périodes d'oscillations l'ordre est quasiment parfait [Fig. 11.9(d)]. La transformée de Fourier est constituée de points disposés en croix et représentant les différentes harmoniques [Fig. 11.9(e)]. On a donc une longueur caractéristique et une orientation propre du réseau. Les pics subissent encore de légers déplacements entre les images 11.9(d) et 11.9(g), mais les transformées restent quasiment identiques.

### 11.2.3 Fonction de corrélation

Nous avons choisi, pour caractériser le réseau, d'utiliser la fonction de corrélation de paire  $g(r)$  définie comme suit [2] :

entre deux sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  centrées sur un atome, on trouve un nombre d'atomes  $dN(r)$  qui est proportionnel à l'épaisseur  $dr$ , à  $4\pi r^2$  et à la densité  $\rho$  :

$$dN(r) = 4\pi r^2 \rho g(r) dr$$

ou

$$\frac{dN(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho g(r) = G(r)$$

La fonction de corrélation de paire module la parabole  $4\pi r^2 \rho$  et indique les écarts par rapport au désordre du gaz parfait.

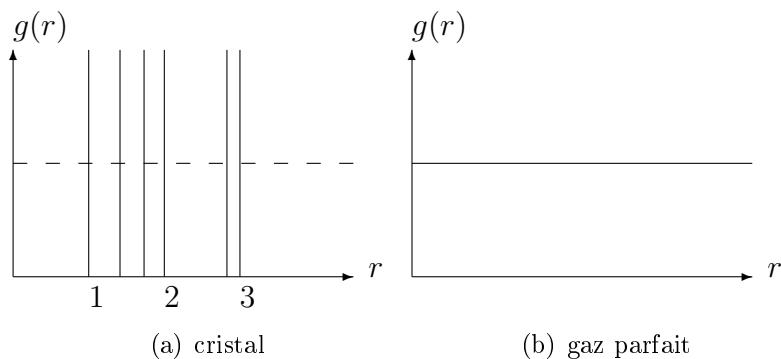


FIG. 11.10 – Fonction de corrélation de paire pour un cristal (a) et un gaz parfait (b).

Dans le cristal seules certaines distances  $r$  existent, et  $g(r)$  est formé de pics infiniment fins, situés au différentes distances interatomiques.

#### Détermination des positions des maxima

Notre but est d'obtenir une liste contenant les coordonnées des maxima (pics) à différents instants de l'évolution de la structure. Nous présentons ici les différentes étapes que

