Geometria

8 giugno 2015

Capitolo 1

Determinanti

Prima di affrontare i determinanti, abbiamo bisogno di qualche definizione e proprietà sulle permutazioni tra numeri naturali.

1.1 Permutazioni

Definizione 1.1.1. *Sia J_n l'insieme dei naturali consecutivi fino a n, ossia l'insieme* $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. *Una* permutazione *è una mappa iniettiva $\sigma \colon J_n \to J_n$.*

Una permutazione si può rappresentare ad esempio nella forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 50 & 849 & 23 & 1 & 9234 & \cdots & k \end{pmatrix},$$

in cui $k \in J_n$. La scrittura S_n indica l'insieme delle permutazioni σ da J_n in sé stesso. Poiché gli insiemi J_n hanno cardinalità finita, una permutazione è automaticamente anche suriettiva. Si indica con σ^{-1} l'inversa di σ. La composizione di due permutazioni ζ e σ si indica in notazione moltiplicativa come $\zeta\sigma$. L'insieme $(S_n, \cdot)$, delle permutazioni dei primi n numeri naturali rispetto alla composizione, forma un gruppo non abeliano, detto *gruppo simmetrico*. Il suo elemento neutro è la permutazione che lascia invariati tutti gli elementi di J_n.

Definizione 1.1.2. *Si chiama* scambio*, o* trasposizione*, è un'operazione $J_n \to J_n$ che consiste nello scambio di due elementi, lasciando invariati tutti gli altri.*

L'importanza delle trasposizioni sta nella seguente proprietà.

Proprietà 1.1.3. Ogni permutazione si può sempre esprimere come prodotto di scambi:

$$\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_s.$$

Proprietà 1.1.4. Esiste ed è unica un'applicazione $\varepsilon \colon S_n \to \{-1, 1\}$ tale che

- se τ è uno scambio, $\varepsilon(\tau) = -1$;
- se $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, allora $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$.

Una tale applicazione è detta *segno*. Presa una permutazione $\sigma \in S_n$, essa si dice pari se il suo segno è 1, dispari se è -1. Se s è il numero di scambi effettuati, il segno della permutazione che risulta dalla loro composizione è $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$.

1.2 Applicazioni multilineari

Definizione 1.2.1. *Siano $V_1, V_2, \dots, V_n, W$ degli spazi vettoriali sul campo K. L'applicazione $h\colon V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ si dice* multilineare *se $\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_n \in V_n$ e $v_i', v_i'' \in V_i$ e $\mu, \lambda \in K$ si ha che*

$$h(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu v_i' + \lambda v_i'', v_{i+1}, \dots, v_n) = \mu h(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_n) + \\ + \lambda h(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Definizione 1.2.2. *L'applicazione $h\colon V_1 \times \dots \times V_n \to W$ si dice* alternante *se ogniqualvolta esistono due indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$ per i quali $v_i = v_j$, si ha $h(v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n) = 0$.*

Da questo segue che scambiando due elementi v_i e v_j si ottiene che $h(v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n) = -h(v_1, \dots, v_j, v_i, \dots, v_n)$.

Teorema 1.2.3 (di unicità)**.** Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice di $\mathrm{Mat}_n(K)$, dove K è un campo. Esiste ed è unica un'applicazione multilineare alternante $h\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ (che può essere anche visto come spazio vettoriale su sé stesso) tale per cui $h(I_n) = 1$ e, con $\lambda \in K$,

$$h(A) = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Un'applicazione multilineare alternante particolarmente interessante è il *determinante*, che è una funzione che associa ad ogni matrice quadrata uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche. Il determinante di una matrice M di indica con $\det M$, oppure racchiudendo i suoi coefficienti tra due righe verticali.

1.3 Proprietà

Assiomi di definizione Sia $\mathrm{Mat}_n(K)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n e a coefficienti in un campo K. Cerchiamo una funzione $\det\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ aventi le seguenti proprietà[1]:

(i) $\det I = 1$, dove I è la matrice identità di $\mathrm{Mat}_n(K)$;

(ii) se A ha due righe o colonne uguali, $\det A = 0$,

$$\det(A_1 \cdots A_n) = 0 \text{ se } \exists i, j = 1, \dots, n\colon A_i = A_j;$$

(iii) se B è ottenuta moltiplicando una riga o una colonna di A per uno scalare $k \in K$, allora $\det B = k \det A$,

$$\det(A_1 \cdots \lambda A_i \cdots A_n) = \lambda \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_n);$$

(iv) se B è ottenuta scambiando due righe o due colonne di A, allora $\det B = -\det A$,

$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n), \text{ con } i \neq j;$$

(v) $\det(A_1 \cdots A_i + C \cdots A_n) = \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots C \cdots A_n)$;

Una funzione che soddisfa queste proprietà esiste, ed è unica, ed è appunto il determinante.

