

Analisi Matematica

19 aprile 2015

I	5
1 Insiemi numerici	7
1.1 Numeri razionali	7
1.2 Numeri reali	8
1.3 Spazi euclidei	10
1.4 Cardinalità degli insiemi	12
1.5 Cardinalità del numerabile	12
1.6 Cardinalità del continuo	14
2 Spazi metrici	17
2.1 Insiemi e distanze	17
2.2 Classificazione dei punti	18
2.3 Insiemi aperti, chiusi e limitati	21
3 Successioni	25
3.1 Introduzione	25
3.2 Successioni convergenti	25
3.3 Successioni a valori reali	26
3.4 Calcolo dei limiti	27
3.5 Successioni monotone	28
3.6 Infiniti e infinitesimi	30
3.7 Successioni asintotiche	31
3.8 Condizione di Cauchy	31
3.9 Classe limite	34
3.10 Insiemi compatti	35
4 Serie	37
4.1 Condizione di Cauchy	38
4.2 Carattere delle serie	38
4.3 Serie a termini positivi	39
4.4 Serie a segni alterni	41
4.5 Convergenza incondizionata	42
5 Limiti e continuità	43
5.1 Limiti di funzioni in spazi metrici	43
5.2 Limiti di funzioni reali a valori reali	45

5.3	Asintoti	45
5.4	Continuità	46
5.5	Continuità di funzioni reali a valori reali	47
5.6	Punti di discontinuità	48
5.7	Funzioni monotone	49
5.8	Funzioni invertibili	50
6	Calcolo differenziale	51
6.1	Rapporto incrementale	51
6.2	Operazioni tra derivate	52
6.3	Teoremi sul calcolo differenziale	54
6.4	Conseguenze del teorema di Lagrange	55
6.5	Formula di Taylor	57
6.6	Convessità di funzioni	58
7	Numeri complessi	61
7.1	Operazioni sui numeri complessi	61
7.2	Forma trigonometrica ed esponenziale	63
7.3	Potenze e radici	64
7.4	Ordinamento	65
II		67
8	Integrale di Riemann	69
8.1	Funzioni primitive	69
8.2	Costruzione dell'integrale	70
8.3	Condizioni di esistenza dell'integrale	72
8.4	Proprietà degli integrali	73
8.5	Teorema fondamentale del calcolo integrale	74
8.6	Integrali impropri	76
9	Calcolo differenziale in più dimensioni	79
9.1	Derivate direzionali	79
9.2	Differenziabilità	80
9.3	Differenziazione di funzioni composte	84
9.4	Diffeomorfismi	85
9.5	Derivate seconde	87
9.6	Formula di Taylor	89
9.7	Estremanti liberi	90
10	Successioni di funzioni	95
10.1	Convergenza puntuale e uniforme	95
10.2	Proprietà della funzione limite	98
10.3	Spazi funzionali	101
10.4	Teorema delle contrazioni	102
11	Serie di funzioni	105
11.1	Convergenza puntuale e uniforme	105
11.2	Convergenza totale	107
11.3	Serie di potenze	107
11.4	Proprietà delle serie di potenze	109
11.5	Funzioni analitiche	112

12	Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine	115
12.1	Equazioni del primo ordine	115
12.2	Il problema di Cauchy	116
12.3	Esistenza ed unicità delle soluzioni	117
12.4	Equazioni notevoli	119
13	Equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore	121
13.1	Esistenza e unicità delle soluzioni	122
13.2	Equazioni lineari	122
13.3	Equazioni lineari omogenee	123
13.4	Equazioni lineari complete	124
III		127
14	Forme differenziali lineari	129
14.1	Insiemi connessi	129
14.2	Forme differenziali lineari	130
14.3	Integrale di forme differenziali	132
14.4	Forme differenziali esatte	132
14.5	Forme differenziali chiuse	134

Parte I

Capitolo 1

Insiemi numerici

1.1 Numeri razionali

I numeri razionali, appartenenti all'insieme \mathbb{Q} , sono tutti i numeri esprimibili nella forma

$$\frac{p}{q}: p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Ad ogni frazione di questo tipo può essere associato un unico numero razionale, però ad ogni numero razionale si associano infinite frazioni, dato che esistono le classi di frazioni equivalenti che, appunto, esprimono tutte un solo numero razionale. Quindi più propriamente \mathbb{Q} non contiene *tutti* gli elementi del tipo appena descritto, ma un sottoinsieme di tali numeri. Un modo invece univoco di rappresentare i numeri razionali è tramite gli *allineamenti decimali*: ad esempio il numero $11/6$ si esprime come

$$\begin{aligned}\frac{11}{6} &= 1 + \frac{5}{6}, \\ \text{e } \frac{5}{6} &= \frac{50}{60} = \frac{8 \cdot 6 + 2}{60} = \frac{8}{10} + \frac{2}{60}, \\ \text{quindi } \frac{11}{6} &= 1 + \frac{8}{10} + \frac{2}{60}\end{aligned}$$

e così via continuando via via a scomporre le frazioni in modo da avere ai denominatori le potenze di 10, a partire da 1. Le frazioni così trovate, in ordine di potenze di 10 crescenti, sono le cifre dell'allineamento decimale di $11/6$. Ad ogni numero razionale corrisponde quindi un *unico* (per la proprietà di unicità del quoziente e del resto) allineamento decimale *finito*, se il resto è da un certo punto in poi nullo, o *periodico*, se la parte decimale si ripete identica infinite volte da un certo punto in poi. I resti delle divisioni sono quindi sempre limitati, compresi sempre tra 0 e $q - 1$ se q è il quoziente: se infatti ad esempio p/q è un numero razionale compreso tra 0 e 1, il risultato della divisione sarà del tipo $q \cdot Q + R$, e allora $0 \leq R \leq q - 1$, e il resto può allora essere uno soltanto tra i q numeri naturali possibili. Dopo q iterazioni, il resto si deve necessariamente ripetere, e se questo resto è 0 allora l'allineamento è finito, altrimenti si ripeterà all'infinito e l'allineamento è periodico. Tra gli allineamenti decimali e i numeri razionali esiste quindi una *corrispondenza biunivoca*.

Tra i numeri razionali sono definite le due operazioni di somma e prodotto: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ si hanno le definizioni e proprietà della tabella 1.1. Tutti i numeri razionali soddisfano queste proprietà, e inoltre queste operazioni da una coppia di numeri razionali restituiscono come risultato *sempre* un numero razionale. Questo fa dell'insieme $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ossia dell'insieme dei numeri razionali dotato delle operazioni di somma e prodotto secondo le proprietà elencate nella 1.1, un *campo*. Né \mathbb{N} , per cui non si possono definire opposto e reciproco, né \mathbb{Z} , per cui non esiste il reciproco, sono dei campi.

Il campo \mathbb{Q} è inoltre *ordinato*: per ogni coppia di numeri $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si può verificare infatti una e una sola tra le condizioni

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b,$$

	Somma	Prodotto
Proprietà associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Proprietà riflessiva	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Opposto, reciproco	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, se $a \neq 0$
Proprietà distributiva	$(a + b) \cdot c = ac + bc$	

Tabella 1.1: Operazioni tra numeri razionali e loro proprietà.

con le seguenti proprietà che collegano all'ordinamento le operazioni di campo: se $a < b$,

$$\begin{aligned} \forall c, \quad & a + c < b + c \\ \forall c > 0, \quad & a \cdot c < b \cdot c \\ \forall c < 0, \quad & a \cdot c > b \cdot c \end{aligned}$$

1.2 Numeri reali

L'insieme dei numeri razionali si può naturalmente rappresentare su una retta euclidea orientata, però esistono ancora dei punti della retta che non corrispondono ad alcun numero razionale, ad esempio il numero che corrisponde alla misura della diagonale di un quadrato di lato 1, cioè il numero $\sqrt{2}$, non è razionale, come dimostra il teorema seguente.

Teorema 1.2.1. Non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$.

Dimostrazione. Si supponga che esista un numero $r = p/q$ il cui quadrato è 2: si possono allora scegliere $p, q \in \mathbb{N}$, poiché r è positivo, e che siano primi tra loro. Allora risulta

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

cioè $p^2 = 2q^2$. Poiché il secondo membro è pari, anche p^2 lo deve essere, e di conseguenza anche p , quindi esiste un numero $m \in \mathbb{N}$ tale che $p = 2m$, da cui segue che $2m^2 = q^2$, quindi come prima sia q^2 che q sono pari, il che è assurdo perché contrasta con l'ipotesi che p e q non abbiano fattori comuni. \square

I numeri che quindi non possono essere rappresentati come frazione a coefficienti interi o come allineamenti decimali finiti o periodici saranno quindi rappresentati con degli allineamenti decimali infiniti, ma non periodici, e si chiamano *irrazionali*. L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali forma l'insieme dei numeri reali, rappresentato con \mathbb{R} , e quindi l'insieme dei razionali e degli irrazionali sono l'uno il complementare dell'altro rispetto a \mathbb{R} . Esso “riempie” completamente la retta euclidea, e per quanto detto finora tutti i numeri reali possono essere scritti come allineamenti decimali, sia finiti che infiniti, periodici o non periodici, nella forma

$$\pm c_0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

dove $c_0 \in \mathbb{N}_0$ e c_1, c_2, \dots sono cifre in una serie infinita o finita, che non sia di periodo 9. Anche per i numeri reali valgono le operazioni di somma e prodotto come definite per i numeri razionali, e le proprietà di ordinamento, quindi anche $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo. Seguono alcune definizioni per insiemi di numeri reali.

Definizione 1.2.2. Si definisce intervallo chiuso e limitato l'insieme degli x per cui:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Se le disuguaglianze sono strette, l'intervallo si dice aperto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Si definiscono anche gli intervalli illimitati, inferiormente o superiormente, sia aperti che chiusi:

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} & (\text{aperto}); \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} & (\text{chiuso}).\end{aligned}$$

I simboli di $-\infty$ e $+\infty$ sono solo convenzioni e non rappresentano dei numeri né appartengono all'insieme \mathbb{R} , ma sono compresi nell'insieme dei numeri reali *esteso*:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Definizione 1.2.3. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato:

- *superiormente* se $\exists \alpha \in \mathbb{R} : x \leq \alpha \ \forall x \in A$. Ogni numero α siffatto si chiama maggiorante di A .
- *inferiormente* se $\exists \beta \in \mathbb{R} : x \geq \beta \ \forall x \in A$. Ogni numero β siffatto si chiama minorante di A .

Definizione 1.2.4. Si definisce massimo di un insieme il numero reale, se esiste, appartenente all'insieme che è il minore di tutti maggioranti. Analogamente, il minimo dell'insieme è il numero, se esiste, che appartiene all'insieme ed è maggiore di tutti i minoranti.

Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Anche quando non esistono, un insieme limitato possiede comunque un estremo superiore o inferiore, o anche entrambi.

Definizione 1.2.5. Sia $a \subseteq \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Si chiama estremo superiore di A il numero $\alpha \in \mathbb{R}$ che è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A .

$$\alpha = \sup A.$$

Analogamente si definisce l'estremo inferiore di un insieme limitato inferiormente, che è il massimo dell'insieme dei minoranti.

$$\beta = \inf A.$$

L'estremo superiore può talvolta anche coincidere con il massimo o il minimo, come ad esempio negli intervalli chiusi. Se un insieme ha un massimo, tale massimo è anche l'estremo superiore, ma se un insieme ha l'estremo superiore non è necessariamente vero che possiede anche un massimo; comunque, se esistono entrambi, ovviamente non possono che coincidere. Quindi, perché un numero α sia un estremo superiore, deve soddisfare due condizioni:

- deve essere un maggiorante, quindi $x \leq \alpha \ \forall x \in A$;
- deve essere il minore dei maggioranti, cioè “spostandosi” di una quantità arbitrariamente piccola ε a sinistra (ossia nell'insieme A) di α si devono trovare soltanto elementi di A , e non altri maggioranti, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{a} \in A : \alpha - \varepsilon < \tilde{a} \leq \alpha$.

Invertendo le disuguaglianze si trovano le proprietà che un estremo inferiore deve soddisfare. Se poi tale estremo è massimo o minimo, allora dovrà anche appartenere ad A . Inoltre, ogni insieme limitato di numeri reali possiede *sempre* un estremo superiore o inferiore, per il seguente teorema.

Teorema 1.2.6 (proprietà dell'estremo superiore). Ogni sottoinsieme di \mathbb{R} limitato superiormente possiede sempre un estremo superiore.

Questo teorema distingue il campo \mathbb{R} da \mathbb{Q} , che non possiede questa proprietà: esiste infatti almeno un sottoinsieme di \mathbb{Q} che, pur essendo superiormente limitato, non ammette un estremo superiore. Sia ad esempio l'insieme

$$A = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\}.$$

L'insieme dei suoi maggioranti di A è

$$B = \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 \geq 2\}.$$

Si trova che B non ha un minimo, perché per qualunque $p \in B$ si può sempre trovare un altro elemento $q \in B$ per cui $q < p$. Infatti, si consideri l'elemento

$$\frac{2p+2}{p+2} = q.$$

Si dimostra che $q < p$: in B , infatti, se $p^2 \geq 2$ si ha che

$$\left(\frac{2p+2}{p+2}\right)^2 \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{2p+2}{p+2} < p,$$

a cui segue che $p^2 > 2$. L'estremo superiore, $\sqrt{2}$, che A sembrerebbe avere, in realtà non è tale poiché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, quindi A non ha un estremo superiore. Diversamente sarebbe se A non fosse un sottoinsieme di \mathbb{Q} ma di \mathbb{R} : in tal caso $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ quindi è a pieno titolo l'estremo superiore di A .

A partire da questa proprietà si può definire l'operazione di addizione tra due allineamenti infiniti di numeri reali. Per farlo, si costruiscono le somme dei troncati di due numeri approssimati ogni volta ad una cifra decimale in più: queste somme dei troncati saranno sempre minori della somma reale dei due numeri, e formano una famiglia di elementi che ha un elemento superiore; tale estremo è la somma dei due numeri cercata.

Teorema 1.2.7 (densità di \mathbb{R}). Assegnati due qualunque numeri reali distinti, si possono sempre trovare tra di essi un numero razionale e un numero irrazionale.

Dimostrazione. Siano $x < y$ due numeri reali: i loro allineamenti decimali sono

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{e} \quad y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Se $a_0 < b_0$, si costruisce come parte decimale un numero maggiore di $a_1 a_2 a_3 \dots$, e per farlo basta sostituire con 9 la prima cifra trovata diversa da 9. Se invece $a_0 = b_0$ si prosegue con le coppie a_1, b_1, a_2, b_2 , finché non se ne trova una in cui gli elementi non sono più uguali, e poiché dovrà essere $a_k < b_k$ (dato che $x < y$) si ritorna al punto precedente. Si può quindi costruire un allineamento decimale finito, quindi razionale, con il seguente criterio, e anche uno infinito e non periodico con questi criteri. \square

Ovviamente il procedimento si può iterare infinite volte, quindi tra ogni coppia di numeri reali esistono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali. Allora gli insiemi \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in \mathbb{R} .

1.3 Spazi euclidei

L'insieme dei numeri reali si può generalizzare su più dimensioni, permettendo di operare con essi anche su piani e spazi, non solo su una retta. A questo scopo si esegue il prodotto cartesiano di \mathbb{R} con se stesso.

Definizione 1.3.1. Dati due insiemi qualunque A e B , il nuovo insieme ottenuto con il prodotto cartesiano tra i due insiemi è l'insieme composto dalle coppie ordinate con un elemento preso dal primo e uno dal secondo.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Il prodotto cartesiano tra \mathbb{R} e se stesso si indica quindi con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che quindi denota un piano dove le coordinate dei punti sono numeri reali. In generale, si indica con \mathbb{R}^n il prodotto cartesiano di \mathbb{R} operato n volte, con $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Gli elementi \mathbf{x} si chiamano *vettori* di \mathbb{R}^n , e le varie x_i sono le *componenti* di tale vettore.

Definizione 1.3.2. Dato un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si chiama *norma* di \mathbf{x} e si indica con $\|\mathbf{x}\|$ il numero ottenuto dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.3.1)$$

Genericamente, la norma è la distanza tra il punto di coordinate x_i e l'origine, che è anche il punto associato al vettore nullo. La norma è anche la radice quadrata del prodotto interno tra il vettore e se stesso.

Valgono le seguenti proprietà:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, e in particolare è nulla se e solo se il vettore è nullo;
- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$, con $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (disuguaglianza di Cauchy);
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (disuguaglianza triangolare).

Le ultime due proprietà sono dimostrate nei seguenti teoremi.

Teorema 1.3.3 (Disuguaglianza di Cauchy). Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, il modulo del prodotto interno tra di essi è minore o uguale del prodotto delle loro norme.

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R}$, il prodotto interno tra il vettore $t\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e se stesso è sempre non negativo, in quanto rappresenta una norma. Inoltre:

$$\begin{aligned} (t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (t\mathbf{x}, t\mathbf{x} + \mathbf{y}) + (t\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\ &= (t\mathbf{x}, t\mathbf{x}) + (t\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (t\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\ &= t^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\ &= t^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Quest'ultima deve essere non negativa per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$, vale a dire che il suo discriminante deve essere negativo o nullo:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0 \\ |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| &\leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.3.4 (Disuguaglianza triangolare). Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la norma della loro somma è minore o uguale della somma delle loro norme.

Dimostrazione. Questo teorema si dimostra a partire dalla disuguaglianza di Cauchy, con $t = 1$.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Il termine (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , come qualunque numero, è minore o uguale del suo modulo, quindi si può scrivere che

$$\|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy quindi risulta

$$\|\mathbf{x}\|^2 + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Il secondo termine è lo sviluppo del quadrato $(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$, allora si ha che

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad \square$$

1.4 Cardinalità degli insiemi

Definizione 1.4.1. Sia X un insieme qualunque. Si dice che X è finito se esiste un numero naturale n tale che X si possa mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme finito $\{1, 2, \dots, n\}$ di numeri naturali. Il numero n si dice cardinalità dell'insieme.

All'insieme vuoto si assegna per convenzione la cardinalità 0. Due insiemi in corrispondenza biunivoca con X devono anche essere in corrispondenza biunivoca tra di loro, perciò la cardinalità ha la proprietà transitiva.

Definizione 1.4.2. Un insieme si dice infinito se non è finito, cioè se non esiste alcun numero intero n in modo tale da poterlo mettere in corrispondenza biunivoca con un insieme finito $\{1, 2, \dots, n\}$ di naturali.

Definizione 1.4.3. Si dice che due insiemi X e Y sono equipotenti, o che hanno la stessa cardinalità, o potenza, se sono in corrispondenza biunivoca, e si indica con $X \sim Y$. Si dice che X ha cardinalità, o potenza, maggiore di quella di Y se non sono equipotenti, ed esiste un sottoinsieme proprio $A \subset X$ tale che $A \sim Y$.

Un insieme finito ha cardinalità sempre maggiore di un suo sottoinsieme proprio.

Teorema 1.4.4. Un insieme è infinito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Quindi si può sempre definire una funzione biunivoca che leghi un insieme infinito con un suo sottoinsieme proprio. Ad esempio, si può definire una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, cioè tra i numeri naturali e i numeri naturali pari, che ovviamente formano un sottoinsieme proprio di \mathbb{N} . Sia questa funzione $f(n) = 2n$: è iniettiva, poiché n differenti hanno immagini differenti, inoltre è suriettiva perché l'insieme immagine è esattamente $2\mathbb{N}$, quindi è una corrispondenza biunivoca tra $2\mathbb{N}$ e \mathbb{N} , che è quindi infinito dato che è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

1.5 Cardinalità del numerabile

Definizione 1.5.1. Si dice che un insieme è numerabile, o che ha la cardinalità del numerabile, se è equipotente a \mathbb{N} .

Tutti gli elementi di un insieme numerabile si possono elencare, e si possono ordinare in una successione la quale, per definizione, è una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e un insieme immagine generico A . Tra tutti gli insiemi infiniti, quelli numerabili hanno la cardinalità minore, perché tutti i loro sottoinsiemi sono numerabili. Quindi la cardinalità del numerabile è la “più piccola” cardinalità infinita. Infatti è dimostrato il seguente teorema.

Teorema 1.5.2. Sia A un insieme infinito e B un insieme numerabile. Se $A \subseteq B$, allora A è numerabile.

Quindi se un insieme è numerabile, tutti i suoi sottoinsiemi, infiniti o meno, non possono che essere a loro volta numerabili.

Teorema 1.5.3. L'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Dimostrazione. Indicati con a_{nk} gli elementi di ogni A_n , cioè

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nk}, \dots\},$$

tutti gli insiemi con i loro elementi si possono disporre come

$$\begin{array}{ll}
 A_1 & a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots \\
 A_2 & a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots \\
 A_3 & a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots \\
 A_4 & a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots \\
 & \vdots \\
 A_n & a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots \\
 & \vdots
 \end{array}$$

Questi elementi possono essere numerati con il metodo della diagonale, ottenendo

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, \dots$$

Se si conviene di omettere dall'ordinamento i "doppioni", cioè gli elementi già apparsi, l'unione di tutti gli insiemi

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ordinata come sopra, risulta essere una successione, quindi è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali, perciò è numerabile. \square

Teorema 1.5.4. Siano A_1, A_2, \dots, A_n insiemi numerabili. Il loro prodotto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

è numerabile.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione partendo da $n = 2$, ossia dal prodotto cartesiano di due insiemi $A = A_1$ e $B = A_2$: questo prodotto può essere scritto come l'unione dei prodotti cartesiani di ciascun elemento di A con B .

$$A \times B = \bigcup_{a_i \in A} (\{a_i\} \times B),$$

che sono le coppie

$$\begin{array}{ll}
 A_1 & (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots, (a_1, b_k), \dots \\
 A_2 & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \dots, (a_2, b_k), \dots \\
 A_3 & (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_3, b_k), \dots \\
 & \vdots \\
 A_n & (a_n, b_1), (a_n, b_2), (a_n, b_3), \dots, (a_n, b_k), \dots \\
 & \vdots
 \end{array}$$

Tutti gli insiemi $\{a_i\} \times B$ sono numerabili, e formano un'infinità numerabile quindi, per il teorema 1.5.3, $A \times B$ è numerabile.

Si dimostra che se l'affermazione è vera per n qualunque, lo è anche per $n + 1$. Per $n + 1$ si ha l'insieme

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}.$$

Per l'ipotesi di induzione $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ è numerabile, allora se $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A$, e poiché A_{n+1} è numerabile per ipotesi, il prodotto cartesiano $A \times A_{n+1}$ è numerabile, per le conclusioni fatte al punto precedente. \square

Corollario 1.5.5. \mathbb{Q} è numerabile.

Dimostrazione. Ogni numero razionale si esprime come una frazione del tipo p/q , con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Associando a p/q la coppia di elementi (p, q) , l'insieme di tutte le frazioni è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (perché sono coppie di numeri, uno preso dagli interi razionali e uno dai naturali), quindi è numerabile. Poiché \mathbb{Q} è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, dato che esistono frazioni diverse che rappresentano lo stesso numero razionale, anch'esso è numerabile per il teorema 1.5.4. \square

1.6 Cardinalità del continuo

Lemma 1.6.1. L'intervallo $(0, 1)$ ha la stessa cardinalità di \mathbb{R} .

Dimostrazione. Si dimostra che esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi. Esiste infatti la funzione arcotangente, che ha come dominio tutto l'insieme dei numeri reali e come codominio un intervallo limitato:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

dimostra come \mathbb{R} e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ abbiano la stessa cardinalità. Eseguendo una trasformazione si ottiene la funzione

$$\left(\frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}\right): \mathbb{R} \rightarrow (0, 1),$$

che è una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{R} e $(0, 1)$, che quindi hanno la stessa cardinalità. \square

Teorema 1.6.2. \mathbb{R} ha cardinalità maggiore di \mathbb{N} .

Dimostrazione. Basta dimostrare che l'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile, poiché ciò implica che anche \mathbb{R} non è numerabile, per il lemma 1.6.1.

Per assurdo, sia $(0, 1)$ numerabile, quindi sia una successione. Ogni elemento di questa successione ha una sua rappresentazione decimale come

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ a_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ a_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots \\ &\vdots \\ a_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Se si costruisce un numero $x \in (0, 1)$ come allineamento decimale, in modo che non coincida con nessuno degli a_n , sarà definito come

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots,$$

in modo che la prima cifra decimale sia

$$x_1 \neq 0, \quad x_1 \neq 9, \quad x_1 \neq a_{11}.$$

Si definisce la seconda cifra decimale, x_2 , in modo che sia

$$x_2 \neq 0, \quad x_2 \neq 9, \quad x_2 \neq a_{22},$$

quindi, in generale, le cifre decimali x_n di x saranno costruite come

$$x_n \neq 0, \quad x_n \neq 9, \quad x_n \neq a_{nn}.$$

Il numero così definito è un allineamento decimale compreso tra 0 e 1, perché la sua parte intera è 0 e le sue cifre decimali non sono 0, ed è allo stesso tempo diverso da tutti i numeri a_n della successione definita precedentemente se l'intervallo $(0, 1)$ fosse numerabile. Poiché questo è un assurdo, tale intervallo non può essere numerabile. Quindi anche \mathbb{R} non è numerabile. \square

Dal teorema 1.5.4 segue inoltre che anche \mathbb{R}^n con $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$) non è numerabile. La cardinalità dell'insieme dei numeri reali si chiama cardinalità del continuo. L'ipotesi del continuo di Cantor inoltre afferma che non esiste nessun insieme la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri interi e quella dei numeri reali.

Corollario 1.6.3. L'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è numerabile.

Dimostrazione. Se anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fosse numerabile, allora \mathbb{R} per il teorema 1.5.3 sarebbe numerabile in quanto unione di due insiemi numerabili, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$. Quindi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è numerabile (e ha la cardinalità del continuo). \square

La cardinalità degli insiemi non si ferma a quella del continuo. Dato un insieme X , è detto *insieme delle parti* di X l'insieme dei suoi sottoinsiemi, compresi l'insieme vuoto e l'insieme stesso, e si indica con $\mathcal{P}(X)$. Ad esempio, l'insieme delle parti di $E = \{a, b, c\}$ è

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}.$$

Si dimostra che, *sempre*, l'insieme delle parti ha cardinalità maggiore dell'insieme di partenza. In particolare, se un insieme finito ha cardinalità N , il suo insieme delle parti ha cardinalità 2^N . Quindi non esiste un insieme che abbia cardinalità maggiore di tutti gli altri insiemi.

Capitolo 2

Spazi metrici

2.1 Insiemi e distanze

Uno spazio metrico è un insieme generico in cui è definito il concetto di distanza, che è una funzione che rispetta delle proprietà ben definite e ad ogni coppia di numeri associa un numero (reale) che è sempre positivo o nullo, in modo simmetrico.

Definizione 2.1.1. Sia X un insieme qualunque e d una funzione, detta distanza, del tipo

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

che soddisfa le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$, e in particolare $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$, cioè è simmetrica;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

L'insieme X associato alla distanza d è detto spazio metrico e si indica con (X, d) .

In generale, per ogni spazio metrico si può definire più di un tipo di distanza.

Esempi

- La distanza euclidea è definita dalla norma, come nella definizione 1.3.2, che per \mathbb{R} (o anche \mathbb{Q}), essendo in un'unica dimensione, si riduce a $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |x - y|$.
- La distanza d_∞ in \mathbb{R}^2 è definita come il massimo delle distanze delle coordinate omologhe: $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.
- La distanza $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ è la somma delle distanze tra le componenti omologhe.
- Nello spazio metrico $X = \{\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \text{ è limitata}\}$ la distanza tra due funzioni f e g definite in un intervallo $[a, b]$ e in cui sono limitate, cioè se $f([a, b])$ e $g([a, b])$ sono insiemi limitati, è definita come $d_*(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.
- La metrica *discreta* è data dalla distanza

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Definizione 2.1.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati un punto $p \in X$ e $r > 0$, si chiama intorno circolare (o bolla) di centro p e raggio r l'insieme

$$B(p, r) = \{x \in X: d(x, p) < r\}.$$

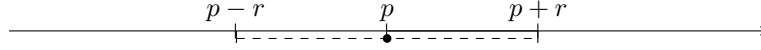


Figura 2.1: Intorno circolare in \mathbb{R} con la distanza data dal valore assoluto.

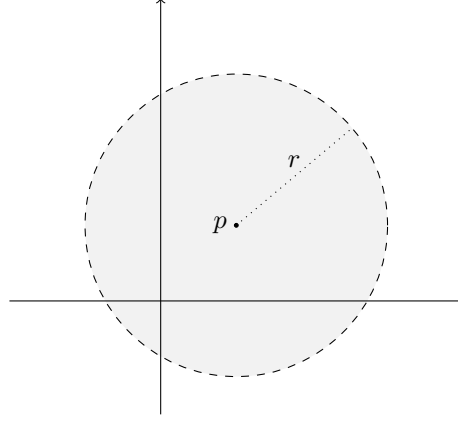


Figura 2.2: Un intorno $B(\mathbf{p}, r) \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

Esempi

- In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, gli intorni sono della forma $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < r\}$, che è l'intervallo aperto $(p - r, p + r)$ (figura 2.1).
- In $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, gli intorni sono della forma $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$, che rappresenta un cerchio, privato della circonferenza, di centro p e raggio r (figura 2.2).
- In $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$, analogamente al punto precedente, gli intorni sono delle sfere di centro p e raggio r , private della superficie sferica.
- Con la distanza d_∞ , l'intorno $B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\}$ ha la forma di un quadrato di lato $2r$ centrato nell'origine (figura 2.3).
- Con la distanza d_1 , l'intorno $B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\}$ ha la forma di un quadrato ruotato di $\pi/4$, di diagonale $2r$ e centrato nell'origine (figura 2.4).
- Nello spazio $X = \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ è limitata}\}$, con la distanza d_* , un intorno di una funzione f è lo spazio limitato dalle funzioni $f - r$ e $f + r$, escluse: $B(f, r) = \{g \in X : \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| < r\}$ (figura 2.5).

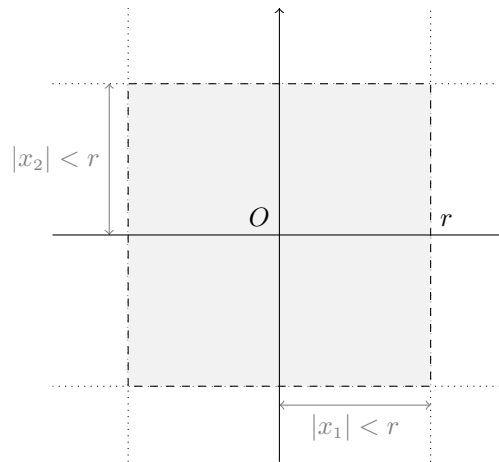
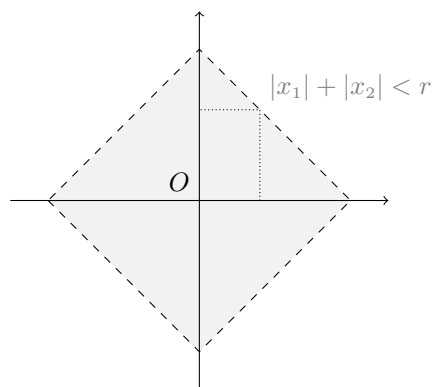
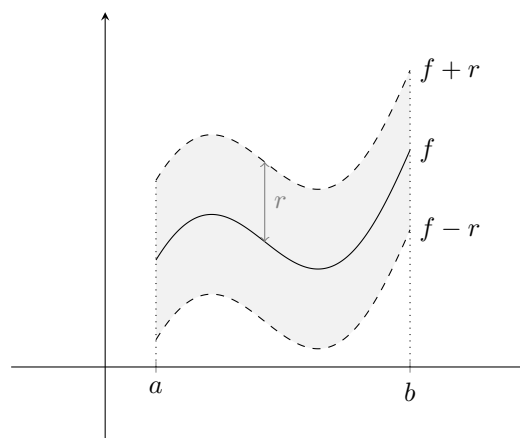
Teorema 2.1.3 (Proprietà di Hausdorff). Siano p e q due punti distinti appartenenti ad uno spazio metrico (X, d) . Esiste almeno una coppia di raggi r_1 e r_2 tali che

$$B(p, r_1) \cap B(q, r_2) = \emptyset.$$

Dimostrazione. Sia d la distanza tra i due punti p, q . Definito $r_1 = r_2 = d/3$ le due bolle hanno intersezione vuota. In generale, qualunque coppia di raggi la cui somma sia minore della distanza dei due punti è adatta a dimostrare il teorema. \square

2.2 Classificazione dei punti

Definizione 2.2.1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Il punto $p \in X$ si dice

Figura 2.3: Un intorno $B(\mathbf{0}, r) \subset (\mathbb{R}^2, d_\infty)$.Figura 2.4: Un intorno $B(\mathbf{0}, r) \subset (\mathbb{R}^2, d_1)$.Figura 2.5: Un intorno $B(f, r) \subset (X, d_*)$ della funzione $f = x + 2 \sin x$.

1. interno ad A se esiste una bolla, centrata in p , tutta contenuta in tale insieme:

$$\exists r > 0: B(p, r) \subset A;$$

2. esterno ad A se esiste una bolla, centrata in p , tutta contenuta nel complementare di tale insieme:

$$\exists r > 0: B(p, r) \subset A^c;$$

3. di frontiera se non è interno né esterno, ossia se ogni bolla centrata in p contiene sia punti di A sia del suo complementare:

$$\forall r > 0, B(p, r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(p, r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Questa definizione è disgiuntiva ed esaustiva, perché ogni punto rientra sempre in una soltanto delle tre categorie. L'insieme dei punti interni di A si chiama *interno* e si indica con \mathring{A} , che non coincide necessariamente con l'insieme stesso. L'insieme dei punti di frontiera, che possono o meno appartenere all'insieme (non si può stabilire a priori) si chiama *frontiera* e si indica con ∂A .

Esempi

- In ogni spazio metrico (X, d) , l'insieme X ha solo punti interni.
- Ogni punto è esterno ad un insieme vuoto.
- L'interno di un intorno coincide *sempre* con l'intorno stesso.
- La frontiera di un intorno $B(\mathbf{p}, r) \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza di raggio r , centrata in \mathbf{p} , cioè $\partial B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = r\}$.
- La frontiera dello stesso insieme del punto precedente, ma in \mathbb{R}^3 , quindi il cerchio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2, x_3 = p_3\} \subset \mathbb{R}^3$ è *l'insieme stesso*, e non più la sua circonferenza.
- La frontiera di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è proprio \mathbb{R} , perché ogni intorno di un punto razionale contiene infiniti altri punti razionali e irrazionali (gli irrazionali formano il complementare di \mathbb{Q} rispetto ad \mathbb{R}). Analogamente, \mathbb{R} è anche la frontiera di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Con la metrica discreta, se $x \in A$, allora $B(x, 1) = \{x\} \subseteq A$, mentre se $y \in A^c$ allora $B(y, 1) = \{y\} \subseteq A^c$, quindi ogni punto di un insieme è ad esso interno, mentre ogni punto del complementare è esterno. Quindi la frontiera di un insieme è sempre vuota, anche perché qualsiasi intorno di raggio $r \leq 1$ contiene soltanto il punto, che è il centro della bolla, quindi nessun altro punto dell'insieme o del complementare.

Osservazione 2.2.2. Fissati uno spazio metrico (X, d) e un suo sottoinsieme A , se un punto $p \in X$ non è esterno a tale insieme, allora ogni bolla centrata in p di qualsiasi raggio non è un sottoinsieme del complementare di A , cioè la sua intersezione con A non è mai vuota:

$$\forall r > 0, B(p, r) \not\subset A^c, \text{ vale a dire } B(p, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definizione 2.2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Il punto $p \in X$ non esterno ad A si dice

- di accumulazione per A , se ogni bolla centrata in p contiene punti di A , oltre al centro stesso della bolla:

$$\forall r > 0, B(p, r) \cap A \setminus \{p\} \neq \emptyset;$$

- isolato, se esiste almeno una bolla centrata nel punto che non contiene altri punti dell'insieme, oltre a p stesso:

$$\exists r > 0: B(p, r) \cap A = \{p\}.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama *derivato* e si indica con A' . Si dimostra inoltre che se l'intorno di un punto di accumulazione contiene almeno un altro punto dell'insieme, ne contiene infiniti.

Teorema 2.2.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Se $p \in A'$, l'intersezione tra una bolla di qualsiasi raggio e l'insieme A ha cardinalità infinita.

$$\forall r > 0, |B(p, r) \cap A| = \infty.$$

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che esista un raggio \tilde{r} tale che la bolla centrata in p abbia cardinalità finita, quindi che $\exists \tilde{r} > 0: B(p, \tilde{r}) \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Per ogni punto x_i di questa bolla possiamo individuare la distanza $r_i = d(p, x_i)$ dal centro, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Poiché l'insieme di questi raggi r_i è finito (ha precisamente n elementi), l'esistenza del suo minimo è certa. Allora preso un nuovo raggio r' qualunque tale che $r' < \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$, una nuova bolla centrata in p non conterrà più alcun elemento di A , infatti si ha che

$$B(p, r') \cap A = \{p\},$$

cioè p è un punto isolato, che è la negazione della tesi. Quindi il teorema è dimostrato. \square

Corollario 2.2.5. In ogni spazio metrico, il derivato di qualsiasi insieme di cardinalità finita è vuoto.

$$\forall (X, d), A \subseteq X, \text{ se } A \text{ è finito} \Rightarrow A' = \emptyset.$$

2.3 Insiemi aperti, chiusi e limitati

Definizione 2.3.1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. A si dice

- aperto, se tutti i suoi punti sono interni, quindi $\mathring{A} = A$;
- chiuso, se il suo complementare A^c è aperto.

Questa non è una definizione esaustiva, infatti esistono insiemi che non sono aperti né chiusi. Si dà anche la seguente caratterizzazione, cioè una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 2.3.2. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. L'insieme A è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione.

$$A \text{ è chiuso} \Leftrightarrow A' \subseteq A.$$

Dimostrazione. (i) Se A è chiuso, contiene i suoi punti di accumulazione. Sia $p \in A^c$, che quindi per ipotesi, dato che A è chiuso, è aperto. Allora esiste una bolla centrata in p tutta contenuta in A^c : quindi l'intersezione di tale bolla con l'insieme A deve essere vuota, e p non può essere un punto di accumulazione di A .

$$\exists r > 0: B(p, r) \subset A^c \quad \longrightarrow \quad B(p, r) \cap A = \emptyset \quad \longrightarrow \quad p \notin A'.$$

Necessariamente allora i punti di accumulazione devono trovarsi in A .

(ii) Se A contiene i suoi punti di accumulazione, è chiuso. Sia $A' \subseteq A$ e p un qualsiasi punto del complementare. Per ipotesi p non è di accumulazione per A , quindi esiste una bolla $B(p, r)$ che non contiene altri punti di A oltre a p stesso. Poiché $p \in A^c$, tale bolla non contiene alcun punto di A : allora $B(p, r) \subseteq A^c$, vale a dire p è interno ad A^c . Quindi A^c è aperto, a cui segue che A è chiuso. \square

Esempi

- Ogni intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è aperto, così come $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$. Analogamente, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$ sono chiusi. Intervalli del tipo $[a, b)$ non sono aperti né chiusi.
- In ogni spazio metrico (X, d) , l'insieme X è aperto perché tutti i suoi punti sono interni. Però X è allo stesso tempo anche chiuso, perché contenendo tutti i punti non può che contenere anche quelli di accumulazione di X' . Allora X è sia aperto che chiuso, e quindi anche un insieme vuoto è sia aperto che chiuso.
- Ogni intorno è aperto, per definizione, perché tutti i suoi punti sono interni.
- In uno spazio metrico discreto, ogni insieme $A \subseteq X$ è aperto, perché ogni suo punto è interno, ma allo stesso tempo tutti i punti sono isolati, quindi $A' = \emptyset$, quindi A (che ovviamente contiene l'insieme vuoto) è anche chiuso.

Teorema 2.3.3. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia qualunque di sottoinsiemi aperti di tale spazio metrico. Allora

1.

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ è aperto;}$$

2. se la famiglia è finita, cioè sia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, allora

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ è aperto.}$$

Dimostrazione. 1. Sia p appartenente ad A , l'insieme unione di tutti gli insiemi della famiglia: questo punto deve allora appartenere ad almeno uno degli insiemi della famiglia, cioè $\exists k: p \in A_k$. Poiché tutti questi insiemi sono aperti, p è interno a questo insieme A_k , quindi esiste una bolla contenuta tutta in questo insieme, la quale allora è anche contenuta nell'insieme unione: $B(p, r) \subset A_k \subset A$.

2. Sia p un punto appartenente ad A , l'insieme intersezione degli insiemi appartenenti alla famiglia finita: questo punto deve allora appartenere a ciascuno degli insiemi della famiglia $A_i, \forall i$. Ognuno di questi insiemi è aperto, quindi esiste un raggio tale che la bolla centrata in p sia contenuta in ogni insieme, $\exists r_i: \forall i B(p, r_i) \subset A_i$. Preso $r' = \min\{r_i\}$, la cui esistenza è garantita dal fatto che la famiglia di insiemi è finita, allora la bolla di raggio r' è contenuta in tutti gli insiemi, quindi anche nell'insieme intersezione: $B(p, r') \subset A$.

□

In generale, l'intersezione infinita di aperti non è aperta: ad esempio, sia $A_i = (0, 1 + 1/k)$, per $i \in \mathbb{N}$, l'intersezione dà come risultato $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = (0, 1]$, che non è aperto né chiuso. Vale anche il seguente teorema, la cui dimostrazione si ricava dal precedente.

Teorema 2.3.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{C_j\}_{j \in J}$ una famiglia qualunque di sottoinsiemi chiusi di tale spazio metrico. Allora

1.

$$C = \bigcap_{j \in J} C_j \text{ è chiuso;}$$

2. se la famiglia è finita, cioè sia $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, allora

$$C = \bigcup_{j=1}^n C_j \text{ è chiuso.}$$

Dimostrazione. 1. Passando ai complementari dei risultati del teorema precedente, per le formule di De Morgan si ha

$$C^c = \left(\bigcap_{j \in J} C_j \right)^c = \bigcup_{j \in J} C_j^c,$$

che è l'unione di infiniti insiemi aperti, che per il teorema precedente è aperta. Allora C è chiuso, per la definizione 2.3.1.