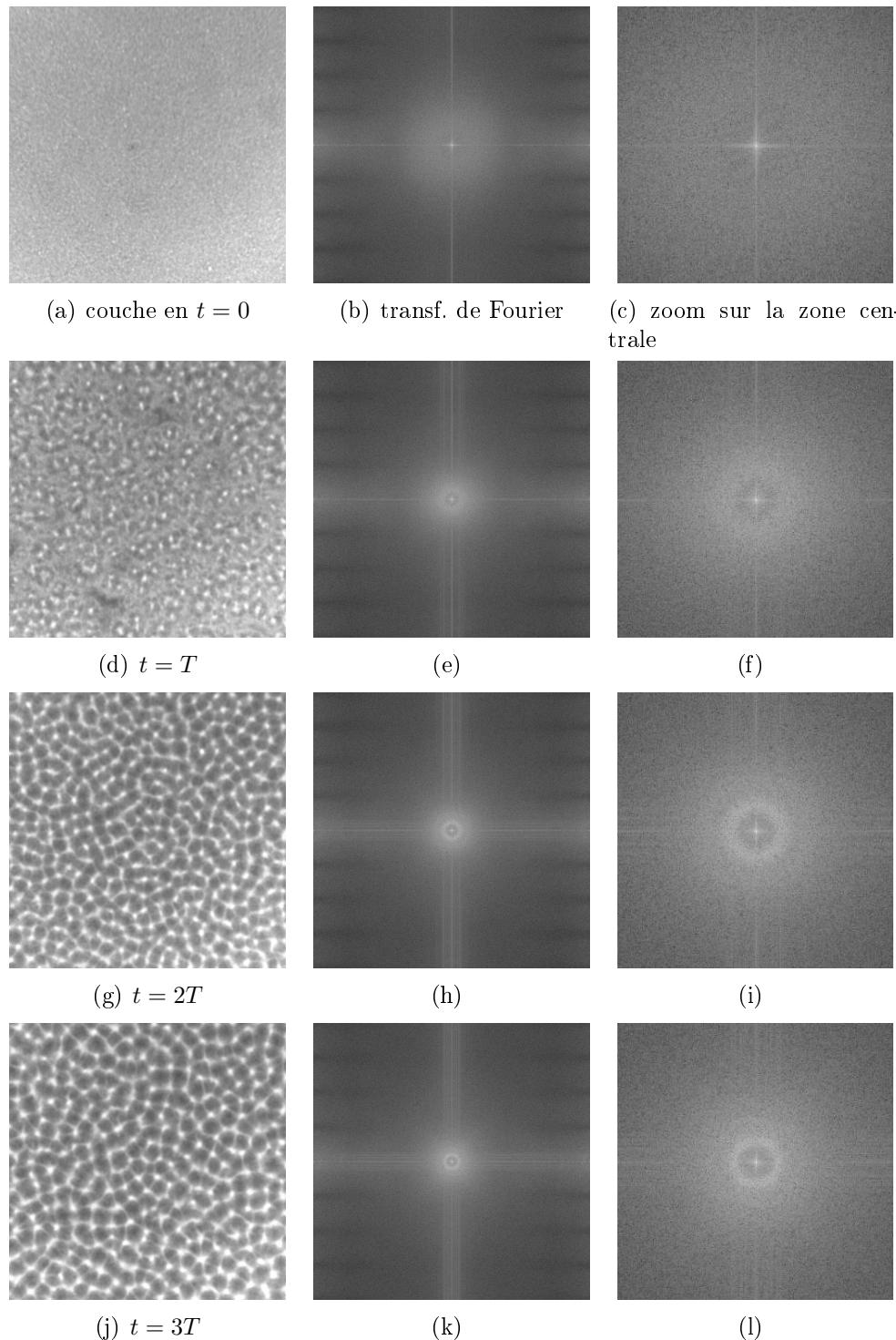


FIG. 11.8 – Apparition de l'ordre dans la couche (caméra synchronisée avec l'oscillation) : les images de la colonne de gauche représentent la couche à différents stades de son évolution ; les images centrales sont les transformées de Fourier des images de gauche ; les images de droite sont des agrandissements de la zone centrale (faibles fréquences) de l'espace de Fourier. La fréquence de vibration est de 27 Hz et l'amplitude  $\Gamma \cong 3$ .

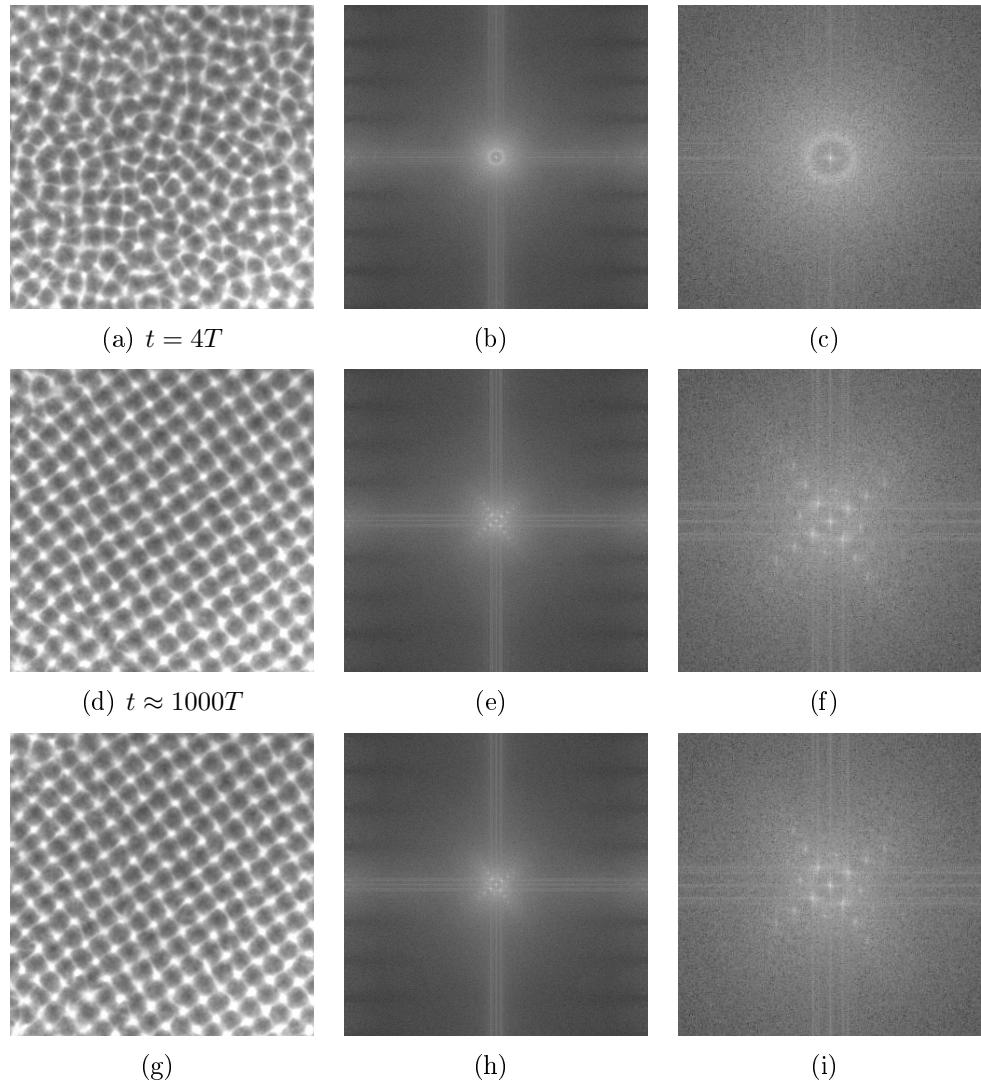


FIG. 11.9 – Apparition de l'ordre dans la couche (suite): les transformées de Fourier mettent en évidence l'apparition d'une longueur caractéristique et d'une orientation propre du réseau.

nous avons utilisées. Les résultats de ces étapes sont résumés sur la figure 11.11. Le détail des commandes Matlab auxquelles nous avons eu recours sont reprise dans la table 11.1 page 127.

1. correction de l'éclairage : on constate sur la figure 11.11(a) que l'éclairage n'est pas uniforme, certains pics sont plus éclairés que d'autres, ce qui les rends plus gros et rendra plus délicat la suite des opérations. Nous avons utilisé un filtre `tophat` qui permet d'uniformiser le niveau de luminosité [Fig. 11.11(b)].
2. isolation des pics : nous avons procédé à une érosion de l'image afin de supprimer aux maximum les traits qui joignent les pics voisins [Fig. 11.11(d)].
3. binarisation : on transforme l'image en niveau de gris en une image en noir et blanc [Fig. 11.11(e)].
4. élimination des points parasites : les opérations précédentes ont laissé apparaître quelques petits objets entre les pics. L'opération `bwareaopen` vise à supprimer les objets dont la taille est inférieure à une limite que l'on fixe [Fig. 11.11(f)].
5. suppression éventuelle des objets en contact avec le bord.
6. localisation des pics : la commande `Analyse Particles` du logiciel ImageJ nous permet de déterminer les positions (et éventuellement d'autres renseignements) des objets dont l'aire (en pixels) est comprise entre deux valeurs limites que l'opérateur choisit. On obtient ainsi une liste contenant le numéro de l'objet (un pic dans notre cas) et les coordonnées  $x_m$  et  $y_m$  de son centre de masse [Fig. 11.11(g)].

