

ME731 - Métodos em Análise Multivariada

– Inferência para o vetor de médias e matriz de covariância–

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
[ctruciosm.github.io](https://github.com/ctruciosm)

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas



UNICAMP

Aula 07

Agenda I

- 1 Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)
- 2 Teste para o vetor de médias com Σ conhecido
- 3 Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido
- 4 Teste para a matriz de covariância
- 5 Comentários Finais

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Notação

- Uma sequência X_1, \dots, X_n de n variáveis aleatórias *iid* com densidade $f(x|\theta)$, é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de $X \sim f(x|\theta)$.
- O mesmo aplica para $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ (uma a.a de tamanho n da distribuição de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\theta)$).

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

TRV

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

O TRV para testar H_0 vs H_1 pode ser definido como o teste com região de rejeição (R.R) dada por

$$R = \left\{ \mathbf{x} : \Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})} < c \right\},$$

em que c é determinado de forma que $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X} \in R) = \alpha$

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Equivalentemente, podemos definir a estatística

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2 \left[\underbrace{\log \left(\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta|\mathbf{X}) \right)}_{\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X})} - \underbrace{\log \left(\sup_{\theta \in \Omega_0} L(\theta|\mathbf{X}) \right)}_{\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X})} \right],$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > c^*\}$

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Equivalentemente, podemos definir a estatística

$$-2 \log (\Lambda(\mathbf{X})) = 2 \left[\underbrace{\log \left(\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta|\mathbf{X}) \right)}_{\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X})} - \underbrace{\log \left(\sup_{\theta \in \Omega_0} L(\theta|\mathbf{X}) \right)}_{\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X})} \right],$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > c^*\}$

Note que para calcular c (ou c^*) precisamos conhecer a distribuição de Λ quando H_0 é verdadeiro, mas isto não sempre é fácil. Felizmente, quando $n \rightarrow \infty$ podemos obter uma distribuição aproximada.

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teorema de Wilks

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

Então, quando $n \rightarrow \infty$,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim \chi_{q-r}^2,$$

em que q é a dimensão de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ e r é a dimensão de Ω_0 .

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teorema de Wilks

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

Então, quando $n \rightarrow \infty$,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim \chi_{q-r}^2,$$

em que q é a dimensão de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ e r é a dimensão de Ω_0 .

A partir do TRV definiremos alguns testes para o vetor de médias.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0.$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}}.$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0.$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}}.$
- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\mu_0) =$

$$-\frac{n}{2} \log(|2\pi\Sigma|) - \frac{n}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}) = -\frac{n}{2} \log(|2\pi\Sigma|) - \frac{n}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1}S)$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Então,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{X}, \Sigma) - l(\mu_0|\mathbf{X}, \Sigma)] = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0).$$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Então,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{X}, \Sigma) - l(\mu_0|\mathbf{X}, \Sigma)] = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0).$$

Sob H_0 , sabemos que

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) \sim \chi_p^2.$$

Assim, rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi_{1-\alpha, p}^2\}$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

O dataset `frets` contém informação a respeito do comprimento (`breadth`) e da largura (`length`) das cabeças do primeiro e segundo filho de 25 famílias.

```
library(boot)
library(dplyr)
data(frets)
glimpse(frets)
```

```
## Rows: 25
```

```
## Columns: 4
```

```
## $ l1 <dbl> 191, 195, 181, 183, 176, 208, 189, 197, 188, 192, 1
```

```
## $ b1 <dbl> 155, 149, 148, 153, 144, 157, 150, 159, 152, 150, 1
```

```
## $ l2 <dbl> 179, 201, 185, 188, 171, 192, 190, 189, 197, 187, 1
```

```
## $ b2 <dbl> 145, 152, 149, 149, 142, 152, 149, 152, 159, 151, 1
```


Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis 11 e 13 tem uma distribuição $N_2 \left(\mu, \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \right)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis 11 e 13 tem uma distribuição $N_2 \left(\mu, \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \right)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$.

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$$

```
frets_ss <- frets %>% select(l1,l2)
x_barra <- matrix(apply(frets_ss, 2, mean), ncol = 1)
mu0 <- matrix(c(182, 182), ncol = 1)
Sigma <- matrix(c(100, 0 , 0, 100), ncol = 2)
n <- nrow(frets_ss)
p <- ncol(frets_ss)
```

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

```
trv <- n * t(x_barra - mu0) %*% solve(Sigma) %*% (x_barra - mu0)
trv
```

```
##          [,1]
## [1,] 4.306
```

```
alpha = 0.05
ifelse(trv > qchisq(1 - alpha, p),
      "Rejeito H0",
      "Não rejeito H0")
```

```
##          [,1]
## [1,] "Não rejeito H0"
```