2. Analogamente, si ha

$$C^c = \left(\bigcup_{j=1}^n C_j \right)^c = C^c = \bigcap_{j=1}^n C_j^c,$$

che è l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti, che quindi per il teorema precedente è aperto. Allora C è chiuso, sempre per la 2.3.1. \square

Analogamente al controesempio precedente, l'unione di infiniti chiusi non è sempre chiusa: se $C_j = [0, 1 - 1/k]$ con $j \in \mathbb{N}$, si ha che $\bigcup_{j=1}^{+\infty} C_j = [0, 1)$ che non è chiuso, e nemmeno aperto.

Definizione 2.3.5. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Si chiama chiusura di A , e si indica con \overline{A} , il più piccolo insieme chiuso che lo contiene. Questo insieme coincide con l'unione dell'insieme stesso con il suo derivato.

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Si dimostrano che:

Teorema 2.3.6. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme.

1. \overline{A} è sempre chiuso;
2. se F è chiuso e $A \subseteq F$, allora $\overline{A} \subseteq F$;
3. se A è chiuso, $\overline{A} = A$ (perché, semplicemente, $A' = \emptyset$).

Definizione 2.3.7. Un insieme è limitato se esiste, finito, l'estremo superiore delle distanze reciproche tra tutti i suoi elementi.

$$\sup_{x, y \in A} d(x, y) < +\infty.$$

Tale estremo superiore è detto diametro dell'insieme.

Se $A \subseteq (X, d)$ è un insieme limitato, allora il suo diametro coincide con quello della sua chiusura: $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$; inoltre $\exists p \in X$ e $r > 0$ tali per cui $A \subset B(p, r)$, ossia un insieme limitato può essere sempre contenuto in una bolla di opportuno raggio.

Esempi

- Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato, non vuoto: il suo diametro è dato da $\sup A - \inf A$.
- Con la metrica discreta il diametro di qualsiasi insieme di almeno due punti è sempre 1. Quindi ogni insieme è limitato.

Capitolo 3

Successioni

3.1 Introduzione

Le successioni sono famiglie di elementi del tipo $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, con $a_n \in (X, d)$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, e sono propriamente definite come funzioni dell'insieme dei naturali su uno spazio metrico.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow (X, d).$$

L'immagine $f(n)$, con n sempre naturale, viene indicata con a_n , che si chiama *termine generale* della successione, che invece si indica, tra i vari modi, con $\{a_n\}$, che indica anche il suo codominio, ossia l'insieme delle immagini a_n . Si può descrivere una successione, quindi, anche con l'espressione

$$f: n \rightarrow f(n) = a_n.$$

Definizione 3.1.1. Si dice che una definizione soddisfa una proprietà definitivamente se tale proprietà è vera per n sufficientemente grande, cioè se esiste un valore N tale che per ogni $n > N$ il termine a_n verifica la proprietà.

È diverso affermare che una successione verifica una proprietà per infiniti n o definitivamente: quest'ultimo modo si usa per dire che, per *tutti* gli n maggiori di un certo numero N , la proprietà è verificata. Ad esempio, la successione a valori reali $a_n = (-1)^n$ soddisfa la proprietà $a_n = 1$ per infiniti n , ma non definitivamente, infatti continua ad oscillare tra 1 e -1 e non si può stabilire un numero $n = N$ oltre il quale a_n verifichi *sempre* la proprietà.

3.2 Successioni convergenti

Definizione 3.2.1. Siano $\{a_n\} \subset (X, d)$ e $\ell \in X$. Si dice che la successione $\{a_n\}$ converge a ℓ se per ogni numero ε arbitrariamente piccolo $\{a_n\}$ verifica definitivamente la proprietà $d(a_n, \ell) < \varepsilon$, oppure equivalentemente che, sempre definitivamente, $a_n \in B(\ell, \varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \rightarrow d(a_n, \ell) < \varepsilon.$$

Definizione 3.2.2. Il numero $\ell \in X$ si chiama limite della successione $\{a_n\} \subset (X, d)$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell.$$

Teorema 3.2.3. Se la successione $\{a_n\}$ a valori nello spazio metrico (X, d) è convergente, allora è limitata.

Dimostrazione. Si scelga $\varepsilon = 1$ come raggio dell'intorno. Sia ℓ il limite della successione: per ipotesi, esiste un numero intero N tale che $\forall n \geq N$ risulta $a_n \in B(\ell, 1)$. Allora l'insieme formato dai valori di $\{a_n\}$ per $n \geq N$ ha un diametro inferiore o uguale a 2, quindi è limitato. Allora poiché l'insieme dei valori della successione per $n < N$ è di cardinalità finita, è limitato anch'esso, quindi tutta la successione è limitata in quanto somma di due insiemi limitati. \square

Una successione è limitata quando il suo codominio è limitato, ma questo non implica necessariamente che la successione converga ad un limite. Come esempio si può considerare, come prima, la successione $a_n = (-1)^n$ che è chiaramente limitata, ma non converge.

Teorema 3.2.4 (di unicità del limite). Siano $\{a_n\} \subset (X, d)$ e $\ell_1, \ell_2 \in X$. Se $a_n \rightarrow \ell_1$ e $a_n \rightarrow \ell_2$ allora $\ell_1 = \ell_2$, vale a dire che una successione, se converge, non può convergere a due limiti differenti.

Dimostrazione. Sia per assurdo $\ell_1 \neq \ell_2$. Deve allora esistere una distanza non nulla tra di loro. Si considerino allora due raggi r_1 e r_2 tali che $r_1 + r_2 \leq d(\ell_1, \ell_2)$: per il teorema di Hausdorff 2.1.3 questi due raggi individuano rispettivamente gli intorni $B(\ell_1, r_1)$ e $B(\ell_2, r_2)$, tali che $B(\ell_1, r_1) \cap B(\ell_2, r_2) = \emptyset$. Perché la successione converga ad entrambi i limiti, deve essere definitivamente contenuta in entrambi gli intorni, ma ciò è assurdo, quindi i due limiti ℓ_1 e ℓ_2 devono coincidere. \square

3.3 Successioni a valori reali

Si identificano con questa definizione tutte le successioni le cui immagini sono numeri reali, ossia

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La definizione di limite in questo caso si può riscrivere affermando che se la successione converge a ℓ , è definitivamente contenuta nell'intervallo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, perché $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Per il teorema 3.2.3 allora ogni successione convergente è sia superiormente che inferiormente limitata.

Definizione 3.3.1. Una successione si dice divergente all'infinito se i suoi elementi, in valore assoluto, sono definitivamente grandi. In particolare:

- $a_n \rightarrow +\infty$ se $\forall M > 0 \exists N: \forall n \geq N \rightarrow a_n > M$;
- $a_n \rightarrow -\infty$ se $\forall M > 0 \exists N: \forall n \geq N \rightarrow a_n < -M$.

Teorema 3.3.2. Se la successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, allora non è limitata superiormente. Analogamente, se $a_n \rightarrow -\infty$ non è limitata inferiormente.

Non è però sempre valido il contrario, cioè una successione illimitata superiormente non è necessariamente divergente a $+\infty$. Come esempio si consideri la successione

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Ovviamente questa successione non è limitata, ma non è verificato *definitivamente* che sia arbitrariamente grande.

Teorema 3.3.3 (di permanenza del segno). Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali convergente ad a .

1. Se a è positivo, allora gli elementi della successione sono definitivamente positivi.
2. Se la successione è definitivamente positiva, allora $a \geq 0$.

Dimostrazione. Se la successione converge ad un valore a positivo, scelto un $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, deve essere che $a - \varepsilon > 0$. Poiché a è il limite della successione, i suoi elementi sono definitivamente compresi nell'intorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ossia sono sicuramente maggiori di $a - \varepsilon$. Dato che $a - \varepsilon$ è positivo, segue che anche gli a_n devono essere definitivamente positivi.

Sia ora definitivamente $a_n > 0$. Se il suo limite a fosse negativo, per il punto precedente la successione dovrebbe essere definitivamente negativa, che è assurdo: quindi il suo limite non è negativo. \square

Analogamente si dimostra che se $\{a_n\}$ converge ad un valore $a < 0$, i suoi elementi sono definitivamente negativi, e che se una successione è convergente e definitivamente negativa, il suo limite è negativo o nullo. La seconda parte del teorema *non è l'inverso* della prima, in quanto anche se la successione è definitivamente positiva il limite non è sempre positivo, ma può essere anche nullo, come per la successione di $1/n$, chiaramente sempre positiva ma convergente a 0. Questo teorema può essere “traslato” sostituendo 0 con un altro numero e verificando che la successione converga ad un valore maggiore di quel numero. Questi ultimi due teoremi suppongono che il limite della successione esista, infatti la convergenza della successione è un'ipotesi fondamentale.

Teorema 3.3.4 (del confronto). 1. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni a valori reali, con $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente. Se le successioni a_n e c_n convergono entrambe ad un limite α , allora b_n ammette il limite, e tale limite coincide con α .

2. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a valori reali, con $a_n \leq b_n$ definitivamente:

- se a_n diverge a $+\infty$, allora anche b_n ammette il limite, che è $+\infty$;
- se b_n diverge a $-\infty$, allora anche a_n ammette il limite, che è $-\infty$.

Dimostrazione. 1. Per la convergenza di a_n e c_n si ha che

- $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rightarrow \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rightarrow \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$.

Per tutti gli $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ devono sussistere entrambe le proprietà. Allora, poiché per ipotesi b_n è compreso tra le altre due successioni, risulta

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon,$$

A questa relazione segue che $\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$, che significa che anche b_n converge ad α .

2. Nel caso in cui $a_n \rightarrow +\infty$, segue che definitivamente $a_n > M$ con M arbitrariamente grande. Poiché è, per ipotesi, $b_n \geq a_n$, allora definitivamente si ha $b_n \geq a_n > M$, quindi $b_n > M$, cioè diverge a $+\infty$. Analogamente si dimostra il caso in cui $b_n \rightarrow -\infty$. \square

Nel teorema del confronto non è nota a priori l'esistenza dei limiti delle successioni che sono dimostrate come convergenti o divergenti, quindi è possibile utilizzare questo teorema per dimostrare l'esistenza di tali limiti. Dal teorema del confronto segue che

Osservazione 3.3.5. Sia $\{a_n\}$ il prodotto di due successioni b_n e c_n . Se $b_n \rightarrow 0$ e c_n è limitata, la successione $a_n = b_n \cdot c_n$ converge a 0.

Definizione 3.3.6. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente a valori reali. Si dice che a_n tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per eccesso (e si indica $a_n \rightarrow \ell^+$) se la successione è definitivamente compresa nell'intorno destro di ℓ , cioè in $[\ell, \ell + \varepsilon)$. Analogamente, a_n tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per difetto (e si indica $a_n \rightarrow \ell^-$) se la successione è definitivamente compresa nell'intorno sinistro di ℓ , cioè in $(\ell - \varepsilon, \ell]$.

3.4 Calcolo dei limiti

3.4.1 Algebra parziale di $\overline{\mathbb{R}}$

Si può estendere l'insieme dei numeri reali per comprendere anche il concetto di infinito, negativo e positivo, ottenendo l'insieme dei numeri reali *esteso* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. In questo insieme valgono ovviamente tutte le proprietà di somma e prodotto quando a e b sono finiti, ma non valgono più tutte se uno dei due è $\pm\infty$, infatti $\overline{\mathbb{R}}$ non è più un campo.

Teorema 3.4.1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a valori reali, e sia $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

- la successione $a_n + b_n$ ammette limite, e tale limite è $a + b$, purché la somma $a + b$ sia definita in $\overline{\mathbb{R}}$;
- la successione $a_n b_n$ ammette limite, e tale limite è ab , purché il prodotto ab sia definito in $\overline{\mathbb{R}}$.

Nei casi non compresi da questo teorema, il risultato dell'operazione tra i due limiti non è definito, e si ha una *forma di indecisione*, e in questi casi il risultato non si può sapere a priori, deducendolo da teoremi o formule note, ma bisogna calcolarlo caso per caso, in quanto non è mai stabilito. Le forme di indecisione si presentano nelle seguenti forme:

$$\begin{array}{cccc} \infty - \infty & 0 \cdot \infty & \frac{\infty}{\infty} \\ \frac{0}{0} & 1^\infty & 0^0 & \infty^0 \end{array}$$

Inoltre, si possono applicare alle successioni alcune funzioni elementari, come il logaritmo o le funzioni trigonometriche, e il limite della funzione si può calcolare come la funzione del limite della successione, come afferma il seguente teorema.

Teorema 3.4.2. Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali convergente al numero a . Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione “elementare”. Se la successione a_n e il suo limite a appartengono a D , allora

$$f(a_n) \rightarrow f(a).$$

Confronto di infiniti Per calcolare più velocemente il rapporto di due successioni divergenti si stabilisce quale tipo di funzione “diverge più velocemente”, confrontando i tipi di infiniti. Si definisce così una scala di tipi di successioni, ordinate partendo dalla più lenta a divergere:

$$\log_a^b n \quad n^c \quad d^n \quad n! \quad n^n,$$

con i vari coefficienti scelti opportunamente in modo che le successioni divergano. Il rapporto di uno di questi infiniti per uno qualsiasi dei precedenti tende a infinito, con il segno opportuno, e ovviamente il reciproco tende a zero.

3.5 Successioni monotone

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali. Si dice che la successione è monotona:

- crescente in senso stretto, se $\forall n$ si ha $a_n < a_{n+1}$;
- crescente in senso lato, se $\forall n$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$;
- decrescente in senso stretto, se $\forall n$ si ha $a_n > a_{n+1}$;
- decrescente in senso lato, se $\forall n$ si ha $a_n \geq a_{n+1}$.

Si può eventualmente definire una successione come *definitivamente monotona*, quando vale una delle quattro relazioni precedenti ma solo per tutti i valori di n oltre un certo numero N . Le proprietà delle successioni monotone valgono in entrambi i casi, con le opportune modifiche del caso, ossia di ignorare nei calcoli la parte della successione per $n < N$.

Il seguente teorema garantisce l'esistenza del limite per tali successioni.

Teorema 3.5.1. Tutte le successioni monotone sono regolari. Sia inoltre $\{a_n\}$ una successione a valori reali: se è monotona crescente, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n\},$$

e tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti è $+\infty$. Se $\{a_n\}$ è invece monotona decrescente, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n\},$$

e tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti è $-\infty$.

Dimostrazione. Si supponga $\{a_n\}$ monotona crescente, e sia $\sup\{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$. Allora ℓ è un maggiorante, e anche il minimo dei maggioranti. Quindi

$$a_n \leq \ell \quad \forall n \text{ e } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \ell - \varepsilon < a_N \leq \ell.$$

L'elemento a_{N+1} deve essere maggiore di a_N , perché la successione è crescente, e al contempo deve essere minore di ℓ , e così via per ogni elemento di a_n che segue nell'ordinamento della successione. Tutti gli elementi a_n sono tali che, $\forall n > N$:

$$\ell - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \ell,$$

quindi appartengono all'intorno sinistro di ℓ , cioè $a_n \rightarrow \ell^-$ per $n \rightarrow +\infty$.

Sia ora $\sup\{a_n\} = +\infty$. Poiché non ci sono maggioranti, vale che $\forall M > 0 \exists a_N > M$, e dato che la successione è crescente, esiste $N: \forall n \geq N$ si ha che $a_n \geq a_N > M$, quindi $a_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.

La dimostrazione per $\{a_n\}$ decrescente è analoga. \square

Tra le successioni monotone crescenti ne esiste una molto particolare, che definisce il numero e . Si definisce infatti la successione

$$e_n \equiv \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

per cui vale il teorema seguente.

Teorema 3.5.2. La successione e_n è strettamente monotona crescente e superiormente limitata. Essa ammette quindi un limite finito, e tale limite è il numero e .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \sup\{e_n\} = e.$$

Tale numero è trascendente in quanto non è mai radice di un polinomio a coefficienti razionali. Una prima approssimazione del numero è

$$e \approx 2.718\,281\,828\,459.$$

A partire da questo si definiscono i logaritmi, così come le potenze, in base e . Valgono inoltre i seguenti limiti notevoli:

$$\begin{aligned} (1 + a\varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} &\rightarrow e^a; & \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} &\rightarrow 1; \\ \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} &\rightarrow 1; & \frac{(1 + \varepsilon_n)^b - 1}{\varepsilon_n} &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il primo non è altro che la successione e_n riscritta diversamente per una successione infinitesima generica. Da questa si dimostrano:

- Applicando i logaritmi a $(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \rightarrow e^a$ si ottiene che

$$\log(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \rightarrow \log e, \text{ da cui } \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow 1.$$

- Sia $x_n \equiv e^{\varepsilon_n} - 1$, che quindi è infinitesima. Allora $e^{\varepsilon_n} = x_n + 1$, e applicando i logaritmi si ha $\varepsilon_n = \log(x_n + 1)$, quindi

$$\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = \frac{x_n}{\log(1 + x_n)} \rightarrow 1.$$

- Sia $y_n \equiv a \log(1 + \varepsilon_n)$, che è infinitesima. Applicando la potenza in base e si trova che $e^{y_n} = e^{a \log(1 + \varepsilon_n)} = (1 + \varepsilon_n)^a$, quindi

$$\frac{(1 + \varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} = \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} \cdot \frac{y_n}{\varepsilon_n} = \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} \cdot \frac{a \log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow a. \quad \square$$

3.6 Infiniti e infinitesimi

Una successione si dice infinitesima se tende a zero, mentre è infinita se diverge. Esistono due utili criteri per stabilire se una successione è uno di questi due tipi.

Teorema 3.6.1 (Criterio del rapporto). Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali definitivamente positivi. Se esiste il limite del rapporto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv \alpha,$$

con $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ (è anche positivo, poiché i due termini della frazione sono positivi), allora:

- se $\alpha < 1$, a_n converge a 0;
- se $\alpha > 1$, a_n diverge a $+\infty$.

Questo teorema inoltre garantisce l'esistenza del limite della successione. Il caso in cui $\alpha = 1$ non è preso in considerazione in quanto è di indecisione, e non si può dire niente sul comportamento della successione.

Dimostrazione. 1) Sia $\alpha < 1$: allora, dato un numero $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo per cui $\alpha + \varepsilon < 1$, esiste N tale che per ogni $n > N$ si abbia $\alpha - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < \alpha + \varepsilon$, perché per la definizione di limite la successione a_{n+1}/a_n è definitivamente contenuta in un arbitrario intorno di α . Allora, per questi valori di n , la successione a_n si può scrivere come

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N.$$

Tutti i rapporti di questo tipo, cioè a_k/a_{k-1} , sono per $n > N$ minori di $\alpha + \varepsilon$, quindi

$$\begin{aligned} a_n &< (\alpha + \varepsilon)(\alpha + \varepsilon) \cdots (\alpha + \varepsilon)a_N \\ &= (\alpha + \varepsilon)^{n-N} a_N \\ &= \frac{a_N}{(\alpha + \varepsilon)^N} \cdot (\alpha + \varepsilon)^n, \end{aligned}$$

dove il termine $a_N/(\alpha + \varepsilon)^N$ è un numero, costante, mentre $(\alpha + \varepsilon)^n$ è una successione convergente a 0. Dato che

$$0 < a_n < \frac{a_N}{(\alpha + \varepsilon)^N} \cdot (\alpha + \varepsilon)^n,$$

si ha che per il teorema 3.3.4 del confronto anche $a_n \rightarrow 0$.

2) Sia $\alpha > 1$, e analogamente al caso precedente si consideri $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha - \varepsilon > 1$; allora si ha che, definitivamente, $\alpha - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < \alpha + \varepsilon$, quindi $\exists \tilde{N}$ per cui $\forall n > \tilde{N}$ tutte le frazioni del tipo a_k/a_{k-1} sono maggiori di $\alpha - \varepsilon$. Allora, riscrivendo la successione a_n come nel caso precedente, si ha che

$$a_n > (\alpha - \varepsilon)^n \cdot \frac{a_N}{(\alpha - \varepsilon)^N},$$

a cui segue, sempre per il teorema 3.3.4, che $a_n \rightarrow +\infty$. □

Teorema 3.6.2 (Criterio della radice). Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali definitivamente positivi. Se esiste il limite del rapporto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \alpha,$$

con $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ (è anche positivo, dato che l'argomento della radice è positivo), allora:

- se $\alpha < 1$, a_n converge a 0;
- se $\alpha > 1$, a_n diverge a $+\infty$.

La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente.

Grazie a questi teoremi è possibile dimostrare alcuni dei confronti tra infiniti:

1. Sia $x_n \equiv \frac{a^n}{n^b}$, con $a > 1$ e $b > 0$. La successione x_{n+1}/x_n è

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n^b}{(n+1)^b} = a \cdot \frac{(n+1-1)^b}{(n+1)^b} = a \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^b \rightarrow a.$$

Per il criterio del rapporto, poiché $a > 1$ allora $x_n \rightarrow +\infty$, cioè $\frac{a^n}{n^b} \rightarrow +\infty$.

2. Sia $y_n \equiv \frac{n!}{a^n}$, con $a > 1$. La successione y_{n+1}/y_n è

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a} > 1.$$

Quindi $y_n \rightarrow +\infty$ per il criterio del rapporto.

3.7 Successioni asintotiche

Spesso, per studiare l'andamento di una successione al limite, è utile poterla approssimare e quindi sostituire con una più semplice. Questo è possibile con la seguente definizione.

Definizione 3.7.1. Due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ si dicono asintotiche, e si scrive $x_n \sim y_n$, se il loro rapporto tende a 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

La relazione \sim è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione 3.7.2. Date due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, si dice che x_n è o-piccolo di y_n , e si scrive $x_n = o(y_n)$, se il loro rapporto è infinitesimo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

La scrittura $o(1)$ indica un infinitesimo generico. Il limite del rapporto della 3.7.1 può essere riscritto usando questa notazione, cioè se $a_n \sim \alpha b_n$ allora $a_n = \alpha b_n + o(b_n)$. Infatti dividendo l'ultima relazione per b_n si ha che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha b_n}{b_n} + \frac{o(b_n)}{b_n} = \alpha + o(1), \text{ cioè } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \alpha.$$

Da ciò si può notare come la scrittura con gli o-piccoli mostra l'errore che si commette approssimando una successione con l'altra, cosa che non accade sfruttando l'uguaglianza asintotica, che è infatti è "sicura" da utilizzare soltanto in caso di prodotti e altri casi particolari. Si noti inoltre che la scrittura, ad esempio, $e^{\varepsilon_n} \sim 1 + \varepsilon_n$, per quanto corretta dal punto di vista delle relazioni, non ha molto senso: infatti, dato che l'uguaglianza asintotica è "interessata" soltanto dai termini di ordine maggiore, da quella relazione segue che $e^{\varepsilon_n} \sim 1$, che per quanto vera non dà alcuna informazione utile. È invece corretta la scrittura $e^{\varepsilon_n} = 1 + \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$.

3.8 Condizione di Cauchy

Senza bisogno di calcolare il limite, esistono dei teoremi che permettono di garantire la convergenza di una successione. La condizione di Cauchy, ad esempio, non fa alcun riferimento al valore del limite, ma considera la distanza tra due elementi della successione.

Definizione 3.8.1 (condizione di Cauchy). Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in uno spazio metrico (X, d) . Si dice che la successione soddisfa la condizione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0$ vale

$$\exists N: \forall m, n > N \text{ si ha che } d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad (3.8.1)$$

ossia se la distanza tra due generici elementi della successione è definitivamente infinitesima.

Osservazione 3.8.2. Se una successione converge, soddisfa necessariamente la condizione di Cauchy.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente a p . Per la distanza triangolare, presi due elementi x_n e x_m della successione, si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(x_m, p).$$

Il secondo membro della disuguaglianza, per la definizione di limite, è arbitrariamente piccolo, perciò lo è anche la distanza $d(x_n, x_m)$, quindi la condizione di Cauchy è soddisfatta. \square

Questo non significa però che una successione che soddisfa la condizione di Cauchy sia anche convergente: non vale insomma il teorema inverso.

Osservazione 3.8.3. Ogni successione che soddisfa la condizione di Cauchy è limitata.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = 1$, allora per la condizione di Cauchy $\exists N: \forall n \geq N$ si ha $d(x_n, x_m) < 1$. Quindi per $n \geq N$ si ha che $x_n \in B(x_N, 1)$. Al di fuori dell'intorno rimangono al più un numero finito di elementi (tutti quelli per cui $n < N$): sia $r_i = d(x_N, x_i)$ con $i = 1, 2, \dots, N-1$, preso un qualunque $R > \max\{r_i\}$ allora tutta la successione $\{x_n\}$ è compresa in $B(x_N, R)$, perciò è limitata. \square

La successione di Cauchy quindi implica la limitatezza della successione, ma non è ancora sufficiente per determinarne la convergenza. Questa proprietà infatti dipende dallo spazio metrico in cui è posta la successione.

Esempi

- Nello spazio metrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, una successione qualsiasi convergente a $\sqrt{2}$, come ad esempio quella dei troncamenti degli allineamenti decimali che la approssimano, soddisfa la condizione di Cauchy, in quanto converge in \mathbb{R} dato che la metrica è la stessa per entrambi gli spazi metrici. Tuttavia il limite di tale successione non appartiene a \mathbb{Q} , perciò non converge.
- Si definisca per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ la distanza $d^*(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$. Si può dimostrare che (\mathbb{N}, d^*) è uno spazio metrico. La successione $x_n = n$ soddisfa la condizione di Cauchy, poiché

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$$

se vale $m, n > 1/2\varepsilon$. Tuttavia la successione non converge, infatti supposto che converga al limite $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d^*(x_n, k) = \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{k} \neq 0.$$

Esistono però alcuni spazi metrici in cui ogni successione che soddisfa la condizione di Cauchy è anche convergente.

Definizione 3.8.4. Uno spazio metrico si dice completo se in esso ogni successione che verifica la condizione di Cauchy è anche convergente.

Gli spazi $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ e (\mathbb{N}, d^*) non sono quindi completi, per i controesempi precedenti. Gli spazi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ invece lo sono, come dimostrato di seguito.

Lemma 3.8.5. Sia $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di intervalli chiusi, con $I_{n+1} \subseteq I_n \forall n$. Allora

$$\bigcap_{n=1}^\infty I_n \neq \emptyset.$$

Inoltre, se $\text{diam}\{I_n\} \rightarrow 0$, allora $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ è un punto isolato (la sua cardinalità è 1).

Dimostrazione. Gli intervalli I_n sono della forma $[a_n, b_n]$, con opportuni $a_n \leq b_n$. Per la relazione di inclusione, gli a_n formano una successione monotona crescente, mentre b_n è monotona decrescente. Inoltre, entrambe sono limitate perché $a_n \leq b_1$ e $b_n \geq a_1$, quindi entrambe ammettono limite, rispettivamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup a_n \equiv A \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \inf b_n \equiv B.$$

Sia ora per assurdo che $B < A$, che quindi individuano l'intervallo $[B, A]$. Allora per i limiti precedenti $\exists N: \forall n \geq N \ a_n \in [B, A]$ e $\exists M: \forall n \geq M \ b_n \in [B, A]$. Quindi se si prende $K \geq \max\{N, M\}$, poiché per ipotesi $a_n < b_n$, si avrà che $B < a_K < b_K < A$. Ma proseguendo con gli indici, per $H > K$ si avrà $B < b_H < a_K < A$, che contrasta con l'ipotesi per cui $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora deve essere $A \leq B$, quindi l'intervallo $[A, B]$ è contenuto nell'intersezione di tutti gli I_n . Se infine a_n e b_n tendono ad un unico limite p , allora l'intervallo si riduce a $[A, B] \rightarrow p$, quindi l'intersezione degli I_n è formata soltanto dal punto isolato p . \square

In più dimensioni, cioè in \mathbb{R}^k con $k \geq 2$, un (iper)rettangolo è il prodotto cartesiano di k intervalli:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

ed è quindi determinato da due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ con $a_i < b_i \forall i = 1, 2, \dots, k$.

Lemma 3.8.6. Sia $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di iperrettangoli chiusi in \mathbb{R}^k , con $I_{n+1} \subseteq I_n \forall n$. Allora

$$\bigcap_{n=1}^\infty I_n \neq \emptyset$$

e se $\text{diam}\{I_n\} \rightarrow 0$ si ha anche che $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ ha cardinalità 1.

La dimostrazione è la stessa del lemma precedente, svolta su ciascuna dimensione.

Teorema 3.8.7. Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ è completo per ogni $k \geq 1$.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali che soddisfa la condizione di Cauchy. Per ogni $i \geq 1$ si consideri la successione $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots\} \equiv A_i$, che è a valori reali ed è limitata. Necessariamente quindi A_i ammette un estremo inferiore e superiore: siano tali estremi rispettivamente a_i e b_i , e si consideri l'intervallo $I_i = [a_i, b_i]$. Questi intervalli formano una famiglia $\{I_i\}$ di intervalli chiusi con $I_{i+1} \subseteq I_i$; inoltre, per la condizione di Cauchy la distanza $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0$, quindi $\text{diam } I_n \rightarrow 0$ e per il lemma precedente $\exists! z \in \bigcap_i I_i$, cioè che è contenuto in tutti gli intervalli della famiglia. Come z , anche x_n per definizione è contenuto in $\bigcap_i I_i$, quindi

$$|x_n - z| \leq \text{diam}\{I_n\}.$$

Poiché $\text{diam}\{I_n\} \rightarrow 0$, per il teorema del confronto si ha che $|x_n - z| \rightarrow 0$, cioè la successione $\{x_n\}$ ammette limite ed è

$$x_n \rightarrow z. \quad \square$$

Teorema 3.8.8. Sia $\{\mathbf{x}_n\}$ una successione a valori in \mathbb{R}^k e sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Allora $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ se e solo se

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \text{ si ha che } |x_{i,n} - x_i| \rightarrow 0.$$

Ciò significa che una successione a valori in \mathbb{R}^k converge a \mathbf{x} se e solo se le successioni numeriche delle distanze tra le omologhe componenti di \mathbf{x}_n e \mathbf{x} convergono tutte a 0.

3.9 Classe limite

Lemma 3.9.1. Sia $A \subseteq (X, d)$. Un punto $p \in (X, d)$ è di accumulazione per l'insieme A se e solo se esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ con $x_n \neq p$ tale che $x_n \rightarrow p$.

Dimostrazione. Se p è il limite di $\{x_n\}$ allora $\forall r > 0$ esiste un intorno $B(p, r)$ in cui gli elementi della successione sono definitivamente contenuti, quindi $\exists N: \forall n \geq N \{x_n\} \subset B(p, r)$. Ciò vuol dire che in qualsiasi intorno arbitrariamente piccolo di p sono contenuti infiniti elementi di $\{x_n\}$, che sono anche elementi di A . Allora $p \in A'$.

Se invece $p \in A'$, in suo intorno si trovano infiniti punti di A . Allora, consideriamo un intorno di raggio $r = 1$: esiste $x_1 \in A \cap B_1(p, 1)$. Si prosegue con un nuovo intorno di raggio $1/2$, quindi $1/3$ e così via, creando una successione come segue:

$$\begin{aligned} x_1 &\in B_1(p, 1) \\ x_2 &\in B_2(p, 1/2) \\ x_3 &\in B_3(p, 1/3) \\ &\vdots \\ x_n &\in B_n(p, 1/n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

La successione di x_n creata appartiene certamente ad A , inoltre poiché il raggio dell'intorno B è infinitesimo, anche la distanza tra p e x_n (compresi in B) è infinitesima, vale a dire che $x_n \rightarrow p$. \square

Definizione 3.9.2. Data una successione $\{x_n\} \subseteq (X, d)$, e sia $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ una successione di interi indicata con n_k , la successione

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

si dice sottosuccessione estratta da x_n , che ne conserva l'ordinamento.

Se una successione è regolare, anche ogni sua sottosuccessione estratta converge (o diverge) allo stesso limite. Se invece la successione è irregolare, le sue sottosuccessioni possono assumere qualsiasi comportamento: ad esempio dalla successione $(-1)^n$ si possono estrarre le sottosuccessioni, tra le altre, $(-1)^{2k}$, $(-1)^{2k+1}$ o $(-1)^{3k}$, che hanno tutte un comportamento differente.

Definizione 3.9.3. Si chiama classe limite di una successione l'insieme dei limiti di tutte le sottosuccessioni estratte da essa. Ogni elemento della classe limite è detto valore limite.

I valori limiti possono anche essere $+\infty$ o $-\infty$. Una classe limite è sempre un insieme chiuso, e in $\overline{\mathbb{R}}$ ammette sempre un massimo e un minimo, chiamati rispettivamente limite superiore e inferiore (si indicano con $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$). Se una successione a valori reali è regolare, la sua classe limite è composta da un solo elemento. Può anche accadere che la classe limite sia infinita: ad esempio la successione

$$x_{n,k} = k + \frac{1}{n}$$

assume infiniti valori per $n \rightarrow +\infty$ al variare di $k \in \mathbb{N}$, quindi la sua classe limite è \mathbb{N} . La classe limite però non è mai vuota, come dimostra il seguente teorema.

Teorema 3.9.4. In \mathbb{R} la classe limite non è mai vuota.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali. Se essa assume un numero finito di valori, se si considera la sottosuccessione costante di uno di questi valori, ripetuto infinite volte, la classe limite è allora composta almeno da quel valore: non è quindi vuota. Se invece la successione assume infiniti valori distinti, si distinguono due casi:

- se x_n è superiormente illimitata, allora si può sempre estrarre una sottosuccessione divergente a $+\infty$, o a $-\infty$ se è inferiormente illimitata.
- se x_n è limitata, è sicuramente contenuta in un intervallo $I = [a, b]$ in cui a è un minorante e b un maggiorante di $\{x_n\}$. Si divide I in due parti, tali che in almeno una delle due cadano infiniti punti di $\{x_n\}$. Iterando questa suddivisione, che è sempre possibile perché la successione assume infiniti valori in $[a, b]$, si costruisce una successione decrescente di intervalli chiusi e inclusi ognuno nel precedente $\{I_n\}$ tale che $\text{diam } I_n \rightarrow 0$. Allora risulta che

$$\exists! p \in \mathbb{R}: p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

inoltre p è un punto di accumulazione di $\{x_n\}$ perché negli I_n sono contenuti infiniti elementi, quindi esiste una sottosuccessione estratta da $\{x_n\}$ convergente a p , per il lemma 3.9.1. \square

3.10 Insiemi compatti

Definizione 3.10.1. Un insieme $E \subseteq (X, d)$ si dice compatto se $\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in E$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un elemento $p \in E$.

Esempi

1. Tutti gli insiemi di cardinalità finita sono compatti: ogni successione convergente estratta è infatti necessariamente definitivamente costante, e tale costante non può non essere nell'insieme.
2. L'insieme $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è compatto, perché qualsiasi punto di accumulazione a cui può tendere una successione in E appartiene necessariamente ad E , poiché coincide con la sua chiusura \bar{E} . Infatti ogni insieme di \mathbb{R} chiuso e limitato è compatto.
3. L'insieme $E = (0, 1]$ non è compatto, perché la successione $x_n = 1/n$ tende a 0 che non appartiene ad E .
4. Anche un insieme come $E = [a, +\infty)$ non è compatto, perché qualsiasi successione divergente ha come limite $+\infty$, che non appartiene all'insieme.

Lemma 3.10.2. Un insieme $A \subseteq (X, d)$ è chiuso se e solo se $\forall \{x_n\} \subset A$ con $x_n \rightarrow p$ si ha che $p \in A$, ossia se A contiene tutti i limiti di successioni convergenti estratte da esso.

Dimostrazione. Sia per assurdo che $p \notin A$, allora deve essere comunque che $p \in A'$ dato che la successione appartiene all'insieme A . Dato che l'insieme è chiuso, però, deve contenere i suoi punti di accumulazione, cioè deve essere $A' \subset A$. Ma allora si ha che $p \in A'$ e $p \notin A$, il che è assurdo. Quindi p deve appartenere all'insieme. Sia ora $p \in A$, e si costruisca una successione di raggi $r_n = 1/n$ per cui $\exists x_n: d(x_n, p) < r_n$. Allora $x_n \rightarrow p$ e $p \in A$, quindi si ha anche che $p \in A'$. \square

Teorema 3.10.3. Un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è a sua volta compatto.

Dimostrazione. Sia $F \subseteq E \subseteq (X, d)$, con E compatto e F chiuso, e sia $\{x_n\} \subset F$. Poiché $F \subseteq E$, allora è anche $\{x_n\} \subset E$, quindi per la compattezza di E risulta che $\exists x_{n_k} \rightarrow p \in E$. Quindi $p \in F$ per il lemma precedente, dato che è chiuso. Allora F è anche compatto. \square

Teorema 3.10.4. Ogni insieme compatto è necessariamente chiuso e limitato.

Dimostrazione. Sia $E \subseteq (X, d)$ un insieme compatto, e sia $\{x_n\} \subset E$ con $x_n \rightarrow p \in X$: allora $p \in E'$, e al contempo $p \in E$ perché è compatto. Quindi E è chiuso, perché $E' \subseteq E$.

Sia ora per assurdo che E sia illimitato. Si consideri un elemento generico $z \in X$, allora esiste una successione $\{x_n\} \subset E$ divergente, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $d(x_n, z) > n$. Poiché E è

compatto, esiste una sottosuccessione $x_{n_k} \rightarrow p \in E$. Allora, passando alle sottosuccessioni, si ha che ogni sottosuccessione di n , detta n_k , a sua volta diverge, quindi è anche $d(x_{n_k}, z) > n_k$. Per la disuguaglianza triangolare, inoltre, risulta $d(x_{n_k}, z) \leq d(x_{n_k}, p) + d(z, p)$. Confrontando le relazioni trovate si ottiene che

$$n_k < d(x_{n_k}, z) \leq d(x_{n_k}, p) + d(z, p),$$

che però è una contraddizione poiché per il teorema del confronto $d(x_{n_k}, z)$ dovrebbe contemporaneamente tendere a $d(z, p)$ e divergere a $+\infty$, quindi si conclude che E deve essere limitato. \square

Le condizioni di chiusura e limitatezza non sono sufficienti a determinare la compattezza di un insieme. Basti considerare $E = \mathbb{N}$ nello spazio metrico discreto: E è chiuso e limitato, ma la successione $x_n = n$ non ammette sottosuccessioni convergenti (infatti, ogni successione convergente nella metrica discreta deve essere definitivamente costante).

Teorema 3.10.5 (di Heine-Borel). Negli spazi metrici del tipo $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$, ogni insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione. È già stato dimostrato nel teorema 3.10.4 come un compatto sia necessariamente chiuso e limitato. Sia ora $\{x_n\} \subset E$: è sicuramente limitata, quindi (in \mathbb{R} e in ogni \mathbb{R}^k) si può sempre costruire una sottosuccessione convergente, per il teorema 3.9.4. Allora, dato che E è chiuso, $x_n \rightarrow p \in E$, quindi E è compatto. \square

Teorema 3.10.6 (di Bolzano-Weierstrass). Qualsiasi insieme di \mathbb{R}^k di cardinalità infinita e limitato ha sempre almeno un punto di accumulazione. Ossia, se $E \subset (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ è limitato e $|E| = +\infty$, allora $E' \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Dato che ha cardinalità infinita, da E si può sempre estrarre una successione non costante, che sarà sempre limitata (e in E). Sia $\{x_n\} \subset E$ con $x_n \neq x_m \forall m, n$. Allora $\{x_n\}$ è limitata in \overline{E} , che è anch'esso limitato. Ma anche \overline{E} è compatto per il teorema 3.10.5 di Heine-Borel, allora $\exists x_{n_k} \rightarrow p$ e si ha che $p \in E'$ perché è un punto di accumulazione. Quindi $E' \neq \emptyset$. \square

Altre proprietà degli insiemi compatti sono:

- Se E è compatto, da ogni copertura aperta di E è possibile estrarre una sottocopertura finita.
- Se E è compatto, ogni suo sottoinsieme finito ha almeno un punto di accumulazione in E .

Capitolo 4

Serie

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali. Si costruisce una successione che è la somma dei termini di a_n da 1 a k :

$$A_k \equiv \sum_{n=1}^k a_n,$$

detta *serie* di termine generale a_n e si indica con $\{A_k\}$. A_k è la *somma parziale* di k elementi di $\{a_n\}$, e la serie è il limite per $k \rightarrow +\infty$ di questa somma parziale, e si indica con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Il comportamento delle somme parziali, che è analogo a quello delle successioni, determina il comportamento della serie di termine generale:

- se A_k converge, la serie converge;
- se A_k diverge, la serie diverge;
- se A_k oscilla, la serie oscilla o non ammette limite.

Esempi

- Sia $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è detta *serie di Mengoli*. Il suo termine generale si può scomporre come

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

quindi la serie si sviluppa come

$$A_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$
$$1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1.$$

Questa serie quindi converge a 1, perché A_k converge a 1.

- Sia $a_n = q^n$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

è detta *serie geometrica di ragione q*. È determinata, se $q \neq 1$, dal comportamento della successione

$$A_k = \sum_{n=0}^k q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Se $|q| < 1$, $q^{k+1} \rightarrow 0$ quindi la serie converge a $\frac{1}{1-q}$. Se invece $q > 1$, si ha invece che $a_k \rightarrow +\infty$. Quando invece $q < -1$, la sottosuccessione A_{2k} diverge a $+\infty$ mentre A_{2k+1} a $-\infty$, quindi la serie è irregolare. Rimane il caso in cui $q = 1$, in cui non si può applicare la precedente formula, ma banalmente è una somma di 1 infinite volte, che ovviamente diverge.

4.1 Condizione di Cauchy

Avendo dimostrato che \mathbb{R} è completo (teorema 3.8.7), la condizione di Cauchy è sufficiente a garantire la convergenza di una successione a valori reali. Poiché anche le serie numeriche sono rappresentate come successioni, si può applicare anche ad esse questa condizione, che si traduce in una forma particolare.