La séquence de la figure 11.13 montre les résultats de notre méthode de localisation des maxima. On y voit clairement la coexistence d'un domaine plus ou moins ordonné et d'un domaine désordonné. Le domaine ordonné croît progressivement jusqu'à atteindre la quasi-totalité de la couche.

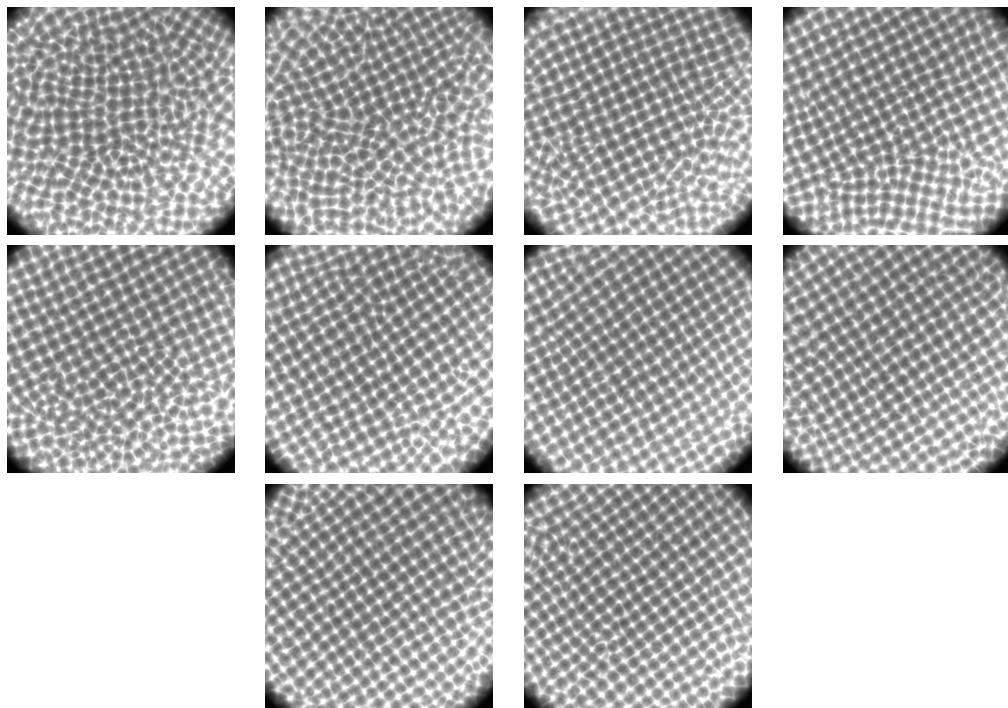


FIG. 11.12 – Séquence des images traitées.