Definizione 1.3.1. *Data una generica matrice A, si definisce* pivot *il primo elemento non nullo di ogni riga di una matrice ridotta a scala (cioè con elementi solo sulla diagonale).*

[1] Nei seguenti punti si indicheranno con A_i i vettori colonna di K^n: affiancando n di questi vettori si ottiene una matrice di $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Proprietà 1.3.2 (Metodo di Gauss)**.** Sia K un campo con caratteristica[2] diversa da 2. Sia $\det\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ una funzione soddisfacente le proprietà precedentemente elencate. Allora:

1. Se A ha una riga o una colonna nulla, $\det A = 0$.
2. Per $\lambda, \mu \in K$, se $A_i' = \lambda A_i + \mu A_j$, dove $\{A_k\}_{k=1}^n$ indicano le righe della matrice, allora
$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_i' \\ A_j \\ A_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j \\ A_n \end{vmatrix}.$$
3. Se $\operatorname{rk} A < n$, dove n è l'ordine della matrice, allora $\det A = 0$; se invece $\operatorname{rk} A = n$, $\det A = (-1)^s p_1 p_2 \cdots p_n$, dove s è il numero di scambi di righe o colonne effettuati e $p_1, \dots, p_n$ sono i pivot della matrice ridotta a scala.

Dimostrazione. 1. La riga o colonna nulla si può vedere come $0 \cdot A_i$ dove A_i è una riga o colonna qualunque, quindi per la (iii) si ha che il determinante è nullo.

2. Per la (v) si ha
$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i + \mu A_j \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mu A_j \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix},$$
ma la seconda matrice ha due righe uguali quindi il suo determinante è nullo per il punto precedente.

3. Per ridurre a scala una matrice, si cambia il segno del determinante tante volte (s) quante volte si sono scambiate due righe, mentre il determinante non varia sostituendo ad una riga A_i una combinazione lineare del tipo $1_K A_i + \mu A_j$, con $i \neq j$. Se il rango della matrice non è massimo, cioè non è esattamente n, si ha automaticamente come risultato una riga nulla, quindi il determinante è nullo. Altrimenti, sia
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$
Si può scrivere la prima riga come la somma dei vettori riga $B_1 = B_1' + B_1''$, dove $B_1' = (b_{11}, 0, \dots, 0)$ e $B_1'' = (0, b_{12}, \dots, b_{1n})$. Allora risulta
$$\det B = \begin{vmatrix} B_1' \\ \vdots \\ B_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1'' \\ \vdots \\ B_n \end{vmatrix},$$
ma il secondo termine ha la prima colonna nulla, ossia il suo rango non è massimo, perciò ha determinante nullo. Iterando il processo sulle righe seguenti, si ottiene che il determinante di B è uguale al determinante della matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

[2] La caratteristica di K è il più piccolo numero naturale n tale che $nx = 0$ per ogni elemento x di K: $\operatorname{char} K = \{n \in \mathbb{N} \colon nx = 0_K,\ \forall x \in K\}$. Se tale numero non esiste, la caratteristica è per definizione 0.

che è a sua volta equivalente a $b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$, si ha quindi $\det B = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$.

□

Andiamo ora a vedere le condizioni che permettono a una matrice di essere ridotta a scala:

Proprietà 1.3.3. Una matrice generica A può essere ridotta a scala se soddisfa le seguenti proprietà:

- Se A_{ij} è la riga e la colonna in cui la matrice A ammette un pivot, allora la i-esima riga, se ammette un pivot, lo ammette su una colonna di indice almeno $j+1$.
- Se la riga j-esima di A non ammette pivot, allora non li ammette nemmeno la riga $j+1$-esima.

Definizione 1.3.4. *Sia A una matrice, si definisce* rango *di A il numero di pivot della sua riduzione a scala. Esso si indica con* $\operatorname{rk} A$.

Teorema 1.3.5 (di Cramer)**.** Sia $A \in M_n(K)$, se abbiamo che $\operatorname{rk} A = n$ allora per ogni $b \in K^n$ il sistema lineare composto da A, detta matrice dei coefficienti, e da b, vettore dei termini noti, ammette una ed una sola soluzione.

Per dimostrarlo è sufficiente considerare la matrice $A|b$ e ridurla a scala. Da questo teorema se ne può definire uno analogo che si basa su questi risultati e che non verrà dimostrato.

Teorema 1.3.6 (di Rouchè-Capelli)**.** Sia $A \in \operatorname{Mat}_n K$ e sia $b \in K^n$, se A è la matrice dei coefficienti e b il vettore dei termini noti. Allora:

1. Il sistema ammette soluzioni se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$.
2. Se il sistema ammette soluzioni, allora l'insieme delle soluzioni dipende dal numero delle incognite e dal rango (cioè n e $\operatorname{rk} A$).