Definizione 4.1.1 (Condizione di Cauchy). *La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ soddisfa la condizione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists p_0: \forall p \geq p_0$ e $\forall q \geq 0$ si ha*

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} a_n \right| < \varepsilon, \quad (4.1.1)$$

cioè la successione $\{A_k\}$ delle somme parziali soddisfa la condizione di Cauchy 3.8.1.

Perché $\{A_k\}$ soddisfi la 3.8.1 deve essere che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $N: \forall h, k \geq p_0$ si ha che

$$|A_k - A_h| = \left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^h a_n \right| = \left| \sum_{n=h+1}^k a_n \right| < \varepsilon.$$

Sostituendo gli indici come $h = p - 1$ e $k = p + q$ (con $q \geq 0$), l'equazione diventa

$$|A_{p+q} - A_{p-1}| = \left| \sum_{n=p}^{p+q} a_n \right| < \varepsilon.$$

Tutte le serie che soddisfano questa condizione sono convergenti.

4.2 Carattere delle serie

Teorema 4.2.1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi, se la serie converge allora A_k è convergente ad un certo limite S . Si può scrivere che $a_n = A_n - A_{n-1}$. Poiché A_k tende ad S , anche A_n e A_{n-1} tendono ad S , quindi la loro differenza tende a zero. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = S - S = 0. \quad \square$$

Il fatto che sia una condizione necessaria implica che se il limite della successione a_n non è zero, la serie sicuramente non converge. Possono esistere però successioni convergenti, la cui serie diverge, come ad esempio la serie armonica $1/n$. Infatti, considerata la successione di somme parziali da k a $2k$, questa è

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$$

che, poiché il termine generale è monotono decrescente, è tutta sicuramente maggiore dell'ultimo addendo, $1/2k$, moltiplicato per k volte (quanti sono gli elementi in questa somma), quindi

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2},$$

cioè non soddisfa la condizione di Cauchy, quindi diverge.

Definizione 4.2.2. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 4.2.3. Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

Dimostrazione. La serie di $|a_n|$ converge, quindi soddisfa la condizione di Cauchy. Per le proprietà dei valori assoluti quindi si ha che, $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m \geq N$ e $\forall p \geq 0$,

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} a_n \right| \leq \sum_{n=m}^{m+p} |a_n| < \varepsilon,$$

e per il teorema del confronto 3.3.4 entrambe le serie convergono. \square

Non vale ovviamente il teorema inverso. La divergenza assoluta, ossia la relazione $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, non fornisce in generale alcuna informazione sul carattere della serie: ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ oscilla, ma ovviamente diverge assolutamente.

4.3 Serie a termini positivi

In questa definizione rientrano tutte le serie il cui termine generale è *definitivamente* positivo, non importa che lo sia sempre: infatti ai fini della convergenza importa soltanto il comportamento della “coda” della serie.

Teorema 4.3.1. Una serie a termini positivi è sempre regolare.

Dimostrazione. Se $a_n \geq 0$, allora A_k è (definitivamente) monotona crescente. Poiché tutte le successioni monotone sono necessariamente regolari, allora la serie

- converge a una somma S se $\{A_k\}$ è superiormente limitata;
- diverge a $+\infty$ altrimenti. \square

Teorema 4.3.2 (del confronto). Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi, e sia definitivamente che $0 \leq a_n \leq b_n$. Allora

- se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$;
- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge (a $+\infty$), anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. Si considerino le successioni di somme parziali A_k e B_k : esse sono entrambe (definitivamente) monotone crescenti, e si ha che $A_k \leq B_k$. Nel primo caso, B_k converge, allora A_k è superiormente limitata, e poiché è monotona converge anche. Nel secondo caso, A_k diverge quindi è superiormente illimitata dato che è monotona, allora anche B_k deve essere superiormente illimitata, cioè diverge. \square

Esempi

- La serie di $1/\sqrt{n}$ diverge. Infatti si ha per ogni $n \geq 1$ che $\sqrt{n} \leq n$, quindi $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Dato che la serie di $1/n$ diverge, per il teorema del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
- La serie di $1/\log n$ diverge, perché per ogni $n \geq 2$ si ha $n \geq \log n$ quindi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n}$. Allora per il teorema del confronto la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ diverge.

Corollario 4.3.3. Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Se $a_n \sim b_n$, le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Se infatti le serie sono asintotiche, il loro rapporto e certamente anche il reciproco del rapporto tendono a 1. Quindi se $b_n/a_n \rightarrow 1$, è sicuramente contenuto in un intervallo arbitrario (con estremo inferiore positivo, perché le serie sono a termini positivi) che contiene 1, ad esempio $(1/2, 2)$. Quindi

$$\frac{1}{2} < \frac{b_n}{a_n} < 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}b_n < a_n < 2b_n.$$

Poiché le costanti $1/2$ e 2 non alterano il carattere della serie di b_n , per il teorema 4.3.2 del confronto anche b_n converge. \square

Teorema 4.3.4 (criterio della radice). Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponendo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \alpha$:

- se $0 \leq \alpha < 1$ la serie converge;
- se $\alpha > 1$ la serie diverge, e inoltre $a_n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. 1) Sia $0 \leq \alpha < 1$. Si può trovare un numero $q \in (\alpha, 1)$ tale che definitivamente si abbia $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Allora si ha $a_n \leq q^n$. Poiché $q < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ converge, quindi per il teorema 4.3.2 del confronto anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

2) Sia ora $\alpha > 1$. Esiste un numero $p \in (1, \alpha)$ per cui definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq p$, quindi $a_n \geq p^n$. Allora la serie diverge per il teorema del confronto, e a_n tende a $+\infty$. \square

Quando $\alpha = 1$, come al solito, non si può dire niente sul carattere della serie. Infatti sia la serie di $1/n$ che di $1/n^2$ hanno $\alpha = 1$, ma la prima diverge e la seconda converge.

Teorema 4.3.5 (criterio del rapporto). Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponendo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv \alpha$:

- se $\alpha < 1$ la serie converge;
- se $\alpha > 1$ la serie diverge, e inoltre $a_n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. 1) Sia $0 \leq \alpha < 1$, allora esiste un numero $q \in (\alpha, 1)$ per cui $\exists N: \forall n > N$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Allora per questi valori di n si può scrivere a_n come

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N.$$

Tutti questi rapporti del tipo a_k/a_{k-1} sono definitivamente minori di q , quindi

$$a_n \leq q^n \frac{a_N}{q^N}.$$

Poiché q^n è una serie geometrica di ragione minore di 1, la sua serie converge, e per il teorema 4.3.2 del confronto anche la serie di a_n .

2) Sia ora $\alpha > 1$. Allora si trova un numero $p \in (1, \alpha)$ per cui definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} > p$. Il termine a_n si può riscrivere ancora come prima, ma questa volta tutti i termini sono maggiori di p . Allora

$$a_n \geq p^n \frac{a_N}{p^N},$$

e dato che p^n è una serie geometrica di ragione maggiore di 1 la sua serie diverge a $+\infty$. Per il teorema del confronto quindi la successione a_n tende a $+\infty$, e la serie di a_n diverge. \square

Esempi

1. La serie di termine generale $1/n!$ converge. Infatti con il criterio del rapporto si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, quindi converge.
2. La serie di termine generale $x^n/n!$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti con il criterio del rapporto risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$, quindi converge per qualunque valore di x reale.

Teorema 4.3.6 (Criterio di condensazione). Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini monotoni decrescenti, per cui $\forall n$ si ha $0 < a_{n+1} \leq a_n$. Le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

Esempi

1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$: con il criterio di condensazione si ha che essa ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{1-p})^n$, che è una serie geometrica di ragione 2^{1-p} , che quindi converge se $p > 1$, e diverge se $p \leq 1$.
2. Si chiama *serie campione* la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$, con $p, q \in \mathbb{R}$. Questa serie converge se $p > 1$ e diverge se $p < 1$, qualunque sia q ; se invece $p = 1$, allora converge se $q > 1$ e diverge se $q \leq 1$.

4.4 Serie a segni alterni

Con serie a segni alterni si intendono le serie i cui termini sono in sequenza uno positivo, uno negativo, uno positivo e così via, o viceversa, cioè solo quelle il cui termine generale si può scrivere come $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Per questo tipo di serie non valgono ovviamente tutti i teoremi elencati finora.

Teorema 4.4.1 (criterio di Leibnitz). Se a_n è una successione definitivamente positiva, monotona decrescente e convergente a 0, allora la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

è convergente. Inoltre, indicata con S la somma a cui la serie converge, si ha che $|A_k - S| < a_{k+1}$, cioè l'errore che si compie troncando la serie a $n = k$, è sempre più piccolo del primo termine che si tralascia.

Dimostrazione. La successione delle somme parziali al termine dispari $2k+1$ è $A_{2k+1} = A_{2k-1} + (-1)^{2k}a_{2k} + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} = A_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1}$. La differenza $a_{2k} - a_{2k+1}$ è positiva, perché la successione è monotona decrescente, allora $A_{2k+1} \geq A_{2k-1}$. Quindi la sottosuccessione A_{2k+1} , di indice dispari, è monotona crescente. Analogamente, $A_{2k+2} = A_{2k} + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = A_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2})$, in cui per lo stesso motivo precedente $a_{2k+1} - a_{2k+2}$ è positivo, quindi $A_{2k+2} \geq A_{2k}$ e allora A_{2k+2} (che è di indice pari) è monotona decrescente. Si ha inoltre che $A_{2k+1} = A_{2k} - a_{2k+1}$ da cui $A_{2k+1} \leq A_{2k}$, dato che $a_{2k+1} < 0$. Siano S_p e S_d i limiti a cui convergono rispettivamente le sottosuccessioni A_{2k} e A_{2k+1} , poiché sono limitate e monotone, con $S_p \geq S_d$. Portando al limite per $n \rightarrow +\infty$ l'equazione $A_{2k+1} = A_{2k} - a_{2k+1}$ si ottiene che $S_d = S_p - 0$ quindi $S_d = S_p$. L'unico limite della serie è allora $S_d = S_p \equiv S$.

Inoltre, si ha che $A_{2k} - S \leq A_{2k} - A_{2k+1} = a_{2k+1}$, e analogamente $S - A_{2k+1} \leq A_{2k+2} - A_{2k+1} = a_{2k+2}$. Quindi in ogni caso risulta $|A_k - S| < a_{k+1}$. \square

4.5 Convergenza incondizionata

Su una serie di addendi si può effettuare l'operazione di *permutazione*, che consiste nello scambiare l'ordine di alcuni addendi. Su una serie finita ovviamente il risultato non cambia, ma permutare una serie infinita può alterarne il carattere.

Definizione 4.5.1. *Una serie converge incondizionatamente se converge, e convergono tutte le sue permutate, cioè se la sua convergenza è invariante rispetto alla permutazione.*

Teorema 4.5.2. Una serie converge incondizionatamente se e solo se converge assolutamente.

Teorema 4.5.3 (di Riemann). Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente, semplicemente ma non assolutamente. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq \beta$. Esiste sempre una permutazione di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per cui la successione delle somme parziali di tale serie permutata abbia come limite massimo β e come limite minimo α .

Capitolo 5

Limiti e continuità

5.1 Limiti di funzioni in spazi metrici

Definizione 5.1.1. Sia $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una funzione, un'applicazione tra differenti spazi metrici¹. Siano $p \in E'$ e $\ell \in X_2$. Si dice che la funzione f ha limite ℓ per $x \rightarrow p$ se, fissato arbitrariamente un intorno di ℓ , esiste in corrispondenza un intorno di p tale che tutti i valori compresi nell'intersezione di E con l'intorno di p hanno come immagine un valore compreso nell'intorno di ℓ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in E \cap B(p, \delta) \text{ con } x \neq p \longrightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Teorema 5.1.2. Sia $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ con $p \in E'$ e $\ell \in X_2$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$.
2. $\forall \{x_n\} \subset E$ con $x_n \rightarrow p$ si ha $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Dimostrazione. 1. Sia data la successione $\{x_n\}$: se essa tende a p , allora fissato un $\delta > 0$ la distanza tra x_n e p è definitivamente minore di δ . Quindi poiché vale la 1), queste immagini di x_n “vicine” a p , cioè $f(x_n)$, sono contenute nell'intorno $B(\ell, \varepsilon)$, quindi $f(x_n) \rightarrow \ell$.

2. Sia per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale per cui $\forall \delta > 0 \exists \tilde{x} \in B(p, \delta)$, con $\tilde{x} \neq p$, tale che $f(\tilde{x}) \notin B(\ell, \varepsilon)$, cioè che $d_2(f(\tilde{x}), \ell) > \varepsilon$ ossia $f(x) \not\rightarrow \ell$. Si consideri δ come una successione, ad esempio $\delta = 1/n$. Per ogni valore di δ si trova in corrispondenza un x_n per cui $f(x_n) \notin B(\ell, \varepsilon)$. Poiché $\delta \rightarrow 0$, allora $x_n \rightarrow p$, ma allo stesso tempo la successione delle immagini non è definitivamente contenuta in $B(\ell, \varepsilon)$, vale a dire che se $f(x) \not\rightarrow \ell$ allora nemmeno $f(x_n) \rightarrow \ell$ il che è assurdo poiché contrasta con la 2). Allora se $x \rightarrow p$ deve essere che $f(x) \rightarrow \ell$. \square

Per questo teorema allora si possono applicare alle funzioni tutti i teoremi per i limiti di successioni già visti.

Teorema 5.1.3 (di permanenza del segno). Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $E \subseteq X$, $p \in E'$. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che per $x \rightarrow p$, $f(x) \rightarrow \ell$.

1. Se ℓ è positivo, allora $\exists B(p, \delta)$ tale che la funzione sia positiva in $B(p, \delta) \cap E$, con $x \neq p$;
2. Se $\exists B(p, \delta)$ per cui la funzione sia positiva in $B(p, \delta) \cap E$, con $x \neq p$, allora $\ell \geq 0$;

¹Le successioni sono particolari applicazioni di questo tipo in cui $(X_1, d_1) = \mathbb{N}$.

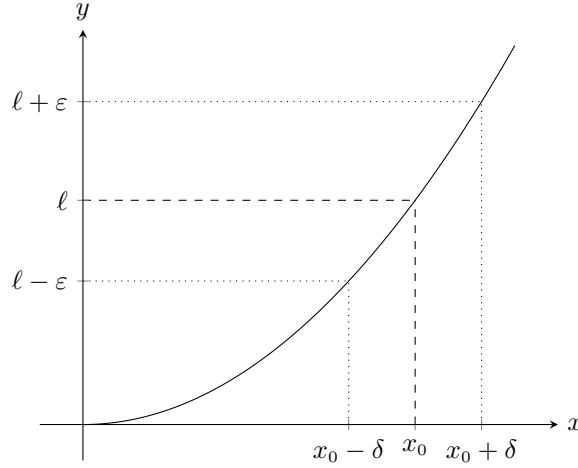


Figura 5.1: Limite di una funzione (non necessariamente si ha $\ell = f(x_0)$).

Dimostrazione. Sia $\ell > 0$ il limite a cui converge $f(x)$ per $x \rightarrow p$: esiste un ε tale che $\ell - \varepsilon > 0$. Per la convergenza della funzione in $B(p, \delta) \cap E$ si ha che i valori della funzione sono contenuti nell'intorno $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, cioè sono sempre maggiori di $\ell - \varepsilon$ che è positivo, quindi sono positivi.

Sia ora che la funzione è positiva in $B(p, \delta) \cap E$. Se ℓ fosse negativo, allora per il punto precedente nell'intorno la funzione dovrebbe assumere valori negativi, che è assurdo: allora ℓ non è negativo. \square

Analogamente si dimostra che se la funzione ha un limite negativo nell'intorno, allora i valori della funzione sono ivi negativi, e che se una funzione è negativa nell'intorno il limite può essere solo negativo o nullo.

Teorema 5.1.4 (del confronto). 1. Siano f, g, h tre funzioni definite in $E \subseteq (X, d)$ a valori reali, e $p \in E'$. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = \ell$ ed esiste un intorno $B(p, \delta)$ per cui $\forall x \in B(p, \delta) \cap E$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, allora anche $g(x)$ ammette limite per $x \rightarrow p$, e tale limite è ℓ .

2. Siano f, g due funzioni definite in $E \subseteq (X, d)$ a valori reali, e $p \in E'$. Se esiste un intorno $B(p, \delta)$ per cui $\forall x \in B(p, \delta) \cap E$ si ha $f(x) \leq g(x)$:

- se $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow p$, allora anche g ammette limite, che è $+\infty$;
- se $g(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow p$, allora anche f ammette limite, che è $-\infty$.

Dimostrazione. 1. Poiché f e h convergono a ℓ , si ha in $B(p, \delta) \cap E$ che $\forall \varepsilon > 0$:

- $\exists \delta_1: \forall x \in B(p, \delta_1) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$;
- $\exists \delta_2: \forall x \in B(p, \delta_2) \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$.

Allora, per un qualunque $\tilde{\delta} < \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, per l'ipotesi deve valere

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$, che significa che nell'intorno B , quindi per $x \rightarrow p$, si ha $g(x) \rightarrow \ell$.

2. Poiché f diverge a $+\infty$, si ha che in $B(p, \delta) \cap E$ che $\forall M > 0$, $\exists \delta_3: \forall x \in B(p, \delta_3) f(x) > M$. Allora per un qualunque $\tilde{\delta} < \min\{\delta, \delta_3\}$ vale $g(x) \geq f(x) > M$, cioè $g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow p$. \square

5.2 Limiti di funzioni reali a valori reali

Definizione 5.2.1. Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in A'$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \text{ con } x \neq p \text{ e } |x - p| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Estendendo ℓ a $\overline{\mathbb{R}}$ si ha che

- $\forall M > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \text{ con } x \neq p \text{ e } |x - p| < \delta \text{ si ha che } f(x) > M;$
- $\forall M > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \text{ con } x \neq p \text{ e } |x - p| < \delta \text{ si ha che } f(x) < -M.$

Nel primo caso si ha che $\ell = +\infty$, nel secondo $\ell = -\infty$. In ogni caso, la retta $x = p$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x)$. Estendendo inoltre anche p a $\overline{\mathbb{R}}$, si ha che se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$:

- se A non è inferiormente limitato, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists k: \forall x \in A \text{ con } x > k \text{ si ha che } |f(x) - \ell| < \varepsilon;$
- se A non è superiormente limitato, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists k: \forall x \in A \text{ con } x < k \text{ si ha che } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Nel primo caso è $p \rightarrow +\infty$, nel secondo $p \rightarrow -\infty$. Si definiscono anche, con le opportune ipotesi, i limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$.

Se, in particolare, non esiste il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow p$, si può definire comunque il limite per difetto (“da sinistra”) o per eccesso (“da destra”), rispettivamente calcolati sull’intorno sinistro e destro di p , ossia per $x \rightarrow p^-$, in $(p - \delta, p]$, e per $x \rightarrow p^+$, in $[p, p + \delta)$. Quando il limite per $x \rightarrow p$ esiste, questi due limiti coincidono.

Tutti i teoremi e le proprietà dei limiti per le successioni valgono anche per i limiti di funzioni reali a valori reali.

5.3 Asintoti

Può accadere che il grafico di una funzione tenda ad approssimarsi ad una retta all’avvicinarsi della variabile verso un punto di accumulazione: ciò vuol dire che la distanza tra la funzione e tale retta, detta *asintoto*, è infinitesima.

Definizione 5.3.1. Sia f una funzione a valori reali definita, almeno, in un intorno di un suo punto di accumulazione p . La retta r si dice asintoto di f per $x \rightarrow p$ se

$$\lim_{x \rightarrow p} d(f(x), r) = 0.$$

Ovviamente qualsiasi retta può essere asintoto di una funzione: sono particolari gli asintoti verticali e orizzontali:

- La retta $y = a$ è un asintoto orizzontale per la funzione $f(x)$ se $f(x) \rightarrow a$ per $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow +\infty$, o anche entrambi. Nei primi casi, si chiama rispettivamente asintoto orizzontale sinistro e destro.
- La retta $x = b$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x)$ se per almeno $x \rightarrow b^-$ o per $x \rightarrow b^+$ (ovviamente anche se valgono entrambi), si ha $f(x) \rightarrow \infty$.

Gli asintoti obliqui invece si possono individuare, in assenza di asintoti orizzontali, con le equazioni

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx],$$

diversificando per $+\infty$ e $-\infty$. L’asintoto obliquo è la retta $y = mx + q$ soltanto se entrambi i limiti esistono finiti e se $m \neq 0$. Notare che il risultato $m = 0$ non significa che l’asintoto è orizzontale, e nemmeno il fatto che la derivata tende a zero per $x \rightarrow \pm\infty$: basta vedere la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, per cui si avrebbe con questi ultimi due metodi $m = 0$ o una derivata infinitesima nell’intorno di $+\infty$, ma chiaramente non esiste alcun asintoto per $x \rightarrow +\infty$. Un altro metodo per individuarli è riuscire ad esprimere la funzione nella forma $f(x) = mx + q + o(1)$ dove $o(1)$ è un generico infinitesimo per $x \rightarrow \pm\infty$. Ovviamente gli asintoti obliqui e gli asintoti orizzontali sono mutuamente esclusivi: una funzione non può avere entrambi per $x \rightarrow -\infty$ o per $x \rightarrow +\infty$.

5.4 Continuità

Definizione 5.4.1. Sia $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$, e p un punto appartenente ad E . Si dice che la funzione f è continua in p se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un $\delta > 0$ tale che per ogni punto x nell'insieme E e in un intorno di p di raggio δ si ha che l'immagine di x appartiene all'intorno di $f(p)$ di raggio ε .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in E \cap B(p, \delta) \text{ si ha che } f(x) \in B(f(p), \varepsilon). \quad (5.4.1)$$

A differenza della definizione di limite, che è simile a questa, la definizione di continuità impone che p appartenga all'insieme di definizione E , inoltre non è necessario che sia un punto di accumulazione. Infatti se un punto è isolato, scelto opportunamente il raggio δ , nessun altro valore di x oltre a p , nell'intorno $B(p, \delta)$, soddisfa la definizione di continuità, e ovviamente la sua immagine $f(p)$ è contenuta nell'intorno $B(f(p), \varepsilon)$ per qualunque valore di ε ; allora ogni punto isolato soddisfa “automaticamente” la definizione di continuità. Quindi segue che tutte le successioni sono continue: l'insieme \mathbb{N} infatti è composto da soli punti isolati. Se invece il punto è di accumulazione, allora f è continua se e solo se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. Ovviamente una funzione è continua in tutto un insieme se e solo se è continua in tutti i punti che lo compongono.

Teorema 5.4.2 (continuità delle funzioni composte). Siano $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ e $g: X_2 \rightarrow (X_3, d_3)$, e p un punto di E . Se f è continua in p , e g è continua in $f(p)$, allora la funzione $g \circ f$ è continua in p .

Teorema 5.4.3. La funzione $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ è continua in tutto E se e solo se per ogni insieme A aperto in X_2 la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta in X_1 .

Dimostrazione. Siano A un insieme aperto in X_2 , e il punto $p \in f^{-1}(A)$. La sua immagine è $f(p) \in A$, e dato che A è aperto allora p è necessariamente interno, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists B_2(f(p), \varepsilon) \subseteq A$, cioè $f(p)$ è interno ad A . Dato che f è continua in p , dato tale ε esiste un raggio δ che definisce un intorno $B_1(p, \delta)$ per cui $f(B_1(p, \delta)) \subseteq B_2(f(p), \varepsilon) \subseteq A$. Poiché allora $f(B_1(p, \delta)) \subseteq A$, passando alle controimmagini risulta che $B_1(p, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$, che quindi è aperto.

Sia ora $p \in E$: poiché la funzione è definita in E , esiste l'immagine $f(p)$. Scelto un $\varepsilon > 0$, l'intorno $B_2(f(p), \varepsilon)$ è per definizione aperto. Sia A tale intorno, per ipotesi si ha che $f^{-1}(B_2(f(p), \varepsilon)) \equiv f^{-1}(A)$ è aperto in X_1 e certamente p , poiché è la controimmagine di $f(p)$, appartiene a questo insieme. Allora p è interno, quindi esiste un δ per cui $B_1(p, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$, vale a dire $f(B_1(p, \delta)) \subseteq B_2(f(p), \varepsilon)$, ossia la funzione è continua in p secondo la definizione 5.4.1. \square

Teorema 5.4.4. Sia la funzione $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ continua in tutto E . Se l'insieme K è compatto, allora la sua immagine $f(K)$ è a sua volta un insieme compatto.

Dimostrazione. Sia la successione $\{y_n\} \subset f(K)$: allora ogni elemento y_n è immagine di un qualche punto in E , ossia $y_n = f(x_n)$. Allora si ha che $\{x_n\} \subseteq K$; poiché K è compatto si può estrarre da x_n una sottosuccessione x_{n_j} che converga ad un valore $\tilde{x} \in K$. La continuità di f quindi implica che $f(x_{n_j}) \rightarrow f(\tilde{x})$, cioè che $y_{n_j} \rightarrow f(\tilde{x}) \in f(K)$, e ciò significa che $f(K)$ è compatto. \square

Da questo teorema segue un importante teorema per le funzioni a valori reali, definite in qualunque spazio metrico.

Teorema 5.4.5 (di Weierstrass). Se $f: E \subseteq (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in tutto E , e tale insieme è compatto, allora f ammette massimo e minimo assoluti, vale a dire $f(E)$ è limitato e ammette un massimo e un minimo.

Dimostrazione. Per il teorema 5.4.4 l'immagine $f(E)$ è un insieme compatto, e dato che $f(E) \subset \mathbb{R}$ esso è anche chiuso e limitato: allora deve avere sia un estremo superiore che inferiore, che sono anche il massimo e il minimo di tale insieme, dato che è chiuso. \square

Se una funzione è continua non soltanto in un punto, ma in tutto un insieme, la definizione 5.4.1 deve essere verificata per tutti i punti $p \in D$, indicando con D tale insieme. Allora in generale il raggio δ dell'intorno di p non dipende solo dal valore di ε , ma anche dal punto p in esame. Esistono certe funzioni, però, tali per cui δ può non essere in relazione con p e allora fissato ε , dei punti che distano tra di loro meno di $\delta(\varepsilon)$ hanno delle immagini che distano meno di ε per *qualunque* punto dell'insieme considerato. Queste funzioni particolari rispondono alla definizione seguente.

Definizione 5.4.6. La funzione $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ si dice uniformemente continua in E se, fissato ε esiste δ tale che $\forall x_1, x_2 \in E$ per cui $d_1(x_1, x_2) < \delta$ si ha $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

A questo punto ai fini della continuità della funzione non è più importante quale sia il punto p nell'insieme E , ma si considera soltanto la distanza tra una qualsiasi coppia di punti. Per le funzioni uniformemente continue infatti il raggio δ non dipende più dal punto p preso come centro dell'intorno.

Teorema 5.4.7 (di Heine-Cantor). Se $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ è una funzione continua in E e se tale insieme è compatto, allora f è uniformemente continua in E .

Dimostrazione. Sia per assurdo che f non sia uniformemente continua, ossia che esista $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno una coppia di punti $x_i, y_i \in E$ per cui se $d_1(x_i, y_i) < \delta$ allora $d_2(f(x_i), f(y_i)) \geq \varepsilon$. Posto $\delta = 1$, si ha che $\exists x_1, y_1: d_1(x_1, y_1) < 1$ ma $d_2(f(x_1), f(y_1)) \geq \varepsilon$. Posto poi $\delta = 1/2$, si ha che $\exists x_2, y_2: d_1(x_2, y_2) < 1/2$ ma $d_2(f(x_2), f(y_2)) \geq \varepsilon$. Procedendo in questo modo si costruisce una successione di δ infinitesima, per cui $\delta = 1/n$, si ha che $\exists x_n, y_n: d_1(x_n, y_n) < 1/n$ ma $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Però l'insieme E è compatto, perciò $\exists x_{n_k} \rightarrow \tilde{x} \in E$, e analogamente $y_{n_k} \rightarrow \tilde{y} \in E$. Dato che la distanza tra questi due elementi è $d_1(x_{n_k}, y_{n_k})$ e tende a 0, i due limiti delle sottosuccessioni devono coincidere, allora $\tilde{x} = \tilde{y}$, quindi $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$. A questo punto anche le rispettive immagini dei limiti delle due sottosuccessioni devono coincidere, perché la funzione è continua, ad un valore $f(\tilde{x})$, e ciò significa che $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \rightarrow 0$, il che è però assurdo dato che per ipotesi si ha che quest'ultima distanza non può essere minore di ε . La funzione allora è uniformemente continua in E . \square

Chiaramente l'uniforme continuità della funzione non dipende soltanto dalla sua formula algebrica, ma anche dall'insieme in cui la si studia. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua in un qualsiasi intervallo illimitato, ma lo diventa non appena l'intervallo in questione è chiuso e limitato. In generale, come conseguenza, ogni funzione continua in un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$ è anche uniformemente continua, nello stesso. Inoltre questo teorema fornisce una condizione soltanto sufficiente: esistono funzioni continue in insiemi non compatti che sono anche uniformemente continue.

Un'altra condizione sufficiente, più semplice da verificare, per verificare la continuità uniforme di una funzione è la condizione di Lipschitz.

Definizione 5.4.8. Una funzione $f: E \subseteq (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ si dice lipschitziana, di costante $M > 0$, nell'insieme E se

$$\forall x, y \in E \text{ si ha che } d_2(f(x), f(y)) \leq M \cdot d_1(x, y).$$

Tutte le funzioni lipschitziane sono anche uniformemente continue, con $\delta = \varepsilon/M$.

5.5 Continuità di funzioni reali a valori reali

Tutte le funzioni elementari reali sono continue nel loro insieme di definizione. Il prodotto, la somma e la composizione di funzioni continue è ancora a sua volta una funzione continua. Per questa particolare categoria di funzioni sono inoltre dati alcuni importanti teoremi.

Teorema 5.5.1 (di esistenza degli zeri). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists \tilde{x} \in [a, b]: f(\tilde{x}) = 0$.

Dimostrazione. Siano $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Si consideri il punto medio di $[a, b] \equiv I_0$ e la rispettiva immagine $f(\frac{a+b}{2})$, e l'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$, lungo la metà di I_0 , tale per cui o $a_1 = \frac{a+b}{2}$ o $b_1 = \frac{a+b}{2}$ in modo che si abbia ancora che $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Procedendo in questo modo, bisecando l'intervallo sempre di più, si trova una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ in cui un elemento è sempre compreso nel precedente nell'ordine. La successione a_n è monotona crescente, inoltre è sempre $f(a_n) < 0$, mentre b_n è monotona decrescente e si ha $f(b_n) > 0$. La distanza tra i due a_n e b_n è quindi

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}(b - a),$$

perché ogni intervallo come già detto è ampio la metà del precedente, e questa distanza è infinitesima. Quindi sia a_n che b_n tendono ad un unico limite \tilde{x} . Per il teorema di permanenza del segno, risulta che $f(a_n) \rightarrow f(\tilde{x}) \leq 0$, e allo stesso tempo $f(b_n) \rightarrow f(\tilde{x}) \geq 0$ perciò non può che essere $f(\tilde{x}) = 0$. \square

Teorema 5.5.2 (dei valori intermedi). Se f è una funzione a valori reali definita e continua su $[a, b] \in \mathbb{R}$, allora essa assume tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo.

Dimostrazione. L'intervallo $[a, b]$ è compatto quindi f per il teorema 5.4.5 ammette un massimo e un minimo (assoluti). Sia m tale minimo e M il massimo. Traslando la funzione in verticale di una costante c opportuna, in modo che $m < 0$ e $M > 0$, allora deve esistere per il teorema 5.5.1 un punto in cui f si annulla. Per qualsiasi valore di c tale che $m \leq c \leq M$ allora deve esistere in corrispondenza un punto in cui ciò succede, allora f assume tutti i valori compresi tra m e M . \square

Come conclusione, e conseguenza, di questi ultimi teoremi, resta il teorema seguente, di cui si dà la dimostrazione solo per la seconda parte.

Teorema 5.5.3 (di Darboux). Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo di qualunque tipo: se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (non costante), allora $f(I)$ è a sua volta un intervallo. Se inoltre I è un intervallo chiuso e limitato, anche la sua immagine è un intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione. Se I è un intervallo limitato e chiuso, del tipo $[a, b]$, poiché la funzione è a variabile reale, per il teorema di 5.4.7 Heine-Cantor l'intervallo chiuso è anche compatto, quindi per il teorema 5.4.5 di Weierstrass la sua immagine ammette un massimo e un minimo (che sono il minimo e il massimo della funzione per $x \in [a, b]$). Inoltre per il teorema precedente assume tutti i valori tra tali massimo e minimo, quindi l'immagine è un intervallo chiuso. \square

5.6 Punti di discontinuità

Sia f una funzione definita a valori reali definita (almeno) nell'intervallo (a, b) . La funzione si dice continua in un punto $x_0 \in (a, b)$ se i limiti per difetto ed eccesso della funzione per $x \rightarrow x_0$ esistono finiti e coincidono entrambi con il valore della funzione in x_0 . Un punto si dice *di discontinuità*, banalmente, se in esso la funzione non è continua. Si può anche ampliare la definizione nel caso in cui la funzione non sia definita in tale punto, ma anche soltanto in un intorno destro e sinistro di esso, dato che deve, in ogni caso, sempre essere possibile calcolare il limite per tale punto. Sia quindi la funzione definita come $f: (a, x_0) \cup (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, almeno; essa ammette in x_0 una discontinuità:

- di *prima specie* se non esiste il limite in x_0 , ma i limiti sinistro e destro esistono finiti e sono differenti.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ ma } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2, \text{ con } \ell_1 \neq \ell_2.$$

- di *seconda specie* se almeno uno dei limiti sinistro o destro in x_0 è infinito o non esiste. La retta verticale di equazione $x = x_0$ inoltre si dice *asintoto verticale* della funzione $f(x)$.
- di *terza specie*, o eliminabile, se esiste finito il limite per x_0 ma in tale punto la funzione non esiste o assume un valore differente dal limite. Questo tipo di discontinuità si può eliminare

definendo una nuova funzione come

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{per } x = x_0. \end{cases}$$

5.7 Funzioni monotone

Per definire se una funzione è crescente, o decrescente, c'è bisogno di una relazione d'ordine che permetta di confrontare più grandezze. Questa relazione è presente solo in \mathbb{R} (e nei suoi sottoinsiemi), quindi è possibile confrontare numeri appartenenti al più a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vale a dire un numero reale con un numero reale. Solo in questo spazio metrico, quindi, può avere un senso la seguente definizione.

Definizione 5.7.1. Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, in cui I è un intervallo. La funzione f , per ogni $x_1, x_2 \in I$ si dice monotona:

- crescente, se per $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$;
- decrescente, se per $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema 5.7.2. Sia $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona con $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\alpha < \beta$: allora esistono e sono finiti i limiti per $x \rightarrow \alpha^+$ e per $x \rightarrow \beta^-$, inoltre se è

- crescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \inf_{\alpha < \beta} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \sup_{\alpha < \beta} f(x);$$

- decrescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \sup_{\alpha < \beta} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \inf_{\alpha < \beta} f(x).$$

Questo teorema vale in tutti i punti dell'intervallo, inoltre i limiti devono essere finiti poiché tutti i punti di (α, β) devono poter essere ordinati. Da questo teorema si deduce che la funzione non può tendere all'infinito all'interno dell'intervallo in cui è monotona, né possono esserci punti in cui i limiti non esistono o sono differenti dal valore della funzione, dato che salterebbe l'ipotesi di monotonia o di intervallo: allora una funzione monotona può presentare punti di discontinuità solamente di prima specie.

Teorema 5.7.3. Se $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona, le sue discontinuità sono solo di prima specie, e sono al più numerabili.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di discontinuità: allora esiste il limite della $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ sia per difetto che per eccesso, e questi sono necessariamente diversi altrimenti sarebbe continua, e finiti, dato che sono limitati da altri valori della funzione, che è monotona. Sia f crescente: esiste un intervallo (ℓ_1, ℓ_2) , attorno al punto di discontinuità, in cui $\ell_1 \equiv \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e $\ell_2 \equiv \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Ad un altro punto \tilde{x}_0 si associa in modo analogo l'intervallo $(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$. Dato che f è monotona, deve essere che $(\ell_1, \ell_2) \cap (\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \emptyset$, poiché $\tilde{\ell}_1 \geq \ell_2$. Infatti $\ell_2 = \inf_{x > x_0} f(x)$ e $\tilde{\ell}_1 = \sup_{x < \tilde{x}_0} f(x)$, e dato che $x_0 < \tilde{x}_0$ non può mai succedere che $\ell_2 > \tilde{\ell}_1$ (al più si ha il caso in cui sono uguali, come per la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$). Ciò significa che $(\ell_1, \ell_2) \cap (\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \emptyset$, anche se sono aperti il caso in cui $\ell_2 = \tilde{\ell}_1$ non è contemplato. Tutti questi intervalli trovati sono quindi disgiunti, e per la densità di \mathbb{R} in ognuno è possibile individuare (almeno) un numero razionale e uno irrazionale. Ad ogni punto di discontinuità si associa allora il numero razionale: $\exists p_1 \in \mathbb{Q}$ con $p_1 \in (\ell_1, \ell_2)$, ossia si applica una funzione che è biiettiva, quindi le discontinuità sono in corrispondenza biunivoca con \mathbb{Q} , cioè sono numerabili. \square

5.8 Funzioni invertibili

Una funzione iniettiva è sempre invertibile, e dato che le funzioni strettamente monotone sono tutte iniettive, allora sono anche invertibili. Non vale il contrario, ma se la funzione è sia iniettiva che continua in un intervallo, allora è anche strettamente monotona (in tale intervallo).

Teorema 5.8.1. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile nell'intervallo I . La sua inversa $f^{-1}: f(I) \equiv J \rightarrow \mathbb{R}$, dove J è a sua volta un intervallo per il teorema 5.5.3, è a sua volta continua in J .

Capitolo 6

Calcolo differenziale

6.1 Rapporto incrementale

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e $x_0, x_0 + h \in A$. La retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ha come coefficiente angolare

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (6.1.1)$$

detto *rapporto incrementale* della funzione f , centrato in x_0 , rispetto all'incremento h . Si definisce *derivata* di f in x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$, e la funzione si dice derivabile in tale punto. La retta tangente al grafico della funzione f nel punto x_0 ha come coefficiente angolare proprio la derivata $f'(x_0)$, ed è quindi data dall'equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.1.2)$$

Generalizzando $x_0 + h$ con un punto generico x , per $x \rightarrow x_0$ si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0),$$

cioè localmente (nell'intorno) la funzione può essere approssimata linearmente dalla funzione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad (6.1.3)$$

dove $o(x - x_0)$ tende a zero più velocemente di quanto x tenda a x_0 . Questa formula rappresenta una prima approssimazione, chiamata anche formula dell'incremento finito.

Teorema 6.1.1. Se una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, in tale punto è necessariamente continua.

Dimostrazione. Se f è derivabile in x_0 , allora il suo rapporto incrementale in tale punto ammette limite, quindi può riscrivere la (6.1.3) nella forma

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Se $x \rightarrow x_0$, il secondo membro certamente tende a 0, quindi deve essere anche che $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$, quindi $f(x) \rightarrow f(x_0)$ cioè f è continua in x_0 . \square

Non vale l'inverso: la funzione $|x|$ non è derivabile in $x = 0$, pur essendo continua in tale punto. Quando una funzione non è derivabile in un singolo punto, tale punto si chiama *punto di non derivabilità*, e può essere di tre tipi:

- un punto angoloso, se esistono i limiti dei rapporti incrementali a sinistra e a destra del punto ma sono diversi;
- una cuspidale, se i due limiti sono entrambi infiniti e discordi;
- un punto a tangente verticale (flesso), se i due limiti sono entrambi infiniti e concordi.

6.2 Operazioni tra derivate

Per derivare una combinazione di più funzioni si ricorre alle seguenti regole, per le operazioni elementari: i seguenti teoremi garantiscono la derivabilità del risultato delle operazioni.

Teorema 6.2.1. Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in A$: allora la combinazione lineare $\alpha f + \beta g$ è derivabile in $x_0 \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si ha che

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad (6.2.1)$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra perché l'operazione di limite è lineare, quindi il limite della somma equivale alla somma dei limiti. Infatti il rapporto incrementale, per $x \rightarrow x_0$, è

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \\ &\rightarrow \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 6.2.2 (regola di Leibnitz). Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in A$: allora fg è derivabile in x_0 e si ha che

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad (6.2.2)$$

Dimostrazione. Al prodotto incrementale per $x \rightarrow x_0$ si somma e sottrae il termine $f(x_0)g(x)$ al numeratore:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \rightarrow \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 6.2.3. Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in A$: allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 se $g \neq 0$ nell'intorno di x_0 e si ha che

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad (6.2.3)$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale per $x \rightarrow x_0$ è

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0}.$$

A questo punto, come nel teorema precedente, si aggiunge e toglie il termine $f(x_0)g(x_0)$ al numeratore:

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{[g(x)g(x_0)](x - x_0)} = \\
 & \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{x - x_0} = \\
 & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) = \\
 & = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

6.2.1 Funzioni composte

Teorema 6.2.4. Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in I$, e sia $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$, con $f(I) \subseteq J$. La funzione $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)). \quad (6.2.4)$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale per $x \rightarrow x_0$ della funzione composta è

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

in cui $f(x) \neq f(x_0)$, per cui il rapporto incrementale sarebbe semplicemente nullo. Poiché f è continua, $f(x) \rightarrow f(x_0)$ quando $x \rightarrow x_0$, quindi questa espressione tende a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)). \quad \square$$

6.2.2 Funzioni inverse

Teorema 6.2.5. Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, con f derivabile in I e $f'(x_0) \neq 0$. Se f è invertibile, allora $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e tale derivata è il reciproco di $f'(x_0)$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (6.2.5)$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale della funzione inversa, per $y \rightarrow y_0$ (dove $y = f(x)$, quindi $f^{-1}(y) = x$) è

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

Esempi

1. $D(\log x)$ esiste $\forall x \in (0, +\infty)$ e vale

$$\frac{1}{(e^x)'(\log x)} = \frac{1}{(e^x)(\log x)} = \frac{1}{x};$$

2. $D(\arctan x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ a valori in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e vale

$$\frac{1}{(\tan x)'(\arctan x)} = \frac{1}{(1 + \tan^2 x)(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6.3 Teoremi sul calcolo differenziale

Definizione 6.3.1. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$. Si dice che x_0 è un punto di:

- massimo (relativo per f in I) se $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) \leq f(x_0)$;
- minimo (relativo per f in I) se $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Teorema 6.3.2 (di Fermat). Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo e $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Se f è derivabile in x_0 ed esso è un punto estremante per f , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di massimo. Dato che $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, per la definizione 6.3.1 $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$. Il rapporto incrementale,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è negativo per $x \rightarrow x_0^+$ e positivo per $x \rightarrow x_0^-$, quindi per il teorema 3.3.3 di permanenza del segno risulta che il suo limite è rispettivamente minore o uguale a zero e maggiore o uguale a zero, quindi non può che essere nullo. Analogamente si dimostra se x_0 è un punto di minimo. \square

Al di fuori delle ipotesi di questo teorema non si può affermare niente: ad esempio, per $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R} = |x|$, si ha che -1 è un punto di massimo relativo e 3 un punto di massimo assoluto, ma entrambi non sono interni all'intervallo di definizione, e il punto di minimo assoluto è 0 , in cui f non è derivabile. La condizione del teorema 6.3.2 è inoltre solo necessaria, infatti $f(x) = x^3$ ha derivata nulla in $x = 0$ ma tale punto non è estremante.