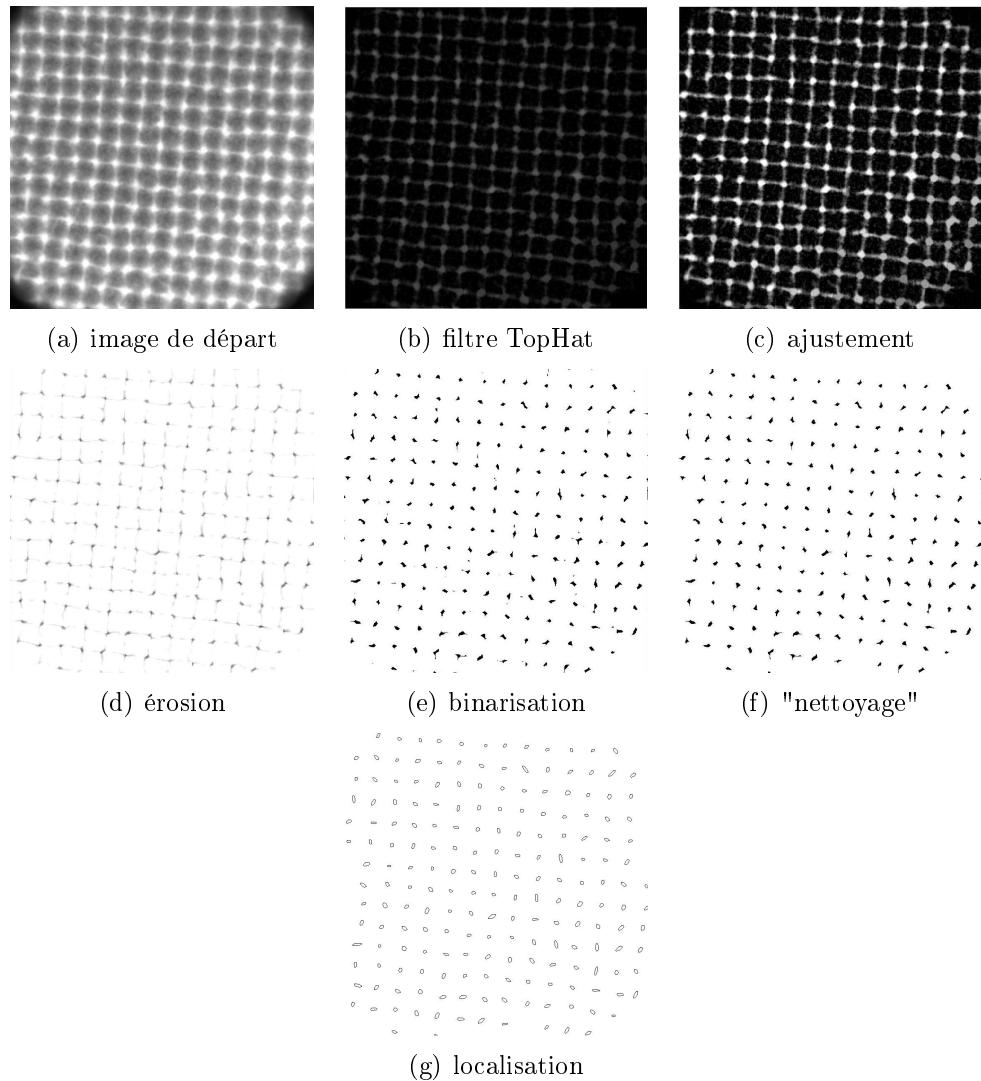


FIG. 11.11 – Localisation des maxima par traitement des images.

```
%-----
N = 9;
% numéro des images de la séquence à traiter
numero = 7*ones(1,N)+[100:100:(N*100)]

for k=1:length(numero),
    % lecture des images de la séquence à traiter
    i = numero(k)
    form = imread(['formation_carre_0',num2str(i)],'jpg');
    % filtre Top Hat
    se = strel('disk',12);
    J = imtophat(form,se);

    % ajustement
    K = imadjust(J,stretchlim(J));
    % erosion
    se = strel('disk',7);
    K1=imerode(K,se);

    % binarisation
    level = graythresh(K1);
    BW = im2bw(K1,level);

    % suppression des points parasites
    BW2 = bwareaopen(BW,35);
    BW2 = imclearborder(BW2);
    BW2 = imcomplement(BW2);

    imwrite(BW2,['positions',num2str(i),'.jpg'],'jpg')
end;
%-----
```

TAB. 11.1 – *Commandes Matlab pour la localisation des pics.*

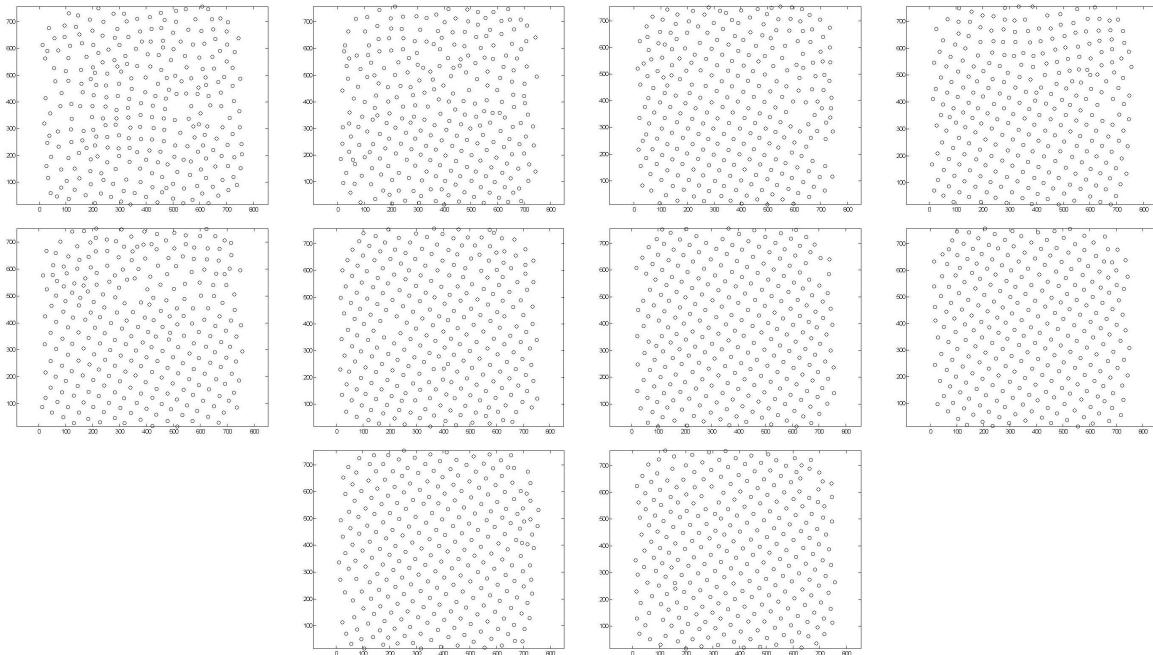


FIG. 11.13 – *Évolution des positions des maxima au cours du temps. Les images successives sont séparées d'environ 100 périodes d'oscillations.*

### Calcul de la fonction de corrélation

La méthode utilisée pour obtenir une courbe donnant le nombre de particules (nous assimilons les maxima à des ions d'un cristal) située à une distance entre  $r$  et  $r + dr$  d'une particule donnée est assez simple une fois que les positions sont connues :

1. pour chaque particule, on calcule les distances qui la séparent de ses voisines ;
2. on normalise ces distances par la distance minimale entre deux voisins (le pas du réseau) ;
3. on compte le nombre de voisins  $N$  dont la distance est comprise entre  $R$  et  $R + \Delta R$  ;
4. on normalise éventuellement  $N$  par le nombre total de points dans le réseau ;
5. on trace l'histogramme du nombre de voisins en fonction de l'intervalle dans lequel on se trouve.

Nous avons représenté sur la figure suivante le résultat de cette méthode lorsque nous l'appliquons à un réseau parfait. Les pics en  $1, \sqrt{2}, 2, \dots$  apparaissent clairement.