1.4 Calcolo del determinante

Il determinante coincide in pratica con la somma di tutti i possibili prodotti tra elementi di righe e colonne diverse della matrice: questa definizione è ovviamente inutilizzabile in generale, ma per le matrici di ordini piccoli si traduce in formule veloci per il suo calcolo. Il determinante di una matrice nulla è ovviamente 0. Per le matrici di ordine 1, che sono gli scalari del campo K, il determinante coincide con la loro unica componente: $\det(k_{11}) = k_{11}$. Per le matrici di ordine 2 vale

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Per le matrici di ordine 3 si può utilizzare la *regola di Sarrus*: il determinante può essere espresso come la somma dei prodotti degli elementi sulle tre "diagonali" a cui si sottrae la somma dei prodotti di quelli sulle "antidiagonali":

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Tale regola *non* si può estendere a matrici di ordini superiori.

Teorema 1.4.1 (Formula di Leibnitz)**.** Sia $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(K)$, con $\operatorname{char} K \neq 2$. Il suo determinante è dato da

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}. \tag{1.4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonica di K^n. Si può scrivere A come

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ a_{21}e_1 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \vdots \\ a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è la somma di elementi del tipo

$$\det \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)}e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)}e_n \end{pmatrix},$$

per linearità, scomponendo il determinante per ogni riga. Quindi

$$\det \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)}e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)}e_{n\sigma(n)} \end{pmatrix} = a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{n\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Sempre per la linearità, tutti questi determinanti si possono sommare, ottenendo

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$ □

Anche il metodo di Leibnitz, però, non fa molta luce su come si dovrebbe calcolare il determinante. Il metodo più usato è la *scomposizione di Laplace* per righe o per colonne.

Definizione 1.4.2. *Siano $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ e $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Con A_{ik} si indica la sottomatrice ottenuta eliminando da A la riga i-esima e la colonna k-esima. Si definiscono:*

- minore complementare *dell'elemento a_{ik} di A la quantità $M_{ik} = \det A_{ik}$;*
- complemento algebrico*, o* cofattore*, di a_{ik} lo scalare $C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.*

Teorema 1.4.3 (di Laplace)**.** Sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\det A = \sum_{i=1}^n C_{ik} a_{ik}, \tag{1.4.2}$$

e per ogni $h, k \in \{1, \dots, n\}$ distinti inoltre si ha che

$$\sum_{i=1}^n C_{ih} a_{ik} = 0_K. \tag{1.4.3}$$

Dimostrazione. Fissato k, dalla (1.4.1) risulta

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = a_{1k}\alpha_{1k} + \cdots + a_{nk}\alpha_{nk},$$

dove si è definito

$$\alpha_{ik} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k)=i}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(k-1)k-1} a_{\sigma(k+1)k+1} \dots a_{\sigma(n)n},$$

poiché tutti gli elementi con indice ik sono quelli per cui $\sigma(k) = i$, e l'elemento di indice $\sigma(k)k$, cioè in questo caso a_{ik}, è raccolto fuori dalla somma perché appare in tutti i prodotti. Poiché questo α_{ik} è per definizione proprio il determinante di A saltando la riga i e la colonna k, si ha $\alpha_{ik} = C_{ik}$, da cui la tesi.

La permutazione $\sigma \in S_{n-1}$ può essere vista anche come una permutazione di S_n in cui un elemento rimane fisso. Sia quindi

$$A' = (A_1 \cdots A_{k-1} A_k A_{k+1} \cdots A_{h-1} A_h A_{h+1} \cdots A_n),$$

dove $h > k$ e A_i sono dei vettori colonna, la matrice A in cui si è posto $A_h = A_k$. Risulta quindi

$$0 = \det A' = \sum_{i=1}^{n} a'_{ih} C'_{ih} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ih},$$

dato che $a'_{ih} = a_{ik}$ per come è stata definita A' e $C'_{ih} = C_{ih}$ perché eliminando da A o da A' la colonna h si ottiene la stessa sottomatrice, in quanto differivano tra loro proprio per quella colonna soltanto. □

Questo sviluppo può essere effettuato indifferentemente lungo una colonna o una riga. Il metodo migliore per applicarlo è scegliere la colonna o riga con il maggior numero di zeri, in modo da ridurre il numero di somme di determinanti minori nello sviluppo.

