MAD211 - Estatística para Administração

Distribuições Contínuas

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 11

Variáveis Aleatórias

Variaveis Aleatorias

Variável Aleatória (v.a)

Una variable aleatoria X é uma função que associa um número real a cada resutado de um experimento aleatório.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Variável aleatória discreta

Uma v.a. que pode assumir um número finito (ou infinito sempre que pudermos contar os elementos) de valores.

Variável aleatória contínua

Uma v.a. que pode assumir qualquer valor numérico em um intervalo (ou coleção de intervalos)

Função de Densidade

Função de Densidade

Se X é uma v.a contínua, a função de densidade (f.d) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

Função de Densidade

Se X é uma v.a contínua, a função de densidade (f.d) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Função de Densidade

Se X é uma v.a contínua, a função de densidade (f.d) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Função de Densidade

Se X é uma v.a contínua, a função de densidade (f.d) de X é uma função $f(\cdot)$ tal que:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

A função $F(x)$ é chamada função de distribuição acumulada (ou simplesmente função distribuição) e é definida por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

V.a's continuas

Observação

Se X é v.a. contínua, então:

- $P(X = x) = 0 \quad \forall x$

V.a's continuas

Observação

Se X é v.a. contínua, então:

- $P(X = x) = 0 \quad \forall x$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

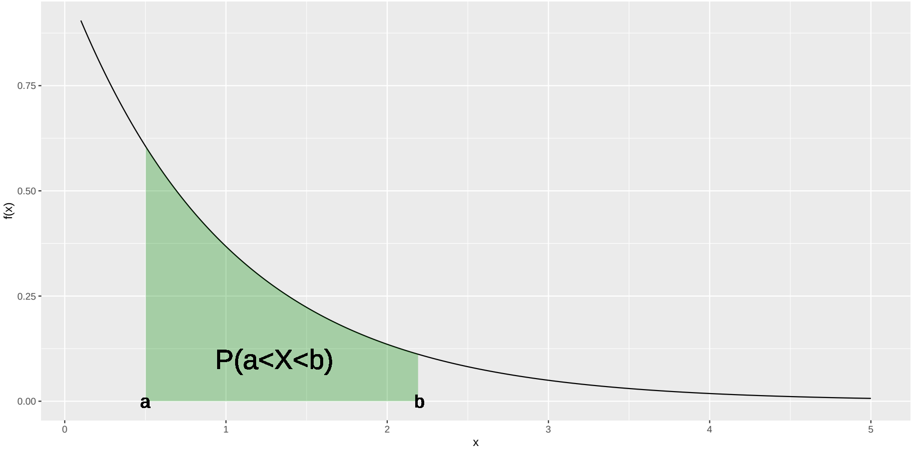
V.a's continuas

Observação

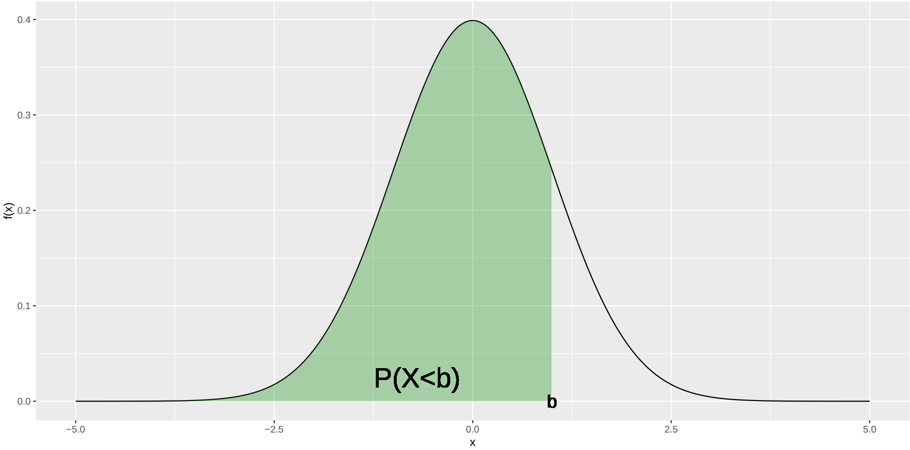
Se X é v.a. contínua, então:

- $P(X = x) = 0 \quad \forall x$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
- $f(x)$ **não representa** a probabilidade de x, a probabilidade será calculada entre 2 pontos (e será igual á area abaixo da curva)