Definizione 6.3.3. Si dicono punti stazionari i punti che soddisfano le ipotesi del teorema 6.3.2 di Fermat. Ossia, data una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, il punto x_0 è stazionario se $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ e $\exists f'(x_0)$ ed è nulla.

I punti estremanti di una funzione, quindi, possono solo essere punti stazionari, punti non interni all'intervallo di definizione oppure punti di non derivabilità.

Teorema 6.3.4 (di Rolle). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Se f è costante tra a e b , allora banalmente la derivata è nulla per ogni punto dell'intervallo (aperto). Se invece f non è costante, per il teorema 5.4.5 di Weierstrass assume almeno un punto estremante interno all'intervallo (a, b) . Per il teorema 6.3.2 di Fermat, in tale punto la derivata è nulla. \square

Teorema 6.3.5 (di Cauchy). Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , esiste un punto $z \in (a, b)$ per cui

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \quad (6.3.1)$$

ossia le due derivate sono proporzionali di un fattore che dipende unicamente dagli estremi dell'intervallo.

Dimostrazione. Si definisce la funzione ausiliaria $\varphi(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$, che soddisfa le ipotesi del teorema 6.3.4 di Rolle: è una combinazione lineare di funzioni continue e derivabili, quindi è a sua volta continua e derivabile, e $\varphi(a) = \varphi(b)$. Allora $\exists z \in (a, b)$ per cui vale $\varphi'(z) = 0$, cioè per cui $(g(b) - g(a))f'(z) - (f(b) - f(a))g'(z) = 0$, da cui si ottiene la (6.3.1). \square

Teorema 6.3.6 (di Lagrange). Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , esiste un punto $z \in (a, b)$ tale per cui

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (6.3.2)$$

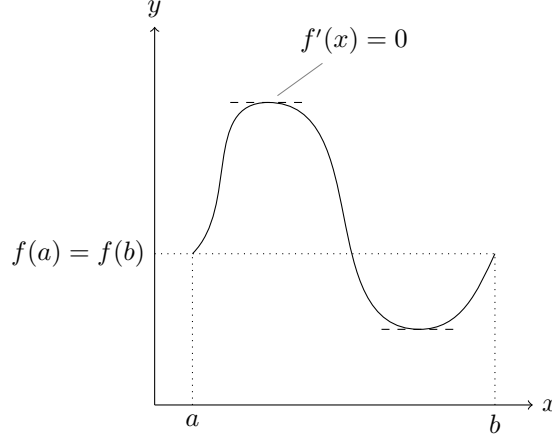


Figura 6.1: Teorema di Rolle.

Il teorema si dimostra semplicemente ponendo $f(x) = f(x)$ e $g(x) = x$ nel teorema 6.3.5 di Cauchy, ottenendo così la (6.3.2). Da questo teorema, ponendo $a = x_0$ e $b = x_0 + h$ si ottiene un'altra formula dell'incremento finito:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(z). \quad (6.3.3)$$

La principale differenza con la 6.1.3 è che in questo caso la funzione deve essere derivabile in tutto $(x_0, x_0 + h)$ e non solo in un intorno di x_0 . Inoltre il punto z è solitamente sconosciuto.

6.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema 6.4.1. Se f è una funzione derivabile in un intervallo I e sia $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$, allora f è lipschitziana in I .

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema 6.3.6 di Lagrange applicato all'intervallo (x_1, x_2) si ha che $f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$ per qualche $z \in (x_1, x_2)$. Applicando i valori assoluti, si ottiene, con l'ipotesi che $|f'(x)| \leq M$ nell'intervallo, che $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$, cioè è lipschitziana. \square

Come già visto per la definizione 5.4.8 delle funzioni lipschitziane, si ha anche che ogni funzione con derivata limitata in un certo intervallo è in esso anche uniformemente continua.

I seguenti teoremi sulla monotonia delle funzioni si applicano esclusivamente a degli intervalli.

Teorema 6.4.2. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione almeno derivabile in $\overset{\circ}{I}$ e continua in I . Essa è

- monotona crescente in I se e solo se $f'(x) \geq 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$;
- monotona decrescente in I se e solo se $f'(x) \leq 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$.

Dimostrazione. Si supponga che f sia monotona crescente, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I . Nel rapporto incrementale $\Delta f/h$, se $h > 0$ il numeratore è positivo (è crescente, quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$) e anche il denominatore, allora il rapporto incrementale è positivo e il suo limite per $h \rightarrow 0^+$ è positivo o nullo per il teorema 3.3.3 di permanenza del segno. Analogamente, per $h < 0$ numeratore e denominatore del rapporto incrementale sono entrambi negativi, e il limite per $h \rightarrow 0^-$ è positivo o nullo. Si conclude quindi che $f'(x) \geq 0$ in I .

Si supponga ora che $f'(x) \geq 0$ e siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema 6.3.6 di Lagrange nell'intervallo (x_1, x_2) $\exists z \in (x_1, x_2): f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$. Il secondo membro è positivo o nullo per le ipotesi fatte, quindi deve essere $f(x_2) \geq f(x_1) \forall x \in I$, vale a dire che la funzione è crescente.

La dimostrazione per il secondo caso è del tutto analoga. \square

Vale inoltre che se $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) allora la funzione è monotona strettamente crescente (decescente), ma non vale il teorema inverso: la funzione x^3 , ad esempio, ha derivata nulla nell'origine, ma essa è crescente in tutto \mathbb{R} . Inoltre i punti in cui una funzione crescente, o decrescente, può avere derivata nulla possono essere al più un'infinità numerabile: non possono formare un intervallo, altrimenti in esso la funzione sarebbe costante.

Teorema 6.4.3. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $\overset{\circ}{I}$. Essa è costante se e solo se $f'(x) = 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$.

Dimostrazione. Si supponga che f sia costante: il rapporto incrementale è sempre nullo perché $f(x_0 + h) = f(x_0) \forall x \in \overset{\circ}{I}$, quindi la derivata è sempre nulla. Supposto invece che la derivata sia nulla, valgono entrambi i casi del teorema 6.4.2, quindi f è sia crescente che decrescente, cioè deve essere costante. \square

È importante che questo teorema sia verificato in un *intervallo*: se infatti consideriamo la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan 1/x$, la sua derivata,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

è nulla in ogni intervallo tutto a sinistra o tutto a destra dell'origine, ma non appena si considera un insieme che contiene sia ascisse negative che positive (nell'origine la funzione non è definita) il teorema non si può più applicare. Si verifica infatti che $f(x) = \frac{\pi}{2} \forall x > 0$, mentre $f(x) = -\frac{\pi}{2} \forall x < 0$, quindi non è sempre costante.

Corollario 6.4.4. Sia $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \equiv I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I , con $f'(x_0) = 0$. Il punto x_0 è un punto di:

- massimo relativo (a tale intorno), se $f'(x) \geq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) \leq 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$;
- minimo relativo (a tale intorno), se $f'(x) \leq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) \geq 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$.

Teorema 6.4.5. Sia $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Se esiste (finito) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \equiv \gamma \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \gamma$.

Dimostrazione. Nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$, $\exists z$ (in dipendenza da h) in tale intervallo per cui, dal teorema 6.3.6 di Lagrange il rapporto incrementale nell'intervallo è $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(z)$. Quando $h \rightarrow 0$, dato che z è nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$, si ha che $z \rightarrow x_0$, e per ipotesi allora $f'(z) \rightarrow \gamma$, cioè la derivata di f esiste ed è γ quando l'intervallo si restringe a x_0 . \square

La condizione è solo sufficiente: se non esiste il limite della derivata, non si sa dire niente sul suo comportamento in quell'intorno. Da questo teorema inoltre si deduce che se una funzione è una derivata può ammettere solo discontinuità di seconda specie.

Teorema 6.4.6 (di De l'Hôpital). Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, con $a < b$ anche infiniti, due funzioni derivabili in (a, b) in cui sia g che g' non si annullino mai, cioè $g(x)g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0,$$

oppure se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty,$$

e se esiste il limite del rapporto delle due derivate di f e g per $x \rightarrow a^+$, allora esiste anche il limite del rapporto delle due funzioni e vale

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6.4.1)$$

Questo teorema può essere utile per risolvere alcune forme di indecisione come $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$, e si può iterare più volte se la forma di indecisione si ripresenta, continuando con le derivate seconde, terze e così via.

6.5 Formula di Taylor

Il polinomio di Taylor fornisce una generalizzazione della formula della derivata prima per approssimare ad un ordine fissato l'andamento della funzione. La retta tangente è in effetti un'approssimazione tramite il polinomio di Taylor al primo ordine.

Definizione 6.5.1. Siano $x, x_0 \in (a, b)$ e $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile almeno n volte in x_0 . Il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 è

$$P_n f(x - x_0) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (6.5.1)$$

Per approssimare una funzione nell'intorno del punto x_0 , si utilizza questo polinomio appena definito, con l'aggiunta dell'errore che assume forme differenti a seconda del teorema utilizzato.

Teorema 6.5.2 (Formula di Taylor con resto secondo Peano). Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Localmente, per $x \rightarrow x_0$, si ha

$$f(x) = P_n f(x - x_0) + o((x - x_0)^n). \quad (6.5.2)$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione, su n . Per $n = 1$ si ha la definizione di derivata: quando $x \rightarrow x_0$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ che se f è derivabile in x_0 certamente è vera. Si supponga vera la tesi per n : ammesso che per ogni f derivabile n volte sia vera la (6.5.2), si dimostra che è vera per $n + 1$. Sia f allora una funzione derivabile $n + 1$ volte. Bisogna dimostrare che

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} \rightarrow 0. \quad (6.5.3)$$

Il limite del rapporto per $x \rightarrow x_0$ presenta la forma di indecisione $[0/0]$, perché il polinomio di Taylor tende a $f(x_0)$, inoltre $(x - x_0)^{n+1} \neq 0$ nell'intorno di x_0 se $x \neq x_0$, quindi si può applicare il teorema 6.4.6 di De l'Hôpital: la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \\ - \frac{f^{(4)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \frac{f^{(5)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 - \dots - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

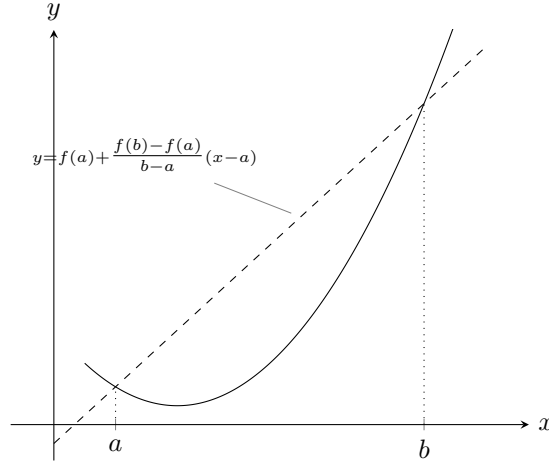
Ponendo quindi $f'(x) \equiv g(x)$ si ottiene che $f^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x)$, e sostituendo $k - 1 = j$ l'equazione diventa

$$g(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} = g(x) - \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

La derivata del denominatore invece vale semplicemente $(n + 1)(x - x_0)^n$, perciò si ottiene

$$\frac{g(x) - \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j}{(n + 1)(x - x_0)^n}. \quad (6.5.4)$$

Se f è derivabile $n + 1$ volte in x_0 , allora g è in tale punto derivabile n volte, allora per l'ipotesi di induzione poiché vale la tesi per $f'(x) = g(x)$, la (6.5.4) tende a 0, dato che è la stessa della tesi per n , ma divisa per $n + 1$. Allora la (6.5.3) è vera, quindi si è dimostrato il teorema. \square

Figura 6.2: Una funzione convessa in (a, b) .

Teorema 6.5.3 (Formula di Taylor con resto secondo Lagrange). Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, con f derivabile $n+1$ volte in $\overset{\circ}{I}$. Si ha per ogni $x \in I$ che

$$f(x) = P_n f(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (6.5.5)$$

per qualche opportuno z nell'intervallo di estremi x_0 e x .

Per $n = 0$ si ottiene il teorema 6.3.6 di Lagrange.

Le differenze tra i due teoremi principalmente sono che mentre il primo, secondo Peano, ha ipotesi locali (nell'intorno di x_0), quindi anche la tesi vale soltanto in tale intorno, per il secondo, secondo Lagrange, x può trovarsi dovunque in I , non occorre che $x \rightarrow x_0$, ma devono solo appartenere entrambi a I .

6.6 Convessità di funzioni

Definizione 6.6.1. Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa (concava) in I se per ogni terna di punti $x_1 < x < x_2$ nell'intervallo si ha che $f(x)$ è minore (maggiore) dell'ordinata del punto che corrisponde all'ascissa x sulla retta secante che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, ossia:

- se $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ è convessa;
- se $f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ è concava.

Ad esempio la funzione x^2 è convessa in tutto \mathbb{R} , anche strettamente, mentre la funzione $|x|$ è convessa in tutto \mathbb{R} ma non strettamente, in quanto prendendo un intervallo tutto negativo o tutto positivo si ha il caso in cui è uguale.

Per le funzioni convesse valgono le seguenti proprietà:

- le funzioni convesse in un intervallo (a, b) sono continue in $[a, b]$;
- per ogni punto interno all'intervallo in cui una funzione è convessa, esistono e sono finiti i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale¹, inoltre i due rapporti incrementali sono funzioni monotone crescenti;

¹Ma non sono necessariamente uguali, come per la funzione $|x|$ in $x = 0$.

- le derivate sinistre e destre sono monotone crescenti per ogni punto interno all'intervallo (vedi punto precedente), quindi la derivata prima ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità solo di prima specie; quindi la funzione è derivabile nell'interno dell'intervallo tranne al più in un'infinità numerabile di punti, che sono tutti punti angolosi.

Tali proprietà valgono ovviamente anche per le funzioni concave, cambiando opportunamente verso o segno dove serve.

Teorema 6.6.2. Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte in (a, b) . f è convessa in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.

Teorema 6.6.3. Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno una volta in (a, b) . f è convessa in (a, b) se e solo se $\forall x_0 \in (a, b)$ il grafico della funzione è sopra al grafico della retta tangente in x_0 , cioè se $\forall x_0, x \in (a, b)$ si ha che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Definizione 6.6.4. Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Se $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ si ha $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, cioè se prima di x_0 è concava e dopo è convessa, x_0 si dice punto di flesso ascendente.

Se invece $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ si ha $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, cioè se prima di x_0 è convessa e dopo è concava, allora x_0 è un punto di flesso discendente.

Teorema 6.6.5. Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è un punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.

Il teorema inverso non vale ad esempio per le potenze pari, come x^4 , che in $x = 0$ hanno la derivata seconda evidentemente nulla, ma non hanno un flesso in tale punto.

Teorema 6.6.6. Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora:

- se n è pari, x_0 è un estremo, inoltre se $f^{(n)}(x_0) > 0$ è punto di minimo, se $f^{(n)}(x_0) < 0$ è di massimo;
- se n è dispari, x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Dimostrazione. La formula di Taylor per f con resto secondo Peano al grado n è

$$f(x) = P_n f(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Dato che tutte le derivate in x_0 prima della n -esima sono nulle, per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

quindi

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right].$$

Se n è dispari, $(x - x_0)^n < 0$ per $x < x_0$ e $(x - x_0)^n > 0$ per $x > x_0$, quindi la differenza tra $f(x)$ e la retta tangente² $f(x_0)$ cambia segno prima e dopo x_0 , cioè x_0 è un punto di flesso, che è orizzontale dato che $f'(x_0) = 0$. Se invece n è pari, $(x - x_0)^n$ è sempre positivo, quindi il segno dipende da $f^{(n)}$: se è positivo, allora $f(x) - f(x_0) > 0$, cioè la funzione è maggiore del valore in x_0 , che quindi è un punto di minimo; se invece $f^{(n)}$ è negativo, analogamente, x_0 è un punto di massimo. \square

² $f(x_0)$ è sia il valore della funzione nel punto, sia l'equazione della retta tangente nel punto, che è orizzontale.

Capitolo 7

Numeri complessi

I numeri complessi nascono come soluzione all'equazione $x^2 = -1$, e in generale a quei problemi che richiedono la radice (di indice pari) di un numero negativo: si introduce così l'*unità immaginaria*, indicata con i , tale per cui

$$i^2 = -1.$$

Con questa nuova unità si costruiscono i numeri *immaginari puri*, ovvero i numeri della forma $i\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$: a questo punto, l'equazione (ad esempio) $x^2 = -\alpha$, se α è positivo, ha sempre delle soluzioni, in questo caso il numero $i\sqrt{\alpha}$ e il suo opposto. Si chiama inoltre *numero complesso* una qualunque espressione del tipo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Tale scrittura è detta *forma algebrica* di z , e a si chiama parte reale di z , mentre b è la parte immaginaria, e si possono indicare come

$$a = \Re(z), \quad b = \Im(z).$$

La coppia ordinata (a, b) può essere inoltre associata ad un vettore di \mathbb{R}^2 , e in effetti i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. I numeri complessi quindi si rappresentano su un piano, chiamato appunto *piano complesso*, dove l'asse delle ascisse è l'asse dei numeri reali, e l'asse delle ordinate è l'asse dei numeri immaginari; è chiaro quindi come i numeri reali siano compresi nei numeri complessi: sono semplicemente dei numeri complessi la cui parte immaginaria è nulla.

7.1 Operazioni sui numeri complessi

Dati due numeri $z = a + ib$ e $w = c + id$, si definiscono:

- l'operazione di somma, come $z + w = (a + c) + i(b + d)$;
- l'operazione di prodotto, come $zw = (ac - bd) + i(bc + ad)$ (è un semplice prodotto tra due polinomi);

Teorema 7.1.1. L'insieme dei numeri complessi, indicato con \mathbb{C} , dotato delle operazioni appena definite, è un campo, indicato anche con $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Ovviamente tutte le operazioni appena descritte valgono anche per i numeri reali e si riducono a quelle già note, poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

L'elemento neutro per la somma è $(0, 0)$, mentre l'opposto di $z = a + ib$ è $-z = -a - ib$, cioè il simmetrico rispetto all'origine. L'elemento neutro per il prodotto è $(1, 0)$, e il reciproco di $z = a + ib$ (non nullo) è il numero complesso $\frac{1}{z} = x + iy$ per cui il prodotto $(x + iy)(a + ib)$ sia 1, quindi

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Dato il numero $z = a + ib$, si definiscono inoltre il suo *coniugato*, cioè il numero simmetrico rispetto all'asse reale, $\bar{z} = a - ib$, e il suo *modulo* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, che è la distanza del punto (a, b) dall'origine. Si hanno le seguenti operazioni con i coniugati e i moduli:

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$;
- $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$;
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $|zw| = |z| \cdot |w|$;
- $|\bar{z}| = |z|$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Dimostrazione. L'ultima disuguaglianza, che è la disuguaglianza triangolare, si dimostra nel modo seguente:

$$|z + w|^2 = (z + w) \cdot (\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w.$$

Gli ultimi due termini sono l'uno il coniugato dell'altro, quindi

$$z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\bar{w}).$$

La parte reale di un numero è sempre minore o uguale al suo modulo, quindi l'uguaglianza rimane applicando i valori assoluti: si possono vedere come il cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, rispettivamente. Quindi $|\Re(z)| \leq |z|$, e analogamente $|\Im(z)| \leq |z|$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\bar{w}) &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Applicando le radici, si ottiene quindi la disuguaglianza $|z + w| \leq |z| + |w|$. □

Con queste definizioni diventa più “comodo” individuare il reciproco di un numero complesso, che si scrive anche come

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

che è un prodotto tra un numero reale e un numero complesso. Infatti

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Il rapporto tra due numeri complessi allora si scrive come il prodotto di uno per il reciproco dell'altro, quindi

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2}.$$

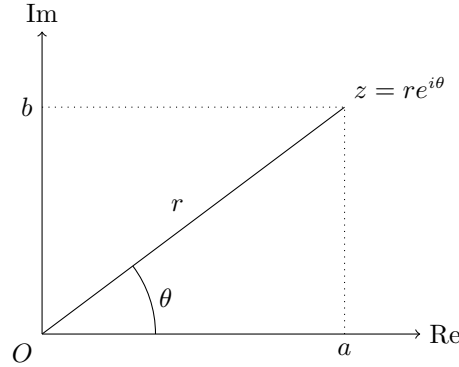


Figura 7.1: Forma trigonometrica ed algebrica di un numero complesso.

7.2 Forma trigonometrica ed esponenziale

Un altro modo per rappresentare i numeri complessi si ottiene guardandoli in coordinate polari anziché cartesiane: quindi al posto delle componenti sui due assi, cioè la parte reale e la parte immaginaria, si individua il numero con la sua distanza dall'origine e l'angolo che forma con l'asse reale (definito a meno di multipli di 2π), chiamati rispettivamente *modulo*, r , e *argomento*, θ :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

che vale se $z \neq 0$, poiché in tal caso non si può determinare l'argomento. Si può passare da una definizione all'altra tramite le formule

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = a/r \\ \sin \theta = b/r \end{cases}$$

Questo modo di scrittura dei numeri complessi facilita le operazioni di prodotto, in quanto semplicemente si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti: dati $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, si ha

$$zw = r\rho(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)).$$

Dimostrazione. Utilizzando le formule del seno e coseno della somma di angoli, risulta

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos \theta \cos \varphi + i^2 \sin \theta \sin \varphi + i \sin \theta \cos \varphi + i \cos \theta \sin \varphi) = \\ &= r\rho(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)). \end{aligned}$$

□

Si nota come moltiplicare per un numero complesso equivale, oltre ovviamente a moltiplicare i due moduli, a ruotare uno di un angolo equivalente all'argomento dell'altro. Inoltre il reciproco di $z \neq 0$, in questa forma, è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Per il rapporto, invece, si sottraggono gli argomenti anziché sommarli.

Un'ulteriore modo più “compatto” di rappresentare i numeri complessi è in forma esponenziale, ossia nella scrittura

$$z = re^{i\theta},$$

dove r e θ sono esattamente lo stesso modulo e argomento della scrittura in forma trigonometrica. La moltiplicazione è ancora più veloce:

$$zw = r\rho e^{i(\theta + \varphi)},$$

e così via.

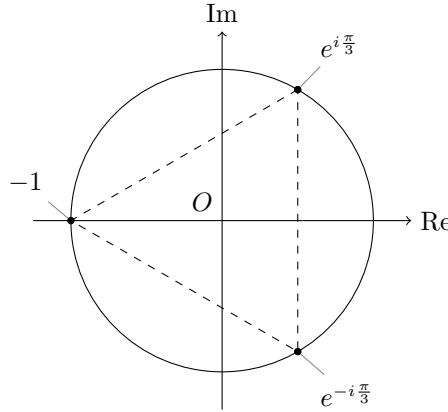


Figura 7.2: Le tre radici cubiche di -1, che formano un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio $r = 1$.

7.3 Potenze e radici

Si definiscono le potenze di numeri complessi ad esponente intero relativo, cioè i numeri z^n con $n \in \mathbb{Z}$. Sia $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. La sua potenza n -esima è il numero moltiplicato per se stesso n volte. Seguendo la formula per i prodotti in forma trigonometrica,

$$z^n = \underbrace{r \times r \times \cdots \times r}_{n \text{ volte}} (\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ volte}}) + i \sin(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ volte}}))$$

Il suo modulo sarà quindi r elevato all'esponente n , e l'argomento sarà θ aggiunto a se stesso n volte, quindi $n\theta$. Quindi si ha la formula detta *di De Moivre*:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (7.3.1)$$

Si definisce inoltre $z^0 = 1$, e se l'esponente è negativo si pone $z^n = (\frac{1}{z})^{-n}$ e si torna al caso precedente.

Definizione 7.3.1. Sia $w \neq 0$ un numero complesso, e $n \geq 2$. Il numero $z \in \mathbb{C}$ è radice n -esima di w se $z^n = w$.

Nel campo complesso, le radici di un'equazione di grado n sono sempre n , tutte distinte.

Teorema 7.3.2. Sia $w \neq 0$, con $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$). Esistono sempre n numeri complessi z_k che sono radici n -esime di w , e sono tutti e solo numeri complessi della forma

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad (7.3.2)$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Partendo dalla prima radice, di argomento θ/n , le altre sono ruotate di $2k\pi/n$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n-1$. Le n radici allora dividono la circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$, centrata nell'origine, in n angoli o archi uguali: i punti (r, θ) che sono radici del numero complesso di partenza formano un poligono equilatero inscritto in tale circonferenza.

Dimostrazione. Sia $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ una radice n -esima del numero $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, dove ovviamente $w, z \in \mathbb{C}$. Allora deve essere $z^n = w$, quindi

$$\rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Perché questi due numeri siano uguali, deve allora essere che $\rho^n = r$ e $n\varphi = \theta + 2h\pi$, per qualche $h \in \mathbb{Z}$. La prima è un'uguaglianza tra due numeri reali, quindi ha un'unica soluzione positiva che è $\rho = \sqrt[n]{r}$. Inoltre $\varphi = (\theta + 2h\pi)/n$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$. Però se si prendono h e $h + n$, i numeri z corrispondenti hanno lo stesso argomento, che è definito a meno di multipli di 2π :

$$\frac{\theta + 2(h+n)\pi}{n} = \frac{\theta + 2h\pi}{n} + 2\pi = \frac{\theta + 2h\pi}{n}.$$

Quindi, in realtà, le radici si ripetono ciclicamente tutte uguali dopo ogni multiplo di n , allora esistono solo n radici *uniche*. \square

Teorema 7.3.3 (Teorema fondamentale dell'algebra). Il campo \mathbb{C} è algebricamente chiuso. Qualunque polinomio a coefficienti complessi ha sempre un numero di soluzioni (complesse) pari al grado del polinomio.

Il fatto che esistano sempre n radici di un polinomio di grado n nel campo complesso, e che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, significa anche che ogni polinomio di grado n a coefficienti reali ha sempre n soluzioni in \mathbb{C} , cioè che \mathbb{C} è la *chiusura algebrica* di \mathbb{R} .

7.4 Ordinamento

Se come già visto si possono ordinare solo coppie di numeri reali (o di sottoinsiemi di \mathbb{R}), in effetti non è possibile stabilire un'ordinamento tra i numeri complessi. Qualunque tipo di ordine si voglia stabilire non è alla fine compatibile con le operazioni precedentemente definite.

Dimostrazione. Si consideri il numero i : poiché non è nullo, dovrebbe essere o positivo o negativo. Se $i > 0$, allora il suo quadrato è positivo. Sia quindi $i \cdot i = -1$ positivo. Moltiplicando due numeri positivi, il prodotto deve essere positivo: allora sia $i \cdot (-1) = -i$ positivo. Ora, la somma di due numeri positivi deve essere a sua volta positiva, ma se si somma i e $-i$ si ottiene 0, che non è positivo. Questo assurdo porta alla conclusione che i non può essere positivo. Sia allora i negativo. Il suo quadrato deve essere positivo, e come prima allora sia -1 positivo. Moltiplicando un numero negativo e un numero positivo, rispettivamente i e -1 , si ottiene $-i$ che deve allora essere negativo. La somma di due numeri negativi deve essere quindi negativa, ma sommando i e $-i$ si ottiene 0 che non è negativo. Per questo altro assurdo, i non può essere nemmeno negativo. Allora i non è né negativo, né positivo, né nullo, quindi \mathbb{C} non si può ordinare compatibilmente con le sue operazioni. \square

Parte II

Capitolo 8

Integrale di Riemann

8.1 Funzioni primitive

Definizione 8.1.1. Sia I un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di f in I se è derivabile in I e la sua derivata $\forall x \in I$ è $\varphi' = f$.

Le funzioni primitive sono anche chiamate “anti-derivate”. Da questa definizione si deducono alcune importanti proprietà delle funzioni primitive:

- Non tutte le funzioni ammettono una primitiva: ad esempio $f(x) = \operatorname{sgn} x$ non è la derivata di alcuna funzione. Dato che una funzione derivata può ammettere soltanto punti di discontinuità di seconda specie, dal teorema 6.4.5, tutte le funzioni che presentano discontinuità di prima o terza specie non hanno alcuna primitiva.
- L'esistenza delle primitive è determinata anche dall'intervallo considerato. Sempre per la $f(x) = \operatorname{sgn} x$, essa è derivata di $f(x) = x$ e $f(x) = -x$ rispettivamente per ogni intervallo tutto a destra o tutto a sinistra dell'origine, perché in quegli intervalli non ha discontinuità. Questo non vale più non appena si comprende l'origine nell'intervallo.
- Aggiungendo una qualsiasi costante ad una funzione, la sua derivata non cambia. Quindi $\forall c \in \mathbb{R}$, $(\varphi + c)' = f$. Infatti data una primitiva φ di f in I , tutte e sole le primitive sono del tipo $\varphi + c$. Si può dimostrare prendendo due primitive φ e ψ di f , in I : la derivata della loro differenza è $(\varphi - \psi)' = f - f = 0$, quindi differiscono di una costante.

La classe delle infinite funzioni primitive (se esistono) di f nell'intervallo I si indica con la notazione

$$\int f(x) \, dx$$

chiamata anche integrale indefinito di f in I .

Tecniche di integrazione

Dalle proprietà delle derivate delle operazioni tra funzioni si ottengono degli strumenti per semplificare la ricerca delle primitive di una funzione:

- Dalla regola di Leibnitz per il prodotto si ha la formula di integrazione *per parti*, per cui

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx.$$

- Dalla derivazione di funzioni composte invece si ha la regola di integrazione *per sostituzione*: siano $x = x(t) \in \mathcal{C}^1(J)$ definita come $x: J \rightarrow I$, e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(I)$. componendo le

funzioni si ottiene $f \circ x: J \rightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile. Inoltre, se φ è una primitiva di f in I , si ha che

$$\frac{\partial(\varphi \circ x)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = f(t) \frac{\partial x}{\partial t}$$

Antiderivando rispetto a t si ottiene¹

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial(\varphi \circ x)}{\partial t} dt &= \int f(t) \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ \varphi(x(t)) &= \int f(t) \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ \int f(x) dx &= \int f(t) \frac{\partial x}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

In pratica, si effettua un'opportuna sostituzione $x = x(t)$ nella funzione f , e si sostituisce il differenziale dx con il differenziale della funzione $x(t)$, che è appunto $\frac{\partial x}{\partial t} dt$. Eventualmente si può anche procedere al contrario.

8.2 Costruzione dell'integrale

Sia la funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo chiuso e limitato, limitata in $I := [a, b]$, ossia per cui $\exists m, M: \forall x \in [a, b]$ si ha $m \leq f(x) \leq M$. Si definisce *partizione* dell'intervallo $[a, b]$, e si indica con $\mathcal{P}[a, b]$, una collezione finita di punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

che crea dei sottointervalli del tipo $I_j := [x_{j-1}, x_j] \subset I$ per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Poiché la funzione è limitata in $[a, b]$, è certamente limitata anche in ognuno di questi sottointervalli. Allora esistono e sono finiti

$$\inf_{x \in I_j} f(x) \equiv m_j \quad \text{e} \quad \sup_{x \in I_j} f(x) \equiv M_j,$$

per cui ovviamente vale $m \leq m_j \leq M_j \leq M$ per ogni j . Si definiscono quindi le sommatorie

$$\sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),$$

rispettivamente denominate *somma inferiore* e *superiore*, indicate con $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$, che esistono per qualsiasi partizione finita di $[a, b]$ scelta, e si ha sempre che $s \leq S$, poiché $\forall j$ si ha $x_j < x_{j+1}$ e $m_j \leq M_j$ (figura 8.1). Inoltre

$$m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a). \quad (8.2.1)$$

Ciò significa che le classi numeriche di tutte le somme inferiori e superiori, per qualsiasi partizione dell'intervallo, sono limitate, quindi per la completezza di \mathbb{R} ammettono sempre un estremo inferiore e superiore reale. Trascurando $\sup S$ e $\inf s$ che sono di poca importanza, e comunque sono sempre limitati per la (8.2.1), si definiscono invece *integrale inferiore* e *superiore* $\sup s$ e $\inf S$, rispettivamente, che si indicano con

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

che sono compresi tra $m(b-a)$ e $M(b-a)$.

¹La notazione di derivata come rapporto di differenziali è utilizzata per indicare rispetto a quale variabile è stata derivata la funzione. *Non* sono da semplificare, in questo caso, i vari termini.

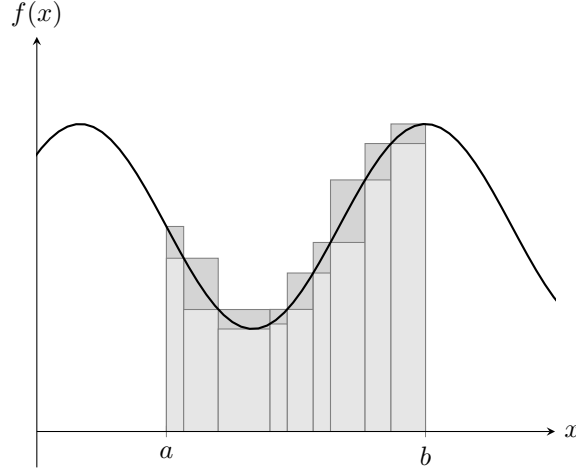


Figura 8.1: Somme superiori e inferiori della funzione $f(x) = 2 + \sin(\pi x)$, con una data partizione.

Esempi

- La funzione $f(x) = k$ (costante) ha indubbiamente, per ogni j , $m_j = M_j$, quindi le somme inferiore e superiore e gli integrali inferiore e superiore coincidono tutti e valgono $k(b - a)$.
- La funzione di Dirichlet assume come valori 1 se $x \in \mathbb{Q}$ e 0 altrimenti, quindi per ogni partizione dell'intervallo definito si ha che $m_j = 0$ e $M_j = 1$. Allora $s = 0$ e $S = b - a$ per qualsiasi partizione.

Separando uno dei sottointervalli $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ con un elemento $\tilde{x} \in I_j$, si ottiene un intervallo $\tilde{I}_j = [x_{j-1}, \tilde{x}] \cup [\tilde{x}, x_j]$, quindi contribuisce alle somme inferiori s con due addendi, la cui somma non è minore di $\inf_j m_j(x_j - x_{j-1})$ e analogamente contribuisce a S con due addendi la cui somma non è maggiore del $\sup_j M_j(x_j - x_{j-1})$. Sia $\mathcal{Q}[a, b]$ un raffinamento di $\mathcal{P}[a, b]$, ossia $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$: si ha che $s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{Q})$ e $S(f, \mathcal{P}) \geq S(f, \mathcal{Q})$ e, come prima, $s(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q})$. Anche con due partizioni differenti, $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$ (per cui cioè non vale $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ o viceversa), si considera $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, che è quindi un raffinamento comune ad entrambe le partizioni, per cui risulta

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

Prendendo quindi soltanto il primo e l'ultimo termine di questa disuguaglianza si ha che

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2), \quad (8.2.2)$$

allora le due classi delle $\{s(f, \mathcal{P})\}$ e $\{S(f, \mathcal{P})\}$ sono separate. Calcolando prima l'estremo superiore e poi l'estremo inferiore della relazione (8.2.2) si ottiene che

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}) \quad \longrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Allora si giunge alla seguente definizione.

Definizione 8.2.1. La funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se i suoi integrale inferiore e superiore in $[a, b]$ coincidono, cioè se

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx,$$

che si chiama integrale di Riemann della f nell'intervallo $[a, b]$.

L'integrale è chiaramente l'elemento separatore delle due classi. Le funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo $[a, b]$ si indicano anche come appartenenti alla classe $\mathfrak{R}([a, b])$. Con gli esempi fatti in precedenza, la funzione $f(x) = k \in \mathfrak{R}([a, b])$ mentre la funzione di Dirichlet non vi appartiene, poiché $s \neq S \forall \mathcal{P}[a, b]$.

8.3 Condizioni di esistenza dell'integrale

Lemma 8.3.1 (di integrabilità). Sia una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Essa è integrabile secondo Riemann se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}[a, b]: S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Un altro teorema garantisce una ancora più semplice condizione sufficiente affinché una funzione sia integrabile.

Teorema 8.3.2. Sia una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \in \mathcal{C}([a, b])$, allora $f \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Dimostrazione. Poiché $[a, b]$ è compatto, essendo f continua in questo intervallo si ha che per il teorema 5.4.5 di Weierstraß ammette massimo e minimo in $[a, b]$, e per il teorema 5.4.7 è uniformemente continua, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per $|x - y| < \delta$ si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ si trova un $\delta > 0$, per il quale prendo una partizione $\mathcal{P}[a, b]$ con “passo” (ampiezza dei sottointervalli) minore di δ . In ogni $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $x_0 = a$ e $x_n = b$, f ammette un massimo e un minimo perché è limitata, quindi esistono u_j e t_j tali che $f(u_j) = \max f(I_j) := M_j$ e $f(t_j) = \min f(I_j) := m_j$. La differenza tra le somme superiori e inferiori è

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \\ &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n [f(u_j) - f(t_j)](x_j - x_{j-1}). \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Poiché u_j e t_j appartengono entrambi ad un I_j , si ha $|u_j - t_j| < \delta$, quindi per l'uniforme continuità $f(u_j) - f(t_j) < \varepsilon$. Allora

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \sum_{j=1}^n \varepsilon(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b - a),$$

e poiché $b - a$ è costante, per il lemma precedente significa che $f \in \mathfrak{R}([a, b])$. \square

La classe delle funzioni integrabili secondo Riemann si può estendere per comprendere anche funzioni discontinue, ma non troppo.

Osservazione 8.3.3. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata: se f è discontinua in $[a, b]$ in un numero finito di punti, allora $f \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Teorema 8.3.4. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e monotona: allora $f \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Dimostrazione. Sia f crescente: sia $\mathcal{P}[a, b]$ la partizione che suddivide $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza $(b - a)/n$. Con $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, si ha che in ogni intervallo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ la f ammette minimo e massimo assoluto, per il teorema di Weierstraß, in rispettivamente x_i e x_{i+1} , per la monotonia. Allora

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n [f(x_{i+1}) - f(x_i)](x_{i+1} - x_i) = \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i+1}) - f(x_i)],$$

e poiché $\max f(I_k) = \min f(I_{k+1})$, poiché f è monotona, la somma è telescopica quindi risulta

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \frac{b - a}{n} [f(b) - f(a)]$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, quindi $f \in \mathfrak{R}([a, b])$. \square

8.4 Proprietà degli integrali

La classe delle funzioni integrabili secondo Riemann ha alcune proprietà:

- $\mathfrak{R}([a, b])$ è uno spazio vettoriale.
- L'operatore di integrale è lineare, cioè lo è la mappa $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$. Quindi l'integrale di una combinazione lineare di funzioni equivale alla combinazione lineare degli integrali di ogni funzione.
- Se $f \in \mathfrak{R}([a, b])$ e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in \mathbb{R} , allora $\varphi \circ f \in \mathfrak{R}([a, b])$.
- Dal punto precedente, si ha che se $|f| \in \mathfrak{R}([a, b])$ allora

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Se $f, g \in \mathfrak{R}([a, b])$, allora anche $fg \in \mathfrak{R}([a, b])$. Infatti $f + g \in \mathfrak{R}([a, b])$, e elevandola al quadrato (si effettua una composizione con $\varphi(x) = x^2$), $(f + g)^2 \in \mathfrak{R}([a, b])$. Sottraendo dal quadrato f^2 e g^2 , anch'esse integrabili, rimane $2fg$ che è quindi a sua volta integrabile secondo Riemann. Basta allora dividere per 2 per ottenere che $fg \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Gli integrali definiti possiedono inoltre le seguenti proprietà:

- Se $f \geq 0 \forall x \in ([a, b])$, allora anche il suo integrale tra a e b è non negativo, e inoltre se $f \geq g$, sempre per ogni x nell'intervallo, allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

- Sia $c \in [a, b]$. Se $f \in \mathfrak{R}([a, b])$, allora $f \in \mathfrak{R}([a, c]) \cap \mathfrak{R}([c, b])$, e vale anche l'inverso. Inoltre

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e se $f \geq 0$ nell'intervallo, allora il suo integrale tra a e b è nullo se e solo se la funzione (almeno in tale intervallo) è identicamente nulla.
- Si definisce per convenzione

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

ovvero che scambiando gli estremi di integrazione si inverte il segno dell'integrale; da questo si ha anche che $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Se non è noto l'ordine degli estremi di integrazione, non si può affermare che

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

poiché non è noto il segno dell'integrale di destra, che potrebbe essere negativo. Semmai è giusto affermare che

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

8.5 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione 8.5.1. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{R}([a, b])$, con le proprietà che ne conseguono. Per ogni $x \in [a, b]$, si ha anche che $f \in \mathfrak{R}([a, x])$, cioè esiste la

$$\int_a^x f(t) dt \equiv F_a(x),$$

detta funzione integrale di f , con a (fissato) come estremo inferiore di integrazione; la variabile x invece, che è la vera variabile della funzione, come estremo superiore. La variabile t non ha alcun ruolo nella definizione della funzione integrale, ed è per questo anche detta “muta”.

