ME731 - Métodos em Análise Multivariada
– Distribuição Normal Multivariada I –

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 04

Agenda I

Introdução

Introdução

- Várias das técnicas que serão vistas nesta disciplina baseiam-se na suposição de Normalidade Multivariada.
- Em alguns casos, a distribuição Normal Multivariada é uma boa aproximação do fenômeno em estudo.
- O Teorema Central do Limite (TCL) permitirá obter distribuições aproximadas de estatísticas multivariadas.

Definição

Definição

Distribuição Normal Multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_p)'$ um vetor aleatório p-dimensional. $\mathbf{X}$ tem distribuição Normal Multivariada com vetor de medias μ e matriz de covariância $\Sigma > 0$, denotado por $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, se sua função de densidade é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)/2},$$

com $-\infty < x_i < \infty, \forall i = 1, \cdots, p$.

Definição

Distribuição Normal Multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_p)'$ um vetor aleatório p-dimensional. $\mathbf{X}$ tem distribuição Normal Multivariada com vetor de medias μ e matriz de covariância $\Sigma > 0$, denotado por $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, se sua função de densidade é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)/2},$$

com $-\infty < x_i < \infty, \forall i = 1, \cdots, p$.

Para ver uma ilustração do caso bivariado entre aqui. —

Definição

Teorema

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e seja $\Sigma^{1/2}$ a matriz raiz quadrada de Σ. Então $\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim N_p(0, I)$ e $Y_1, \cdots, Y_p$ são v.a independentes $\sim N(0, 1)$.

Definição

Teorema

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e seja $\Sigma^{1/2}$ a matriz raiz quadrada de Σ. Então $\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim N_p(0, I)$ e $Y_1, \cdots, Y_p$ são v.a independentes $\sim N(0, 1)$.

Demostração:

- $\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{x} - \mu) \rightarrow \mathbf{x} = u(\mathbf{y}) = \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu.$

Definição

Teorema

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e seja $\Sigma^{1/2}$ a matriz raiz quadrada de Σ. Então $\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim N_p(0, I)$ e $Y_1, \cdots, Y_p$ são v.a independentes $\sim N(0, 1)$.

Demostração:

- $\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{x} - \mu) \to \mathbf{x} = u(\mathbf{y}) = \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu$.
- $\mathbf{J} = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\frac{\partial \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\Sigma^{1/2}\right| = |\Sigma|^{1/2}$

Definição

Teorema

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e seja $\Sigma^{1/2}$ a matriz raiz quadrada de Σ. Então $\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim N_p(0, I)$ e $Y_1, \cdots, Y_p$ são v.a independentes $\sim N(0, 1)$.

Demostração:

- $\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{x} - \mu) \to \mathbf{x} = u(\mathbf{y}) = \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu.$
- $\mathbf{J} = \left|\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\dfrac{\partial \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\Sigma^{1/2}\right| = |\Sigma|^{1/2}$
- $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) = \mathbf{y}'\mathbf{y}$

Definição

Teorema

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e seja $\Sigma^{1/2}$ a matriz raiz quadrada de Σ. Então $\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim N_p(0, I)$ e $Y_1, \cdots, Y_p$ são v.a independentes $\sim N(0, 1)$.

Demostração:

- $\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{x} - \mu) \rightarrow \mathbf{x} = u(\mathbf{y}) = \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu$.
- $\mathbf{J} = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\frac{\partial \Sigma^{1/2}\mathbf{y} + \mu}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\Sigma^{1/2}\right| = |\Sigma|^{1/2}$
- $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) = \mathbf{y}'\mathbf{y}$
- $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y})) = |\Sigma|^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\mathbf{y}'\mathbf{y}/2} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\mathbf{y}'\mathbf{y}/2}$.

Definição

Demostração:

Para provar que $Y_1, \cdots, Y_p$ são $N(0,1)$ indepententes, basta reescrever a densidade da normal multivariada.

Definição

Demostração:

Para provar que $Y_1, \cdots, Y_p$ são $N(0,1)$ indepententes, basta reescrever a densidade da normal multivariada.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\mathbf{y}'\mathbf{y}/2} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum_{i=1}^{p} y_i^2/2}$$

Definição

Demostração:

Para provar que $Y_1, \cdots, Y_p$ são $N(0,1)$ indepententes, basta reescrever a densidade da normal multivariada.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\mathbf{y}'\mathbf{y}/2} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum_{i=1}^{p} y_i^2/2}$$

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum_{i=1}^{p} y_i^2/2} = \prod_{i=1}^{p} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-y_i^2/2}}_{N(0,1)}$$

Definição

Demostração:

Para provar que $Y_1, \cdots, Y_p$ são $N(0,1)$ indepententes, basta reescrever a densidade da normal multivariada.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\mathbf{y}'\mathbf{y}/2} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum_{i=1}^{p} y_i^2/2}$$

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum_{i=1}^{p} y_i^2/2} = \prod_{i=1}^{p} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-y_i^2/2}}_{N(0,1)}$$

Logo, pelo Teorema da fatoração, $Y_1, \cdots, Y_p$ são $N(0,1)$ independentes.