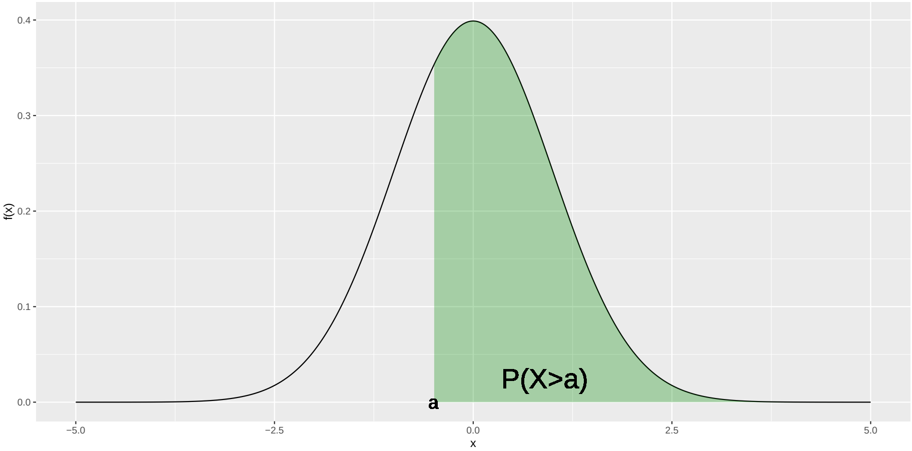
V.a's continuas



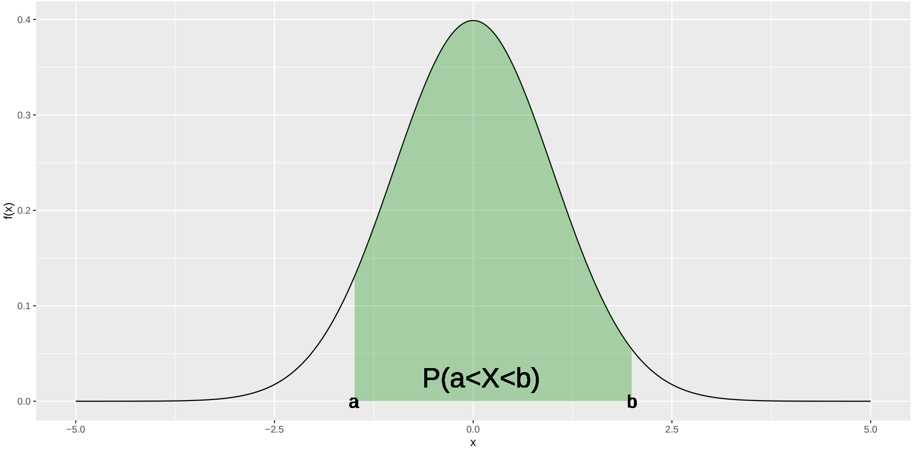
V.a's continuas



V.a's continuas



V.a's continuas



Esperança e Variância

Esperança e Variância

Seja X uma v.a. contínua com f.p $f(\cdot)$.

Esperança

O valor esperado de X é definido como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Esperança e Variância

Seja X uma v.a. contínua com f.p $f(\cdot)$.

Esperança

O valor esperado de X é definido como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Variância

A Variância de X, denotada por $\mathbb{V}(X)$ é definida como

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

em que $\mu = E(X)$

Esperança e Variância

Propriedades

Seja X uma variável aleatória

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ (onde a e b são constantes)
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a. com $\mathbb{E}(X_i) < \infty$, então,

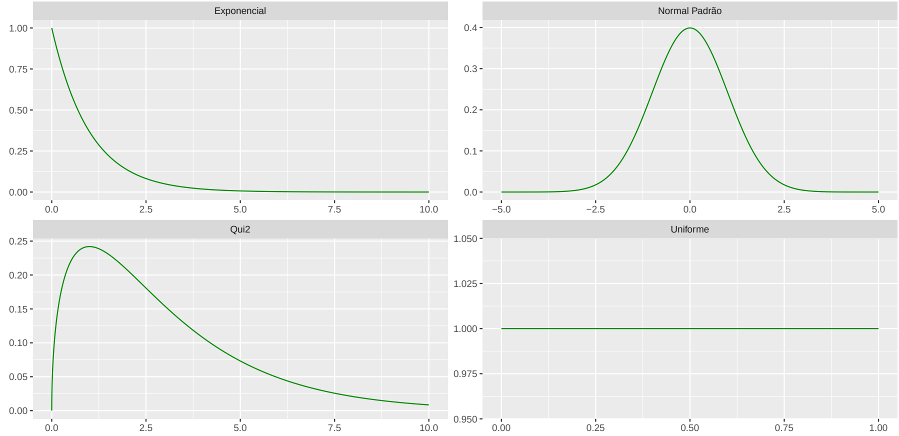
$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$$

- Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a. **independentes** com $V(X_i) < \infty$. Então,

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$$

Distribuições Contínuas

Distribuições Contínuas



Distribuição uniforme

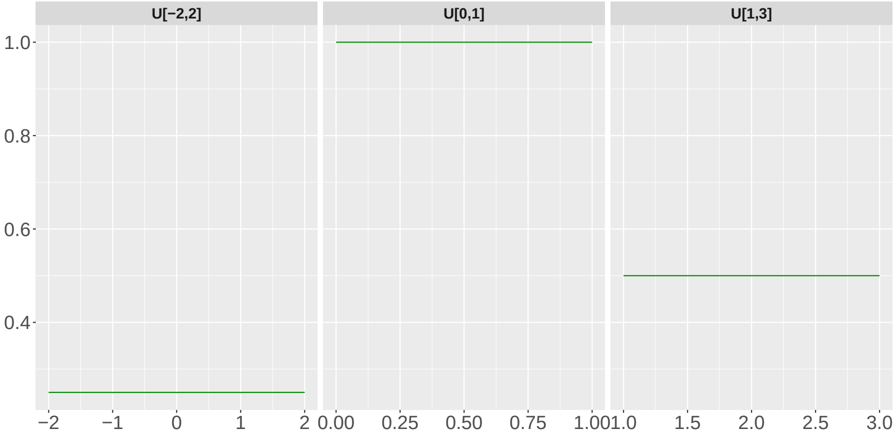
- É a distribuição continua mais simples

Distribuição uniforme

Uma v.a. continua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, denotada por $X \sim U_{[a,b]}$ se sua função densidade é dada por

$$f(x) = f(x; a, b) = f(x|a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Distribuição uniforme



Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx$$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

Lembre:

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

Lembre:

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Demostração

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \text{ (Verificar!)}$$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Demostração

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \text{ (Verificar!)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição uniforme

Importante

Se $X \sim U[a, b]$, para qualquer intervalor $[c, d]$ com $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Distribuição uniforme

Importante

Se $X \sim U[a,b]$, para qualquer intervalor $[c,d]$ com $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Por outro lado,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se } , a \leq x < b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só sairá com o João se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de João chegar no máximo 10 minutos atrasado?

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só sairá com o João se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de João chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só sairá com o João se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de João chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só sairá com o João se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de João chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$
- Queremos $P(X \leq 40)$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só sairá com o João se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de João chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$
- Queremos $P(X \leq 40)$
- $P(X \leq 40) = \int_{15}^{40} \frac{1}{45-15} dx = \frac{40-15}{45-15} = \frac{25}{30} = 0.83$

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```r
# X: tempo de chegada do Joao à casa da Maria, X ~ U[15,45]
# P(X <= 40)
punif(40,min=15, max = 45)
```

```
## [1] 0.8333333
```

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```r
# X: tempo de chegada do Joao à casa da Maria, X ~ U[15,45]
# P(X <= 40)
punif(40,min=15, max = 45)
```

```
## [1] 0.8333333
```

```r
# Y ~ U[-15,15] (forma alternativa)
# P(Y <= 10)
punif(10,min=-15, max = 15)
```

```
## [1] 0.8333333
```

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$
- Queremos $P(0.98 \leq X \leq 1.02)$

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$
- Queremos $P(0.98 \leq X \leq 1.02)$
- $P(0.98 \leq X \leq 1.02) = \dfrac{1.02 - 0.98}{1.03 - 0.87} = 0.25$

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```
a = 0.87
b = 1.03
punif(1.02, a, b)-punif(0.98, a, b)
```

```
## [1] 0.25
```

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```r
a = 0.87
b = 1.03
punif(1.02, a, b)-punif(0.98, a, b)
```

```
## [1] 0.25
```

```r
# Cuidado, por padrão punif assume que queremos uma U[0,1]
# O seguinte código esta errado!
# (precisamos definir os parametros da dist. Uniforme)
punif(1.02) - punif(0.87)
```

```
## [1] 0.13
```

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Ipanema de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Ipanema de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Ipanema de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$
- Para que o passageiro espere menos de 5 min deve chegar entre $10 < X < 15$, $25 < X < 30$ ou $40 < X < 45$

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Ipanema de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$
- Para que o passageiro espere menos de 5 min deve chegar entre $10 < X < 15$, $25 < X < 30$ ou $40 < X < 45$
- $\underbrace{P(10 < X < 15)}_{\frac{15-10}{50-0}} + \underbrace{P(25 < X < 30)}_{\frac{30-25}{50-0}} + \underbrace{P(40 < X < 45)}_{\frac{45-40}{50-0}} = 15/50$