Se $x_0 \in [a, b]$, allora la $F_{x_0}(x)$ differisce da $F_a(x)$ per una costante: infatti

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = F_a(x) + \int_{x_0}^a f(t) dt$$

e l'ultimo termine è un numero definito. Le proprietà di $F_{x_0}(x)$ equivalgono quindi in tutto e per tutto a quelle di $F_a(x)$, quindi si possono indicare senza particolare problemi entrambe con $F(x)$. Ovviamente, $F_a(a) = 0$.

Teorema 8.5.2 (di Torricelli-Barrow). Siano $f \in \mathfrak{R}([a, b])$, e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. La funzione F è continua in $[a, b]$. Se inoltre f è continua in un punto c interno ad $[a, b]$, allora F è derivabile in c e vale $F'(c) = f(c)$.

Ovviamente se c è ad un estremo di $[a, b]$ non esiste la derivata, ma solo quella sinistra o destra.

Dimostrazione. Per ogni coppia $x, y \in [a, b]$ si ha

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right|,$$

con i valori assoluti, a scanso di equivoci nell'ordine di x e y . Inoltre poiché $f \in \mathfrak{R}([a, b])$ è anche limitata, quindi $\forall t, |f(t)| \leq k$. Allora

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq k |x - y|,$$

cioè è lipschitziana, quindi (uniformemente) continua.

Se inoltre f è continua in un qualche punto $c \in (a, b)$, per $x \neq c$ si dimostra che il rapporto incrementale di $F(x)$ tende a $f(c)$. Infatti²

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) &= \frac{1}{x - c} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right) - f(c) = \\ &= \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - f(c) = \\ &= \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c) dt = \\ &= \frac{1}{x - c} \int_c^x [f(t) - f(c)] dt. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, poiché f è continua in c allora esiste $\delta > 0$ per cui se $|t - c| < \delta$ allora $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Quindi per $|x - c| < \delta$ si ha che

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \frac{1}{x - c} \int_c^x |f(t) - f(c)| dt,$$

²Sfruttando l'uguaglianza $f(c) = \frac{1}{x-c} f(c)(x-c) = \frac{1}{x-c} f(c) \int_c^x dt = \frac{1}{x-c} \int_c^x f(c) dt$.

in cui il secondo membro non è mai negativo, perché l'integrale è negativo se $x < c$ (l'integranda è positiva) ma allora lo è anche la frazione, al più è nullo se $f(t) = f(c)$. Per la continuità di f , $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$, quindi

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x \varepsilon \, dt \right| = \varepsilon \cdot \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x dt \right| = \varepsilon,$$

quindi

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \rightarrow f(c). \quad \square$$

Come conseguenze di questo teorema, se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ allora la funzione integrale $F(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$. F è inoltre una primitiva di f .

Teorema 8.5.3 (di Newton-Leibnitz). Se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e φ è una sua primitiva in $[a, b]$, che quindi esiste sempre, allora

$$\int_a^b f(x) \, dx = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (8.5.1)$$

Dimostrazione. Per la continuità di f si ha la sua primitiva $F(x)$, la funzione integrale. Anche φ è una sua primitiva, quindi le due devono differire di una costante, come ad esempio $\varphi(x) = F(x) + c$:

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \\ &= \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^a f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 8.5.4. Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$, allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale per cui

$$f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx. \quad (8.5.2)$$

Dimostrazione. Essendo continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstraß la f ha un massimo M e un minimo m nell'intervallo, per cui $\forall x \in [a, b]$ vale

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Integrando in $[a, b]$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b m \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx \\ m(b - a) &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a) \end{aligned}$$

e dato che $b > a$, altrimenti l'intervallo sarebbe un punto e l'integrale di $f(x)$, di conseguenza, nullo, risulta

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Per il teorema 5.5.2 dei valori intermedi, f è continua quindi assume tutti i valori tra m e M , quindi in particolare deve esistere un punto $x_0 \in [a, b]$ in cui assume il valore dell'integrale, ossia

$$f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

Questo teorema è in sostanza una riformulazione del teorema di Lagrange per la funzione integrale, per la quale

$$F(b) = \int_a^b f(t) \, dt \quad \text{e} \quad F(a) = 0.$$

8.6 Integrali impropri

Quando una delle ipotesi tra continuità (anche a tratti) della funzione, limitatezza o compattezza dell'intervallo non sono più verificate, non si può più certamente parlare di integrale di Riemann, ma il significato di integrale si può generalizzare ai vari casi: si estende quindi il calcolo delle aree sottese anche per intervalli illimitati o in cui la funzione tende all'infinito. Gli integrali di questo tipo si dicono appunto *generalizzati*, o *impropri*, e si possono distinguere principalmente in due tipi.

Prima specie In questo caso l'intervallo di integrazione non è chiuso: sia ad esempio l'intervallo $(a, b]$, e f una funzione definita come $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia Riemann-integrabile in ogni sottointervallo $I \subset (a, b]$ che *non* comprende un intorno destro di a , ossia $f \in \mathfrak{R}([x, b])$ per ogni $x \in (a, b]$: allora esiste l'integrale $\int_x^b f(t) dt$. Se esiste ed è finito il limite

$$\int_a^b f(t) dt \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt,$$

allora si dice che esiste l'integrale improprio di f sull'intervallo $[a, b]$. Il suo valore è ovviamente il risultato del limite. Questo è il caso di funzioni con singolarità in un punto interno all'intervallo di integrazione, come un asintoto: allora si calcola il limite dell'integrale per un estremo che tende a tale punto critico, da sinistra o destra o anche entrambi, come necessario.

Osservazione 8.6.1. Se f è già Riemann-integrabile su $[a, b]$, si sa che la funzione integrale $F_b(x) = \int_x^b f(t) dt$ è continua per il teorema 8.5.2 fondamentale del calcolo integrale, quindi $F_b(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F_b(x)$, che per la continuità di F coincidono.

Seconda specie In questo caso l'intervallo di integrazione non è più limitato: sia ad esempio $[a, +\infty)$. Sia f una funzione definita come $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ che sia Riemann-integrabile in ogni intervallo compatto $I \subset [a, +\infty)$: allora esiste l'integrale $\int_a^x f(t) dt$ per ogni $x > a$. Se esiste ed è finito il limite

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt,$$

allora si dice che esiste l'integrale improprio di f sull'intervallo $[a, +\infty)$. Il suo valore è anche stavolta, ovviamente, il risultato del limite.

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ definita in $[1, +\infty)$. Sicuramente essa è continua in $[1, x]$ $\forall x > 1$, per ogni valore di p . Il suo integrale in questo intervallo vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p} = \begin{cases} \left. \frac{t^{1-p}}{1-p} \right|_1^x = \frac{x^{1-p} - 1}{1-p} & p \neq 1 \\ \log p & p = 1. \end{cases}$$

Nel caso $p = 1$ ovviamente l'integrale diverge, mentre per $p \neq 1$ per $x \rightarrow +\infty$ l'integrale converge quando $1 - p < 0$, ossia se $p > 1$. Allora l'integrale converge (a $\frac{1}{1-p}$) per $p > 1$, mentre diverge a $+\infty$ per $p \leq 1$.

Il calcolo di un integrale improprio è talvolta difficoltoso, e spesso interessa soltanto stabilire soltanto la sua convergenza, ossia la sua esistenza. A questo scopo, laddove l'integrale non sia fin da subito immediato, tornano utili alcuni criteri per la convergenza. Con I si indicheranno dei generici intervalli della forma $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$.

Teorema 8.6.2 (del confronto). Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, per ogni $J \subset I$ compatto, $f \in \mathfrak{R}(J)$. Allora se $\forall x \in I$ si ha che $0 \leq f(x) \leq g(x)$

- ed esiste l'integrale improprio di g , allora esiste anche l'integrale improprio di f ;
- se non esiste l'integrale improprio di f diverge, allora non esiste neanche l'integrale improprio di g .

Nel secondo punto si potrebbe anche parlare di divergenza: se infatti le due funzioni sono entrambe positive, il loro integrale improprio può soltanto convergere o divergere a $+\infty$, come già accadeva per le serie.

Dimostrazione. Sia $I = [a, b)$. Per le proprietà dell'integrale di Riemann vale la disuguaglianza

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt,$$

ed entrambe le funzioni integrali sono positive, perché $f, g \geq 0$, continue per il teorema 8.5.2 fondamentale del calcolo integrale, e monotone non decrescenti, quindi devono ammettere limite. Dal teorema del confronto dei limiti si ottiene allora che se il limite di $G_a(x)$ è finito, lo è anche il limite di $F_a(x)$, mentre se $F_a(x)$ non converge, e allora non può che divergere perché $F_a(x) \geq 0$, anche $G_a(x)$ diverge. La dimostrazione per gli altri tipi di intervalli è del tutto analoga. \square

Definizione 8.6.3. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$: si definisce parte positiva di f la funzione

$$f_+(x) = \max_{x \in I} \{f(x), 0\},$$

e analogamente parte negativa la funzione

$$f_-(x) = -\min_{x \in I} \{f(x), 0\}.$$

Notare il segno meno nella definizione della parte negativa, che fa sì che sia f_+ che f_- siano funzioni positive in tutto I . Con queste definizioni si può “scomporre” la f nella somma

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

mentre valgono le proprietà, sempre $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)| \\ |f(x)| &= f_+(x) + f_-(x) \\ f_+(x)f_-(x) &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 8.6.4 (del confronto). Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in \mathfrak{R}([a, x])$ per ogni sottoinsieme $[a, x] \subseteq I$. Se esiste una funzione $g(x)$ tale che $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in I$, e $g(x)$ è integrabile in senso improprio in I , allora sia $|f(x)|$ che $f(x)$ ammettono l'integrale improprio su I .

Dimostrazione. Dal teorema 8.6.2 $|f(x)|$ è integrabile in senso improprio in I in quanto per ogni $x \in I$ si ha $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ e l'integrale improprio di $g(x)$ esiste in I . Ma allora sono integrabili impropriamente in tale intervallo anche $f_+(x)$ e $f_-(x)$, in quanto $0 \leq f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)|$ in ogni punto, quindi la differenza

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x [f_+(t) - f_-(t)] dt = \int_a^x f_+(t) dt - \int_a^x f_-(t) dt$$

esiste ed è finita. \square

Corollario 8.6.5 (del confronto asintotico). Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ non negative in I . Se $f \sim g$, allora gli integrali impropri di f e g in I hanno lo stesso carattere.

La convergenza dell'integrale improprio non implica, come si era visto per le serie numeriche, come condizione necessaria la convergenza a zero della funzione! Il limite potrebbe anche non esistere, ma l'integrale improprio sì; se però la funzione è regolare, allora il limite non può che essere 0. Le serie hanno comunque un legame stretto con gli integrali impropri, come dimostra il seguente teorema che lega le serie agli integrali su $[0, +\infty)$.

Teorema 8.6.6. Sia $f: [n, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, con $n \in \mathbb{N}$, una funzione monotona decrescente: allora vale

$$\int_n^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{j=1}^{+\infty} f(j) \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(x) dx. \quad (8.6.1)$$

Dimostrazione. Sia $m > n$ intero: l'integrale in $[n, m+1]$ è la somma di integrali in intervalli più piccoli, ossia

$$\int_n^{m+1} f(x) dx = \sum_{j=n}^m \int_j^{j+1} f(x) dx.$$

Poiché f è decrescente, per ogni $x \in [j, j+1]$ si ha che $f(j+1) \leq f(x) \leq f(j)$, quindi integrando in $[j, j+1]$ si mantiene la relazione d'ordine anche tra gli integrali, cioè

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} f(j+1) &\leq \int_j^{j+1} f(x) dx \leq \int_j^{j+1} f(j) \\ (j+1-j)f(j+1) &\leq \int_j^{j+1} f(x) dx \leq (j+1-j)f(j) \\ f(j+1) &\leq \int_j^{j+1} f(x) dx \leq f(j). \end{aligned}$$

Allora sommando i termini da n a $m-1$ risulta

$$\sum_{j=n}^{m-1} f(j+1) \leq \int_n^m f(x) dx \leq \sum_{j=n}^{m-1} f(j),$$

da cui si ottiene

$$\sum_{j=n}^{m-1} f(j) - f(n) \leq \int_n^m f(x) dx \leq \sum_{j=n}^{m-1} f(j),$$

da cui per $m \rightarrow +\infty$ si ottiene la (8.6.1). □

Con questo teorema si può valutare l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x},$$

per qualsiasi $a > 1$, tramite la similitudine con la nota serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$ si ricava che esso converge se $p > 1$ e diverge per $p < 1$. Se $p = 1$ si ha l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \log^q x}$$

che con la sostituzione $t = \log x$ diventa

$$\int_{\log a}^{+\infty} \frac{dt}{t^q},$$

che quindi converge se $q > 1$.

Capitolo 9

Calcolo differenziale in più dimensioni

9.1 Derivate direzionali

Dato un versore \mathbf{v} , con $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ si indica la retta passante per il punto \mathbf{a} e diretta nella direzione di \mathbf{v} . Con $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ si indica invece il segmento delimitato da \mathbf{a} e \mathbf{b} (inclusi) lungo la retta che passa per i due punti, ossia l'insieme $\{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in [0, 1]\}$.

Sia Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^n , e f una funzione da Ω a \mathbb{R} : poiché Ω è aperto, possiamo sempre individuare al suo interno un'intorno $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$. Si fissi dunque un versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: muovendosi da \mathbf{a} lungo la sua direzione, se $t \in (-r, r)$ allora $\mathbf{a} + t\mathbf{v} \in \Omega$, perché tale punto è ancora compreso nell'intorno $B(\mathbf{a}, r)$. Si restringe allora la f lungo la direzione individuata da \mathbf{v} , ottenendo la funzione $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$: essa è definita in $(-r, r)$, e se esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

esso è la derivata di φ in $t = 0$. Ritornando alla funzione f si ha equivalentemente

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \quad (9.1.1)$$

che indica quindi il rapporto incrementale della f ristretta alla direzione di \mathbf{v} . Si può dare a questo punto la definizione di derivata di f lungo la direzione di \mathbf{v} .

Definizione 9.1.1. Si dice derivata direzionale della funzione $f \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lungo la direzione \mathbf{v} in $\mathbf{a} \in \Omega$ il limite, quando esiste, del rapporto incrementale:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

La restrizione della f lungo \mathbf{v} è derivabile, e quindi anche continua. Nel caso in cui \mathbf{v} sia uno dei versori della base canonica¹ di \mathbb{R}^n , la derivata direzionale si scrive anche

$$D_{\mathbf{e}_j}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

ed è chiamata *derivata parziale* di f per la direzione \mathbf{e}_j . Le derivate direzionali sono ovviamente infinite, mentre le derivate parziali sono tante quante le dimensioni di \mathbb{R}^n .

Definizione 9.1.2. Se f ammette tutte le derivate parziali in un punto \mathbf{a} , si definisce gradiente di f in tale punto il vettore

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right). \quad (9.1.2)$$

¹La base canonica di \mathbb{R}^n è composta dagli n vettori \mathbf{e}_j in cui la j -esima componente è 1, e le altre sono nulle.

La derivata parziale è inoltre definita come, ad esempio per x_1 ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} [f(a_1 + t, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)]$$

quindi non è altro che un'operazione di derivazione rispetto soltanto alla variabile x_1 , mantenendo le rimanenti come costanti. Si possono allora applicare le solite regole di derivazione per le funzioni ad una sola variabile.

Esempi

- Sia $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. La funzione è per definizione di prodotto scalare equivalente a $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n b_j x_j$, quindi chiaramente le derivate parziali esistono tutte e valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = b_j,$$

cioè il gradiente di f in \mathbf{x} è $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

- La funzione $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, per definizione, è $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$, quindi le derivate parziali sono per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2x_j = x_j \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

quindi il suo gradiente è $\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Si nota anche che $\nabla(\|\mathbf{x}\|)$ è un versore.

Per le funzioni ad una variabile reale, la derivabilità implica automaticamente la continuità. Questo non è più vero in più dimensioni, come mostrato dalla funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

che è derivabile in $(0, 0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ma non è continua in tale punto. Infatti

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} v_2^2/v_1 & \text{se } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_1 = 0, \end{cases}$$

quindi la derivata esiste per ogni \mathbf{v} , ma restringendo f al cammino (t^2, t) si ha $f(t^2, t) = 1/2$ che è diverso dal valore della funzione in quel punto, quindi non è continua.

Allora la derivabilità in un punto, anche in ogni direzione, di una funzione *non* implica la sua continuità in tale punto. Per garantire la continuità bisogna quindi introdurre un nuovo concetto, quello di differenziabilità.

9.2 Differenziabilità

Per le funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , la proprietà di derivabilità coincideva in pratica con quella di differenziabilità, ossia della possibilità di scrivere l'incremento della funzione come somma di un termine lineare e di un termine infinitesimo:

$$f(a + x) = f(a) + \ell x + o(x).$$

Le due condizioni si implicavano a vicenda, ma questo non accade in più dimensioni: si ha la definizione seguente².

²Ovviamente riconducibile al caso di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 9.2.1. Sia una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con Ω aperto. Preso un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, e un \mathbf{h} piccolo tale per cui $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega$, allora f si dice differenziabile in \mathbf{a} se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ si può scrivere

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = L(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|). \quad (9.2.1)$$

L'applicazione L è detta *differenziale primo* di f nel punto \mathbf{a} , e si indica con $df(\mathbf{a}, \cdot)$. Ogni applicazione lineare da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} è rappresentabile tramite il prodotto interno con un vettore fissato di \mathbb{R}^n : allora esiste un vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ per cui si può scrivere $L(\mathbf{h}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h}$. Si può dunque formulare la definizione 9.2.1 chiedendo che esista un vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ tale per cui

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (9.2.2)$$

Osservazione 9.2.2. Se esiste $\boldsymbol{\lambda}$ tale per cui valga la (9.2.2), allora è unico.

Dimostrazione. Sia f differenziabile in \mathbf{a} per due vettori distinti $\boldsymbol{\lambda}_1$ e $\boldsymbol{\lambda}_2$. Si ha allora l'uguaglianza

$$\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Trascurando il membro centrale si trova che $\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \mathbf{h} = o(\|\mathbf{h}\|)$. Dividendo per $\|\mathbf{h}\|$, si ottiene $\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ che è un versore, che sarà indicato con \mathbf{v} ; dunque $\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \mathbf{v} = o(1)$, cioè per ogni \mathbf{v} si ha che $\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$, dato che l'espressione non dipende da $\|\mathbf{h}\|$. Allora $\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2$ è ortogonale a \mathbf{v} : poiché l'unico vettore ortogonale ad infiniti vettori (la relazione vale infatti per qualunque $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) è il vettore nullo, risulta $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2$. \square

La differenziabilità della funzione permette di evitare spacevoli inconvenienti come la discontinuità. Il teorema seguente dimostra la regolarità della funzione differenziabile, oltre a mostrare che $\boldsymbol{\lambda}$ non è proprio un vettore qualsiasi.

Teorema 9.2.3. Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , e la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, se f è differenziabile in tale punto allora:

1. f è continua in \mathbf{a} ;
2. per ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, f ammette le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$;
3. esiste il gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$, che è uguale a $\boldsymbol{\lambda}$;
4. $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$.

Dimostrazione. 1. Poiché f è differenziabile, applicando il modulo alla definizione di differenziabilità si ottiene che $|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| = |\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)|$. L'ultimo membro è maggiorato dalla somma dei moduli dei singoli termini, quindi $|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| \leq |\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h}| + o(\|\mathbf{h}\|) \leq \|\boldsymbol{\lambda}\| \|\mathbf{h}\| + o(\|\mathbf{h}\|)$ che tende a 0 se \mathbf{h} , quindi anche $\|\mathbf{h}\|$, tende a 0. Quindi $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \rightarrow f(\mathbf{a})$ e la funzione è continua.

2. Fissato un versore \mathbf{v} , l'incremento lungo la sua direzione è differenziabile come $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot t\mathbf{v} + o(\|t\mathbf{v}\|)$. Dato che $\|t\mathbf{v}\| = |t| \|\mathbf{v}\| = |t|$, dividendo per t risulta

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} + o(1), \text{ cioè } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}.$$

3. Per il secondo punto si ha $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}$, e quando il versore è della base canonica di \mathbb{R}^n , \mathbf{e}_j , per definizione si ha la derivata parziale, che è quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}_j = \lambda_j \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda}.$$

4. Quest'ultimo punto segue automaticamente dal fatto che $\nabla f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda}$ e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}$. \square

Se f è differenziabile in \mathbf{a} , allora la mappa $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ è lineare, in quanto le derivate direzionali sono una combinazione lineare di \mathbf{v} , cioè

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i.$$

Inoltre, noto il gradiente della funzione, lo si può sostituire nella (9.2.2) e se il limite è vero, cioè se esiste finito

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$$

allora la funzione è differenziabile.

Definizione 9.2.4. Data una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, l'insieme

$$\Gamma = \left\{ \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\mathbf{x}}, x_{n+1} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

è il grafico di f .

In un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, si definisce iperpiano tangente al grafico di f in $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ l'insieme dei punti di \mathbb{R}^{n+1} tali per cui $x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a}$.

Osservazione 9.2.5. Se f è differenziabile in \mathbf{a} , si ha che $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$, quindi

$$|D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\|;$$

il gradiente quindi maggiore le derivate direzionali. La massima crescita, o pendenza, del grafico della f si ha allora nella direzione del gradiente, per la quale la disuguaglianza sopra è un'uguaglianza. Il vettore gradiente indica allora la massima pendenza di f .

Nel caso di una funzione vettoriale, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, non si fa altro che generalizzare nelle m componenti di \mathbf{f} quanto detto precedentemente: la derivata direzionale non è unica ma ce n'è una per ogni componente della funzione, ed è quindi una funzione sempre vettoriale in \mathbb{R}^m , definita nel generico punto \mathbf{a} come il limite, quando esiste,

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} = (D_{\mathbf{v}}f_1(\mathbf{a}), D_{\mathbf{v}}f_2(\mathbf{a}), \dots, D_{\mathbf{v}}f_m(\mathbf{a})).$$

Le derivate parziali seguono la stessa regola delle funzioni scalari, semplicemente ogni funzione può ammettere al più m derivate parziali in ogni variabile, quindi non più n ma mn derivate. Se esistono tutte le derivate parziali in \mathbf{a} , si raccolgono tutte in una matrice $m \times n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{J}\mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

detta *jacobiana* di \mathbf{f} . Per le funzioni scalari, che hanno una sola componente, la jacobiana è composta soltanto della prima riga e si riduce quindi al gradiente. Ogni riga della jacobiana, in effetti, è il gradiente di una singola componente. Se la funzione è in una sola variabile la jacobiana diventa un vettore, e sarà indicata più semplicemente con $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$.

La definizione di differenziabilità ricalca quella già data nella 9.2.1 per le funzioni scalari, con ovviamente m dimensioni al posto di una soltanto.

Definizione 9.2.6. La funzione $\mathbf{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice differenziabile nel punto $\mathbf{a} \in \Omega$ se e solo se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale per cui si può scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + L(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\mathbf{h}). \quad (9.2.3)$$

Quindi \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{a} se e solo se lo sono tutte le sue componenti f_1, f_2, \dots, f_m . A questa applicazione L si può associare una matrice, fissata, $\Lambda \in \text{mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, cioè con m righe e n colonne, tale che $L(\mathbf{h}) = \Lambda \mathbf{h}$. Si riscrive dunque la definizione precedente questa volta richiedendo che esista una tale matrice Λ per cui valga

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \Lambda \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (9.2.4)$$

In maniera del tutto simile al teorema 9.2.3, dalla differenziabilità delle funzioni vettoriali discendono alcune proprietà importanti:

1. \mathbf{f} è continua in \mathbf{a} ;
2. esistono tutte le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, per qualunque versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$;
3. la matrice per cui vale la (9.2.4) è $\Lambda = J\mathbf{f}(\mathbf{a})$;
4. $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{v}$.

Inoltre le generiche derivate direzionali si ottengono dall'equazione

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) v_j \right) \mathbf{e}_i,$$

dove $\{\mathbf{e}_k\}$ sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^m . Anche in questo caso L è chiamata differenziale primo, e si identifica con la jacobiana:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}; \cdot): \mathbf{h} \mapsto J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}.$$

Teorema 9.2.7 (del differenziale totale). Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n , \mathbf{a} un suo punto e la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste un intorno $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ per cui esistono tutte le n derivate parziali di f , e sono tutte continue nel punto \mathbf{a} , allora f è differenziabile in \mathbf{a} .

Nel caso di \mathbb{R}^2 si dà la seguente dimostrazione, generalizzabile eventualmente per \mathbb{R}^n con n qualunque.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x} = (x, y) \in B(\mathbf{a}, r)$ e $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Si dimostra che

$$\frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \rightarrow 0, \quad (9.2.5)$$

in modo che f sia differenziabile in \mathbf{a} .

Si può calcolare $f(x, y) - f(a_1, a_2)$ come $f(x, y) - f(a_1, y) + f(a_1, y) - f(a_1, a_2)$. I primi due termini corrispondono all'incremento di f fissato y (quindi lungo la direzione di x), mentre i secondi due all'incremento fissato a_1 (quindi lungo y). Il risultato è ancora ovviamente un punto interno a Ω (figura 9.1). Applicando il teorema di Lagrange a $f(\cdot, y)$ e $f(a_1, \cdot)$, che sono entrambe derivabili per ipotesi, dato che corrispondono alle derivate parziali rispettivamente in x e y , si ottiene che

$$f(x, y) - f(a_1, y) = (x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \quad \text{e} \quad f(a_1, y) - f(a_1, a_2) = (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta)$$

per qualche (ξ, y) e (a_1, η) in Ω . Il numeratore della (9.2.5) si riscrive quindi come

$$\begin{aligned} & (x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta) - \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right] = \\ & = (x - a_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right] + (y - a_2) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right], \end{aligned}$$

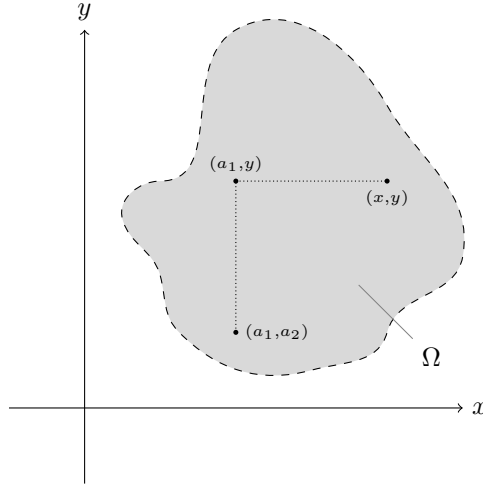


Figura 9.1: Incremento $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ scomposto nelle due direzioni lungo gli assi cartesiani in \mathbb{R}^2 .

il cui modulo è minore della somma dei moduli dei termini, quindi

$$\begin{aligned} &\leq |x - a_1| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right| + |y - a_2| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right| = \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right| \right]. \end{aligned}$$

Allora la (9.2.5) è maggiorata dal termine tra parentesi quadre. Per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ si ha $(\xi, y) \rightarrow \mathbf{a}$ e anche $(a_1, \eta) \rightarrow \mathbf{a}$, e poiché le derivate parziali per ipotesi sono continue risulta che la (9.2.5) tende a 0, quindi la f è differenziabile in \mathbf{a} . \square

Se f è una funzione vettoriale da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , il teorema richiede che tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ siano continue in \mathbf{a} .

Definizione 9.2.8. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: si dice che $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ se in ogni punto di Ω esistono e sono continue tutte le derivate parziali di f .

Corollario 9.2.9. Se una funzione appartiene alla classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, allora è differenziabile in tutto Ω .

La dimostrazione segue immediatamente dal teorema precedente.

9.3 Differenziazione di funzioni composte

Teorema 9.3.1. Sia Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^n , $\mathbf{a} \in \Omega$ e $\mathbf{f} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in \mathbf{a} ; sia quindi $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenziabile in $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Allora la funzione composta $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è differenziabile in \mathbf{a} , e vale la relazione

$$d\mathbf{h}(\mathbf{a}; \cdot) = d\mathbf{g}(\mathbf{b}; \cdot) \circ d\mathbf{f}(\mathbf{a}; \cdot) = d\mathbf{g}(\mathbf{b}; d\mathbf{f}(\mathbf{a}; \cdot)), \quad (9.3.1)$$

vale a dire che la jacobiana di \mathbf{h} in \mathbf{a} è il prodotto ordinato della jacobiana di \mathbf{g} per quella di \mathbf{f} :

$$\mathbf{J}\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Il prodotto tra queste matrici è possibile, dato che sono rispettivamente $p \times m$ e $m \times n$, e si ottiene quindi che la jacobiana di \mathbf{h} ha p righe e n colonne. Il prodotto *non* è commutativo, in quanto non è nemmeno possibile eseguirlo scambiando l'ordine dei fattori, diversamente dal caso di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

Sviluppando il prodotto tra le due matrici si ha che la componente della jacobiana di \mathbf{h} è, con $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq n$,

$$(\mathbf{Jh}(\mathbf{a}))_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

dove y_k è la variabile relativa a \mathbf{g} , ossia $y_k = f_k(\mathbf{a})$.

Teorema 9.3.2 (di Lagrange). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , \mathbf{a} e \mathbf{b} due punti interni ad esso tali che $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Omega$, e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in tutto Ω . Allora esiste un punto $\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ per il quale $g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \nabla g(\xi) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Dimostrazione. Sul segmento $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ si costruisce una funzione vettoriale $\mathbf{f}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, con $t \in [0, 1]$ ³: componendola con g si ottiene che $(g \circ \mathbf{f})(t) = g[\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})]$, tale che $g \circ \mathbf{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e le si applica il teorema 6.3.6 di Lagrange per funzioni reali a variabili reali nell'intervallo $[0, 1]$, ottenendo che esiste $\theta \in (0, 1)$ tale per cui $(g \circ \mathbf{f})(1) - (g \circ \mathbf{f})(0) = (g \circ \mathbf{f})'(\theta)$, cioè

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \mathbf{J}g(\mathbf{f}(\theta)) \mathbf{Jf} = \nabla g(\mathbf{f}(\theta)) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Il punto $\mathbf{f}(\theta)$ è il punto ξ cercato della tesi. \square

Si potrebbe formulare una versione di questo teorema anche per le funzioni vettoriali, per il quale al posto del gradiente in \mathbf{a} si avrebbe la jacobiana in \mathbf{a} : si applicherebbe semplicemente il teorema di Lagrange appena dimostrato per ognuna delle componenti di \mathbf{g} . In realtà un tale teorema non ha ragione di esistere, come mostra il seguente controesempio. Sia $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)$, con $\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{b} = 2\pi$. Una versione vettoriale del teorema di Lagrange porterebbe a concludere che esisterebbe $x \in (0, 2\pi)$ per cui

$$\mathbf{g}(2\pi) - \mathbf{g}(0) = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} 2\pi = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} 2\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia $\sin x = 0$ e $\cos x = 0$ contemporaneamente, chiaramente assurdo.

Il problema sta nel fatto che sebbene sia realmente possibile applicare il teorema 9.3.2 alle varie componenti di una funzione vettoriale, non si può affermare che sia soddisfatto per ognuna in un unico punto: ogni componente soddisfa il teorema in punti diversi.

Teorema 9.3.3 (dell'incremento finito). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e $\mathbf{g}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenziabile in $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Omega$. Allora esiste $c \geq 0$ tale per cui $\|\mathbf{g}(\mathbf{b}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \leq c \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

Un “buon” valore di questa quantità c è ad esempio

$$c = \sqrt{mp} \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}} \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right|.$$

Se tutte le derivate parziali sono nulle, si ha $c = 0$ quindi la funzione è costante.

9.4 Diffeomorfismi

Definizione 9.4.1. Siano $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n$ due insiemi aperti. Una funzione $\mathbf{f}: A \rightarrow B$ biettiva si dice *diffeomorfismo* di A su B se \mathbf{f} è differenziabile e la sua inversa $\mathbf{f}^{-1}: B \rightarrow A$ è anch'essa differenziabile.

Anche l'inverso di un diffeomorfismo è ovviamente, a sua volta, un diffeomorfismo: in questa classe di funzioni si trovano in particolare i cambiamenti di coordinate, che infatti per queste proprietà si possono applicare senza problemi di irregolarità nelle funzioni.

³Dato che tale segmento è interno ad Ω , anche “sporgendo” un poco oltre gli estremi si resterà sempre nell'insieme, quindi volendo si può limitare t anche a $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$

Teorema 9.4.2. Sia $\mathbf{f}: A \rightarrow B$ con $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^m$. Se risulta che:

- \mathbf{f} è differenziabile $\forall \mathbf{x} \in A$;
- ?
- $\det J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$,

allora \mathbf{f} è un diffeomorfismo.

Le traslazioni sono dei diffeomorfismi: sia ad esempio in \mathbb{R}^3 la funzione $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$, essa è indubbiamente differenziabile, e lo è anche la sua inversa $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{b}$. Calcolando le matrici jacobiane di queste funzioni si ha

$$J\mathbf{T}(\mathbf{x}) = J\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, generalizzabile ovviamente a qualunque dimensione. Si nota che il prodotto delle due jacobiane dà la matrice identità 3×3 : questo non è dovuto al fatto che entrambe le jacobiane sono già di per sé matrici identità, ma è un risultato generale per tutti i diffeomorfismi. Se infatti si compongono una funzione \mathbf{f} con la sua inversa \mathbf{f}^{-1} , si ottiene l'identità $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} = \text{id}_A$ sull'insieme A ; calcolando le jacobiane,

$$J(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = J\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = J\mathbf{x} = I_n,$$

che è la jacobiana della funzione identità, per ogni $\mathbf{x} \in A$. Di conseguenza, passando ai determinanti si trova che $\det J\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$, e che essa è l'inversa di $J\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

Tra i diffeomorfismi più importanti si trovano i cambiamenti di coordinate, come quello in coordinate polari: esso è una trasformazione biunivoca tra \mathbb{R}^2 privato dell'origine e $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, che porta la coppia di coordinate cartesiane (x, y) nella coppia (ρ, θ) , che indica rispettivamente la distanza dall'origine degli assi e l'angolo che la retta congiungente l'origine e il punto formerebbe con il semiasse positivo delle ascisse, con le trasformazioni

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}. \quad (9.4.1)$$

Sia $\mathbf{T}: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definita come $\mathbf{T}: (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \equiv (x, y)$: il determinante della jacobiana della trasformazione è sempre non nullo, infatti

$$\det J\mathbf{T}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho \neq 0$$

essendo definito in $(0, +\infty)$, quindi è un diffeomorfismo. Posta f una funzione qualunque da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a \mathbb{R} (per semplicità), si può comporre con \mathbf{T} ottenendo

$$g(\rho, \theta) = f(\mathbf{T}(\rho, \theta)).$$

Si ricava $f(x, y)$ invertendo il processo:

$$f(x, y) = g(\mathbf{T}^{-1}(x, y)).$$

Calcolando le jacobiane, risulta allora per la g

$$Jg(\rho, \theta) = Jf(\mathbf{T}(\rho, \theta)) J\mathbf{T}(\rho, \theta) \quad (9.4.2)$$

mentre per la f si ha

$$\begin{aligned} Jf(x, y) &= Jg(\mathbf{T}^{-1}(x, y)) J\mathbf{T}^{-1}(x, y) = \\ &= Jg(\mathbf{T}^{-1}(x, y)) [J\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(x, y))]^{-1} = Jg(\mathbf{T}^{-1}(x, y)) [J\mathbf{T}(\rho, \theta)]^{-1}, \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

sfruttando il fatto che $J\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(x, y)) \equiv J\mathbf{T}(\rho, \theta)$ è l'inversa di $J\mathbf{T}^{-1}(x, y)$, come visto in precedenza.

Dalle (9.4.2) e (9.4.3) si possono dunque calcolare le formule per la derivazione in coordinate polari: esse sono

$$\begin{aligned} \nabla g(\rho, \theta) &= \nabla f(x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \\ \nabla f(x, y) &= \nabla g(\rho, \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.4.4)$$

dunque le derivate della funzione dopo la trasformazione in coordinate polari sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

9.5 Derivate seconde

Sia f una funzione scalare definita da un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R} , e si supponga che per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ esista la derivata $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$, lungo la direzione indicata dal versore \mathbf{v} . Fissato un altro versore \mathbf{w} , se esiste la derivata di questa derivata lungo \mathbf{w} in un punto \mathbf{a} , ossia $D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}))$, che equivale al limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) - D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})}{t},$$

allora si dice che f è due volte derivabile in \mathbf{a} lungo le direzioni \mathbf{v} e \mathbf{w} , *rigorosamente nell'ordine* rappresentato. Tale derivata seconda si scrive come $D_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^2 f(\mathbf{a})$, indicando nei pedici i due versori, nell'ordine della prima e della seconda derivata. Se inoltre i versori appartengono alla base canonica di \mathbb{R}^n , allora la derivata si scrive anche come

$$D_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j}^2 f(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Le derivate parziali seconde con versori differenti si dicono miste.

Se esistono tutte le derivate seconde parziali in \mathbf{a} di f (in tutto sono n^2) allora esse formano, in ordine, una matrice quadrata $n \times n$, detta *matrice hessiana* di f in \mathbf{a} (da valutare nel punto):

$$\mathbf{H}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{H}f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

L'hessiana di fatto rappresenta la jacobiana del gradiente come vettore riga.

L'ordine di derivazione è importante non solo per il risultato dell'operazione, ma anche per l'esistenza stessa del risultato, come dimostrano i seguenti esempi in \mathbb{R}^2 :

- Sia $f(x, y) = x^2 y^{1/3}$. Le derivate prime parziali nell'origine sono entrambe nulle, altrimenti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\sqrt[3]{y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{3y^{2/3}} & \text{in } (x, 0) \text{ con } x \neq 0 \\ \frac{x^2}{3y^{2/3}} & \text{altrove} \end{cases}.$$

Nell'origine, la derivata seconda rispetto a y e poi a x , nell'ordine, ossia $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0)$, non esiste, mentre la derivata seconda rispetto a x, y è

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = 0.$$

- Sia f definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{in } (0, 0) \\ \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{altrove} \end{cases}.$$

Nell'origine si ha $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, altrimenti il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{3x^3 y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1. \end{aligned}$$

Per certe funzioni, però, le derivate seconde non dipendono dall'ordine di derivazione, come spiegato dal seguente teorema.

Teorema 9.5.1 (di Schwartz). Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , \mathbf{a} un punto interno ad esso, \mathbf{v} e \mathbf{w} due vettori di \mathbb{R}^n e f una funzione definita da Ω a \mathbb{R} . Se esiste un intorno di \mathbf{a} contenuto in Ω in cui esistono sia $D_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^2 f$ che $D_{\mathbf{w}, \mathbf{v}}^2 f$ e sono continue in \mathbf{a} , allora esse coincidono in tale punto.

Corollario 9.5.2. Se la funzione f è di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$, cioè esistono e sono continue tutte le derivate parziali prime e seconde in Ω , allora le derivate miste coincidono; vale a dire, la matrice hessiana è simmetrica.

Se la funzione poi è vettoriale, la matrice hessiana avrà dei vettori come componenti, e il teorema di Schwarz vale ancora componente per componente.

Quando $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$, il suo differenziale primo $df(\mathbf{x}; \cdot)$ è una funzione da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} lineare, definita come $df(\mathbf{x}; \mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$, $\forall \mathbf{h}$ tale che l'incremento $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ appartenga ancora ad Ω . Fissato però l'incremento \mathbf{h} , si può considerare $df(\cdot; \mathbf{h}) = \nabla f(\cdot) \cdot \mathbf{h}$ che è una funzione di variabile $\mathbf{x} \in \Omega$ a valori reali, proprio come f . Se questa funzione⁴ $df(\cdot; \mathbf{h})$ è differenziabile in un punto \mathbf{a} di Ω , allora si dice che f è due volte differenziabile in \mathbf{a} .

Alcune condizioni implicano o sono implicate dal fatto che f è due volte differenziabile in \mathbf{a} :

1. (*necessaria e sufficiente*) ogni derivata parziale prima è differenziabile in \mathbf{a} ;
2. (*necessaria*) esistono tutte le derivate parziali seconde in \mathbf{a} , e quelle miste coincidono⁵;

⁴Poiché le derivate parziali sono n e non una sola, in realtà il differenziale primo come $df(\cdot; \mathbf{h})$ rappresenta più di una funzione: è la combinazione lineare delle derivate parziali.

⁵Questa affermazione non equivale al teorema 9.5.1 di Schwarz, in quanto le ipotesi sono differenti.

3. (*necessaria*) ogni derivata direzionale prima è differenziabile in \mathbf{a} , quindi esistono tutte le derivate seconde direzionali indipendentemente dell'ordine (per il punto precedente) e si ha

$$D_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^2 f(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) v_i w_j,$$

la quale è chiamata *forma quadratica* di f in \mathbf{a} ;

4. (*sufficiente*) in un intorno di \mathbf{a} esistono e sono continue tutte le derivate prime parziali, ed esistono tutte le derivate seconde parziali e sono continue in \mathbf{a} ;
5. (*sufficiente*) f è di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

9.6 Formula di Taylor

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in \Omega$. La f si dice k -volte differenziabile in \mathbf{a} se esiste il $(k-1)$ -esimo differenziale della funzione nel punto. La generica derivata parziale k -esima di f si può allora scrivere come

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

con $0 \leq j_1, \dots, j_n \leq n$ e $\sum_{i=1}^n j_i = k$; gli indici j_i indicano quante volte si sta derivando f rispetto alla i -esima componente. Per comodità si può eventualmente usare una notazione multiindice $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$, con $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$.