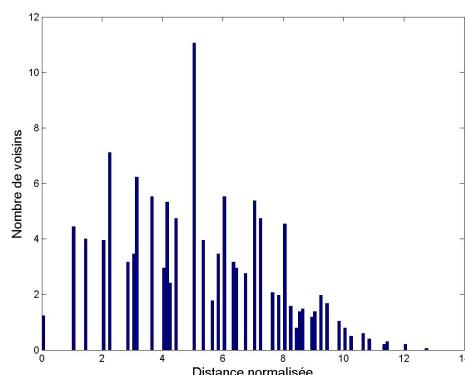


FIG. 11.14 – *Fonction de corrélation calculée pour un réseau parfait.*

## Résultats

Le programme MATLAB qui nous a servi à ces calculs est repris dans le tableau 11.2. Les résultats sont présentés sur la figure 11.15. Les images traitées sont les mêmes que celles qui ont servi à produire la séquence de la figure 11.13. On peut observer le développement des pics correspondant aux distances entre particules. Les calculs n'ont pas été effectués avec une grande précision, mais l'émergence de l'ordre apparaît tout de même sur les courbes.

A noter que les distances (abscisse) ont été normalisées par la distance minimale entre deux particules distinctes et ce, pour chaque stade de l'évolution. Cela explique que nous n'ayons pas les mêmes axes pour tous les graphiques. Le nombre de voisins (ordonnée) est normalisé par le nombre total de particules.

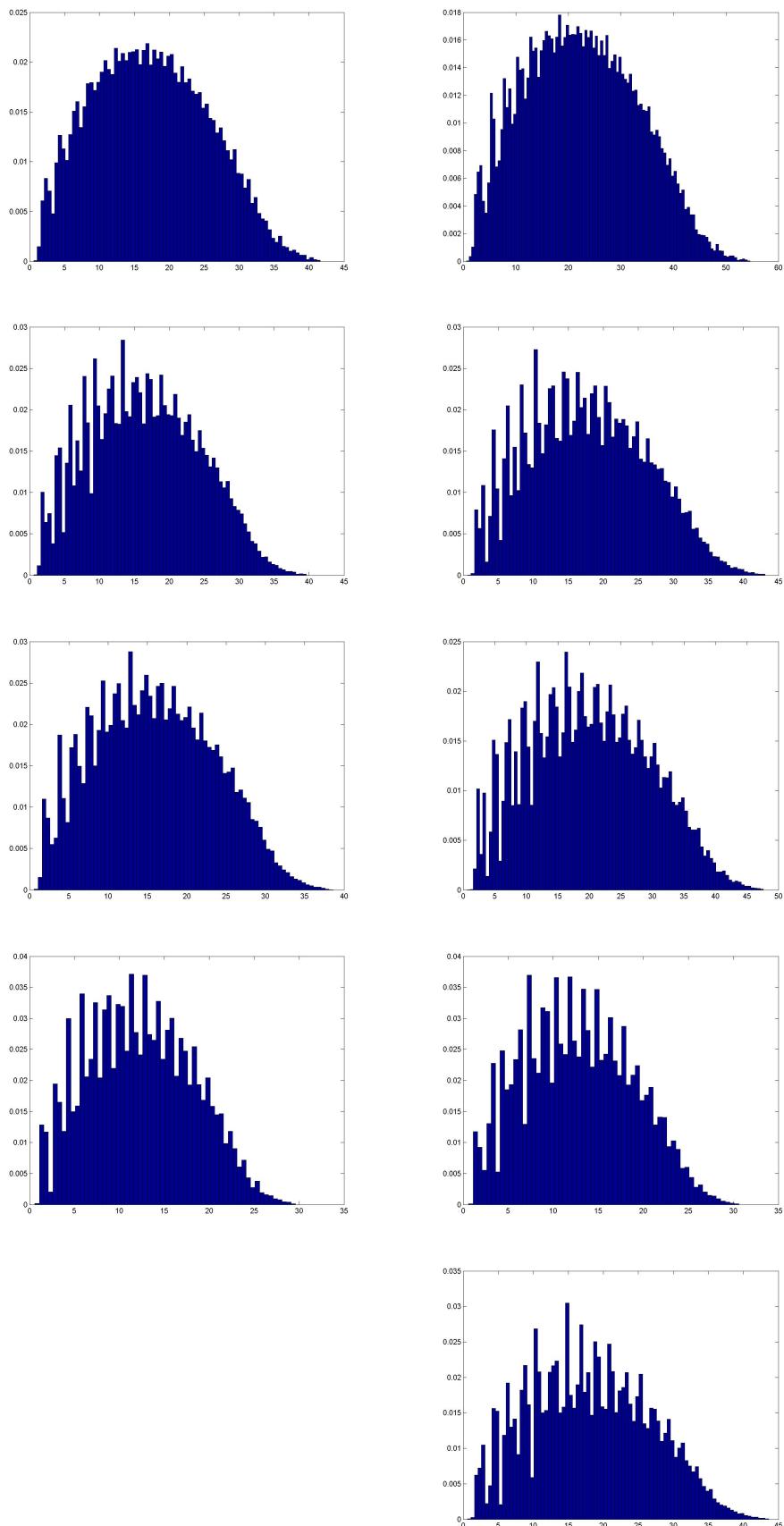


FIG. 11.15 – *Évolution de la fonction de corrélation.* Les images successives sont séparées d'environ 100 périodes d'oscillations. La première courbe correspond à la seconde image de la figure 11.12. La comparaison de la première image avec la dernière met en évidence le développement des pics aux distances inter-particules.

```
%-----
M = 9;
numero = 7*ones(1,M)+[100:100:(M*100)]; % numéro des images de la séquence à traiter
% ici de 107 à 907

for k = 1:length(numero),
    i = numero(k);
    [num,format,xm,ym] = textread(['Results',num2str(i),'.txt'],'%d%s%f%f');

    % calcul des distances

    for i = 1:length(xm),
        for j = 1:length(xm),
            distance((i-1)*length(xm)+j) = sqrt((xm(i)-xm(j))^2+(ym(i)-ym(j))^2);
        end;
    end;

    % recherche du pas du réseau

    dmin = 100;
    for m = 1:length(distance),
        if distance(m)>0,
            if distance(m)< dmin,
                dmin = distance(m);
            else
                end;
            else
                end,
        end;
    dmin

    d0 = distance/dmin;
    maximum = ceil(max(d0))
    edges = [0.1:0.5:maximum];

    figure(k);
    S = histc(d0,edges);
    S1 = S/(length(xm))^2;
    BAR(edges,S1,'histc');

end;
%-----
```

TAB. 11.2 – Commandes Matlab pour la localisation des pics.