Propriedades

Propriedades

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

1. A distribuição é simétrica em torno de μ.
2. A distribuição tem um único máximo em μ.
3. $U = (\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mu) \sim \chi^2_p$.
4. $\varphi_{\mathbf{X}}(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$.
5. $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mu \quad e \quad \mathbb{V}(\mathbf{X}) = \Sigma$.
6. $\mathbf{Y} = A_{q\times p}\mathbf{X} + c_{q\times 1} \sim N_q(A\mu + c, A\Sigma A')$
7. Qualquer combinação linear dos elementos de $\mathbf{X}$ tem distribuição normal univariada.
8. Qualquer subconjunto de $\mathbf{X}$ tem distribuição Normal (multivariada).

Propriedades

Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

1. A distribuição é simétrica em torno de μ.
2. A distribuição tem um único máximo em μ.
3. $U = (\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mu) \sim \chi^2_p$.
4. $\varphi_{\mathbf{X}}(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$.
5. $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mu \quad e \quad \mathbb{V}(\mathbf{X}) = \Sigma$.
6. $\mathbf{Y} = A_{q\times p}\mathbf{X} + c_{q\times 1} \sim N_q(A\mu + c, A\Sigma A')$
7. Qualquer combinação linear dos elementos de $\mathbf{X}$ tem distribuição normal univariada.
8. Qualquer subconjunto de $\mathbf{X}$ tem distribuição Normal (multivariada).

Demostração:

Propriedades

Marginais Normais implicam em Normalidade Multivariada?

Propriedades

Marginais Normais implicam em Normalidade Multivariada? Não!

Propriedades

Marginais Normais implicam em Normalidade Multivariada? Não!

Seja (X, Y) um vetor aleatório com densidade

$$f(x, y) = \phi(x)\phi(y) + h(x)h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

em que $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$ e $h(z) = (2\pi e)^{-1/2} z^3 I_{[-1,1]}(z)$

Propriedades

Marginais Normais implicam em Normalidade Multivariada? Não!

Seja (X, Y) um vetor aleatório com densidade

$$f(x, y) = \phi(x)\phi(y) + h(x)h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

em que $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$ e $h(z) = (2\pi e)^{-1/2} z^3 I_{[-1,1]}(z)$

- $f(x, y)$ é de fato densidade ($f(x, y) \geq 0$ e $\int\int f(x, y) = 1$) conjunta mas não é Normal Bivariada.
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \phi(x) \quad e \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \phi(y)$

O vetor aleatório (X, Y) com densidade $f(x, y)$ tem marginais $N(0, 1)$ mas não tem distribuição normal bivariada.

Propriedades

Marginais Normais implicam em Normalidade Multivariada? Não!

Seja (X, Y) um vetor aleatório com densidade

$$f(x, y) = \phi(x)\phi(y) + h(x)h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

em que $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$ e $h(z) = (2\pi e)^{-1/2} z^3 I_{[-1,1]}(z)$

- $f(x, y)$ é de fato densidade ($f(x, y) \geq 0$ e $\int\int f(x, y) = 1$) conjunta mas não é Normal Bivariada.
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \phi(x) \quad e \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \phi(y)$

O vetor aleatório (X, Y) com densidade $f(x, y)$ tem marginais $N(0, 1)$ mas não tem distribuição normal bivariada.

Para mais exemplos ver o capítulo 10 de Stoyanov (2013).

Distribuição condicional

Distribuição condicional

Seja $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)' \in \mathbb{R}^p$ com $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{p-k}$ então

$$\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2 = x_2 \sim N_k(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}),$$

em que $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\Sigma_{22}| > 0.$$

Distribuição condicional: Demostração

Por definição

$$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2} = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2)} = \frac{|\Sigma|^{-1/2}(2\pi)^{-p/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}}{|\Sigma_{22}|^{-1/2}(2\pi)^{-(p-k)/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)}}$$

Distribuição condicional: Demostração

Por definição

$$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2} = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2)} = \frac{|\Sigma|^{-1/2}(2\pi)^{-p/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}}{|\Sigma_{22}|^{-1/2}(2\pi)^{-(p-k)/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)}}$$

Por propriedade de determinantes

$$|\Sigma|^{-1/2} = |\Sigma_{22}|^{-1/2}|\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}|^{-1/2}$$

Distribuição condicional: Demostração

Por definição

$$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2} = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2)} = \frac{|\Sigma|^{-1/2}(2\pi)^{-p/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}}{|\Sigma_{22}|^{-1/2}(2\pi)^{-(p-k)/2}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)}}$$

Por propriedade de determinantes

$$|\Sigma|^{-1/2} = |\Sigma_{22}|^{-1/2}|\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}|^{-1/2}$$

Assim,

$$\frac{|\Sigma|^{-1/2}(2\pi)^{-p/2}}{|\Sigma_{22}|^{-1/2}(2\pi)^{-(p-k)/2}} = |\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}|^{-1/2}(2\pi)^{-k/2}$$

Distribuição condicional: Demostração

Por outro lado, precisamos calcular

$$e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)-(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

Distribuição condicional: Demostração

Por outro lado, precisamos calcular

$$e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)-(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