Sia quindi f una funzione differenziabile k volte in \mathbf{a} : si costruisce la mappa

$$d^k f(\mathbf{a}; \underbrace{\cdot; \dots; \cdot}_{k \text{ volte}}): \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (9.6.1)$$

che è lineare in ogni variabile e tale per cui

$$d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h}^{(1)}; \dots; \mathbf{h}^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)}. \quad (9.6.2)$$

Questa formula è utile nel caso in cui $\mathbf{h}^{(1)} = \dots = \mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, per il quale si impiega un unico vettore per l'incremento per tutte le componenti: per snellire la notazione allora si scrive più semplicemente

$$d^k f(\mathbf{a}; \underbrace{\mathbf{h}; \dots; \mathbf{h}}_{k \text{ volte}}) = d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h}).$$

Con questa notazione si può scrivere dunque

$$d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}, \quad (9.6.3)$$

ancora con $0 \leq j_1, \dots, j_n \leq k$ e $\sum_{i=1}^n j_i = k$, dove k è l'ordine del differenziale. Il differenziale di ordine k è quindi composto da una somma di monomi ciascuno di grado k , cioè è un polinomio omogeneo di grado k , nelle componenti del vettore \mathbf{h} .

Per come è composto il differenziale si ha quindi che sostituendo all'incremento fissato \mathbf{h} un incremento variabile lungo la stessa direzione, ossia $t\mathbf{h}$, risulta

$$d^k f(\mathbf{a}; t\mathbf{h}) = t^k d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h}). \quad (9.6.4)$$

Dividendo il differenziale per $\|\mathbf{h}\|^k$ si ottiene dunque un polinomio omogeneo di grado nullo, e costante quando valutato sulle semirette con origine sull'origine degli assi⁶, infatti

$$\frac{d^k f(\mathbf{a}; t\mathbf{h})}{\|t\mathbf{h}\|^k} = \frac{t^k d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h})}{|t|^k \|\mathbf{h}\|^k} = \frac{d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k}$$

⁶Non è corretto affermare che sia costante valutato sulle rette passanti per l'origine, poiché per $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ la funzione non è definita, dato che il denominatore è nullo.

che è indipendente da t quindi costante su tutta la semiretta.

Siano ora $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ e $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Per t sufficientemente piccolo, $\mathbf{a} + t\mathbf{w} \in \Omega$, quindi la funzione $F(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{w})$ è di classe \mathcal{C}^k in un intorno di $t = 0$, dove è assicurato che sia composta da due funzioni una, f , di classe \mathcal{C}^k per definizione, e l'altra, $\mathbf{a} + t\mathbf{w}$, di classe \mathcal{C}^∞ . Al di fuori di $\mathcal{U}(0)$ non è più certo che $\mathbf{a} + t\mathbf{w}$ appartenga ancora a Ω , al di fuori del quale $f \notin \mathcal{C}^k$. Dunque la F è una funzione definita da $\mathcal{U}(0)$ a \mathbb{R} . Nel centro $t = 0$ si può dunque sviluppare in serie di Taylor fino all'ordine k : le sue derivate sono

$$\begin{aligned} F'(t) &= \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) w_j = \mathrm{d}f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}; \mathbf{w}) \\ F''(t) &= \sum_{j=1}^n w_j \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) w_i \right) \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) w_i w_j = \\ &= \mathbf{w}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) \mathbf{w} = \mathrm{d}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}; \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

e così via per induzione si ha $F^{(n)}(t) = \mathrm{d}^n f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}; \mathbf{w})$, per ogni $0 \leq n \leq k$. Operando il cambio di variabile $\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{w}$ (con il segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset \Omega$) lo sviluppo di Taylor di F con resto di Lagrange, centrato in $t = 0$, nell'intervallo $[0, 1]$ è

$$F(1) = \frac{1}{0!} F(0) 1^0 + \frac{1}{1!} F'(0) 1^1 + \frac{1}{2!} F''(0) 1^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(0) 1^{k-1} + \frac{1}{k!} F^{(k)}(\theta)$$

per qualche $\theta \in (0, 1)$. Per la definizione di F quindi risulta, dato che $F(1) = f(\mathbf{x})$, che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \mathrm{d}f(\mathbf{a}; \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}; \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathrm{d}^{k-1} f(\mathbf{a}; \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(\xi; \mathbf{x} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

dove $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$, corrispondente al punto θ precedente.

Con il resto di Peano, invece, si ha, sempre all'ordine k ,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \mathrm{d}^j f(\mathbf{a}; \mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k). \quad (9.6.7)$$

9.7 Estremanti liberi

Definizione 9.7.1. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dove $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{a} \in \Omega$. Il punto \mathbf{a} si dice punto di estremo locale per f in Ω , e in particolare:

- punto di massimo locale se $\exists B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ in cui $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$;
- punto di minimo locale se $\exists B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ in cui $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$.

Il massimo o il minimo locale sono il valore assunto dalla funzione nel rispettivo punto estremante. Il massimo è assoluto se la definizione è estendibile a tutto l'insieme Ω , cioè se $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$; analogamente per i minimi. Infine, il punto estremante si dice *forte* se l'uguaglianza si ha solo in \mathbf{a} e non anche altrove.

Si ricorda il teorema di Weierstraß 5.4.5 che afferma che se f è continua in E compatto, allora essa ha massimo e minimo assoluti in E . Individuato questo insieme compatto, gli estremi (locali) possono trovarsi in \mathring{E} o in ∂E : in questi casi si dicono, rispettivamente, estremi *liberi* ed estremi *vincolati*. Se individuare gli estremi vincolati in una sola dimensione consisteva al più nell'analisi di due soli punti, in più dimensioni la frontiera di un insieme è solitamente costituita da infiniti punti: occorrono quindi metodi diversi per i due casi. Di seguito ci si occuperà soltanto degli estremi liberi.

Teorema 9.7.2 (di Fermat). Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto, differenziabile in $\mathbf{a} \in \Omega$. Se \mathbf{a} è un punto estremante per f , allora $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Si consideri l'incremento della f lungo la direzione data dal versore \mathbf{e}_i della base canonica

$$g_i(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i).$$

Sia ora \mathbf{a} un punto di massimo: allora $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)$ per ogni t opportunamente contenuto in un intervallo $(-\delta, \delta)$ tale che f sia ancora differenziabile in $\mathbf{a} \pm \delta\mathbf{e}_i$, quindi per cui g_i è derivabile in $(-\delta, \delta)$. Dunque si ha $g_i(t) - g_i(0) \leq 0$, sia per $-\delta < t < 0$ che per $0 < t < \delta$; dividendo entrambi gli incrementi per t e passando al limite rispettivamente per $t \rightarrow 0^\mp$, si ottiene la derivata sinistra e destra di g_i in 0, che per il teorema di permanenza del segno sono rispettivamente non negativa e non positiva. Poiché g è derivabile in 0, le derivate devono coincidere e non può che risultare

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g_i(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_i(t) = g'_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0,$$

questo naturalmente per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè tutte le derivate parziali di f sono nulle in \mathbf{a} : allora $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. \square

Ovviamente la condizione data è soltanto sufficiente, come mostra la funzione $f(x) = x^2 - y^2$, che nell'origine ha gradiente nullo ma tale punto non è un estremante; i punti stazionari non estremanti si dicono *punti di sella*. In ogni caso, è necessaria soltanto per i punti estremanti *liberi*, dato che Ω è aperto, e in cui f è differenziabile. Rimangono esclusi quindi i punti in cui f non è differenziabile, da analizzare singolarmente, e gli estremi vincolati.

Sia $f \in C^2(\Omega)$. In \mathbf{a} , punto estremante locale di f , il gradiente è nullo: per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, arbitrariamente piccolo e tale per cui $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega$, per il teorema di Taylor con resto di Peano risulta

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^2) \quad (9.7.1)$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^2). \quad (9.7.2)$$

Sfruttando l'uguaglianza $d^2 f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \mathbf{h}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{h}$, e in seguito raccogliendo $\|\mathbf{h}\|^2$ si ottiene l'equazione

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|^2 \left[\frac{\mathbf{h}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2} + o(1) \right]. \quad (9.7.3)$$

Il segno del secondo membro, che sarà quindi il segno dell'incremento della funzione da \mathbf{a} a $\mathbf{a} + \mathbf{h}$, è quindi determinato dalla forma quadratica $\mathbf{h}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{h}$. Si $F(\mathbf{h})$ la funzione definita come

$$F(\mathbf{h}) = \frac{\mathbf{h}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2}.$$

Essa è una funzione omogenea di grado 0, quindi è costante sulle semirette con origine nell'origine degli assi⁷: infatti fissato \mathbf{v} e per $t > 0$ si ha

$$F(t\mathbf{v}) = \frac{(t\mathbf{v})^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) (t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|^2} = \frac{t^2}{|t|^2} \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = F(\mathbf{v}).$$

La F è dunque definita in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, è continua e differenziabile dove definita, e costante quando ristretta alle rette passanti per l'origine. Si possono allora analizzare i valori assunti da F su una superficie sferica qualsiasi centrata nell'origine, ad esempio fissando $\|\mathbf{h}\| = 1$. Questa superficie, che corrisponde poi a $\partial B(\mathbf{0}, 1)$, è chiusa e limitata, cioè è un insieme compatto. Per il teorema

⁷Le forme quadratiche sono polinomi omogenei di grado 2, quindi dividendole per una norma al quadrato, anch'essa di grado 2, si ottiene un polinomio di grado nullo.

di Weierstraß dunque la F ammette un minimo e un massimo assoluto m, M in $\partial B(\mathbf{0}, 1)$, cioè esistono $\mathbf{u}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tali per cui

$$m = F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{h}) \leq F(\mathbf{w}) = M. \quad (9.7.4)$$

Per il teorema di Fermat, allora, si ha $\nabla f(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Nel caso in cui $mM \neq 0$ risulta:

- se $0 < m \leq M$, F assume soltanto valori tra m e M che sono entrambi positivi, quindi $F(\mathbf{h}) > 0$ e per $\|\mathbf{h}\|$ sufficientemente piccolo il termine $o(\|\mathbf{h}\|^2)$ non influisce sul segno, quindi si ha $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ cioè \mathbf{a} è un punto di minimo locale;
- analogamente se $m \leq M < 0$, \mathbf{a} è un punto di massimo locale;
- se $m < 0 < M$, la F cambia di segno, quindi \mathbf{a} è un punto di sella.

Quando invece $mM = 0$, il segno è determinato da $o(\|\mathbf{h}\|^2)$, quindi questo metodo non porta ad alcun risultato. Rimane quindi da trovare il segno di m e M . Poiché f è differenziabile due volte, la sua matrice hessiana è simmetrica, e come già visto si può rappresentare (fissata la base, cioè quella canonica) la forma quadratica che è il differenziale secondo con l'espressione $\mathbf{h}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{h}$. Sia quindi $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x}$: si ha che $F(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) / \|\mathbf{x}\|^2$, e vale ancora la (9.7.4). Le derivate parziali di F sono

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 2x_k,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_k}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i,j=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{ij} x_i x_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{ij} (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{ik} x_i = \\ &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{ki} x_i = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{H} f(\mathbf{a}))_{kj} x_j = \\ &= 2(\mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x})_k, \end{aligned}$$

dove si è potuto cambiare gli indici dell'hessiana da ik a ki poiché è simmetrica. Allora risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x}\|^{-4} \left[\|\mathbf{x}\|^2 \frac{\partial q}{\partial x_k}(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \|\mathbf{x}\|^2 \right] = \\ &= \|\mathbf{x}\|^{-4} \left[\|\mathbf{x}\|^2 2(\mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x})_k - q(\mathbf{x}) 2x_k \right], \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{x}) &= 2 \|\mathbf{x}\|^{-4} \left[\|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x} - q(\mathbf{x}) \mathbf{x} \right] = \\ &= \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2} \left[\mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x} - \frac{q(\mathbf{x}) \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

Nei punti \mathbf{u} e \mathbf{v} estremanti di F si ha dunque $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, quindi dato che \mathbf{x} non è nullo si ha

$$\mathbf{H} f(\mathbf{a}) \mathbf{x} = \frac{q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} = F(\mathbf{x}) \mathbf{x}, \quad (9.7.6)$$

cioè $F(\mathbf{x})$ è un autovalore di $Hf(\mathbf{a})$ a cui è associato proprio l'autovettore \mathbf{x} . Gli autovalori della matrice hessiana sono tanti quanti la dimensione di \mathbb{R}^n , e poiché è simmetrica, sono tutti reali. Di conseguenza il massimo autovalore di $Hf(\mathbf{a})$ è anche il massimo di $F(\mathbf{x})$, e lo stesso per il minimo: individuando gli autovalori dell'hessiana in \mathbf{a} si trova quindi la natura del punto estremante. La forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t Hf(\mathbf{a}) \mathbf{x}$ si dice

- *definita positiva* se $q(\mathbf{x}) > 0$, che significa $0 < m \leq M$;
- *semidefinita positiva* se $q(\mathbf{x}) \geq 0$, cioè esiste $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ per cui $q(\mathbf{v}) = 0$, e questo corrisponde a $0 \leq m \leq M$;
- *indefinita* se esistono \mathbf{y}, \mathbf{z} tali che $q(\mathbf{y}) < 0 < q(\mathbf{z})$, cioè $m < 0 < M$;
- *semidefinita negativa* se $q(\mathbf{x}) \leq 0$, cioè $m \leq M \leq 0$;
- *definita negativa* se $q(\mathbf{x}) < 0$, che significa $m \leq M < 0$,

ovviamente per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in cui $q(\mathbf{x}) = 0$ in ogni caso. Si giunge quindi ai seguenti risultati:

- se $m > 0$, \mathbf{a} è un punto di minimo locale forte;
- se $M < 0$, \mathbf{a} è un punto di massimo locale forte;
- se $m < 0 < M$, \mathbf{a} è un punto di sella;
- se \mathbf{a} è un punto di minimo locale (qualsiasi), $q(\mathbf{x})$ è semidefinita positiva;
- se \mathbf{a} è un punto di massimo locale (qualsiasi), $q(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa.

Se f è una funzione a due sole variabili, ha due autovalori per quanto detto in precedenza: il polinomio caratteristico dell'hessiana è

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(Hf(\mathbf{a}) - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathbf{a}) - \lambda & f_{xy}(\mathbf{a}) \\ f_{xy}(\mathbf{a}) & f_{yy}(\mathbf{a}) - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - (f_{xx} - f_{yy})\lambda + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) = \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} Hf(\mathbf{a}))\lambda + \det Hf(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (9.7.7)$$

Poiché è utile ai fini di conoscere la natura del punto estremante solo sapere il segno degli autovalori, cioè delle due radici del polinomio, e dato che $P(\lambda) = (\lambda - m)(\lambda - M)$, si ha che $m + M = \operatorname{tr} Hf(\mathbf{a})$ e $mM = \det Hf(\mathbf{a})$, quindi:

- se $\det Hf(\mathbf{a}) = 0$, non si può affermare niente;
- se $\det Hf(\mathbf{a}) > 0$, si passa considerare la somma delle radici, perciò
 - se $\operatorname{tr} Hf(\mathbf{a}) > 0$, \mathbf{a} è un punto di minimo;
 - se $\operatorname{tr} Hf(\mathbf{a}) < 0$, \mathbf{a} è un punto di massimo;
- se $\det Hf(\mathbf{a}) < 0$, m e M sono discordi quindi \mathbf{a} è un punto di sella.

Infine se $\det Hf(\mathbf{a}) > 0$, certamente f_{xx} e f_{yy} sono concordi, altrimenti $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ non potrà mai essere positivo: allora anziché calcolare la traccia della matrice hessiana si può ulteriormente semplificare, guardando soltanto il segno di f_{xx} .

Capitolo 10

Successioni di funzioni

Sia n un numero naturale: con $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si indica una famiglia di funzioni, tutte definite da un insieme I ad un insieme qualsiasi, entrambi sottoinsiemi di spazi metrici. Tale famiglia di funzioni individua una *successione di funzioni*.

10.1 Convergenza puntuale e uniforme

Definizione 10.1.1. La successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $J \subseteq I$ se la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ converge, nello spazio metrico di arrivo, per ogni $x_0 \in J$.

Quando $\{f_n\}$ converge puntualmente in J , in tale insieme si può definire la *funzione limite* f tale per cui $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) \forall x_0 \in J$, vale a dire che

$$\forall x_0 \in J, \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x_0): \forall n \geq \bar{n} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (10.1.1)$$

Esempi

1. In $I = [0, +\infty)$, la successione $f_n(x) = \min\{x, n\}$ converge in I alla $f(x) = x$;
2. In $I = [0, +\infty)$, la $f_n = x^n$ converge puntualmente (figura 10.1) in $[0, 1]$ alla funzione f tale per cui $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$.
3. $f_n = \frac{x}{x+n}$ in $I = [0, +\infty)$ converge per ogni $x \in I$ a $f(x) = 0$.

4.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases},$$

in $I = [0, 2]$, converge puntualmente alla funzione identicamente nulla (figura 10.2).

5. In $I = [0, 1]$, sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{j}{2^n}, \text{ per } 0 \leq j \leq 2^n \text{ intero} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

La funzione limite è la funzione...?

6. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ in $I = \mathbb{R}$, converge puntualmente (figura 10.3) alla funzione $f(x) = |x|$.

Si può studiare se le proprietà della famiglia di funzioni vengano “ereditate” dalla funzione limite tramite la convergenza puntuale, ad esempio:

- se f_n è limitata in J per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora anche f è limitata in J ;

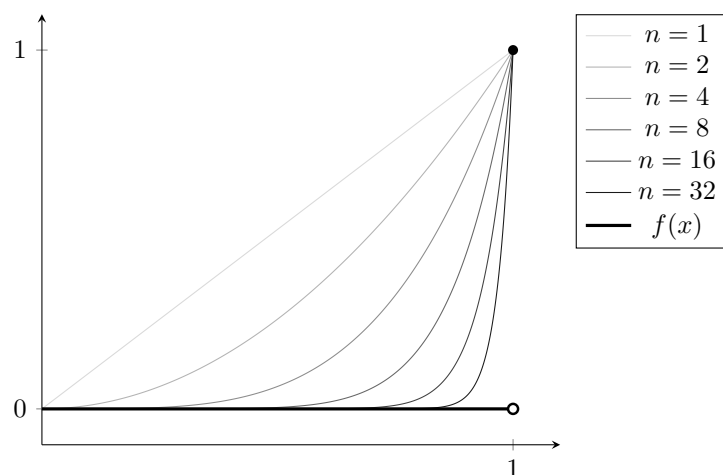


Figura 10.1: La successione $f_n(x) = x^n$ in $[0, 1]$.

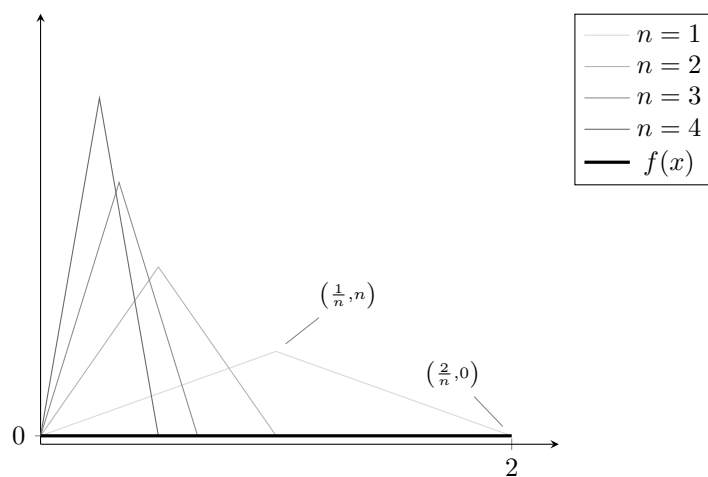


Figura 10.2: La successione dell'esempio 3, in $[0, 2]$, forma un triangolo di area 1 con l'asse delle ascisse, indipendentemente dal valore di n . L'altezza del triangolo aumenta infinitamente al crescere di n , mentre la base tende a zero.

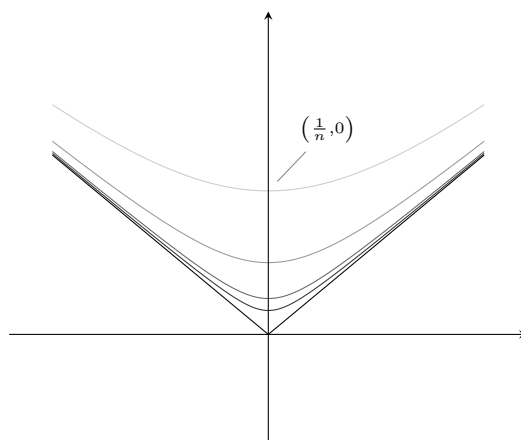


Figura 10.3: Convergenza della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ alla funzione limite $f(x) = |x|$, per $n = 1, 2, 4, 6$.

- se per $\tilde{x} \in J$ esiste il limite delle $f_n(x)$ per $x \rightarrow \tilde{x}$, allora $\exists \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)$;
- ulteriormente, per $\tilde{x} \in J$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)$;
- se f_n è continua in J per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche f è continua in J ;
- se $f_n \in \mathfrak{R}([a, b]) \forall n \in \mathbb{N}$, allora lo è anche f , quando ovviamente $f_n \rightarrow f$ in $[a, b]$ e, nel caso, valga

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx;$$

- se ogni f_n è derivabile in $x_0 \in J$, allora lo è anche f e, nel caso, valga

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x_0) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x_0).$$

Nessuna di queste proprietà è valida: gli esempi elencati precedenti forniscono dei buoni controesempi. La funzione limite del punto 1 è illimitata nell'intervallo considerato, mentre le f_n sono limitate per ogni n ; nel punto 2, la funzione limite non è continua quando tutte le f_n lo sono; nel punto 3, la f tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$, diversamente dalle f_n che tendono a 1, $\forall n$; nel punto 5 la f non è integrabile secondo Riemann, mentre lo sono tutte le f_n , e il punto 4 mostra che l'integrale di tutte le f_n è 1 (geometricamente, è l'area del triangolo formato dalla curva), mentre quello della f è nullo; nel punto 6 infine ogni f_n ha derivata nulla in $x = 0$, ma la funzione limite non è nemmeno derivabile in tale punto.

Per garantire queste proprietà, la convergenza puntuale della successione chiaramente non basta: bisogna introdurre un nuovo tipo di convergenza, detta *uniforme*.

Definizione 10.1.2. La successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione limite f in J se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon): \forall x \in J, \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (10.1.2)$$

La definizione è simile a quella della convergenza puntuale se non per il fatto che la scelta di \bar{n} è ora svincolata dal punto $x \in J$, ma è globale in tutto l'insieme J ; di conseguenza la convergenza uniforme deve sempre essere associata all'insieme in cui accade. Ovviamente la convergenza uniforme implica automaticamente quella puntuale. Inoltre la differenza tra f_n e la f è certamente, in modulo, sempre minore del suo estremo superiore in J , ossia vale sempre $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$. Allora per valutare la convergenza uniforme in J è sufficiente calcolare questo estremo superiore, che dovrà annullarsi. Se infatti per la convergenza puntuale doveva verificarsi $\sup_{x \in J} \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, per la convergenza uniforme si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (10.1.3)$$

Si può anche indicare questo estremo superiore con la *norma uniforme*:

$$\|f_n - f\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|.$$

Esempi

- La successione già vista precedentemente $f_n(x) = x^n$ in $[0, 1]$ converge puntualmente, però la $\|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]}$ vale 0 in $x = 1$, perché $f_n(1) = f(1)$, mentre altrove

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0, 1)} = \sup_{0 \leq x < 1} x^n = \lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1,$$

e chiaramente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \neq 0$ quindi la convergenza non è uniforme. Per $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo, però, considerando non più $[0, 1]$ ma $[0, 1 - \delta]$, si ha che

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0, 1 - \delta]} = \sup_{0 \leq x \leq 1 - \delta} x^n = (1 - \delta)^n \rightarrow 0,$$

per $n \rightarrow +\infty$, perciò la convergenza è uniforme, dato che $1 - \delta$ non dipende nemmeno più da x .

- La successione

$$f_n(x) = \frac{\arctan \frac{x}{n}}{1+x^2}$$

converge puntualmente alla funzione identicamente nulla in \mathbb{R} . Sia la funzione limite che i termini della successione sono funzioni dispari, quindi si può studiare la convergenza uniforme anche solo per $x \geq 0$. Risulta:

$$\sup_{x \geq 0} \left| \frac{\arctan \frac{x}{n}}{1+x^2} \right| \leq \sup_{x \geq 0} \frac{x}{n} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{n} \sup_{x \geq 0} \frac{x}{1+x^2},$$

poiché l'arcotangente è in modulo sempre minore del suo argomento, inoltre il termine $1/n$ non dipende da x quindi può essere estratto dall'argomento dell'estremo superiore. La funzione $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è limitata in \mathbb{R} , di conseguenza esiste un numero $c \in \mathbb{R}$ per cui $|g(x)| \leq c, \forall x \geq 0$. Dunque

$$\frac{1}{n} \sup_{x \geq 0} \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{c}{n}$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, quindi la convergenza è uniforme in tutto \mathbb{R} .

- La convergenza della successione

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{1+x^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sgn} x}{1+x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non è uniforme su tutto \mathbb{R} , ma lo è in ogni insieme $A \subset \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$, ossia escludendo un intorno dell'origine. Infatti

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq \varepsilon > 0} \left| \frac{\arctan(nx) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x}{1+x^2} \right| &= \sup_{x \geq \varepsilon > 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)}{1+x^2} = \\ &= \sup_{x \geq \varepsilon > 0} \frac{\arctan \frac{1}{nx}}{1+x^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \arctan \frac{1}{n\varepsilon} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow +\infty$; un risultato analogo si ha per simmetria per $x \leq -\varepsilon < 0$.

Poiché le successioni di funzioni sono comprese in uno spazio metrico completo, quello delle funzioni limitate con la distanza data dalla norma uniforme, in esso si può elaborare la condizione di Cauchy anche per le successioni di funzioni, che sarà sufficiente e necessaria per la convergenza uniforme (dato che la convergenza in tale spazio coincide proprio con la convergenza uniforme)¹.

Teorema 10.1.3. Sia $\{f_n\}$ con $f_n: J \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni: essa converge uniformemente a f in J se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}: \forall m, n \geq \bar{n}$ si ha $\|f_m - f_n\|_{\infty, J} < \varepsilon$.

10.2 Proprietà della funzione limite

Quando la convergenza è uniforme, la funzione limite eredita alcune importanti proprietà dai termini della successione, come mostrato nei seguenti teoremi.

Teorema 10.2.1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni convergente uniformemente a f in J tale che per ogni n , f_n è limitata in J . Allora anche f è limitata in J .

Dimostrazione. Se ogni f_n è limitata, vale $\forall n$ che $|f_n(x)| \leq M$. Per la disuguaglianza triangolare vale inoltre

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_{\infty, J} + \|f_n\|_{\infty, J}.$$

¹Vedere il capitolo 10.3 sugli spazi funzionali.

Fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste \bar{n} tale per cui $\forall n \geq \bar{n}$, $\|f_n - f\|_{\infty, J} < \varepsilon$. Allora

$$\sup_{x \in J} |f(x)| \leq \varepsilon + \|f_{\bar{n}}\|_{\infty, J}.$$

Poiché il secondo membro è limitato, essendo composto da termini definiti (reali), anche il primo membro è finito, quindi $f(x)$ è limitata in J . \square

Teorema 10.2.2. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite da J in \mathbb{R} , e $x_0 \in J$. Se f_n è continua in x_0 per ogni n , e $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in J , allora f è a sua volta continua in x_0 .

Dimostrazione. Per $x \in J$ qualunque, vale la relazione

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (10.2.1)$$

Poiché la convergenza è uniforme, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} per cui $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $\|f_n - f\|_{\infty, J} < \varepsilon$, cioè $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in J$; quindi vale anche per i punti x_0 e x nella prima equazione. Preso dunque un valore di $n \geq \bar{n}$, ad esempio proprio \bar{n} , si ha quindi

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + \varepsilon = |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + 2\varepsilon.$$

La singola funzione $f_{\bar{n}}(x)$ è continua, per le ipotesi, in x_0 , quindi in un intorno di tale punto $\exists \delta > 0$ per cui

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \varepsilon.$$

Allora, in tale intorno, si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

quindi la funzione limite è continua. \square

Teorema 10.2.3 (del doppio limite). Sia $\{f_n\}$ una successione di funzione definite da J a \mathbb{R} , e $x_0 \in J'$. Se per ogni n esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$, e $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in J , allora esiste anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$, che è finito, e coincide con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right). \quad (10.2.2)$$

Teorema 10.2.4. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite da $[a, b]$ a \mathbb{R} , in cui f_n è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ per ogni n , e che converge uniformemente alla funzione f nel medesimo intervallo. Allora anche $f \in \mathfrak{R}([a, b])$, e vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx. \quad (10.2.3)$$

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto complicata, quindi se ne dimostra una versione più semplice nel corollario seguente.

Corollario 10.2.5. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite da $[a, b]$ a \mathbb{R} , in cui f_n è continua in $[a, b]$ per ogni n , e che converge uniformemente alla funzione f nel medesimo intervallo. Allora vale la (10.2.3).

Dimostrazione. Poiché $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ per ogni n , dal teorema 10.2.2 segue che anche f lo è, dunque $f \in \mathfrak{R}([a, b])$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} dx = \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \int_a^b dx = (b - a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]}, \end{aligned}$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, e si ha dunque la (10.2.3). \square

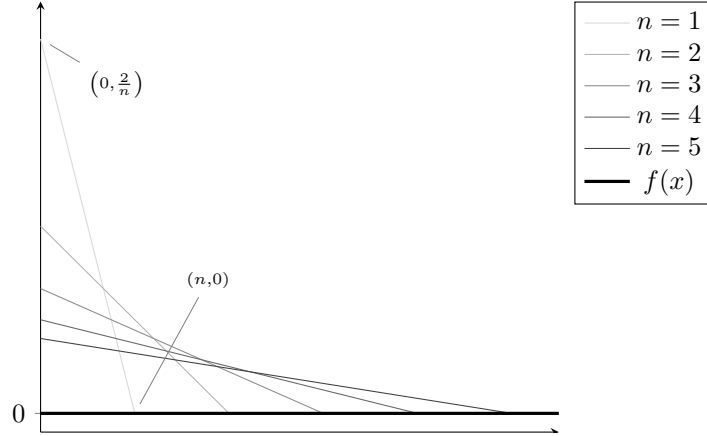


Figura 10.4: La successione $f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}x$ per $x < n$ e $f_n(x) = 0$ per $x \geq n$ forma un triangolo di area 1 con gli assi cartesiani, indipendentemente dal valore di n .

Il teorema non è estendibile a insiemi di integrazione illimitati, come mostrato nel seguente esempio: la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}x & x < n \\ 0 & x \geq n \end{cases}$$

converge uniformemente alla funzione $f(x) = 0$ (figura 10.4). L'integrale di ogni $f_n(x)$ in $[0, +\infty)$ vale 1, per ogni n , poiché la curva descritta dalla funzione è un triangolo di base n e altezza $2/n$, ma l'integrale della funzione limite è chiaramente nullo.

La derivabilità di una successione di funzioni è una questione più complicata dell'integrabilità: si è già visto in un precedente esempio che anche se la successione converge uniformemente, non è sempre vero che converge anche la successione delle derivate, come per $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ la derivata della funzione limite della quale non esiste nemmeno in $x = 0$.

Teorema 10.2.6. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite da $[a, b]$ in \mathbb{R} e derivabili in tale intervallo. Se esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui $\{f_n(x_0)\}$ converge, e se la successione delle derivate $\{f'_n\}$ converge uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione g , allora esiste una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, tale che

- $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in $[a, b]$;
- $f'(x) = g(x)$ in ogni punto $x \in [a, b]$, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x).$$

Si dà la dimostrazione nel caso particolare in cui $f_n \in C^1([a, b])$, per ogni n .

Dimostrazione. Poiché $f'_n \in \mathcal{C}([a, b])$, anche g lo è per il teorema 10.2.2. Sapendo che esiste ed è finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

si costruisce per ogni punto $x \in [a, b]$ la funzione

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Essa è derivabile, poiché l'integranda g è continua, f è derivabile per il teorema fondamentale del calcolo integrale 8.5.2 e la sua derivata è $f'(x) = g(x)$ in $[a, b]$. Inoltre per il medesimo teorema si ha $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$, quindi $\forall x \in [a, b]$ risulta

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right| \leq \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x [g(t) - f'_n(t)] dt \right| \leq \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |x - x_0| \|g - f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|g - f'_n\|_{\infty, [a, b]}, \end{aligned}$$

e poiché per le ipotesi $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ per $n \rightarrow +\infty$, ed $\{f'_n\}$ converge a g , si ha che $\{f_n\}$ converge a f ; la convergenza è infine uniforme in quanto non dipende affatto dalla scelta di x , come si nota nell'ultima riga dell'equazione e la variabile non compare più. \square

È importante che la successione $\{f_n\}$ converga almeno in un punto: se si guarda alla successione $f_n(x) = n$, che è costante, la successione delle derivate è $f'_n(x) = 0$, cioè sono tutte identicamente nulle (f_n infatti è costante), quindi ovviamente $\{f'_n\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Ma si nota facilmente che f_n non converge in nessun punto dell'asse reale, nemmeno puntualmente, quindi non esistono nemmeno la funzione limite f né la sua derivata f' .

10.3 Spazi funzionali

Si indica con la scrittura $\mathcal{B}_F(E)$, dove $E \subseteq \mathbb{R}^m$ e $F \subset \mathbb{R}^p$ è chiuso, l'insieme delle funzioni definite in E a valori in F che sono limitate. Su tale insieme si può costruire una struttura spazio metrico, introducendo la distanza

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F,$$

in cui la norma si intende la norma euclidea in \mathbb{R}^p . È un'operazione binaria definita come $d: \mathcal{B}_F(E) \times \mathcal{B}_F(E) \rightarrow \mathbb{R}$. Tale distanza è ben definita, perché tutte le p componenti di \mathbf{f} e \mathbf{g} sono limitate, quindi $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_F \leq M$ e $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F \leq K \forall \mathbf{x} \in E$, quindi per la disuguaglianza triangolare risulta $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F \leq M + K$, cioè $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq M + K < +\infty$. Inoltre soddisfa le proprietà che definiscono una distanza, ossia:

- $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in E$ in quanto è una norma euclidea, e $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0$ se e solo se $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F = 0$ per ogni punto $\mathbf{x} \in E$, vale a dire che per tutti i punti $\mathbf{x}_0 \in E$ risulta $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, cioè le funzioni coincidono.
- $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = d(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ per la simmetria della norma euclidea.
- Date tre funzioni $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{B}_F(E)$, per la disuguaglianza triangolare della norma euclidea si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F \leq \\ &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|_F + \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F \leq \\ &\leq d(\mathbf{f}, \mathbf{h}) + d(\mathbf{h}, \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Poiché quindi per ogni punto $\mathbf{x} \in E$ la norma $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F$ non supera questa somma delle distanze, anche il suo estremo superiore non la potrà superare, dunque

$$\sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_F = d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq d(\mathbf{f}, \mathbf{h}) + d(\mathbf{h}, \mathbf{g}).$$

Lo spazio $\mathcal{B}_F(E)$ può assumere anche la struttura di spazio vettoriale, a seconda che lo sia prima l'insieme F di arrivo. Infatti per la disuguaglianza triangolare la somma di due funzioni limitate è limitata, e analogamente per il prodotto con uno scalare di una funzione limitata. Le immagini dei risultati di queste due operazioni però non appartengono necessariamente ad F : questo accade soltanto se l'insieme F è a sua volta uno spazio vettoriale.

Data una successione di funzioni \mathbf{f}_n convergente alla funzione limite \mathbf{f} , secondo tale metrica la convergenza accade se $d(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè se \mathbf{f}_n converge uniformemente a \mathbf{f} .

Teorema 10.3.1. $\mathcal{B}_F(E)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. Una successione $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa la condizione di Cauchy rispetto alla distanza d se $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \forall m, n \geq N$ si ha $d(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_m) < \varepsilon$, cioè

$$\sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\|_F < \varepsilon,$$

cioè se e solo se soddisfa il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme, quindi $\exists \mathbf{f}: E \rightarrow F$ tale che $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f}$ uniformemente in E . Allora \mathbf{f} è anche limitata, cioè appartiene a $\mathcal{B}_F(E)$. \square

Più in generale la funzione limite \mathbf{f} avrebbe valori nella chiusura di F , ma essa coincide con F stesso poiché è chiuso. Le proprietà dello spazio $\mathcal{B}_F(E)$ dipendono fortemente quindi dalla completezza di F .

Spazio delle funzioni continue

Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e $F \subset \mathbb{R}^p$ chiuso. La scrittura $\mathcal{C}_F(E)$, o anche $\mathcal{C}_F^0(E)$, individua lo spazio delle funzioni continue definite da E a F . Per il teorema 5.4.5 di Weierstraß, tutte le $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_F^0(E)$ sono limitate perché E è compatto, quindi $\mathcal{C}_F^0(E) \subset \mathcal{B}_F(E)$.

Con la distanza d definita per le funzioni limitate, anche $(\mathcal{C}_F^0(E), d)$ è uno spazio metrico, ed è anch'esso completo, perché per il teorema 10.2.2, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ le funzioni \mathbf{f}_n sono continue, allora quando $d(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) \rightarrow 0$ significa che la successione converge uniformemente a \mathbf{f} , che quindi eredita la continuità; allora se $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa la condizione di Cauchy, essa converge in $\mathcal{C}_F^0(E)$.

10.4 Teorema delle contrazioni

Definizione 10.4.1. Dato uno spazio metrico (X, d) e una funzione $T: (X, d) \rightarrow (X, d)$, T si dice contrazione se esiste un valore $k \in [0, 1)$ tale per cui

$$d(T(x) - T(y)) \leq kd(x, y)$$

per ogni coppia $x, y \in X$, ossia se T “contrae” le distanze (anche non uniformemente) tra x e y .

Una contrazione è sempre, come si nota facilmente, una funzione lipschitziana di costante $k < 1$, quindi è uniformemente continua.

Teorema 10.4.2 (di Banach-Caccioppoli). Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e $T: X \rightarrow X$ una contrazione su X . Allora esiste, ed è unico, un punto fisso $x^* \in X$ tale per cui $T(x^*) = x^*$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$, x_1 l'immagine di x_0 attraverso la contrazione T e così via seguendo la regola $x_n = T(x_{n-1})$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. La distanza tra due elementi della successione costruita in questo modo è

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Dati m e n , con $m > n$, si ha per la disuguaglianza triangolare che

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) = \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i d(x_1, x_0) = \\ &= d(x_1, x_0) k^n \sum_{i=n}^{m-1} k^{i-n} = d(x_1, x_0) k^n \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \end{aligned} \tag{10.4.1}$$

e si ha che

$$\sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \leq \sum_{j=1}^{+\infty} k^j = \frac{1}{1-k},$$

quindi risulta

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \quad (10.4.2)$$

Allora, poiché $k < 1$, il secondo termine tende a 0 quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}: \forall m > n \geq \bar{n}$ si ha $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, ossia la successione soddisfa la condizione di Cauchy. Dato che lo spazio metrico (X, d) è completo, $\{x_n\}$ converge ad un punto $x^* \in X$ per $n \rightarrow +\infty$. La contrazione T è infine (uniformemente) continua, quindi

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x^*,$$

quindi x^* è un punto fisso di T ; per l'unicità del limite (teorema 3.2.4) è inoltre unico. \square

Non rispettando le ipotesi il teorema non è sempre ancora valido, come ad esempio nello spazio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la distanza euclidea: la funzione $f(x) = \frac{x}{2}$ è una contrazione, ma il suo punto fisso, che sarebbe $x = 0$, non appartiene allo spazio. Anche se T non è una contrazione si hanno degli effetti indesiderati: se $k = 1$, infatti le distanze rimangono costanti, come per $g(x) = x + 1$, che non ha punti fissi, o per $h(x) = x$ che ne ha infiniti.

Osservazione 10.4.3. Il teorema 10.4.2 non vale se la funzione T è tale per cui $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, ossia con una disuguaglianza stretta. Infatti, sia $X = [1, +\infty)$: la funzione $f(x) = x + \frac{1}{x}$ soddisfa questa condizione, ma non ha punti fissi.

Capitolo 11

Serie di funzioni

Analogamente alle serie numeriche, si può costruire una successione di somme parziali a partire da una successione di funzioni. Sia $\{f_n(x)\}$, con $n \in \mathbb{N}_0$ o un opportuno sottoinsieme, una successione di funzioni definite tutte su un medesimo insieme E ; si consideri la successione $S_k(x)$ come la somma dei primi k termini di $\{f_n(x)\}$

$$S_n(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x),$$

ovviamente sempre definita in E : essa è la successione delle somme parziali. La serie di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge in x_0 se converge la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$. La funzione $S(x)$, definita ovunque la serie di funzioni converga, è anche chiamata *funzione somma*.

11.1 Convergenza puntuale e uniforme

Unendo la teoria delle serie numeriche con quella delle successioni di funzioni si ottengono le definizioni seguenti.

Definizione 11.1.1. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in $J \subseteq E$ se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge in ogni punto $x_0 \in J$.

Definizione 11.1.2. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in $J \subseteq E$ se $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge $\forall x \in J$.

Definizione 11.1.3. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $J \subseteq E$ se la successione $S_k(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ in J , cioè se

$$\|S_k - S\|_{\infty, J} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Nel capitolo 10.3 si era visto che lo spazio metrico delle funzioni limitate e quello delle funzioni continue $\mathcal{C}^k(E)$ sono spazi vettoriali, se si assume come insieme di arrivo l'intero \mathbb{R} . Da ciò segue che la funzione somma di funzioni limitate è a sua volta limitata, e analogamente è continua quando è somma di funzioni continue (dello stesso ordine k). Dunque la successione $S_k(x)$ delle somme parziali assume le stesse proprietà delle $f_n(x)$ di cui è somma:

- se f_n è limitata per ogni n , allora S_k è limitata;
- se $f_n \in \mathcal{C}^p$ per ogni n , allora anche $S_k \in \mathcal{C}^p$.

Infine queste proprietà sono ereditate dalla funzione somma quando la convergenza è uniforme, come dal teorema

Teorema 11.1.4. Se $f_n(x) \in \mathcal{C}^J \forall n$ e $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in J , allora $S \in \mathcal{C}(J)$.