## 11.3 Conclusion

Nous venons de montrer quelques types d'analyses qui ont été réalisées grâce au traitement d'images. Les courbes de dispersion réalisées montrent clairement la décroissance de la longueur d'onde à la fréquence, conformément aux résultats d'autres groupes.

La caméra rapide nous a permis d'observer plus en détail le mécanisme de formation d'un réseau carré à partir d'une couche initialement plate. L'émergence de l'ordre a été caractérisée par les transformées de Fourier des images.

Nous avons terminé ce chapitre en développant une méthode permettant la mesure automatique des positions des maxima au cours du temps. Nous nous sommes servis de cette méthode pour calculer la fonction de corrélation du pattern.

## Bibliographie

- [1] P.B. Umbanhowar, H.L. Swinney, *Physica A* **288** (2000) 344-362.  
*Wavelength scaling and square/stripe and grain mobility transitions in vertically oscillated granular layers.*
- [2] J.-P. Gaspard, cours d'*Introduction à la Physique de la Matière Condensée* (2002)  
pages 13-14.

# Perspectives

Voici les quelques points pour lesquels il me semble intéressant de consacrer du temps et qui devraient être approfondis.

## 1 Améliorations du dispositif expérimental

### 1.1 Règlage du niveau

Une fois que le nouveau vibreur électromécanique sera installé, il sera utile de trouver, si nécessaire, un moyen de régler correctement et rapidement l'horizontalité de la plaque. L'utilisation de trois pieds au lieu des quatre actuellement en place devrait faciliter les opérations.

### 1.2 Fixation du dispositif

L'ensemble du dispositif vibrant pourra être fixé sur la table d'optique à l'aide de vis, afin de supprimer les vibrations parasites. Toutefois, la masse élevée du nouveau vibreur sera peut-être suffisante pour ne pas exiger sa fixation.

### 1.3 Éclairage

Le problème de la lampe halogène employée est qu'elle ne donne pas un éclairage uniforme. Ceci n'a pas beaucoup d'importance dans la plupart des analyses, sauf lors de certains traitements d'images. Certains chercheurs ont recours à des diodes électroluminescentes, qui ont l'avantage de pouvoir être synchronisées avec l'oscillation pour obtenir une vision stroboscopique du système.

## 2 Aspects théoriques

La plupart des modèles abordés dans ce travail nécessitent une résolution numérique, ce qui implique un travail de programmation non négligeable. Par contre, le modèle de la balle inélastique reste accessible, c'est pourquoi nous pensons qu'il est utile de l'utiliser conjointement aux mesures expérimentales.

En ce qui concerne les modèles de type milieu continu, les conditions aux limites correctes à imposer constituent un domaine qui reste à explorer.

## 3 Aspects pratiques

### 3.1 Diagramme de phases

L'obtention d'un diagramme de phases<sup>5</sup> précis permettrait des comparaisons intéressantes avec d'autres travaux effectués dans le domaine.

### 3.2 Méthode de mesures des longueurs d'onde

Dans ce travail, les mesures ont été effectuées image par image. Une méthode automatisée pourrait être mise en oeuvre afin de gagner du temps et obtenir rapidement des relations de dispersion (longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de la fréquence  $f$ ) pour différents types de granulaires.

### 3.3 Étude des mélanges binaires

Dans le chapitre 9, nous avons seulement observé de manière qualitative ce qui se produit lorsque nous utilisons une couche constituée de deux types de grains. Une étude plus systématique comprenant des diagrammes de phases et des relations de dispersion, à la fois pour des couches homogènes et pour des couches formées de mélanges binaires, constitue un sujet rarement abordé et facilement accessible expérimentalement.

La formation des tas et des oscillons dans ces mélanges binaires sont également des points qui méritent d'être étudiés.

## 4. Résumé

Le tableau 11.3 résume les différentes directions de ce travail qui méritent d'être poursuivies.

Amélioration du dispositif	- réglage du niveau - fixation - accéléromètre éclairage automatisation des mesures
Aspects théoriques	- conditions aux limites dans les modèles "continuum" - balle inélastique
Aspects pratiques	- création d'un diagramme de phases - propriétés des mélanges binaires

TAB. 11.3 – Résumé des perspectives.

5. Type de structures en fonction de la fréquence  $f$  et de l'accélération  $\Gamma$ .

# CONCLUSIONS

Ainsi se termine ce mémoire consacré à la structuration dans les matériaux granulaires accélérés. Comme nous l'avions signalé dans l'introduction, nous avons volontairement abordé ce travail avec pour objectif d'avoir une vue d'ensemble du problème, plutôt que de cibler l'un ou l'autre aspect de celui-ci.

Ainsi, dans la première partie, le problème a été replacé dans un contexte général : nous avons abordé successivement :

- les propriétés générales des milieux granulaires, qui nous ont permis de dégager quelques concepts essentiels dans la suite du travail ;
  - quelques exemples de structures dissipatives, où nous avons mis en évidence les caractéristiques communes entre des systèmes physiques totalement différents ;
  - la description de phénomènes observables dans une couche de granulaires soumise à des vibrations, description qui nous a servi de base pour comparer nos résultats expérimentaux.
- 

Dans la seconde partie, nous avons passé en revue plusieurs modèles qui décrivent avec plus ou moins de succès les comportements dans la couche de granulaires :

- les simulations de dynamique moléculaire,
- les équations de Jenkins et Richman,
- les équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau,
- la modèle de la balle inélastique.