Seja $C_{11} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1}$, então $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) =$

Distribuição condicional: Demostração

Por outro lado, precisamos calcular

$$e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)-(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

Seja $C_{11} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1}$, então $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C_{11} & -C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

Distribuição condicional: Demostração

Por outro lado, precisamos calcular

$$e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)-(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

Seja $C_{11} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1}$, então $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C_{11} & -C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_1 - \mu_1)'C_{11}(\mathbf{x}_1 - \mu_1) - (\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_22(\mathbf{x}_1 - \mu_1) - \\
&(\mathbf{x}_1 - \mu_1)'C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2) + (\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2) + \\
&(\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2)
\end{aligned}$$

Distribuição condicional: Demostração

Por outro lado, precisamos calcular

$$e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)-(\mathbf{x}_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

Seja $C_{11} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1}$, então $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C_{11} & -C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

$$(\mathbf{x}_1 - \mu_1)'C_{11}(\mathbf{x}_1 - \mu_1) - (\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_22(\mathbf{x}_1 - \mu_1) -$$
$$(\mathbf{x}_1 - \mu_1)'C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2) + (\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2) +$$
$$(\mathbf{x}_2 - \mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}C_{11}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2)$$

$$= [(\mathbf{x}_1 - \mu_1) - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2)]'C_{11}[(\mathbf{x}_1 - \mu_1) - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2)]$$

Distribuição condicional: Demostração

Então, $f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) =$
$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}_1-\mu_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]' C_{11}[(\mathbf{x}_1-\mu_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2)]}$$

que é a densidade de uma $N_k(\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\mu_2), \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$

Apêndice

Apêndice

Decomposição espectral

Toda matriz simétrica $A_{p\times p}$ pode ser escrita como

$$A = P\Lambda P' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i',$$

em que

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$$

com $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sendo os autovalores e

$$P = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_p)$$

é uma matriz ortonormal com os autovetores (associados os seus respectivos autovalores) de A.

Apêndice

Matrizes particionadas

Sejam $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ então:

- $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2')$
- $\mathbf{X}'A = [\mathbf{X}_1'A_{11} + \mathbf{X}_2'A_{21} \quad \mathbf{X}_1'A_{12} + \mathbf{X}_2'A_{22}]$
- $\mathbf{X}'A\mathbf{X} = \mathbf{X}_1'A_{11}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2'A_{21}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1'A_{12}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2'A_{22}\mathbf{X}_2$
- $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$
- Se A for simétrica e quadrada $|A| = |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$

Apêndice

Matrizes particionadas

Se $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ for simétrica e quadrada,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

com

- $C_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$,
- $C_{12} = -C_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$,
- $C_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}C_{11}$ e
- $C_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}C_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$

Apêndice

Matriz raíz quadrada

Seja $A_{k\times k} > 0$ com decomposição especral. A matriz raíz quadrada de A, denotada por $A^{1/2}$ é dada por

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i' = P\Lambda^{1/2}P'.$$

Observação: $A^{1/2}A^{1/2} = A$ e $A^{1/2}A^{-1/2} = I$.

Apêndice

Matriz raíz quadrada

Seja $A_{k\times k} > 0$ com decomposição especral. A matriz raíz quadrada de A, denotada por $A^{1/2}$ é dada por

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i' = P\Lambda^{1/2}P'.$$

Observação: $A^{1/2}A^{1/2} = A$ e $A^{1/2}A^{-1/2} = I$.

De fato, podemos definir qualquer potência da matriz A como

$$A^{\alpha} = P\Lambda^{\alpha}P'.$$

Apêndice

Distâncias

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. A distância $d : \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

- $d(x, y) > 0, \quad \forall x \neq y$
- $d(x, y) = 0, \quad \text{sss } x = y$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall x, y, z.$

A distância Euclidiana entre dois pontos **x** e **y** é definida como

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})'\mathbf{I}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

A distância de Mahalanobis entre dois pontos **x** e **y** é definida como

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

em que Σ é a matriz comum de covariância.

Apêndice

Teorema de Sklar

Seja F uma função distribuição p-dimensional com marginais $F_{X_1}, \cdots, F_{X_p}$. Então, existe uma cópula p-dimensional C, tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$:

$$F(x_1, \cdots, x_p) = C\{F_{X_1}(x_1), \cdots, F_{X_p}(x_p)\}. \tag{1}$$

Se $F_{X_1}, \cdots, F_{X_p}$ são todas contínuas, então C é unica.
Por outro lado, se C é uma cópula e $F_{X_1}, \cdots, F_{X_p}$ são funções distribuição, então F definida por (1) é uma função distribuição p-dimensional com marginais $F_{X_1}, \cdots, F_{X_p}$.

Referências

Referências

- Härdle, W. K., & Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis. Fifth Editon. Springer Nature. Capítulo 4.
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied multivariate statistical analysis. Sixth Edition. Pearson Prentice Hall. Capítulo 4.
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J, M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press. Capítulo 2.
- Stoyanov, J. M. (2013). Counterexamples in Probability. Third Edition. Dover. Capítulo 10.