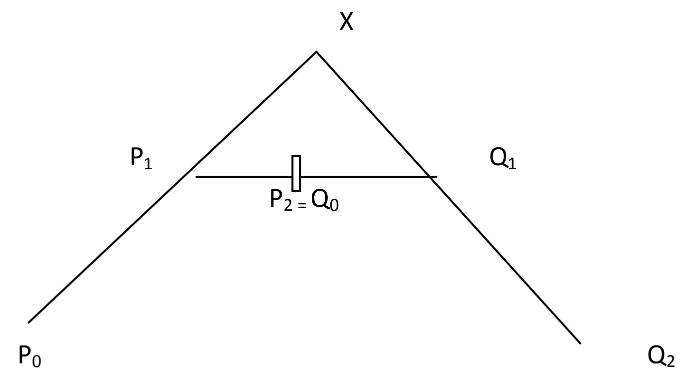
一、设一条二次 Bezier 曲线的控制顶点为 P_0，P_1 ，P_2，另一条二次 Bezier 曲线的控制顶点为 Q_0，Q_1 ，Q_2, $P_2=Q_0$, 写出两条曲线可以精确合并（表示）为一条二次 Bezier 曲线的条件。

解：如下图所示，由于可以精确合并，说明两曲线是由一条曲线在参数 $0<\lambda<1$ 处分割而来，如下图所示，假设原曲线的控制顶点为 P_0 , X, Q_2. 由 de Castejau 算法,有：

1. 首先要求 P_1, $P_2(Q_0)$, Q_1 三点共线



2. $\dfrac{Q_2-Q_1}{Q_1-X}=\dfrac{Q_1-Q_0}{P_2-P_1}=\dfrac{X-P_1}{P_1-P_0}$,

于是有：

$$Q_1-\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}(P_2-P_1)=P_1+\frac{P_1-P_0}{P_2-P_1}(Q_1-Q_0)$$

二、设一条三次 Bezier 曲线的控制顶点为 P_0，P_1 ，P_2，P_3, 对曲线上一点 $P\left(\frac{1}{2}\right)$，及一个给定的目标点 T，给出一种调整 Bezier 曲线形状的方法，使得 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 精确通过点 T。

解：假设我们改变其中的一个控制顶点，比如将 P_1 调整到 $P_1+\lambda$，使得使得 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 精确通过点 T，改变后的曲线记为 $\hat{P}(t)$ 则有：

$$\hat{P}(t)\Big|_{t=\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)\Big|_{t=\frac{1}{2}}+\lambda\cdot B_{1,3}(\frac{1}{2})$$

即

$$T=P(\frac{1}{2})+\lambda\cdot B_{1,3}(\frac{1}{2})$$

所以，只需将 P_1 调整到 $P_1+\left(T-P(\frac{1}{2})\right)/B_{1,3}(\frac{1}{2})$，即可。

三、给定型值点(0,0),(0,100),(100,0),(100,100)，如对应的参数为$0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$，反求插值这四个型值点的三次 Bezier 曲线的控制点。

解：假设控制顶点为b_0,b_1,b_2,b_3，由 Bezier 曲线的公式，将参数为$0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$代入曲线方程，即有：

$b_0=(0,0)$，

$b_3=(100,100)$，

$$(0,100)=\frac{8}{27}b_0+\frac{4}{9}b_1+\frac{2}{9}b_2+\frac{1}{27}b_3$$

$$(100,0)=\frac{1}{27}b_0+\frac{2}{9}b_1+\frac{4}{9}b_2+\frac{8}{27}b_3$$

解方程组可得$b_1=(-\frac{350}{3},\frac{1000}{3}),b_2=(\frac{650}{3},-\frac{700}{3})$。

四、计算以(30,0),(60,10),(80,30),(90,60),(90,90)为控制顶点的四次 Bezier 曲线在$t=\frac{1}{2}$处的值，并画出 de Casteljau 三角形。

解：值为（75, 34.375）

$$\begin{tikzcd}
(30,0) \arrow[dr] & & & & \\
(60,10) \arrow[r] \arrow[dr] & (45,5) \arrow[dr] & & & \\
(80,30) \arrow[r] \arrow[dr] & (70,20) \arrow[r] \arrow[dr] & (57.5,12.5) \arrow[dr] & & \\
(90,60) \arrow[r] \arrow[dr] & (85,45) \arrow[r] \arrow[dr] & (77.5,32.5) \arrow[r] \arrow[dr] & (67.5,22.5) \arrow[dr] & \\
(90,90) \arrow[r] & (90,75) \arrow[r] & (87.5,60) \arrow[r] & (82.5,46.25) \arrow[r] & (75,34.375)
\end{tikzcd}$$

五、设一条三次 Bezier 曲线的前三个控制顶点为(30,0),(60,20),(80,20),曲线在$t=\frac{1}{2}$处的值为

（70，15），试求最后一个控制顶点。

解：（1）由 de Casteljau 算法 $P_1^r = (1-t)P_i^{r-1} + tP_{i+1}^{r-1}$

t=1/2, 可求得：$P_1^1 = (45,10)$，$P_2^1 = (70,20)$，$P_2^2 = (57.5,15)$

同理可反推角点：$P_3^3 = 1/2(P_2^2 + P_3^2) = (70,15)$，可得 $P_3^2 = (82.5,15)$

类似可得，$P_3^1 = (95,10)$，$P_3 = (110,0)$

（2）对三次 Bezier 曲线，$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$，设 $P_3(x_3, y_3)$，则有

$$\begin{cases}(1-\frac{1}{2})^3 \times 30 + 3\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^2 \times 60 + 3\times(\frac{1}{2})^2 \times (1-\frac{1}{2})\times 80 + (\frac{1}{2})^3 \times x_3 = 70 \\ (1-\frac{1}{2})^3 \times 0 + 3\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^2 \times 20 + 3\times(\frac{1}{2})^2 \times (1-\frac{1}{2})\times 20 + (\frac{1}{2})^3 \times y_3 = 15\end{cases}$$

解得 $x_3 = 110, y_3 = 0$，即最后一个控制顶点为(110,0)。