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0 \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S + \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)}_{\mathbf{d}} \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'}_{\mathbf{d}'}$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0 \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S + \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)}_{\mathbf{d}} \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'}_{\mathbf{d}'}$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S$
- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta | \mathbf{X}) = l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}') =$

$$-\frac{n}{2} [p \log(2\pi) + \log(|S|) + \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d}) + p]$$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, S) = -\frac{n}{2} [p \log(2\pi) + \log(|S|) + p]$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}')] = n \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d})$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}')] = n \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d})$$

e rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : n \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d}) > c\} \equiv \{\mathbf{x} : (n-1) \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d} > c_1\} \equiv \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p} \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d} > c_2\}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}')] = n \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d})$$

e rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : n \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d}) > c\} \equiv \{\mathbf{x} : (n-1) \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d} > c_1\} \equiv \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p} \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d} > c_2\}$$

Por outro lado, sabemos que sob H_0

$$(n-1)(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) S^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \sim T_{p, n-1}^2 \quad e \quad \frac{n-p}{p} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) S^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \sim F_{p, n-p}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim, rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : (n-1)\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > T_{1-\alpha,p,n-1}^2\},$$

ou, equivalentemente

$$R = \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p}\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > F_{1-\alpha,p,n-p}\}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis 11 e 13 tem uma distribuição $N_2(\mu, \Sigma)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis 11 e 13 tem uma distribuição $N_2(\mu, \Sigma)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$

```
invS <- solve((n - 1)/n*cov(frets_ss))
est <- (n - p)/p*t(x_barra - mu0)%*%invS%*%(x_barra - mu0)
est
```

```
##           [,1]
## [1,] 1.925323
```

```
ifelse(est > qf(1 - alpha, p, n - p),
       "Rejeito H0", "Não rejeito H0")
```

```
##           [,1]
## [1,] "Não rejeito H0"
```

Teste conhecido como Hotelling one-sample T^2 test.

Teste para a matriz de covariância

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = \Sigma_0.$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta | \mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S.$

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = \Sigma_0.$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S.$
- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|\Sigma_0|) - \frac{n}{2} \text{Tr}(\Sigma_0^{-1}S)$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, S) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|S|) - \frac{np}{2}$

Teste para a matriz de covariância

Assim,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0)] = n \log \left(\frac{|\Sigma_0|}{|S|} \right) + n \text{Tr}(\Sigma_0^{-1} S) - np.$$

Teste para a matriz de covariância

Assim,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0)] = n \log \left(\frac{|\Sigma_0|}{|S|} \right) + n \text{Tr}(\Sigma_0^{-1} S) - np.$$

Sob H_0 ,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim^{approx} \chi_{p(p+1)/2}^2,$$

e rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi_{1-\alpha, p(p+1)/2}^2\}$

Note que se $\Sigma_0 = I$, a estatística de teste se reduz a

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) = -n \log(|S|) + n \text{Tr}(S) - np.$$

Teste para a matriz de covariância

Um caso interessante é querer testar se as variáveis aleatórias no vetor aleatório não correlacionadas, ou independentes no caso da normal multivariada, queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \text{diagonal} \quad \text{vs.} \quad \Sigma \neq \text{diagonal}$$

Teste para a matriz de covariância

Um caso interessante é querer testar se as variáveis aleatórias no vetor aleatório não correlacionadas, ou independentes no caso da normal multivariada, queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \text{diagonal} \quad \text{vs.} \quad \Sigma \neq \text{diagonal}$$

Pode-se mostrar que,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = -n \log(|\text{diag}(S)|^{-1} |S|) \sim^{approx} \chi^2_{p(p+1)/2-p}.$$

Assim, rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi^2_{1-\alpha, p(p+1)/2-p}\}$

Teste para a matriz de covariância

Por último, outro teste de interesse é o chamado teste de esfericidade, em que estamos interessados em testar

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 I \quad \text{vs.} \quad \Sigma \neq \sigma^2 I$$

Teste para a matriz de covariância

Por último, outro teste de interesse é o chamado teste de esfericidade, em que estamos interessados em testar

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 I \quad \text{vs.} \quad \Sigma \neq \sigma^2 I$$

Pode-se mostrar que,

$$-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) = np \log(\hat{\sigma}^2) - n \log(|S|) \sim^{approx} \chi_{p(p+1)/2-1}^2,$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2 \log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi_{1-\alpha, p(p+1)/2-1}^2\}$.

Comentários Finais

Advertência



Os testes apresentados foram construídos sob a suposição que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ são **independêntes**. Se isto não for verdade (por exemplo, em situações onde lidamos com séries temporais), os testes não tem mais validade e não devem ser utilizados.

Observação

- Note que a forma de $-2 \log(\Lambda(\mathbf{X}))$ obtidas aqui foram todas obtidas sob o suposto de Normalidade. Contudo, o TRV não se limita à distribuição Normal e sob diversas suposição podem ser obtidas outras formas de $-2 \log(\Lambda(\mathbf{X}))$.
- Repare que o resultado $-2 \log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim^{approx} \chi^2_{q-r}$ independe da suposição feita a respeito a distribuição multivariada.
- O TRV embora útil, precisa da distribuição multivariada (o que não sempre é fácil).

Referências

Referências

- Härdle, W. K., & Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis. Fifth Edition. Springer Nature. Capítulo 7.
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied multivariate statistical analysis. Sixth Edition. Pearson Prentice Hall. Capítulo 5.
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J. M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press. Capítulo 5.