Cette partie nous a permis d'étudier plus en détail la validité de la description de la couche granulaire en comme un milieu continu. La conclusion est que les conditions de validité ne sont pas parfaitement vérifiées, mais que les résultats de ce type de modèle sont acceptables.

Nous terminons cette partie "modélisation" en consacrant un chapitre à l'étude comparative du système faisant l'objet de ce travail avec l'instabilité de Faraday. Les différences physiques entre les deux systèmes ont été mises en évidence et une analyse linéaire de stabilité, basée sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide et sur celles de Jenkins et Richman pour la couche de granulaires, a été effectuée. Là encore, la conclusion est que le modèle "continuum" peut fournir des résultats intéressants.

---

Dans la partie expérimentale, nous avons présenté les structures que nous avons été capables de reproduire, en les comparant avec ce que nous avions décrit dans la première partie. Nous sommes parvenus à reproduire en grande partie ces phénomènes.

Le problème de la structuration dans les couches formées de deux types de granulaires a été abordé. Les résultats de nos expériences montrent que les mêmes patterns que dans les couches homogènes apparaissent. Les plus grosses particules se placent simplement sur les patterns formés par les plus petites.

Les essais sur des particules non sphériques, notamment du sable, n'ont donné que peu de résultats. Certains structures inhabituelles ont toutefois été observées.

Le dernier chapitre a été consacré à l'analyse des images : nous avons ainsi mesurés des longueurs d'onde et produit des courbes de dispersion. Nous nous sommes également concentrés sur la caractérisation et l'émergence de l'ordre au sein de la couche, en ayant recours à différents outils de traitement de l'image.

Nous concluons en disant que notre objectif majeur a été atteint, à savoir ouvrir le maximum de voies pour de futurs travaux dans le domaine, que ce soit en thermodynamique des phénomènes irréversibles, en physique statistique, en systèmes non linéaires ou en mécanique des milieux continus. Il est évident que le chemin est encore long et qu'il reste de nombreux points à étudier, c'est pourquoi nous terminons par ce petit message à l'adresse des étudiants qui poursuivraient ce travail... "bon travail et bon amusement!"

# Table des figures

0.1	Schéma de l'expérience.	ix
1.1	Silo.	5
1.2	Ségrégation horizontale à l'aide d'une container avec fond en dents de scie	6
1.3	Évolution d'un mélange de billes de verre et de bronze (grises) soumis à des oscillations verticales	6
1.4	Ségrégation sous forme de bandes dans un cylindre en rotation.	6
2.1	Schéma de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.	11
2.2	Spirales, carrés et hexagones dans l'expérience de Rayleigh-Bénard	12
2.3	Exemples de motifs dans l'expérience de Rayleigh-Bénard	12
2.4	Schéma de l'instabilité de Faraday.	12
2.5	Exemples de structures observées dans l'expérience de Faraday.	13
2.6	Espaces des paramètres pour l'instabilité de Faraday	13
2.7	Schéma de l'écoulement de Couette.	14
2.8	Illustration du Taylor Vortex Flow.	14
2.9	Exemples d'instabilité dans l'expérience de Taylor-Couette.	15
2.10	Similitudes entre les structures dissipatives de différents systèmes physiques	15
3.1	Motifs Carrés.	20
3.2	Structure en lignes	21
3.3	Phases alternées d'hexagones	21
3.4	Coexistence d'hexagones de phases opposées	21
3.5	Interface	21
3.6	Interface décorée	22
3.7	Illustration des bulles de phase et évolution temporelle	22
3.8	Structure en forme de labyrinthes	23
3.9	Diagramme de phases	23
3.10	Oscillons	24
3.11	Groupements d'oscillons	25

3.12	Exemples de structures en spirales . . . . .	25
3.13	Motifs en triangles et en forme de cible . . . . .	26
3.14	Autres types de structures . . . . .	26
3.15	Mouvements de convection et formation d'un tas . . . . .	27
3.16	Formation de tas . . . . .	27
3.17	Trajectoire des particules qui participent au processus de convection lorsque le tas est projeté par la plaque . . . . .	28
3.18	Instabilité de Rayleigh-Taylor et formation de tas . . . . .	28
3.19	Mécanisme de fusion de tas de poudre soumis à des tapes . . . . .	28
4.1	Comparaison expérience et dynamique moléculaire . . . . .	34
4.2	Longueur d'onde en fonction de la fréquence : simulations et expériences . .	34
4.3	Évolution d'un pattern dans une couche quasi bidimensionnelle . . . . .	35
4.4	Perte de stabilité d'une structure en carrés en l'absence de frottement . . .	35
4.5	Résultats de simulations montrant que seuls les patterns en lignes sont stables pour des particules sans frottement. . . . .	36
4.6	Vues latérales de la couche . . . . .	37
4.7	Influence de la dissipation sur les motifs produits . . . . .	37
5.1	Section efficace de collision pour deux particules de diamètre $a$ . . . . .	43
5.2	Écoulement dans un milieu granulaire . . . . .	45
5.3	Fonction de distribution de vitesses lors d'une accélération . . . . .	50
5.4	Corrélations de vitesses en fonction de la séparation des particules . . . .	51
5.5	Température adimensionnelle et fraction volumique en fonction de la hauteur adimensionnelle pour différents temps . . . . .	53
5.6	Définition de l'angle de Mach. . . . .	54
5.7	Dépendance de l'angle de Mach en fonction de la vitesse de l'obstacle . . .	54
6.1	Structures produites par l'équation de Ginzburg-Landau . . . . .	60
6.2	Instabilité de surface et formation de labyrinthe . . . . .	60
6.3	Oscillon, solution de l'équation de Swift-Hohenberg . . . . .	61
6.4	Transition d'un oscillon en raies . . . . .	62
6.5	Transition d'un oscillon en carrés . . . . .	62
6.6	Interactions d'oscillons de polarités opposées . . . . .	62
6.7	Évolution temporelle de l'onde . . . . .	63
6.8	Solution stationnaire localisée de l'équation de Ginzburg-Landau . . . . .	63
6.9	Représentation de $\Re(\psi)$ en niveau de gris . . . . .	64
6.10	Évolution des structures dans le temps . . . . .	65
7.1	Système balle + plaque : la balle est soumise à $\vec{g}$ et à une force de réaction de la plaque. . . . .	69