Distribuição exponencial:

Distribuição exponencial

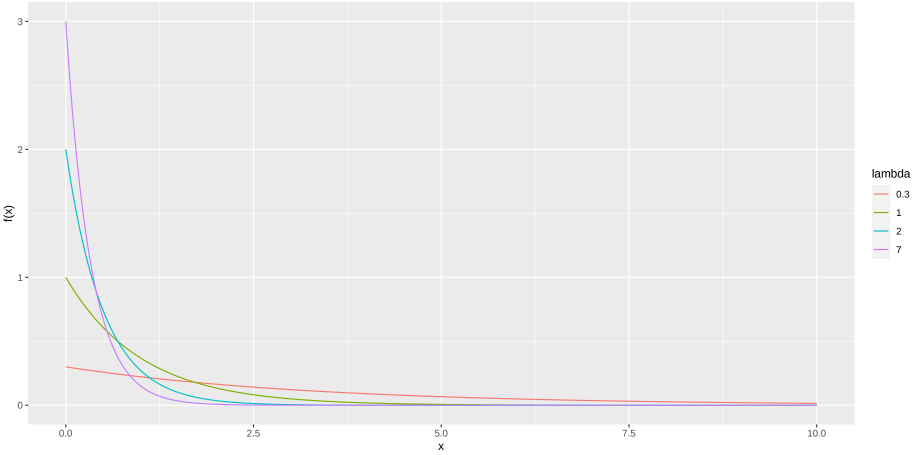
Uma v.a. continua X tem distribuição exponencial com parâmetro λ, denotada por $X \sim Exp(\lambda)$ se sua função densidade é dada por

$$f(x; a, b) = f(x|a, b) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/\lambda$
- $V(X) = 1/\lambda^2$

Quem é o λ? $\lambda = 1/\mu$, onde μ : tempo medio

Distribuição exponencial:



Distribuição exponencial

Importante

Se $X \sim Exp(\lambda)$, para qualquer intervalor $[a, b]$ com $0 \leq a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

Distribuição exponencial

Importante

Se $X \sim Exp(\lambda)$, para qualquer intervalor $[a, b]$ com $0 \leq a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

Por outro lado,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se }, x \geq 0 \end{cases}$$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$
- Queremos $P(X \geq 3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$
- Queremos $P(X \geq 3)$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [1 - e^{-2/3 \times 3}] = 0.1353353$

Distribuição exponencial: Exemplos

R

```r
# P(X >= 3) = 1-P(X<3) = 1-P(X<=3)
lambda = 2/3
1-pexp(3, rate = lambda)
```

```
## [1] 0.1353353
```

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. João esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, João receberá o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. João esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, João receberá o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. João esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, João receberá o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling
- $X \sim Exp(\lambda = 1/3)$ $(\lambda = 1/\mu, \quad \mu = 3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. João esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, João receberá o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling
- $X \sim Exp(\lambda = 1/3)$ $(\lambda = 1/\mu, \quad \mu = 3)$
- Queremos $P(X < 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

$$\underbrace{P(X < 2) = P(X \leq 2)}_{\text{pois } P(X=2)=0} = F(2)$$

Distribuição exponencial: Exemplos

$$\underbrace{P(X < 2) = P(X \leq 2)}_{\text{pois } P(X=2)=0} = F(2)$$

Lembre que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Distribuição exponencial: Exemplos

$$\underbrace{P(X < 2) = P(X \leq 2)}_{\text{pois } P(X=2)=0} = F(2)$$

Lembre que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 1 - e^{-2/3} = 0.4865829$$

Distribuição exponencial: Exemplos

R

```
lambda = 1/3
# P(X<2) = P(X<=2)
pexp(2, rate = lambda)
```

```
## [1] 0.4865829
```

```
1-exp(-2/3)
```

```
## [1] 0.4865829
```

Distribuição exponencial:

Proposição: Poisson-Exponencial

Suponha que o número de eventos que ocurrem em um intervalo de tempo/espaço t tenha distribuição $Pois(\lambda t)$ onde λ é o número esperado de eventos que ocorrem em uma unidade de tempo/espaço. Se o número de ocorrencias em intervalos não sobrepostos é independente entre intervalos, então a distribuição do tempo entre a ocorrencia de dois eventos sucessivos é $Exp(\lambda)$.