1.5 Determinante di matrici particolari

Teorema 1.5.1. Il determinante di una matrice coincide con quello della sua trasposta.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$, e $A^t = (b_{ij})$, per cui si deve avere che $b_{ij} = a_{ji}$. Dalla (**??**) si ha

$$\begin{aligned}
\det A^t &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det A,
\end{aligned}$$

sfruttando il fatto che le permutazioni sono biiettive, quindi si può scrivere $k = \sigma^{-1}\big(\sigma(k)\big)$, e alla fine cambiando da σ^{-1} a solo σ, poiché entrambe sono permutazioni di S_n quindi è equivalente, nel calcolo del determinante, scegliere l'una o l'altra. Il segno ε è uguale per entrambe, dato che contengono lo stesso numero di scambi, solo il "percorso" è al contrario. □

Vediamo ora invece le matrici inverse. Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, e $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ la matrice che ha come componenti c_{ij} i complementi algebrici delle rispettive componenti a_{ij} di A. Per il teorema di Laplace, dall'equazione (1.4.3) si ha che

$$C^t A = (\det A) I_n. \tag{1.5.1}$$

Teorema 1.5.2 (di Binet)**.** Per ogni $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$, si ha $\det(AB) = \det A \det B$.

Dimostrazione. Siano $f, g\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ definite come $B \overset{f}{\mapsto} \det(AB)$ e $B \overset{g}{\mapsto} \det A \det B$. Si dimostra che le due applicazioni coincidono: per fare ciò si mostra che sono entrambe multilineari alternanti, da cui per il teorema **??** devono coincidere. Sulla matrice identità, le due applicazioni agiscono come $f(I) = \det(AI) = \det A$ e $g(I) = \det I \det A = \det A$. L'applicazione f è multilineare, perché

$$\begin{aligned}
&f(B_1 \cdots \lambda B_i' + \mu B_i'' \cdots B_n) = \\
&= \det[A(B_1 \cdots \lambda B_i' + \mu B_i'' \cdots B_n)] = \\
&= \det(AB_1 \cdots \lambda AB_i' + \mu AB_i'' \cdots AB_n) = \\
&= \lambda \det(AB_1 \cdots AB_i' \cdots AB_n) + \mu \det(AB_1 \cdots AB_i'' \cdots AB_n) = \\
&= \lambda \det[A(B_1 \cdots B_i' \cdots B_n)] + \mu \det[A(B_1 \cdots B_i'' \cdots B_n)] = \\
&= \lambda f(B_1 \cdots B_i' \cdots B_n) + \mu f(B_1 \cdots B_i'' \cdots B_n),
\end{aligned}$$

ed è anche alternante perché scrivendo sempre B per colonne, si supponga $B_i = B_j$ per qualche $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distinti. Si ha che $f(B) = \det(AB) = \det(AB_1 \cdots AB_n) = 0$ per l'alternanza del determinante, dato che $AB_i = AB_j$. Si può dimostrare che anche g ammette le stesse proprietà, quindi anche g è multilinare alternante. Allora f e g devono coincidere, per il teorema **??**, dunque $f(B) = g(B)$ cioè $\det(AB) = \det A \det B$. □

Da questo teorema si ricava, per la matrice inversa A^{-1}, che $\det(AA^{-1}) = \det I$, quindi $\det A \det A^{-1} = 1_K$: questa uguaglianza non ha modo di esistere se $\det A$ è nullo, altrimenti si avrebbe l'assurda uguaglianza $0 = 1$, che in un campo come K non ha senso. Allora per essere invertibile, una matrice deve necessariamente avere il determinante non nullo. Inoltre $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Per individuare la matrice inversa di A, la si può o costruire prendendo la trasposta della matrice dei cofattori, divisa per $\det A$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t,$$

oppure si affianca alla matrice identità formando $(A \mid I)$ e con il metodo dell'eliminazione di Gauss si procede arrivando alla forma $(I \mid M)$; la matrice M è proprio l'inversa di A cercata.

L'insieme delle matrici invertibili, o alternativamente con determinante non nullo, a coefficienti in K si indica con $GL(n, K)$.

- Se $A, B \in GL(n, K)$, allora per il teorema di Binet $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$ essendo K un campo, dunque $AB \in GL(n, K)$.
- La matrice identità I è un elemento neutro rispetto alla composizione, dato che $AI = IA = A$ per ogni $A \in GL(n, K)$.
- Infine, data $A \in GL(n, K)$ esiste sempre la sua inversa A^{-1}, sempre in tale insieme, e $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Ciò prova che $GL(n, K)$, dotato dell'usuale prodotto righe per colonne tra matrici, è un gruppo: esso è chiamato *gruppo generale lineare* di K. In esso, individuiamo il sottoinsieme delle matrici con determinante 1: se $\det P = 1$, allora per ogni $M \in GL(n, K)$ si ha $\det(M^{-1}PM) = \det(M^{-1}) \det P \det M = \det P$ perciò $M^{-1}PM$ ha ancora determinante 1. Ciò rende tale insieme un sottogruppo normale di $GL(n, K)$: esso è detto *gruppo speciale lineare* di K e si indica con $SL(n, K)$. Il determinante agisce come un omomorfismo tra i gruppi $GL(n, K)$ e $K^\times$, in quanto preserva le operazioni interne ad essi.