7.2	Trajectoires de la plaque (noir) et de la balle (bleu) pour $\Gamma = 2$ .	71
7.3	Trajectoires de la plaque et de la balle pour $\Gamma = 4$ .	72
7.4	Trajectoires de la plaque et de la balle pour $\Gamma = 4.7$ .	72
7.5	Trajectoires de la plaque et de la balle pour $\Gamma = 5.5$ .	73
7.6	Trajectoires de la plaque et de la balle pour $\Gamma = 7$ .	73
7.7	Trajectoires de la plaque et de la balle pour $\Gamma = 8.5$ .	74
7.8	Diagramme de phases.	74
8.1	Structures en hexagones pour un liquide et une couche de granulaires	79
8.2	Structures en carrés pour un liquide et une couche de granulaires	79
8.3	Structures en lignes pour un liquide et une couche de granulaires	79
8.4	Structures en spirale dans l'expérience de Faraday	80
8.5	Structures en spirale dans un milieu granulaire	80
8.6	Dynamique de la couche granulaire : chaque image est séparée de $T/4$	83
8.7	Longueur d'onde adimensionnelle en fonction de la fréquence	89
8.8	Courbes de stabilité marginale	89
9.1	Schéma du dispositif expérimental.	96
9.2	Dispositif vibrant : (a) plaque de cuivre ; (b) cylindre en plexiglas ; (c) sonde de l'accéléromètre.	97
9.3	Boîtier d'alimentation de l'accéléromètre et schéma de l'ADXL 150.	98
9.4	Caméra et objectif.	99
9.5	Dispositif : (a) dispositif vibrant ; (b) accéléromètre ; (c) amplificateur ; (d) oscilloscope ; (e) support pour caméra ou appareil photo.	100
9.6	Vis de réglage et niveau.	102
9.7	Adhésion des grains à la paroi du cylindre.	102
9.8	Signaux de l'accélération de la plaque.	102
10.1	Distributions de tailles des particules.	105
10.2	Images du réseau carré prises à $T = 1/25$ seconde d'intervalle	106
10.3	Structures en lignes	106
10.4	Structures en hexagones.	107
10.5	Oscillons.	107
10.6	Agrandissement montrant des structures isolées non axisymétriques	108
10.7	Groupements d'oscillons.	108
10.8	Formation de tas dans la couche granulaire.	108
10.9	Désordre observé pour de fortes accélérations.	109
10.10	Coexistence des plusieurs motifs.	109
10.11	Apparition progressive d'un réseau carré lorsque la masse de granulaires est augmentée.	110

10.12	Réseau carré.	110
10.13	Structure en lignes.	111
10.14	Diagramme de phases obtenu avec 18.1 grammes de grains blancs.	112
10.15	Exemple de structures dans les couches formées de deux types de granulaire	113
10.16	Formation de tas dans une couche formée de deux types de granulaires . . .	114
10.17	Structures avec grains anguleux . . . . .	114
11.1	Définition de la longueur d'onde. . . . .	117
11.2	Structures en lignes : $\Gamma = 5$ ; à gauche $f = 40 \text{ Hz}$ , à droite $f = 50 \text{ Hz}$ . . . .	117
11.3	Méthode de mesure la longueur d'onde . . . . .	117
11.4	Courbe de dispersion . . . . .	118
11.5	Courbe de dispersion . . . . .	119
11.6	Courbes de dispersion . . . . .	120
11.7	Séquence montrant l'apparition du réseau carré à partir d'une couche plate (400 images à la seconde) . . . . .	121
11.10	Fonction de corrélation de paire pour un cristal (a) et un gaz parfait (b). .	122
11.8	Apparition de l'ordre dans la couche (caméra synchronisée avec l'oscillation)	123
11.9	Apparition de l'ordre dans la couche (suite) . . . . .	124
11.12	Séquence des images traitées. . . . .	125
11.11	Localisation des maxima par traitement des images . . . . .	126
11.13	Évolution des positions des maxima au cours du temps . . . . .	128
11.14	Fonction de corrélation calculée pour un réseau parfait. . . . .	128
11.15	Évolution de la fonction de corrélation . . . . .	130

# Liste des tableaux

1.1	Classification des matériaux granulaires en fonction des interactions avec le milieu environnant . . . . .	4
2.1	Modes d'apport et de dissipation de l'énergie dans les différents systèmes étudiés. . . . .	16
5.1	Équations du modèle de Jenkins et Richman. . . . .	49
6.1	Résumé des structures produites par les équations de Swift-Hohenberg et de Ginzburg-Landau. . . . .	65
7.1	Types de trajectoires et structurations en fonction de $\Gamma$ . . . . .	74
8.1	Types de géométries observées pour les fluides en fonction de la viscosité et de la fréquence . . . . .	78
8.2	Avantages et inconvénients des différents modèles décrivant la couche granulaire. . . . .	93
11.1	Commandes Matlab pour la localisation des pics. . . . .	127
11.2	Commandes Matlab pour la localisation des pics. . . . .	131
11.3	Résumé des perspectives. . . . .	135