Teorema 11.1.5. Se esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$, per ogni n , e $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in J , allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n$ converge e vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Teorema 11.1.6. Se $f_n \in \mathfrak{R}([a, b])$ per ogni n e la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora $S \in \mathfrak{R}([a, b])$ e vale

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Teorema 11.1.7. Se $f_n(x)$ è derivabile in $[a, b]$ per ogni n , la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, ed esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$ e vale

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

Poiché la successione delle somme parziali $\{S_k\}$ converge uniformemente in J se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy (come per le successioni), cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un $\bar{n}(\varepsilon)$ tale che per ogni $n > m \geq \bar{n}$ interi si abbia

$$\|S_n - S_m\|_{\infty, J} = \left\| \sum_{k=m+1}^n f_k \right\|_{\infty, J} < \varepsilon.$$

Posti $m+1 = p$ e $q > 0$, si ottiene che la condizione è soddisfatta se $\forall p > \bar{n}(\varepsilon)$ e $q > 0$ interi si ha

$$\left\| \sum_{k=p}^{p+q} f_k(x) \right\|_{\infty, J} < \varepsilon. \quad (11.1.1)$$

Da questo si ottiene una condizione necessaria per la convergenza uniforme della serie.

Corollario 11.1.8. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in J solo se la successione $\{f_n(x)\}$ dei termini generali converge uniformemente in J .

Dimostrazione. Ponendo $q = 0$ nella (11.1.1), si ottiene che

$$\left\| \sum_{k=p}^p f_k(x) \right\|_{\infty, J} = \|f_p\|_{\infty, J} < \varepsilon,$$

ossia che $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}(\varepsilon)$ tale per cui $\forall p > \bar{n}$ si ha $\|f_p - 0\|_{\infty, J} < \varepsilon$ cioè f_p (o equivalentemente f_n) converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. \square

La condizione appena data è ovviamente solamente necessaria: la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, ma il suo termine generale $f_n(x) = \frac{1}{n}$ converge uniformemente alla $f \equiv 0$ in tutto \mathbb{R} .

11.2 Convergenza totale

Definizione 11.2.1. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in J se esiste una successione numerica $\{M_n\} \subset \mathbb{R}$ tale che $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni n e $x \in J$, e per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converga.

La definizione continua a valere se come successione $\{M_n\}$ si prende il minimo dei maggioranti di $f_n(x)$ in J , che è proprio la norma uniforme: allora la convergenza è totale anche quando la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty, J}$ converge.

Teorema 11.2.2 (di Weierstraß). Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in J , allora converge anche uniformemente.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una successione $\{M_n\}$ la cui serie converge e tale che per ogni n si abbia $\|f_n\|_{\infty, E} \leq M_n$, $\forall x \in E$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ soddisfa la condizione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} tale per cui $\forall p \geq \bar{n}$ e $q > 0$ interi si abbia

$$\sum_{n=p}^{p+q} M_n < \varepsilon,$$

ma allora per le disuguaglianze precedenti risulta

$$\varepsilon > \sum_{n=p}^{p+q} M_n \geq \sum_{n=p}^{p+q} \|f_n\|_{\infty, E} \geq \left\| \sum_{n=p}^{p+q} f_n \right\|_{\infty, E}$$

quindi la serie converge anche uniformemente per le (11.1.1). \square

La convergenza totale implica anche la convergenza assoluta, come è facile vedere. Ovviamente non valgono le implicazioni nel senso inverso: né la convergenza uniforme né quella assoluta, né entrambe (e men che meno quella puntuale) implicano la convergenza totale.

Esempi

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ha come termine generale una funzione costante, e ovviamente converge puntualmente per il criterio di Leibnitz in tutto \mathbb{R} , ma non assolutamente. Non dipendendo in alcun modo dalla variabile x , la convergenza è sicuramente anche uniforme.
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ converge puntualmente in $J = (-1, 1)$, anche assolutamente essendo a termini positivi, ma non uniformemente perché $\|f_n\|_{\infty, J} = f_n(1) = 1$.
- Considerata solo in \mathbb{R}^+ , la serie di termine generale $f_n(x) = \frac{1}{x} \delta_{[n, n+1]}(x)$ converge puntualmente ed assolutamente (la somma corrisponde in effetti all'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$), inoltre $\|S - S_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, quindi converge uniformemente. La convergenza non è però totale in quanto $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \frac{1}{n}$ la cui serie diverge.

11.3 Serie di potenze

Le serie di potenze sono un caso particolare e importante di serie di funzioni: dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, si chiama serie di potenze di centro x_0 e coefficiente a_n la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Qualunque serie di potenze converge sempre in x_0 , dove il termine generale è sempre nullo: dunque l'insieme di convergenza puntuale non è mai vuoto. Tutte le serie di potenze saranno indicate

in questo capitolo con $n \in \{0, 1, \dots\}$, senza perdere la generalità; laddove vi siano problemi di esistenza del coefficiente a_n , l'indice iniziale sarà opportunamente cambiato. Ovviamente ciò non cambia il carattere della serie, ma è importante quando si intende calcolare la funzione somma. Per comodità, tramite la traslazione $y = x - x_0$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$, che è centrata in $y = 0$ e mantiene le stesse caratteristiche qualitative della precedente, opportunamente traslate: d'ora in poi si tratteranno soltanto serie di potenze con questa scrittura.

Esempi

- La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ converge solo in $x = 0$: altrove infatti $\sqrt[n]{n^n x^n} = n|x| \rightarrow +\infty$ se $x \neq 0$ quindi diverge per il criterio della radice.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$, sempre per il criterio della radice, converge puntualmente in tutto \mathbb{R} .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge puntualmente in $E = (-1, 1)$, ma non uniformemente, perché $\sup_{x \in E} |x^n| = f_n(1) = 1^n = 1$.

Teorema 11.3.1. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, se converge puntualmente in $x_0 \neq 0$, allora converge assolutamente in tutto l'intervallo $(-|x_0|, |x_0|)$. La convergenza è inoltre totale, quindi anche uniforme, in ogni sottoinsieme compatto di esso.

Dimostrazione. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergente in $\xi \neq 0$: allora necessariamente deve risultare $|a_n \xi^n| \rightarrow 0$, quindi esiste $c > 0$ tale per cui per ogni n si abbia $|a_n \xi^n| < c$. Allora

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \left| \frac{x}{\xi} \right|^n \leq c \left| \frac{x}{\xi} \right|^n,$$

che è il termine generale di una serie geometrica, e converge dunque per $|x/\xi| < 1$ cioè per $x \in (-|\xi|, |\xi|)$. Per il teorema del confronto, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente nel medesimo intervallo. Se poi K è un sottoinsieme compatto di tale intervallo, sicuramente $|x/\xi| \leq 1 - \delta$ per qualche $\delta > 0$, ma allora $|a_n x^n| \leq c(1 - \delta)^n$ quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge totalmente. \square

Definizione 11.3.2. Si chiama raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la quantità

$$\rho = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ è convergente} \right\}.$$

Il raggio ρ appartiene a $[0, +\infty]$:

- se $\rho = 0$ la serie converge solo in 0;
- se $\rho \notin \{0, +\infty\}$, la serie converge assolutamente in $(-\rho, \rho)$, totalmente nei sottoinsiemi compatti, non converge se $|x| > \rho$;
- se $\rho = +\infty$, la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$ e totalmente in ogni insieme compatto.

Per determinare il raggio di convergenza si ricorre ai criteri seguenti. Quando $\rho \neq 0$, non si può affermare nulla sul comportamento della serie al bordo di $(-\rho, \rho)$.

Teorema 11.3.3 (Criterio di Cauchy-Hadamard). Sia ρ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Se

$$\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

allora $\rho = \frac{1}{\ell}$, usando l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Per il criterio 4.3.4 della radice si ha

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv |x| \ell.$$

che deve essere minore di 1, quindi $|x| < 1/\ell$, cioè $\rho = 1/\ell$ è il raggio di convergenza. \square

Questo criterio è sempre utilizzabile, in quanto il limite superiore di una successione, in $\overline{\mathbb{R}}$, esiste sempre (teorema 3.9.4).

Teorema 11.3.4 (Criterio di d'Alembert). Se $a_n \neq 0$ per ogni n ed esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \equiv \ell,$$

allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è $\rho = 1/\ell$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente. Questo criterio inoltre mostra che se a_n ha una crescita o decrescita di tipo polinomiale il raggio di convergenza è 1. Non è possibile stabilire a priori la convergenza ai bordi dell'intervallo di convergenza, ma il caso va studiato di volta in volta. Ad esempio:

- la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge in $(-1, 1)$;
- la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge in $[-1, 1)$, in $x = -1$ in particolare per il criterio di Leibnitz;
- la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge in $[-1, 1]$.

11.4 Proprietà delle serie di potenze

Teorema 11.4.1. Una serie di potenze è continua nell'intervallo di convergenza $(-\rho, \rho)$.

Dimostrazione. In ogni punto $x_0 \in (-\rho, \rho)$, si trova un intervallo compatto $[a, b] \subset (-\rho, \rho)$ con $a < x_0 < b$. Essendo un insieme compatto, la serie converge totalmente in $[a, b]$, e poiché $a_n x^n$ è continua in $[a, b]$ per ogni n si ha per il teorema 11.1.5 che anche la serie è continua in $[a, b]$, quindi in x_0 . La serie è quindi continua in tutti i punti $x_0 \in (-\rho, \rho)$. \square

Teorema 11.4.2 (di Abel). Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha un raggio di convergenza ρ non nullo e converge in $x = \rho$, allora converge uniformemente nei sottoinsiemi compatti di $(-\rho, \rho]$.

La tesi vale ovviamente anche nel caso in cui la serie converga in $x = -\rho$, per cui la convergenza è uniforme in $[-\rho, \rho)$, o anche entrambi. Come conseguenza, la serie è anche continua sul bordo di $(-\rho, \rho)$, dove converge: ciò significa che

$$\lim_{x \rightarrow \rho^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n.$$

È possibile calcolare l'integrale di una serie di potenze trasformandolo in una serie numerica grazie al teorema seguente.

Teorema 11.4.3. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza ρ . Per $[\alpha, \beta] \subset (-\rho, \rho)$ vale l'uguaglianza

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Dimostrazione. L'intervallo $[\alpha, \beta]$ è un sottoinsieme compatto dell'intervallo di convergenza, in cui quindi la serie converge uniformemente, e il termine $a_n x^n$ è certamente integrabile secondo Riemann. È quindi possibile applicare il teorema 11.1.6 che permette di scambiare l'ordine di serie ed integrale. Integrando la serie termine a termine si ottiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

\square

Dove la convergenza è uniforme, si può calcolare la derivata di una serie di potenze termine a termine: la derivata di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Dato che il primo termine, corrispondente a $n = 0$, è costante (vale a_0) la sua derivata è nulla, quindi non appare nella serie derivata; si può allora trascurare, senza alterare in alcun modo la serie, il primo termine facendo partire la serie da $n = 1$, ottenendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Scalando gli indici di 1 si riscrive quindi la serie derivata come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Si calcola ora il suo raggio di convergenza ρ' , con il limite

$$\sqrt[n]{(n+1) |a_{n+1}|} = \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Il termine $\sqrt[n]{n+1}$ tende a 1, così come l'esponente $\frac{n+1}{n}$ nella seconda radice. Il termine $\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}$ al limite per $n \rightarrow +\infty$ tende a $1/\rho$ dove ρ è lo stesso raggio di convergenza della serie primitiva. Quindi si può formulare il teorema seguente.

Teorema 11.4.4. Sia $S(x)$ la funzione somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, con raggio di convergenza non nullo: S è derivabile in $(-\rho, \rho)$ e vale

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

con lo stesso raggio di convergenza di $S(x)$.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha come termine generale una funzione continua e derivabile per ogni n , e converge sicuramente in $x = 0$. La serie delle derivate ha lo stesso raggio di convergenza, quindi converge totalmente in ogni sottoinsieme compatto di $(-\rho, \rho)$. Allora $S(x)$ può essere derivata termine a termine per il teorema 11.1.7 ottenendo

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad \square$$

Continuando a derivare un qualsiasi numero di volte l'intervallo di convergenza non cambia, allora al suo interno ogni serie di potenze è derivabile infinite volte: ogni serie di potenze di raggio di convergenza ρ è quindi di classe $\mathcal{C}^\infty((-\rho, \rho))$. Inoltre, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vale

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (m+k)(m+k-1)\dots(m+1) a_{m+k} x^m, \end{aligned}$$

sostituendo $m = n - k$. Tutti i termini di indice $n < k$ sono via via eliminati dalle derivate in quanto ogni volta, il primo è costante. In $x = 0$, tutte le potenze diventano nulle ad eccezione del primo termine, che poiché $m = 0$ diventa $k!a_k$, per ogni $k \geq 0$ (è l'ordine di derivazione), cioè deve risultare

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

I coefficienti della serie sono quindi univocamente determinati dalle derivate della funzione somma, tramite l'equazione precedente.

Teorema 11.4.5. Data la serie di potenze $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ con raggio di convergenza ρ non nullo, si ha che $S \in \mathcal{C}^\infty((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$ e per ogni punto x in tale intervallo risulta

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (11.4.1)$$

Esempi

- La serie $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ha $\rho = 1$. La sua somma è quella della serie geometrica $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Integrando in $[0, x]$ si ha che

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x),$$

e integrando invece termine a termine si ottiene

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Quindi per ogni $x \in (-1, 1)$ vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Per il criterio di Leibnitz però l'ultima serie converge anche in $x = -1$: allora è lecito valutare l'uguaglianza in questo punto, potendo così calcolare il valore della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

- La serie $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge in $(-1, 1)$. Si può riscrivere come $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$, la cui somma è quindi $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$: integrando in $[0, x]$ si ottiene

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

e termine a termine

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Questa serie converge in $[-1, 1]$, quindi in $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

che fornisce un metodo per approssimare il valore di π .

11.5 Funzioni analitiche

Definizione 11.5.1. Una funzione f si dice analitica in un punto x_0 se $f(x_0)$ coincide con lo sviluppo in serie di Taylor $T(x_0)$ in tale punto.

Ovviamente la definizione si estende anche ad un insieme, una volta che $f(x)$ coincide con $T(x)$ per ogni punto x di tale insieme. L'insieme delle funzioni analitiche in un insieme E si indica convenzionalmente con $\mathcal{C}^\omega(E)$. La condizione di *analiticità* è più restrittiva dell'appartenenza alla classe \mathcal{C}^∞ , cioè in un insieme J si ha $\mathcal{C}^\infty(J) \supset \mathcal{C}^\omega(J)$. Tutti i polinomi di grado qualunque sono infinitamente derivabili, e coincidono così come sono con il loro sviluppo in serie di Taylor, quindi sono analitici. Un controesempio è invece dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Teorema 11.5.2. Siano $f \in \mathcal{C}^\infty((a, b))$ e $x_0 \in (a, b)$. Se esistono $\delta > 0$, $c \geq 0$ e $M \geq 0$ tali che per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e per ogni $n \geq 0$ si abbia

$$|f^{(n)}(x)| \leq cM^n,$$

allora f è analitica in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dimostrazione. Si scriva lo sviluppo di Taylor con resto secondo Lagrange della funzione f nell'intorno di x_0 , arrestato all'ordine $n - 1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

per $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dunque la derivata $f^{(n)}(\xi)$ è maggiorata per ipotesi da cM^n , mentre $|x - x_0| < \delta$, quindi in modulo la differenza tra la funzione e lo sviluppo è

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{cM^n}{n!} \delta^n = c \frac{(\delta M)^n}{n!}$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, quindi la funzione coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor. \square

Esempi

- La funzione $f(x) = \sin x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Posto $x_0 = 0$, si ha che $f^{(n)}(0) = 0$ se n è pari, o ± 1 se n è dispari. Poiché quindi $|f^{(n)}(0)| \leq 1$ per ogni $n \geq 0$, f è analitica in un intorno di $x = 0$: chiaramente il risultato si estende anche a tutto \mathbb{R} (figura 11.1). Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Derivando la serie (la convergenza è necessariamente uniforme in tutto \mathbb{R}) si ottiene quindi l'uguaglianza

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

- Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. Ogni sua derivata vale $f^{(n)}(0) = 1$, per ogni n , inoltre per $|x| < R$ risulta, sempre per ogni n , $|f^{(n)}(x)| \leq e^R$, essendo una funzione crescente. Dunque e^x è analitica, cioè per ogni $x \in (-R, R)$ si ha

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

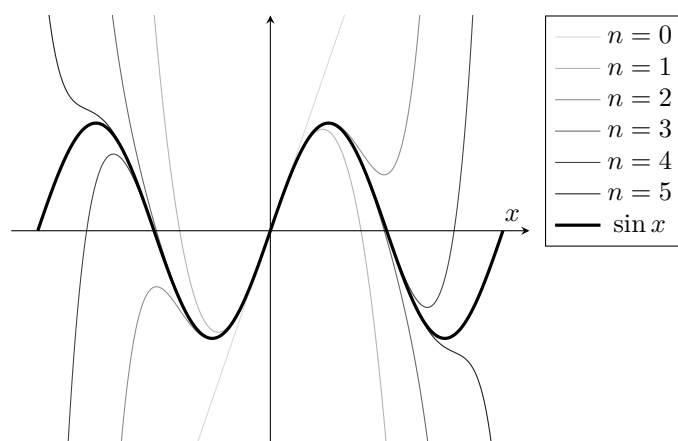


Figura 11.1: Approssimazioni crescenti dello sviluppo di Taylor per $\sin x$. Si nota che lo sviluppo arrestato a $n = 4$, che corrisponde alla nona potenza di x , già è un'ottima approssimazione in $(-\pi, \pi)$.

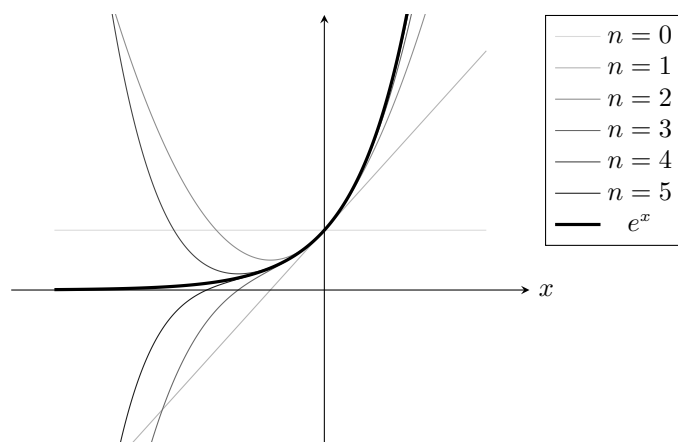


Figura 11.2: Approssimazioni crescenti dello sviluppo di Taylor per la funzione e^x .

Poiché R è del tutto arbitrario, la $f(x) = e^x$ è in realtà analitica in qualunque punto dell'asse reale (figura 11.2). Questa uguaglianza è sfruttata per definire la funzione esponenziale anche in altri ambiti, come per i numeri complessi o per le matrici.

Capitolo 12

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Le equazioni differenziali sono equazioni che hanno come incognita, anziché un numero, una funzione $y(x)$, che appare nella formula insieme alle sue derivate. In base all'insieme di definizione della funzione y , si definiscono equazioni differenziali *ordinarie* se $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, cioè è una funzione ad una sola variabile, altrimenti *a derivate parziali* se $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ossia ammette più variabili indipendenti. L'ordine della derivata più alta della y è l'*ordine* dell'equazione, per distinguerla dal grado di quelle algebriche. In questo capitolo, d'ora in poi, si parlerà soltanto di equazioni differenziali ordinarie. Si definisce in forma *normale* un'equazione differenziale in cui la derivata massima è isolabile dai restanti termini, ossia se si può scrivere nella forma

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(k-1)}) \quad (12.0.1)$$

con $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{1+mk} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

12.1 Equazioni del primo ordine

Sono equazioni del tipo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (12.1.1)$$

con $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definizione 12.1.1. Si dice che la funzione \mathbf{y} è una soluzione, nell'intervallo I , della (12.1.1) se:

- $\mathbf{y}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è derivabile in I ;
- $(x, \mathbf{y}(x))$ appartiene al dominio di \mathbf{f} (che potrebbe non essere definita in tutto \mathbb{R}^{m+1});
- per ogni $x \in I$ si ha $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$.

Si inizi con il caso più semplice, ossia l'equazione $y' = f(x)$, in cui la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non dipende da y . Innanzitutto, se f ha in un punto x_0 una discontinuità eliminabile o di prima specie, il problema non si può risolvere, dato che una funzione derivata può avere soltanto discontinuità di seconda specie, come segue dal teorema 6.4.5. Si può quindi eliminare una parte dei casi patologici, e trattare solo una classe di funzioni, quelle continue nel loro insieme di definizione. Se $f \in \mathcal{C}(I)$, quindi, la (12.1.1) ammette sempre una soluzione. Se prima era possibile non avere soluzioni, però, ora l'equazione $y' = f(x)$ ammette comunque *infinite* soluzioni: infatti tali soluzioni sono tutte le primitive di f , di cui chiaramente non ne esiste una soltanto. Bisogna quindi imporre il passaggio della funzione per un certo punto $y(x_0) = y_0$, in modo da avere una soluzione che sia anche unica.

12.2 Il problema di Cauchy

Il problema di ricercare la soluzione (o le soluzioni) dell'equazione (12.1.1) su un intervallo, in modo tale che passino per un punto fissato, detto anche *condizione al contorno*, si traduce formalmente nel sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (12.2.1)$$

detto *problema di Cauchy*, che richiede dunque un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ di definizione in cui $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sia continua, e che contenga il punto (x_0, \mathbf{y}_0) . La soluzione secondo la definizione precedente 12.1.1 dovrà quindi soddisfare anche il vincolo $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

Il seguente teorema mostra che imponendo alcune condizioni all'equazione, come la continuità di \mathbf{f} , l'esistenza di una soluzione al problema di Cauchy è sempre garantita.

Teorema 12.2.1 (di Peano). Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^{n+1} , il punto $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ e la funzione $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in Ω . Il problema di Cauchy (12.2.1) ammette una soluzione locale, ossia $\exists I \subseteq \mathbb{R}$, con $x_0 \in I$, in cui è definita una soluzione del problema.

Esempi

- Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Poiché è un polinomio, chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. La soluzione quindi esiste sempre in un intorno di $x = 0$, ed è unica poiché nessuna delle soluzioni ne interseca un'altra in ogni punto in cui è definita. In particolare, la soluzione è la funzione

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 x^2},$$

che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ se $y_0 \leq 0$ (se $y_0 = 0$ è la funzione nulla $y(x) = 0$), soltanto per $|x| < 1/\sqrt{y_0}$ se $y_0 > 0$.

- Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La funzione f del problema è continua in tutto \mathbb{R}^2 , quindi esiste una soluzione nell'intorno di x_0 : infatti la funzione $y(x) = 0$ è una soluzione del problema. Non è però l'unica, dato che se $y \neq 0$ esistono infinite soluzioni in tale intorno, definite in tutto \mathbb{R} : una di queste è anche, tra le tante, la funzione $y(x) = x^3$. Questo problema è noto come *pennello di Peano*.

La sola continuità di f è sufficiente a garantire l'esistenza, ma sfortunatamente non basta per decretare anche l'*unicità* della soluzione: per questo si avrà bisogno di ipotesi di partenza più restrittive.

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in E , e siano $(x_0, \mathbf{y}_0) \in E$ e $x_0 \in I$. Se la funzione $\mathbf{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ risolve il problema di Cauchy (12.2.1), certamente è continua in I , poiché la sua derivata esiste per i valori di $x \in I$. Ma allora $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ è a sua volta continua in I , a cui segue che anche \mathbf{y}' , essendo di fatto uguale a \mathbf{f} , è continua in I . Tutto ciò significa infine che $\mathbf{y} \in C^1(I)$: si può applicare quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale 8.5.2, ottenendo l'uguaglianza

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{y}'(t) dt = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt, \quad (12.2.2)$$

valida per ogni $x \in I$. Si nota subito che in quest'ultima equazione $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$. Inoltre se $\mathbf{y} \in C(I)$ anche l'integranda è continua, quindi risulta derivando i due membri che $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$, cioè soddisfa il problema di Cauchy!

Definizione 12.2.2. Per ogni funzione $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(I)$, con $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}: E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, si definisce l'operatore integrale di Volterra come

$$V(\mathbf{y})(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \quad (12.2.3)$$

Risolvere il problema di Cauchy equivale quindi a ricercare le *soluzioni continue* dell'analogo problema $\mathbf{y} = V(\mathbf{y})$, cioè a cercare i punti fissi dell'operatore di Volterra.

12.3 Esistenza ed unicità delle soluzioni

Definizione 12.3.1. Sia $\mathbf{f}: E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$; essa si dice *lipschitziana in \mathbf{y} uniformemente rispetto a x* se $\exists L > 0$ tale per cui $\forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in E$ accade che

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|. \quad (12.3.1)$$

Esempi Sia $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata in I :

- la funzione $f(x, y) = g(x)|y|$ è lipschitziana in y uniformemente rispetto a x nell'insieme $I \times \mathbb{R}$;
- la funzione $f(x, y) = g(x)\sqrt[3]{y}$ soddisfa la 12.3.1 in ogni insieme $I \times \{y: |y| \geq \varepsilon > 0\}$, poiché per $y \rightarrow 0$ la derivata di f rispetto a y cresce illimitatamente;
- la funzione $f(x, y) = g(x)y^2$ soddisfa la 12.3.1 in ogni insieme compatto di \mathbb{R}^2 , poiché al crescere indefinito di y la derivata di f rispetto a tale variabile cresce illimitatamente.

Osservazione 12.3.2. Sia Ω un insieme aperto e convesso¹ di \mathbb{R}^{n+1} , e \mathbf{f} una funzione definita in Ω , a valori in \mathbb{R}^n . Se tutte le derivate parziali $\partial f_i / \partial y_j$ esistono e sono limitate, allora la \mathbf{f} è lipschitziana in Ω nella variabile \mathbf{y} e uniformemente rispetto ad x .

Lemma 12.3.3 (di saldatura). Siano $(x_0, \mathbf{y}_0) \in E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e la funzione $\mathbf{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in E . Sia dato il problema di Cauchy (12.2.1). Se una funzione \mathbf{y}_1 risolve il problema di Cauchy nell'intervallo $[a, x_0]$ mentre un'altra funzione \mathbf{y}_2 lo risolve in $[x_0, b]$, allora la funzione

$$\mathbf{y}(x) = \begin{cases} \mathbf{y}_1 & \text{per } x \in [a, x_0] \\ \mathbf{y}_2 & \text{per } x \in [x_0, b] \end{cases}$$

risolve il problema di Cauchy nell'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione. Per ogni punto $x \neq x_0$, la \mathbf{y} è derivabile poiché le due funzioni risolvono, separatamente nei rispettivi intervalli, il problema di Cauchy. Risulta certamente che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{y}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{y}'_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1(x)).$$

Ma \mathbf{f} è continua in $[a, x_0]$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1(x)) = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_1(x_0)) = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0).$$

Con lo stesso procedimento si ottiene anche che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathbf{y}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathbf{y}'_2(x) = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_2(x_0)) = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0).$$

Poiché quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{y}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathbf{y}'(x)$, per il teorema 6.4.5 è derivabile in x_0 e vale $\mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}(x_0))$, cioè \mathbf{y} risolve il problema di Cauchy anche in x_0 . \square

¹Si dice *convesso* un insieme tale che per ogni coppia di punti appartenenti ad esso, il segmento che li unisce appartiene ancora all'insieme.

Teorema 12.3.4 (di esistenza e unicità globale). Sia $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una striscia verticale a base compatta, ossia $S = [a, b] \times \mathbb{R}^n$, e siano $(x_0, \mathbf{y}_0) \in S$, $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(S)$ e, in S , \mathbf{f} è lipschitziana rispetto a \mathbf{y} e uniformemente rispetto a x , allora il problema di Cauchy (12.2.1) ammette una e una sola soluzione, definita in tutto $[a, b]$.

Dimostrazione. Si consideri soltanto l'intervallo $[x_0, b]$: si definisce $h = \min\{b - x_0, \frac{1}{2L}\}$, dove L è la costante di Lipschitz per \mathbf{f} rispetto alla variabile \mathbf{y} , e l'intervallo $I_0 = [x_0, x_0 + h]$. Lo spazio $X = (\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(I_0), d_\infty)$, con la distanza $d_\infty = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\infty, I_0}$, è uno spazio metrico completo. Per ogni $\mathbf{y} \in X$, si applichi l'operatore di Volterra: $V(\mathbf{y}) \in \mathcal{C}(I_0)$, quindi l'operatore è una mappa $V: X \rightarrow X$. In questo spazio metrico, date due funzioni $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, la norma della loro differenza è per ogni $x \in I_0$

$$\begin{aligned} \|V(\mathbf{y})(x) - V(\mathbf{z})(x)\| &= \\ &= \left\| \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt - \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)) dt \right\| = \\ &= \left\| \int_{x_0}^x [\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))] dt \right\|, \end{aligned}$$

in cui la norma si intende in \mathbb{R}^n . Poiché in I_0 si ha sempre $x \geq x_0$, l'integrale è sempre positivo, quindi

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{x_0}^x [\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))] dt \right\| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))\| dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x L \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \sup_{t \in I_0} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| dt = \\ &= L \int_{x_0}^x \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\infty, I_0} dt = \\ &= L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\infty, I_0} (x - x_0) \leq \\ &\leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\infty, I_0} h \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\infty, I_0}. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $x \in I_0$, quindi passando all'estremo superiore in x si ottiene che

$$\sup_{x \in I_0} \|V(\mathbf{y})(x) - V(\mathbf{z})(x)\| = \|V(\mathbf{y}) - V(\mathbf{z})\|_{\infty, I_0} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\infty, I_0}$$

e ciò mostra che l'operatore V è una contrazione. Allora esiste, ed è unico, un punto fisso in X , cioè una funzione continua $\mathbf{y}^*: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ che risolve $V(\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}^*$, che quindi è anche soluzione del problema di Cauchy in $[x_0, x_0 + h]$. Se ora $x_0 + h = b$, il problema ha una soluzione unica in tutto $[x_0, b]$, altrimenti si pone un nuovo problema di Cauchy nell'intervallo $[x_0 + h, b]$ con un altro "passo" lungo almeno $1/2L$. Con un numero finito di queste iterazioni si giunge necessariamente a b , quindi si arriva in ogni caso a coprire l'intero $[x_0, b]$, poiché è compatto, e per il lemma 12.3.3 precedente la soluzione deve essere la medesima funzione, estesa all'intervallo ogni volta più ampio. Analogamente si ripete il procedimento in $[a, x_0]$, e sempre per il 12.3.3 la soluzione rimane la medesima. Si trova alla fine una soluzione unica al problema di Cauchy nell'intero $[a, b]$, e il teorema è quindi dimostrato. \square

Corollario 12.3.5. Sia $S = I \times \mathbb{R}^n$: se la $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ soddisfa le ipotesi del teorema precedente in ogni $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq S$, allora ogni problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione definita in I , quando il punto x_0 per cui si stabilisce la condizione al contorno appartiene ad I .

Sotto ipotesi più “leggere” del teorema precedente, l’esistenza e unicità della soluzione ad un problema di Cauchy possono comunque essere garantite, ma solo localmente laddove è definita la condizione al contorno.

Teorema 12.3.6 (di esistenza e unicità locale). Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$, con il problema di Cauchy (12.2.1). Se esiste un intorno di (x_0, \mathbf{y}_0) contenuto in Ω in cui \mathbf{f} è continua e lipschitziana rispetto a \mathbf{y} uniformemente rispetto a x , allora esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ in cui è definita ed è unica una soluzione del problema di Cauchy.

Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, allora si dimostra subito che ogni problema di Cauchy associato ammette un’unica soluzione locale: infatti le derivate di \mathbf{f} sono continue, quindi anche limitate, da cui segue la lipschitzianità di \mathbf{f} almeno rispetto a \mathbf{y} .

12.4 Equazioni notevoli

Equazioni a variabili separabili

$$y' = h(x)k(y), \quad (12.4.1)$$

con $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ in dipendenza soltanto da x e $k: J \rightarrow \mathbb{R}$ soltanto da y , entrambe sufficientemente regolari (almeno continue...) da permettere l’esistenza delle soluzioni. Nell’insieme delle soluzioni si ha sempre la soluzione costante $y(x) = y_0$, ricavabile ricercando gli zeri di $k(y)$. Altrimenti, se $k(y) \neq 0$ localmente, cioè per $x \rightarrow x_0$, si ha che $k(y(x)) \neq 0$, e allora si può scrivere

$$\frac{y'(x)}{k(y(x))} = h(x),$$

da cui si ottiene la soluzione integrando nell’intervallo $[x_0, x]$, cioè

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{k(y(s))} ds = \int_{x_0}^x h(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int_{y_0}^y \frac{du}{k(u)} = \int_{x_0}^x h(t) dt,$$

operando il cambio di variabile $y(x) = u$, da cui $y'(t) dt = du$ e $u(x) = y(x)$ per sostituire gli estremi appropriati.

Equazioni lineari

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (12.4.2)$$

Soluzione:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(t) \exp\left(\int_{x_0}^t a(s) ds\right) dt\right]. \quad (12.4.3)$$

Equazioni di Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0. \quad (12.4.4)$$

Si opera il cambio di variabile $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, cioè $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$, ottenendo dopo qualche passaggio l’equazione

$$z' + (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x) = 0, \quad (12.4.5)$$

che è lineare del primo ordine.

Equazioni di Riccati Conoscendo una soluzione *particolare* ci si riporta ad un’equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0. \quad (12.4.6)$$

Equazioni omogenee Sono equazioni del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (12.4.7)$$

Si risolvono ponendo $y(x) = x \cdot m(x)$, da cui si ottiene l’equazione $m + xm' = g(m)$ che è a variabili separabili.

Capitolo 13

Equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore

Lasciando le equazioni differenziali, sempre ordinarie, del primo ordine soltanto ma generalizzando ad ordini qualsiasi, si trova la forma

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}), \quad (13.0.1)$$

restando per semplicità nell'ambito delle funzioni scalari $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con quindi $f: E \subseteq \mathbb{R}^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}$, scritta in forma normale. Se $f \in \mathcal{C}(E)$, allora la k -esima derivata della soluzione y è continua, quindi ogni soluzione dell'equazione è di classe $\mathcal{C}^k(E)$.

Se y è una soluzione della (13.0.1), da essa si può costruire un'altra funzione $\mathbf{z}: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ definita come

$$\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

Si nota che $\mathbf{z}'(x)$ è la funzione

$$\mathbf{z}'(x) = \begin{bmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ \vdots \\ z'_{k-1}(x) \\ z'_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x) \\ y^{(k)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x) \\ f(x, z_1, \dots, z_k) \end{bmatrix} = F(x, \mathbf{z}). \quad (13.0.2)$$

Dunque risolvendo la (13.0.1) tramite una funzione y , allora $\mathbf{z} = (y, y', \dots, y^{(k-1)})$ risolve la (13.0.2), nella quale si pone

$$\mathbf{F}(x, z_1, \dots, z_k) = (z_2, \dots, z_k, f(x, \mathbf{z})). \quad (13.0.3)$$

Si è mostrato allora come dalla (13.0.1), equazione differenziale di una funzione scalare all'ordine k , si è ricavata un'equazione differenziale di una funzione vettoriale in \mathbb{R}^k . Viceversa, data l'equazione (13.0.2) si ha l'uguaglianza, per l'ultima componente dei vettori,

$$z'_k(x) = f(x, \mathbf{z}(x))$$

da cui ponendo $z_i(x) = y^{(i-1)}(x)$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ si ottiene esattamente la (13.0.1), quindi da un'equazione differenziale vettoriale in \mathbb{R}^k si ottiene un'equazione differenziale scalare di ordine k . I due tipi di equazioni sono allora del tutto analoghi, quindi si possono utilizzare per entrambi i medesimi teoremi.

13.1 Esistenza e unicità delle soluzioni

All'ordine k , il problema di Cauchy dovrà quindi completare la (13.0.1) con k condizioni al contorno, una per ogni ordine di derivazione: sarà quindi un sistema della forma

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{z}) \\ \mathbf{z}(x_0) = \boldsymbol{\alpha}, \end{cases} \quad (13.1.1)$$

con $vecz: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k$, che si traduce in

$$\begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = \alpha_1 \\ y'(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = \alpha_k. \end{cases} \quad (13.1.2)$$

Si possono quindi formulare i due teoremi, del tutto analogi ai teoremi 12.3.4 e 12.3.6, per le equazioni di ordine superiore al primo.

Teorema 13.1.1 (di esistenza e unicità globale). Sia $S \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ una striscia verticale, ossia $S = I \times \mathbb{R}^k$ (con I intervallo di qualunque genere), e siano $x_0 \in I$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k$, cioè $(x_0, \boldsymbol{\alpha}) \in S$. Data $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ continua in S e lipschitziana rispetto alla variabile $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ e uniformemente rispetto a x , in ogni sottostriscia compatta $[a, b] \times \mathbb{R}^k \subseteq S$, il problema di Cauchy (13.1.2) ammette una e una sola soluzione, definita in tutto I .

Teorema 13.1.2 (di esistenza e unicità locale). Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, \boldsymbol{\alpha}) \in \Omega$, con il problema di Cauchy (13.1.2). Se $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, esiste un opportuno intorno di x_0 in cui è definita una soluzione, unica, del problema di Cauchy.

13.2 Equazioni lineari

Sono equazioni della forma

$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}(x)y^{(k-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \quad (13.2.1)$$

con $a_j, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in I per ogni $j = 1, \dots, k-1$. L'equazione si può riscrivere certamente anche nella forma

$$y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x)y^{(j)}(x) = b(x). \quad (13.2.2)$$

Si introduce quindi l'*operatore differenziale*

$$\mathcal{L}: y \mapsto y^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j y^{(j)}, \quad (13.2.3)$$

che per come è stato costruito è lineare. Inoltre $\mathcal{L}: \mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$, quindi \mathcal{L} è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali (di dimensione infinita). Si riassume dunque la (13.2.2) nella forma $\mathcal{L}(y) = b$. Scrivendo l'equazione in forma normale, risulta

$$y^{(k)}(x) = b(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x)y^{(j)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

Si ha che $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^k)$ e in ogni $[c, d] \subseteq I$, per ogni $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ la derivata $\partial f / \partial y^{(j)} = -a_j(x)$ è limitata, perché ogni $a_j(x)$ è continua in I ; allora f è lipschitziana in ogni sottoinsieme compatto di I rispetto alle variabili \mathbf{y} , e uniformemente in x , quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = b \\ y(x_0) = \alpha_1 \\ y'(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = \alpha_k \end{cases} \quad (13.2.4)$$

ammette una e una sola soluzione in I .

13.3 Equazioni lineari omogenee

Secondo la notazione appena introdotta, un'equazione omogenea è nella forma $\mathcal{L}(y) = 0$. L'insieme delle soluzioni è quindi composto dalle funzioni y che annullano l'operatore \mathcal{L} , quindi è $\text{Ker } \mathcal{L}$, che è senza dubbio un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^k(I)$.

Teorema 13.3.1. Sia $\mathcal{L}: \mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ definito come nella (13.2.3), con $a_j \in \mathcal{C}(I) \forall j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Allora

$$\dim \text{Ker } \mathcal{L} = k.$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$. Si costruiscono k distinti problemi di Cauchy fissando le condizioni al contorno in x_0 .

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-2)}(x_0) = 0 \\ y^{(k-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(k-2)}(x_0) = 0 \\ y^{(k-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-2)}(x_0) = 0 \\ y^{(k-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

ciascuno con soluzione rispettivamente u_1, u_2, \dots, u_k . Se fosse $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j \equiv 0$, poiché è una funzione identicamente nulla lo sono anche tutte le sue derivate: allora derivando ogni volta si otterrebbe che

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j' = \dots = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j^{(k-1)} \equiv 0.$$

In tal caso, nel punto x_0 , si ha

$$0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j(x_0) = \lambda_1 u_1(x_0) = \lambda_1,$$

perché per costruzione $u_1(x_0) = 0$ e $u_2(x_0) = \dots = u_k(x_0) = 0$. Analogamente, per le derivate superiori, risulta $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j'(x_0) = \lambda_2 = 0$ e così via fino a $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j^{(k-1)}(x_0) = \lambda_k = 0$. Poiché quindi $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j \equiv 0$ accade soltanto per $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.

Sia ora $\tilde{y} \in \text{Ker } \mathcal{L}$: calcolando le sue derivate in x_0 , si ha l'insieme $\{\tilde{y}(x_0), \tilde{y}'(x_0), \dots, \tilde{y}^{(k-1)}(x_0)\}$. Da questo insieme si costruisce una funzione

$$z(x) = \tilde{y}(x_0)u_1(x) + \tilde{y}'(x_0)u_2(x) + \dots + \tilde{y}^{(k-1)}(x_0)u_k(x).$$

Dato che $z(x)$ è combinazione lineare di elementi del nucleo di \mathcal{L} , anche $z \in \text{Ker } \mathcal{L}$, quindi è soluzione dell'equazione omogenea associata. Si costruisce dunque il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}(z) = 0 \\ z(x_0) = \tilde{y}(x_0) \\ z'(x_0) = \tilde{y}'(x_0) \\ \vdots \\ z^{(k-1)}(x_0) = \tilde{y}^{(k-1)}(x_0) \end{cases}$$

Poiché le condizioni al contorno coincidono, e ovviamente $\mathcal{L}(\tilde{y}) = 0$, z e \tilde{y} risolvono il medesimo problema di Cauchy, il quale però può ammettere una sola soluzione: segue necessariamente che $z \equiv \tilde{y}$. Dato che \tilde{y} è una generica soluzione del problema di Cauchy, ed è una combinazione lineare di elementi dell'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$, significa che

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle,$$

vale a dire che $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di $\text{Ker } \mathcal{L}$, che quindi ha dimensione k . \square

13.4 Equazioni lineari complete

Teorema 13.4.1. Tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale lineare completa di ordine k sono della forma

$$y = y_p + y_h, \quad (13.4.1)$$

dove y_p è una soluzione di $\mathcal{L}(y) = b$ e $y_h(y)$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione omogenea associata $\mathcal{L}(y) = 0$.