3. Suponha que as ligações recebidas numa central de denuncias ocorram segundo um processo de Poisson com taxa de 0.7 ligações por dia. Qual a probabilidade de haver mais de 2 dias entre chamadas?

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma $Poisson(0.7)$, pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim Exp(0.7)$

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\times 0.7} = 0.246597$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma *Poisson*(0.7), pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim Exp(0.7)$

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\times 0.7} = 0.246597$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma $Poisson(0.7)$, pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim Exp(0.7)$

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\times 0.7} = 0.246597$

```
1-pexp(2, rate = 0.7)
```

```
## [1] 0.246597
```

Distribuição Normal

- É a distribuição continua mais importante de todas

Distribuição Normal

Uma v.a. continua X tem distribuição Normal (Gaussiana), denotada por $N(\mu, \sigma)$, se sua função densidade é da forma

$$f(x;\mu,\sigma) = f(x|\mu,\sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Distribuição Normal

- É a distribuição continua mais importante de todas
- tem forma de sino

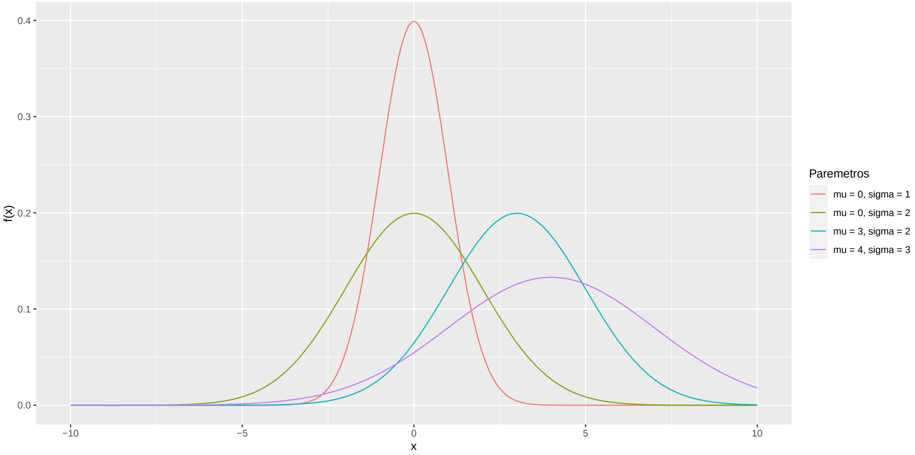
Distribuição Normal

Uma v.a. continua X tem distribuição Normal (Gaussiana), denotada por $N(\mu, \sigma)$, se sua função densidade é da forma

$$f(x; \mu, \sigma) = f(x|\mu, \sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Distribuição Normal



Distribuição Normal

Distribuição Normal Padrão

Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, a distribuição Normal é conhecida como Normal Padrão, denotada por $N(0, 1)$, e sua função de densidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \Phi(x)$

Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Observação 1

Embora no computador consigamos calcular as probabilidade para quaisquer valores de μ e σ, sempre levaremos tudo para uma distribuição padrão.

Distribuição Normal: Exercicios

1. Se $X \sim N(0,1)$, calcule: $P(X \leq -3)$, $P(X > 3)$ e $P(-2 \leq X \leq 2)$

```r
# P(X<= -3)
pnorm(-3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

```r
# P(X>3)
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

```r
# (c) P(-2 <= X <= 2)
pnorm(2)-pnorm(-2)
```

```
## [1] 0.9544997
```

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{15}) = P(Z < -5)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{15}) = P(Z < -5)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de MAD211 tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de MAD211
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{15}) = P(Z < -5)$

```
pnorm(-5)
```

```
## [1] 2.866516e-07
```

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
$$P(\frac{65 - 70}{10} \leq \frac{X - 70}{10} \leq \frac{75 - 70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
$$P(\frac{65-70}{10} \leq \frac{X-70}{10} \leq \frac{75-70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos se distribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
  $P(\frac{65-70}{10} \leq \frac{X-70}{10} \leq \frac{75-70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$

```
pnorm(0.5)-pnorm(-0.5)
```

```
## [1] 0.3829249
```

Distribuições especiais: Como identificar?

- **Binomial:** X : número total de sucessos em n realizações
- **Poisson:** X : número de ________ em um intervalo fixo de tempo/espaço
- **Hipergeométrica:** parecido com Binomial mas conhecemos N e a probabilidade de sucesso muda de ensaio para ensaio.
- **Uniforme:** *se distribui uniformemente*
- **Exponencial:** X : tempo até a occorencia de eventos sucessivos
- **Normal:** *se distribui normalmente*

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 6**
- Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 7**