Dimostrazione. Applicando \mathcal{L} alla (13.4.1) si ha $\mathcal{L}(y_p) + \mathcal{L}(y_h) = b + 0 = b$, e viceversa $\mathcal{L}(y - y_p - y_h) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_p) - \mathcal{L}(y_h) = b - b - 0 = 0$ quindi $y = y_p + y_h$. \square

Non esistono metodi generali per calcolare tutte le soluzioni di una qualsiasi equazione di ordine maggiore o uguale a 2.

Se u_1, \dots, u_k sono soluzioni dell'equazione omogenea $\mathcal{L}(y) = 0$, con esse si costruisce la matrice quadrata $k \times k$

$$W(x) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \cdots & u_k^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

detta *matrice wronskiana*, in cui tutte le funzioni sono di classe (almeno) $\mathcal{C}^1(I)$; in particolare, le funzioni della p -esima riga contando dal fondo sono di classe $\mathcal{C}^p(I)$, fino alla prima riga di classe $\mathcal{C}^k(I)$. Allora si ha $\det W(x) \in \mathcal{C}^1(I)$. Con l'utilizzo di questa matrice, l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è dunque linearmente indipendente se e solo se $\det W(x) \neq 0$, per qualsiasi punto $x \in I$. Alternativamente, si ricerca se $\exists x_0 \in I$ tale per cui $\det W(x_0) \neq 0$, dato che se il wronskiano non si annulla in un punto allora non si annulla in tutto I^1 . Si può eventualmente restringere l'intervallo I ad un sottoinsieme $J \subset I$ in cui il wronskiano non sia mai nullo, nel caso esso si annullasse in qualche $x_0 \in I$ (ma ovviamente $\notin J$): basterà eliminare tali punti da I . Una volta note le k soluzioni linearmente indipendenti di $\mathcal{L}(y) = 0$ in un intervallo I , si può trovare almeno una soluzione particolare tramite il metodo seguente.

¹È errato invece implicare la dipendenza lineare delle funzioni dal fatto che $\det W(x) = 0$ ovunque.

Metodo di variazione delle costanti

Esistono opportune funzioni $c_1, \dots, c_k: I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(I)$ tali che applicando \mathcal{L} a $y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + \dots + c_k(x)u_k(x)$ si ottiene la funzione nulla. Un “buon” insieme di queste soluzioni c_j ($j = 1, \dots, k$) sono quelle che soddisfano il sistema lineare

$$W(x) \begin{bmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \\ \vdots \\ c'_{k-1}(x) \\ c'_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}. \quad (13.4.2)$$

Dato che $\det W(x) \neq 0$, la matrice è invertibile. Il metodo presentato è dimostrato solo per le equazioni del secondo ordine, ma può essere generalizzato a qualsiasi ordine. Si ha la forma lineare completa

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x). \quad (13.4.3)$$

Conoscendo due soluzioni u_1 e u_2 della omogenea associata, la soluzione particolare sarà una loro combinazione lineare nella forma $y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$ (d'ora in poi sarà omessa per comodità, a meno di ambiguità, la scrittura (x) per indicare la variabile indipendente delle funzioni, che sarà per tutte x). La sua derivata prima esiste, perché è di classe $\mathcal{C}^1(I)$, ed è $y'_p = c'_1u_1 + c_1u'_1 + c'_2u_2 + c_2u'_2$: si impone che $c'_1u_1 + c'_2u_2 = 0$ per ottenere una forma più semplice della derivata seconda, che è $y''_p = c'_1u'_1 + c_1u''_1 + c'_2u'_2 + c_2u''_2$. Si richiede allora l'uguaglianza

$$\begin{aligned} b &= y''_p + a_1y'_p + a_0y_p = \\ &= c'_1u'_1 + c_1u''_1 + c'_2u'_2 + c_2u''_2 + a_1(c_1u'_1 + c_2u'_2) + a_0(c_1u_1 + c_2u_2) = \\ &= c_1(u''_1 + a_1u'_1 + a_0u_1) + c_2(u''_2 + a_1u'_2 + a_0u_2) + c'_1u'_1 + c'_2u'_2 = \\ &= c_1\mathcal{L}(u_1) + c_2\mathcal{L}(u_2) + c'_1u'_1 + c'_2u'_2 = \\ &= c'_1u'_1 + c'_2u'_2. \end{aligned}$$

Si giunge quindi al sistema lineare

$$\begin{cases} u_1c'_1 + u_2c'_1 = 0 \\ u'_1c'_1 + u'_2c'_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}. \quad (13.4.4)$$

La soluzione sarà data dunque, secondo la (13.4.1), da $y(x) = y_p(x) + \gamma_1u_1(x) + \gamma_2u_2(x)$, con $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Metodo per le equazioni lineari del secondo ordine

Conoscendo una soluzione $w(x)$ della omogenea associata, si ricercano soluzioni della lineare completa della forma $y(x) = w(x)u(x)$. Infatti (ancora tralasciando da qui in poi la notazione (x) per le funzioni) derivando questa soluzione y si ottiene $y' = w'u + wu'$ e $y'' = w''u + 2w'u' + wu''$. Risulta quindi, sostituendola nella (13.4.3), che

$$\begin{aligned} b &= w''u + 2w'u' + wu'' + a_1(w'u + wu') + a_0wu = \\ &= u(w'' + a_1w' + a_0w) + u'(2w' + a_1w) + u''w = \\ &= u\mathcal{L}(w) + u'(2w' + a_1w) + u''w = \\ &= u'(2w' + a_1w) + u''w, \end{aligned}$$

laddove $w(x) \neq 0$, altrimenti si avrebbe la soluzione banale. Si giunge allora, ponendo $z = u'$ all'equazione del primo ordine

$$z(x)' + \left(a_1(x) + \frac{2w'(x)}{w(x)} \right) z(x) = \frac{b(x)}{w(x)}, \quad (13.4.5)$$

poiché $w(x)$ è già nota.

Equazioni di Eulero

Sono di questo tipo le equazioni nella forma

$$x^k y^{(k)}(x) + a_{k-1} x^{k-1} y^{(k-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \quad (13.4.6)$$

con a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 costanti reali, e $b \in \mathcal{C}(I)$. Si nota subito che per portare l'equazione in forma normale è necessario dividere i termini per x^k , introducendo un problema non trascurabile in $x = 0$: bisognerà alla fine infatti trattare con cura la soluzione in questo punto. Si considerano all'inizio le soluzioni in $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$: per $x > 0$ si effettua la sostituzione $x = e^t$, e chiamando $z(t) = y(e^t)$ si ottiene (esplicitando la variabile rispetto a cui si derivano le funzioni):

$$y'(x) = z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(t) = \frac{\partial z}{\partial t}(t) \frac{\partial t}{\partial x}(t) = z'(t) \frac{1}{e^t} = \frac{z'(t)}{x}$$

per le regole di derivazione della funzione inversa. Per gli ordini secondo e terzo,

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} y'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z'(t)}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} z'(t) + \frac{1}{x} \frac{\partial z'(t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} [z''(t) - z'(t)] \\ y'''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} y''(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^2} z''(t) - \frac{1}{x^2} z'(t) \right] = \frac{1}{x^3} z'''(t) - \frac{3}{x^3} z''(t) + \frac{2}{x^3} z'(t) \end{aligned}$$

da cui le sostituzioni per le derivate di y :

$$\begin{aligned} x y'(x) &= z'(t) \\ x^2 y''(x) &= z''(t) - z'(t) \\ x^3 y'''(x) &= z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t) \end{aligned} \quad (13.4.7)$$

e così via per gli ordini superiori. Si ottiene dunque il problema di Cauchy, da risolvere in $(0, +\infty)$, per la funzione $z(t)$ con lo stesso termine noto. Si riefettua infine la sostituzione inversa $t = \log x$ per ottenere le soluzioni dell'equazione di partenza. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ si sostituisce poi $x = -e^t$: con calcoli analoghi si ottiene la stessa soluzione generale dell'equazione omogenea, mentre il termine noto $b(-e^t)$ rimane uguale solo se è pari. Il cambiamento di variabile in ritorno, questa volta, è $t = \log(-x)$.

Parte III

Capitolo 14

Forme differenziali lineari

14.1 Insiemi connessi

Prima di introdurre la teoria delle forme differenziali, introduciamo la definizione di insieme *connesso*.

Definizione 14.1.1. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto si dice *connesso* se laddove può essere scritto come unione di due insiemi aperti e disgiunti, uno dei due è vuoto, vale a dire

$$A = A_1 \cup A_2 \text{ e } A_1 \cap A_2 = \emptyset, \text{ allora } A_1 = \emptyset \text{ o } A_2 = \emptyset.$$

Un'altra definizione si ottiene se consideriamo gli archi che collegano due punti dell'insieme: se per qualsiasi coppia di punti l'arco è contenuto tutto nell'insieme, anche in questo caso l'insieme si dice connesso. Il seguente teorema mostra che queste due definizioni sono in realtà interscambiabili.

Teorema 14.1.2. Sia A un insieme aperto e connesso di \mathbb{R}^n . Per qualsiasi coppia di punti $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A$ esiste un arco poligonale con estremi \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 tutto contenuto in A .

Dimostrazione. Sia $\mathbf{p}_1 \in A$, e chiamiamo A_1 l'insieme dei punti in A che sono connessi a \mathbf{p}_1 per archi (anche poligonali). Esso non può essere già vuoto, dato che sicuramente contiene almeno un punto, che è \mathbf{p}_1 stesso. Chiamiamo $\mathcal{P}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ un generico arco che connette i due punti \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 : allora possiamo scrivere $A_1 = \{\mathbf{x} \in A : \exists \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1)\}$. Consideriamo un intorno $B(\mathbf{x}, \delta)$ e un punto \mathbf{y} in esso: il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ che lo congiunge a \mathbf{x} è quindi tutto contenuto in tale intorno. Tale segmento può essere visto chiaramente come un arco $\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ che li connette, quindi collegando \mathbf{x} a \mathbf{y} e \mathbf{x} a \mathbf{p}_1 avremo un arco che connette \mathbf{p}_1 a \mathbf{y} ; in breve, $\mathcal{P}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}) \cup [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathcal{P}(\mathbf{p}_1, \mathbf{y})$. Poiché questo ragionamento vale per ogni scelta di $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, questo intorno è tutto contenuto in A_1 , che quindi risulta aperto.

Definiamo ora $A_2 := A \setminus A_1$. Sia $A_2 \neq \emptyset$ (altrimenti il teorema è subito dimostrato), e $\mathbf{x} \in A_2$: L'insieme A è aperto, quindi esiste un intorno $B(\mathbf{x}, \delta)$ che è contenuto in A : sia \mathbf{y} un punto di questo intorno. Come prima, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset B(\mathbf{x}, \delta)$. Supponiamo che \mathbf{y} sia in A_1 : risulterebbe allora che esiste un arco che lo connette a \mathbf{p}_1 , e di conseguenza un arco $\mathcal{P}(\mathbf{p}_1, \mathbf{y}) \cup [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ che connette \mathbf{x} a \mathbf{p}_1 . Però $\mathbf{x} \in A_2$, quindi siamo giunti ad una contraddizione poiché \mathbf{x} appartiene sia ad A_1 che A_2 ma per come li abbiamo definiti essi non possono avere punti in comune. Dobbiamo quindi eliminare l'ipotesi fatta che $\mathbf{y} \in A_1$, ma allora $\mathbf{y} \in A_2$, e come prima $\exists B(\mathbf{y}, \delta)$ contenuto in A_2 , e anche A_2 è quindi aperto.

Alla fine abbiamo quindi che $A = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, dato che sono complementari rispetto ad A . Questi due sottoinsiemi sono aperti, e A è connesso, quindi proprio per la definizione di insieme connesso A_2 deve essere vuoto (avevamo visto che A_1 non lo può essere), ma allora $A_1 \equiv A$, che quindi è connesso per archi. \square

La proprietà di connessione di un insieme ci permette di estendere una conseguenza del teorema di Lagrange, che affermava che su un intervallo le funzioni sono costanti se e solo se hanno (almeno in tutto l'intervallo) derivata nulla, anche a funzioni di più variabili. Un insieme connesso prende qui il posto dell'intervallo, che pure è anch'esso un insieme connesso ma solo in \mathbb{R} .

Corollario 14.1.3. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e connesso, allora una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile è costante se e solo se $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

Dimostrazione. Se f è costante ha tutte le derivate parziali nulle, quindi segue subito che $\nabla f = \mathbf{0}$ in ogni punto di A .

Sia $\nabla f = \mathbf{0}$: definiamo, per un $\mathbf{a} \in A$, l'insieme di livello $A_1 := \{\mathbf{x} \in A: f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$, e $A_2 := A \setminus A_1$ (quest'ultimo sarà quindi l'insieme dei punti la cui immagine *non* è $f(\mathbf{a})$). Prendiamo un punto qualsiasi $\mathbf{x}' \in A_1$ e un suo intorno $\mathcal{U}(\mathbf{x}')$ che sia tutto contenuto in A (un tale intorno esiste, perché A è aperto). Per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\mathbf{x}')$, dunque, per il teorema di Lagrange

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}') = \nabla f(\mathbf{x}' + c(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

per $c \in [0, 1]$. Ma $\mathcal{U}(\mathbf{x}') \subset A$, quindi per tutti questi punti il gradiente è nullo, quindi $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}(\mathbf{x}')$, ossia $\mathcal{U}(\mathbf{x}') \subset A_1$. Poiché questo vale per ogni $\mathbf{x}' \in A_1$, A_1 risulta aperto. Allo stesso tempo, però, è anche chiuso: infatti se $\tilde{\mathbf{x}}$ è un punto di accumulazione per A_1 , allora esiste una successione $\{\mathbf{x}_n\} \subset A_1$ tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, ma per la continuità di f si ottiene che $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{a})$ e dunque $\tilde{\mathbf{x}} \in A_1$. Allora anche A_2 è aperto, poiché è il complementare di un insieme chiuso rispetto ad uno aperto. Abbiamo trovato quindi che A_1 e A_2 sono aperti, e per come li abbiamo costruiti $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; ma $A = A_1 \cup A_2$ è connesso, quindi per la definizione A_2 deve essere vuoto, vale a dire che $\forall \mathbf{x} \in A$ si ha $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, cioè f è costante in A . \square

14.2 Forme differenziali lineari

Se V e W sono due spazi vettoriali sul medesimo campo generico K , sappiamo dal corso di Geometria che lo spazio delle applicazioni lineari da V a W , che possiamo indicare con $\mathcal{L}(V, W)$, ha una struttura di spazio vettoriale: la somma di due elementi $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ e il prodotto di un elemento $T \in \mathcal{L}(V, W)$ per uno scalare $a \in K$ sono ancora delle applicazioni lineari in $\mathcal{L}(V, W)$, definite per $v \in V$ da

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \quad \text{e} \quad (aT)(v) = aT(v).$$

La struttura di spazio vettoriale di questo spazio segue in modo naturale dalla linearità delle operazioni. In particolare, tra queste applicazioni troviamo quelle che da V portano in K (anch'esso è uno spazio vettoriale), dette anche *funzionali lineari*, che quindi appartengono a $\mathcal{L}(V, K)$. Questo spazio vettoriale è detto *spazio duale* di V e solitamente si indica anche con V^* .

Prendiamo lo spazio vettoriale sul campo dei reali in cui abbiamo sempre lavorato, \mathbb{R}^n , e di conseguenza il suo duale, che indicheremo con $(\mathbb{R}^n)^*$. Vogliamo individuare una relazione che ci permetta di scrivere una base del duale a partire da una base di \mathbb{R}^n , che per semplicità sarà per noi la base canonica. Infatti esiste sempre un isomorfismo che lega i due spazi tra loro, però tale isomorfismo non è *canonico*, ossia dipende sempre dalla base che scegliamo per \mathbb{R}^n : basti pensare che per trovare la matrice associata ad un'applicazione lineare è fondamentale la scelta della base (tanto che al cambiare della base la matrice non rimane la stessa), e che dopotutto gli elementi del duale non sono che particolari applicazioni lineari. Siano $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ e $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^n$ rispettivamente le basi di \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$: scelta la prima, possiamo determinare la seconda in modo che¹

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (14.2.1)$$

In particolare, data la base canonica di \mathbb{R}^n , la base corrispondente di $(\mathbb{R}^n)^*$ (definita come prima dalla sua azione sulla base di \mathbb{R}^n) diventa una base di vettori tali che $\mathbf{w}_i(\mathbf{a}) = a_i$, per $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, ossia restituisce la i -esima coordinata dei vettori di \mathbb{R}^n .

Detto ciò, abbiamo già incontrato in precedenza alcuni elementi di $(\mathbb{R}^n)^*$: i differenziali di funzioni (scalari). Nel capitolo in cui abbiamo trattato della differenziabilità in più dimensioni avevamo visto che data una $f \in A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, il suo differenziale df si comporta come un funzionale lineare: preso un punto $\mathbf{x}_0 \in A$, restituisce un numero reale che è l'incremento di

¹Il duale V^* ha la stessa dimensione di V , quindi anche le due basi avranno lo stesso numero di elementi.

f dal punto \mathbf{x}_0 relativo all'incremento \mathbf{h} della variabile. Sappiamo inoltre che questo differenziale si può esprimere con il gradiente di f , cioè $df = \nabla f(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$, dove abbiamo scritto $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$, ossia

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n. \quad (14.2.2)$$

Ma se il primo membro è proprio il differenziale di f , cioè l'applicazione $\mathbf{h} \mapsto \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$, allora la notazione ci induce a considerare dx_i come l'applicazione che porta \mathbf{h} nella sua componente h_i . Infatti, guardando alla (14.2.2) come un funzionale lineare da applicare all'incremento \mathbf{h} , con la regola che $dx_i(\mathbf{h}) = h_i$ troviamo

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1(\mathbf{h}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n(\mathbf{h}) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \end{aligned} \quad (14.2.3)$$

che è proprio l'espressione dell'incremento di f associato all'incremento \mathbf{h} della variabile. È naturale allora pensare all'insieme $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ come una base per $(\mathbb{R}^n)^*$: con le combinazioni lineari di elementi di questa base possiamo costruire gli elementi dello spazio (in particolare, i differenziali delle funzioni hanno come coefficienti le rispettive derivate parziali). Abbiamo anche verificato la proprietà dell'equazione (14.2.1), ossia risulta

$$dx_j(\mathbf{e}_k) = \delta_{jk} \quad (14.2.4)$$

dove $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ è la base canonica di \mathbb{R}^n . La notazione con gli indici $1, 2, 3, \dots, n$ è ovviamente arbitraria: se ad esempio in \mathbb{R}^3 denotiamo le variabili con x, y, z , sarà naturale indicare la base del duale \mathbb{R}_*^3 con $\{dx, dy, dz\}$.

Lasciamo da parte ora quei particolari elementi del duale che sono i differenziali di funzioni, e guardiamo a tutto lo spazio: un suo elemento generico sarà scritto, in termini della base appena introdotta, come combinazione lineare

$$\sum_{i=1}^n a_i dx_i.$$

Possiamo ulteriormente pensare i coefficienti a_i come funzioni dipendenti da una variabile \mathbf{x} in \mathbb{R}^n : otteniamo dunque una funzione che porta punti di un certo insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nel funzionale lineare

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i.$$

Queste particolari funzioni sono dette *forme differenziali lineari*.

Definizione 14.2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una mappa $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ che porta $\mathbf{x} \in A$ nel funzionale lineare $\omega(\mathbf{x})$ è detta *forma differenziale lineare*.

Le forme differenziali lineari sono anche dette 1-forme. Ogni forma differenziale lineare si può rappresentare come $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$, e questa scrittura è unica poiché la scrittura di un elemento di uno spazio vettoriale in termini di una sua base è sempre univoca. Le funzioni ω_i , che sono funzioni da A a \mathbb{R} , si dicono componenti, o coefficienti della forma, ed esse determinano la regolarità della forma differenziale.

Definizione 14.2.2. Una forma differenziale lineare $\omega: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si dice di classe C^k se tutte le sue componenti lo sono.

Un esempio immediato di forma differenziale, come si può intuire dal discorso svolto finora, è il differenziale di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: avremo semplicemente $\omega = df$. Notiamo subito un'importante differenza nelle notazioni: da una parte abbiamo df , che è la 1-forma, cioè un'applicazione di A in $(\mathbb{R}^n)^*$, dall'altra abbiamo invece $df(x)$ che è il differenziale della funzione, ossia un elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$ (che è poi l'immagine di x attraverso ω).

14.3 Integrale di forme differenziali

Definiamo ora l'integrale di una forma differenziale lineare lungo una curva di \mathbb{R}^n .

Definizione 14.3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale lineare continua. Sia inoltre $\varphi: [a, b] \rightarrow A$ una parametrizzazione di una curva regolare a tratti. Si definisce l'integrale di ω lungo φ come

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt. \quad (14.3.1)$$

La curva φ ha n componenti perché è a valori in A , quindi è lecito sostituirla alla variabile delle componenti della forma. È facile vedere che l'integrale in realtà non dipende dalla parametrizzazione scelta per la curva, ma solo dal suo sostegno: introduciamo quindi il concetto di equivalenza e equiorientazione.

Definizione 14.3.2. Siano $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari a tratti. Esse si dicono equivalenti ed equiorientate se esiste una riparametrizzazione di φ che porta in ψ , ossia una mappa $\tau: [a, b] \rightarrow [c, d]$ suriettiva, derivabile e con derivata positiva in ogni punto di $[a, b]$ tale per cui $\varphi = \psi \circ \tau$.

Poiché $\tau'(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$ segue che τ è anche iniettiva e dunque biunivoca tra $[a, b]$ e $[c, d]$.

Teorema 14.3.3. Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una forma differenziale dall'insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $(\mathbb{R}^n)^*$, di classe \mathcal{C}^1 , e $\varphi: [a, b] \rightarrow A$ e $\psi: [c, d] \rightarrow A$ due curve regolari a tratti, equivalenti e con sostegno in A . Se le due curve sono equiorientate, si ha $\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$; se invece sono orientate in senso opposto, allora $\int_{\varphi} \omega = -\int_{\psi} \omega$.

Dimostrazione. Sia $\varphi = \psi \circ \tau$ in modo che le due curve siano equivalenti. Se sono anche equiorientate, allora $\tau'(t) > 0 \forall t \in [a, b]$ e $\tau(a) = c$ e $\tau(b) = d$. Dunque risulta che

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\psi(\tau(t))) \psi'_i(\tau(t)) \tau'(t) dt, \quad (14.3.2)$$

calcolando la derivata della funzione composta $\varphi = \psi \circ \tau$. Chiamiamo allora $r := \tau(t)$ e sostituiamo le variabili nell'integrale: otteniamo che $\tau'(t) dt = dr$, da cui risulta

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \sum_{i=1}^n a_i(\psi(r)) \psi'_i(r) dr = \int_c^d \sum_{i=1}^n a_i(\psi(r)) \psi'_i(r) dt = \int_{\psi} \omega. \quad (14.3.3)$$

Se le due curve hanno invece verso opposto, si ha $\tau'(t) < 0$ e dunque la mappa τ è decrescente, e di conseguenza² $\tau(a) = d$ e $\tau(b) = c$. Basta ripetere i passaggi compiuti in precedenza, per trovarsi alla fine con gli estremi di integrazione invertiti rispetto a prima, da cui si ricava facilmente che

$$\int_{\varphi} \omega = -\int_{\psi} \omega. \quad \square$$

14.4 Forme differenziali esatte

Quando abbiamo introdotto le forme differenziali lineari, eravamo partiti dai differenziali di funzioni scalari, che possiamo vedere come particolari forme differenziali i cui coefficienti sono le derivate parziali di una (stessa) funzione:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (14.4.1)$$

²Si ricordi che $\tau: [a, b] \rightarrow [c, d]$ e di conseguenza deve sempre risultare, almeno, che $a < b$ e $c < d$.

Gli integrali di queste forme sono semplicissimi da calcolare: infatti dati A aperto di \mathbb{R}^n , $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ e $\boldsymbol{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare a tratti, risulta

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt. \quad (14.4.2)$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale quest'ultimo è uguale a $f(\boldsymbol{\varphi}(b)) - f(\boldsymbol{\varphi}(a))$. Notiamo che il risultato non cambierebbe se prendessimo un'altra curva con gli stessi estremi. I differenziali di funzioni sono quindi delle forme differenziali lineari con l'importante proprietà che *il loro integrale non dipende dal cammino scelto, ma solo dagli estremi*. Questo semplifica di molto il calcolo di questi integrali, perciò vogliamo capire quando possiamo assicurarci che una forma sia di questo tipo. In una sola dimensione tutte le forme differenziali lineari continue sono anche dei differenziali di funzioni, ma questo non è più vero in più dimensioni.

Definizione 14.4.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale lineare continua in A . Essa si dice *esatta* se esiste una funzione (detta *potenziale*) $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ tale per cui $dF = \omega$.

Osservazione 14.4.2. Se F è un potenziale di ω su A , allora anche $G = F + c$, dove c è una qualsiasi costante, lo è. D'altra parte, se F_1 e F_2 sono entrambi potenziali di una medesima forma differenziale su A , e A è connesso, allora differiscono di una costante. Una forma differenziale esatta ammette quindi infiniti potenziali, ma tutti sono uguali a meno di una costante additiva (si può dunque determinare univocamente un potenziale a meno di tale costante).

Introduciamo ora due classi di curve: la classe delle curve regolari a tratti definite da uno stesso intervallo e con estremi dati nell'insieme A , ossia l'insieme $\Phi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(A) := \{\boldsymbol{\varphi}: [\alpha, \beta] \rightarrow A \text{ regolari a tratti e con } \boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}(\beta) = \mathbf{b}\}$, e la classe delle curve chiuse $\Phi_c(A) := \{\boldsymbol{\varphi}: [\alpha, \beta] \rightarrow A \text{ regolare a tratti e per cui } \boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \boldsymbol{\varphi}(\beta)\}$, cioè con estremi coincidenti, in A . Sfruttiamo questa definizione per enunciare i seguenti teoremi.

Teorema 14.4.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale lineare continua. Essa è esatta se e solo se $\int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega = 0$ per ogni $\boldsymbol{\varphi} \in \Phi_c(A)$.

Teorema 14.4.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso e $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ continua. Essa è una forma differenziale esatta se e solo se $\int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega = \int_{\boldsymbol{\psi}} \omega$ per qualsiasi coppia $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ nella classe $\Phi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(A)$ e per ogni scelta di \mathbf{a} e \mathbf{b} in A .

Dimostrazione. Se ω è esatta, segue dalla definizione 14.4.1 che esiste una funzione f tale per cui $df = \omega$, e allora risulta $\int_{\boldsymbol{\varphi}} df = f(\boldsymbol{\varphi}(\beta)) - f(\boldsymbol{\varphi}(\alpha))$. Una curva $\boldsymbol{\psi} \in \Phi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(A)$ ha gli stessi estremi, siano essi $\boldsymbol{\psi}(\gamma) = \boldsymbol{\varphi}(\alpha)$ e $\boldsymbol{\psi}(\delta) = \boldsymbol{\varphi}(\beta)$, e dunque

$$\int_{\boldsymbol{\psi}} df = f(\boldsymbol{\psi}(\delta)) - f(\boldsymbol{\psi}(\gamma)) = f(\boldsymbol{\varphi}(\beta)) - f(\boldsymbol{\varphi}(\alpha)) = \int_{\boldsymbol{\varphi}} df. \quad (14.4.3)$$

Sia ora $\mathbf{p} \in A$: poiché l'insieme è connesso per archi, per ciascun punto $\mathbf{x} \in A$ esiste una curva $\boldsymbol{\varphi}$ regolare a tratti che connette i due punti, vale a dire $\boldsymbol{\varphi} \in \Phi_{\mathbf{p}, \mathbf{x}}(A)$. Sia allora $F(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega$: per ipotesi, l'integrale dipende soltanto dagli estremi della curva, quindi fissato \mathbf{p} la F è ben definita. L'insieme A è aperto, quindi esiste sempre un intorno $B(\mathbf{x}, \delta) \subset A$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Vogliamo ora calcolare il rapporto incrementale di F lungo una direzione arbitraria, ai fini di calcolare la derivata direzionale, e vedremo che i coefficienti a_i della forma sono le derivate parziali di F . Prendiamo un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, e per $h \in \mathbb{R}$ valutiamo l'incremento $\mathbf{q} = \mathbf{x} + h\mathbf{v}$. Per $|h|$ sufficientemente piccolo, anche \mathbf{q} è in A . Chiamiamo allora $\boldsymbol{\psi}$ la curva

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ \mathbf{x} + (t - \beta)h\mathbf{v} & t \in (\beta, \beta + 1] \end{cases}$$

Essa va da $\boldsymbol{\psi}(\alpha) = \mathbf{p}$ a $\boldsymbol{\psi}(\beta + 1) = \mathbf{x} + (\beta + 1 - \beta)h\mathbf{v} = \mathbf{q}$, passando per $\boldsymbol{\psi}(\beta) = \mathbf{x}$, ed è regolare a tratti con sostegno in A . Calcoliamo dunque l'incremento di F , ossia $F(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - F(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\psi}} \omega - \int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega$, che per definizione è

$$\int_{\alpha}^{\beta+1} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\psi}(t)) \psi'_i(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt. \quad (14.4.4)$$

Nell'intervallo $[\alpha, \beta]$, però, le due curve $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ coincidono, quindi $a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) = a_i(\boldsymbol{\psi}(t))$ per ogni t in tale intervallo e per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora l'incremento di F diventa

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt + \int_{\beta}^{\beta+1} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\psi}(t)) \psi'_i(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt = \\ &= \int_{\beta}^{\beta+1} \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\psi}(t)) \psi'_i(t) dt = \\ &= \int_{\beta}^{\beta+1} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + (t - \beta)h\mathbf{v}) h v_i dt. \end{aligned} \quad (14.4.5)$$

Effettuiamo ora un cambio di variabile, ponendo $r = h(t - \beta)$, per cui si avrà $r(\beta) = 0$, $r(\beta + 1) = h$ e $dr = h dt$: l'integrale precedente diventa

$$\int_0^h \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + r\mathbf{v}) v_i dr. \quad (14.4.6)$$

Dividendo per h e passando al limite per $h \rightarrow 0$, anche r tende a zero, quindi possiamo passare dal limite per h al limite per r . Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo la derivata di F in \mathbf{x} lungo la direzione indicata da \mathbf{v} :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + r\mathbf{v}) v_i dr = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + r\mathbf{v}) v_i = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) v_i. \quad (14.4.7)$$

Possiamo vederlo anche con il teorema di De L'Hôpital, derivando rispetto ad h poiché numeratore e denominatore tendono entrambi a zero: la derivata del numeratore h è chiaramente 1, quella del denominatore, che è una funzione integrale, per il teorema fondamentale del calcolo integrale è invece la funzione integranda valutata in h (a questo punto non sarebbe nemmeno necessario passare al limite in r). In ogni caso, notiamo che, poiché la derivata direzionale si può ottenere come prodotto scalare tra il gradiente di F e \mathbf{v} , che proprio $\nabla F = (a_1, \dots, a_n)$. Allora si ottiene

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i = \nabla F \cdot d\mathbf{x} = dF, \quad (14.4.8)$$

ossia ω è esatta. □

14.5 Forme differenziali chiuse

Le forme esatte sono importanti, ma i teoremi che abbiamo visto finora sono poco utili a individuarle: è chiaramente impossibile verificare che l'integrale sia nullo lungo *ogni* curva chiusa. Dobbiamo quindi cercare delle condizioni più facili da verificare, e sufficienti ad affermare che una forma è esatta.

Se una forma differenziale è esatta in un insieme A connesso e aperto ed è continua, allora il suo potenziale è una funzione $F \in \mathcal{C}^2(A)$: per essa vale il teorema di Schwarz, per cui le derivate miste coincidono. Poiché la forma è esatta, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$, perciò

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \quad (14.5.1)$$

Questa proprietà che le derivate miste "incrociate" sono uguali si ritrova nella seguente definizione.

Definizione 14.5.1. Una forma differenziale lineare $\omega \in \mathcal{C}^1(A)$ per un insieme $A \in \mathbb{R}^n$ aperto si dice chiusa in tale insieme se

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (14.5.2)$$

per ogni $\mathbf{x} \in A$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Da quanto appena detto è evidente che tutte le forme differenziali esatte sono anche chiuse, ma questa proprietà si ritrova anche in altre forme, per cui non vale l'inverso. Prendiamo ad esempio la forma

$$\omega(x, y) = a_1(x, y) dx + a_2(x, y) dy = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Essa è $\mathcal{C}^\infty(A)$, ed è chiusa, infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad (14.5.3)$$

Notiamo inoltre che la funzione $F(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$, a meno di costanti arbitrarie, è tale per cui $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = a_1(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = a_2(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$, quindi se esiste un potenziale non può che essere della forma $F(x, y) + c$ con $c \in \mathbb{R}$. A causa della singolarità per $y = 0$ dobbiamo però prima dividere A nei due sottoinsiemi per $y < 0$ e $y > 0$, in cui avremo rispettivamente $F(x, y) + c$ e $F(x, y) + d$ (a priori non possiamo dire che sono uguali). Determiniamo queste costanti: fissato $x_0 < 0$, abbiamo i limiti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} F(x, y) = c - \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} F(x, y) = d + \frac{\pi}{2}, \quad (14.5.4)$$

che devono coincidere, quindi $c = d + \pi$ e abbiamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} + c & y > 0 \\ c - \frac{\pi}{2} & y = 0 \\ \arctan \frac{x}{y} + c - \pi & y < 0 \end{cases} \quad (14.5.5)$$

Però se prendiamo $x_1 > 0$, abbiamo i limiti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow 0^+}} F(x, y) = \frac{\pi}{2} + c \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow 0^-}} F(x, y) = -\frac{3\pi}{2} + c, \quad (14.5.6)$$

ma allora F è discontinua in A , perciò non può essere il potenziale di ω , che quindi non ammette potenziali e non è esatta. Il problema da superare non risiede tanto nella funzione, ma nell'insieme in cui la stiamo studiando: è ovvio che se al posto di A avessimo preso solo, ad esempio, il suo sottoinsieme in cui $x > 0$, non ci sarebbero stati problemi di continuità e avremmo senza problemi trovato un potenziale per ω .

Dobbiamo quindi restringere la classe degli insiemi “buoni” che ci permettano di dire quando una forma è chiusa è anche esatta: tali insiemi sono gli insiemi *semplicemente connessi*, che intuitivamente si possono pensare come insiemi “senza buchi”. Una definizione rigorosa può essere data tramite il concetto di curve omotopiche.

Definizione 14.5.2. Siano $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni di curve chiuse e $\mathcal{C}^2([a, b])$. La curva $\boldsymbol{\varphi}_1$ si dice omotopica a $\boldsymbol{\varphi}_2$ se esiste una mappa (detta appunto omotopia) $\boldsymbol{\xi}: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$, di classe \mathcal{C}^2 , tale per cui $\boldsymbol{\xi}(0, t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t)$ e $\boldsymbol{\xi}(1, t) = \boldsymbol{\varphi}_2(t)$, e per ogni $s \in [0, 1]$ si abbia $\boldsymbol{\xi}(s, a) = \boldsymbol{\xi}(s, b)$.

La mappa dell'omotopia tra le due curve si può vedere più facilmente come una deformazione continua (quindi “senza strappi”) e differenziabile che trasforma curve chiuse in curve chiuse nello stesso insieme.

Definizione 14.5.3. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni curva $\boldsymbol{\varphi}: [a, b] \rightarrow A$, di classe $\mathcal{C}^2(A)$ e chiusa è omotopica ad un punto in A , ossia ad una curva (degenere) costante $\boldsymbol{\psi}: [a, b] \rightarrow A$ per cui $\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{c}$, con $\mathbf{c} \in A$.

Con queste definizioni possiamo quindi enunciare il seguente importante teorema.

Teorema 14.5.4 (Lemma di Poincaré). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e semplicemente connesso, e ω una forma differenziale lineare di classe $\mathcal{C}^1(A)$. Se ω è chiusa in A , allora è anche esatta in tale insieme.

La forma vista nell'esempio precedente non può essere esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ perché l'insieme non è semplicemente connesso: ogni curva che circonda l'origine non può essere deformata in un punto (dell'insieme) tramite un'omotopia, perché abbiamo il "buco" nell'origine che lo impedisce. Questo risultato è molto importante, perché fornisce le condizioni meno restrittive per affermare l'esattezza della forma. La sua dimostrazione però è piuttosto complicata, e non la trattiamo: possiamo però verificarne la validità su insiemi più semplici, come gli insiemi cosiddetti *stellati* o gli insiemi convessi, che sono tutti semplicemente connessi quindi per le forme in tali insiemi vale il lemma di Poincaré.

Definizione 14.5.5. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice stellato rispetto ad un suo punto \mathbf{x}_0 se per ogni $\mathbf{x} \in A$ si ha $[\mathbf{x}, \mathbf{x}_0] \subset A$, cioè il segmento che li unisce è tutto contenuto in A .

Alcuni semplici insiemi stellati sono gli insiemi convessi, per i quali il segmento che unisce qualsiasi suoi due punti è interno all'insieme, dunque sono stellati rispetto a tutti i loro punti. Vediamo quindi una dimostrazione del lemma di Poincaré per questi insiemi stellati.

Teorema 14.5.6. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e stellato, e ω una forma differenziale lineare in A . Se ω è chiusa in A , allora è anche esatta in tale insieme.

Dimostrazione. Prendiamo un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ rispetto al quale l'insieme è stellato, e per ogni $\mathbf{x} \in A$ parametrizziamo il segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ con la funzione $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)t$, con $t \in [0, 1]$: chiaramente è una curva con sostegno in A . Per mostrare l'esattezza della forma, definiamo $F(\mathbf{x}) := \int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega$ e verifichiamo che ne è il potenziale. Calcolando l'integrale della forma lungo il segmento dato otteniamo

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)t)(x_i - x_{0,i}) dt. \quad (14.5.7)$$

Si ha che ω è almeno di classe $\mathcal{C}^1(A)$, in quanto chiusa, quindi per la sua continuità e per la linearità della derivazione risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t))(x_i - x_{0,i}) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [a_i(\boldsymbol{\varphi}(t))(x_i - x_{0,i})] dt. \end{aligned} \quad (14.5.8)$$

Svolgendo la derivata del prodotto, troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i - x_{0,i}) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \delta_{ij} dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt. \end{aligned} \quad (14.5.9)$$

Possiamo dunque scambiare $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ con $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ in virtù della chiusura della forma. Inoltre, sviluppiamo la derivata di a_j nel prodotto delle derivate delle due funzioni composte, a_j e $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(t))(x_i - x_{0,i}) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \nabla a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}(t) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(t) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}(t(x_k - x_{0,k})) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{\varphi}(t)) t \delta_{ik} dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(t)) t dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt.
 \end{aligned} \tag{14.5.10}$$

Riconosciamo ora nel termine della sommatoria, a meno del fattore t , la derivata totale rispetto al tempo della funzione $a_j(\boldsymbol{\varphi}(t))$, per cui

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t \frac{da_j}{dt}(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt + \int_0^1 a_j(\boldsymbol{\varphi}(t)) dt, \tag{14.5.11}$$

e riunendo gli integrali abbiamo la derivata temporale del prodotto $ta_j(\boldsymbol{\varphi}(t))$, quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [ta_j(\boldsymbol{\varphi}(t))] dt = ta_j(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)t) \Big|_0^1 = a_j(\mathbf{x}), \tag{14.5.12}$$

ma allora F è il potenziale di ω , che dunque è esatta. \square

La dimostrazione appena eseguita indica anche un metodo per individuare, se esiste, il potenziale di una forma su un insieme stellato: si prende un punto nell'insieme dato (rispetto al quale l'insieme è stellato!), e si calcola l'integrale della forma lungo un segmento che connette tale punto ad un generico \mathbf{x} , sempre nell'insieme. Ad esempio, prendiamo in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ la forma differenziale

$$\omega(x, y) = a_1(x, y) dx + a_2(x, y) dy = \frac{2xy - 2x^2 - 1}{y - x} dx + \frac{y - x + 1}{y - x} dy.$$

Essa è di classe $\mathcal{C}^\infty(A)$, ed è chiusa: infatti

$$\frac{\partial a_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(2x - \frac{1}{y - x} \right) = \frac{1}{(y - x)^2} = \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, y). \tag{14.5.13}$$

L'insieme A è convesso, quindi ω è anche esatta. Prendiamo il punto $(0, 1)$ e la curva $\boldsymbol{\varphi}(t) = (tx, 1 + (y - 1)t)$ che lo connette con un generico $(x, y) \in A$, con $t \in [0, 1]$. Il suo potenziale è la

funzione $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ determinata da

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}) &= \int_{\varphi} \omega = \int_0^1 \left[2tx - \frac{1}{1 + (y-1)t - tx} \right] x \, dt + \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{1 + (y-1)t - tx} \right] (y-1) \, dt = \\
 &= \int_0^1 2tx^2 \, dt + \int_0^1 (y-1) \, dt + \int_0^1 \frac{y-x-1}{1 + (y-1)t - t} \, dt = \\
 &= x^2 \int_0^1 2t \, dt + (y-1) \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{y-x-1}{1 + (y-x-1)t} \, dt = \\
 &= x^2 + y - 1 + \log [1 + (y-x-1)t] \Big|_0^1 = x^2 + y - 1 + \log(y-x).
 \end{aligned}
 \tag{14.5.14}$$

Più rigorosamente, questa funzione è solo una dei potenziali di ω , che sono della forma $F + c$ per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$. La scelta di calcolare l'integrale dal punto $(0, 1)$ ci ha dato un potenziale che si annulla in tale punto. Questo è utile quando è espressamente richiesto che il potenziale soddisfi una condizione di questo tipo: se vogliamo che F valga $F_0 \in \mathbb{R}$ in un dato punto \mathbf{x}' , troveremo subito il potenziale richiesto con la formula

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + \int_{[\mathbf{x}', \mathbf{x}]} \omega \tag{14.5.15}$$

assicurandoci chiaramente che l'insieme sia stellato rispetto a \mathbf{x}' .