Geometria

23 giugno 2015

Capitolo 1

Applicazioni lineari

1.1 Definizione

Definizione 1.1.1. *Siano V e Z due spazi vettoriali su un campo K. Si definisce* applicazione lineare *una funzione $T\colon V \to Z$ omogenea e additiva, ossia per la quale $\forall x, y \in V$ e $\lambda \in K$, si ha*

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad e \quad T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

dove i primi membri delle uguaglianze sono operazioni in V, e i secondi sono operazioni in Z (indicando con $+$ e $\cdot$ le due operazioni interne per entrambi gli spazi).

Le applicazioni lineari sono dunque degli omomorfismi tra spazi vettoriali, in quanto ne preservano la struttura data dalle operazioni interne. Per linearità, vale sempre la relazione $T(0_V) = 0_Z$, poiché $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, da cui $T(0_V) = 0_Z$ sottraendo $T(0_V)$ a entrambi i membri: quest aè una condizione facile da usare per verificare la linearità di una data funzione. L'insieme delle applicazioni lineari da V a Z è indicato con $\mathscr{L}(V, Z)$. Un'applicazione lineare da uno spazio in sé stesso è detta *endomorfismo* (lineare), e indichiamo l'insieme degli endomorfismi di uno spazio V con $\operatorname{End}(V)$.

Esempi

- L'applicazione identità di V, indicata con $\mathbb{I}_V$, per la quale $\mathbb{I}_V(v) = v$ per ogni $v \in V$, è ovviamente lineare.
- L'applicazione nulla, che associa ad ogni elemento lo zero dello spazio di arrivo: $0(v) = 0_Z$ per ogni $v \in V$, anch'essa lineare in modo ovvio.
- Sia W un sottospazio di V: chiamiamo *proiezione canonica* in W la funzione $\pi\colon V \to V\,/\,W$ che ad ogni $v \in V$ associa la classe di equivalenza $[v]_W = W + v$. Tale funzione è additiva in quanto per $a, b \in V$, $\pi(a+b) = W + (a+b) = (W+a) + (W+b) = \pi(a) + \pi(b)$. È anche omogenea perché $\pi(\lambda a) = W + \lambda a = \lambda(W + a) = \lambda\pi(a)$. La funzione π è quindi un'applicazione lineare.
- La funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f([x, y]^T) = [x+y, y+1]^T$ non è un'applicazione lineare, poiché $f([0,0]^T) = [0,1]^T \neq [0,0]^T$.

L'iniettività e la suriettività delle applicazioni lineari sono definite allo stesso modo di una qualsiasi funzione. In particolare, un'applicazione lineare che è sia iniettiva che suriettiva è detta *isomorfismo lineare* (o solo isomorfismo). Due spazi vettoriali V e Z legati da un isomorfismo $T\colon V \to Z$ sono detti *isomorfi*, e si indica ciò con la scrittura $V \cong Z$.

Come ogni omomorfismo, definiamo un nucleo anche per le applicazioni lineari.

Definizione 1.1.2. *Si definisce* nucleo *dell'omomorfismo T l'insieme degli elementi $x \in V$ tali per cui $T(x) = 0_Z$:*

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in V : T(x) = 0_Z\}.$$

La linearità permette una facile verifica dell'iniettività di un'applicazione lineare.

Teorema 1.1.3. Un'applicazione lineare $T \in \mathscr{L}(V, Z)$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$.

Dimostrazione. Per ogni applicazione lineare vale $T(0_V) = 0_Z$, come già visto. Per l'iniettività, ogni $z \in Z$ ha un'unica controimmagine, quindi l'unico $v \in V$ per cui $T(v) = 0_Z$ è proprio 0_V, di conseguenza $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$.

Viceversa, ipotizziamo $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$. Se $T(v) = T(w)$ allora $T(v) - T(w) = 0_Z$, e per linearità si ha $T(v - w) = 0_Z$, cioè $v - w \in \operatorname{Ker} T$. Ma $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$ implica $v - w = 0_V$, dunque $v = w$ e T è iniettiva. □

Le applicazioni lineari conservano anche i rapporti tra sottospazi: dati W, U sottospazi se $W \leq V$, e $T : V \to Z$, allora $T(W) \leq Z$; analogamente le controimmagini di $U \leq Z$ sono $T^{-1}(U) \leq V$. Ad esempio, siano $y_1, y_2 \in T(W)$. Essi certamente hanno le loro controimmagini in W: siano esse $w_1, w_2 \in W : T(w_1) = y_1$ e $T(w_2) = y_2$. Allora $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2) = y_1 + y_2 \in T(W)$, poiché $w_1 + w_2 \in W$ dato che è uno spazio vettoriale. Analogamente, dati $y \in T(W)$ e $w \in W$ per i quali $T(w) = y$, si ha $T(\lambda w) = \lambda T(w) = \lambda y \in T(W)$. Inoltre poiché $\{0_Z\} \leq Z$, si ha che $\operatorname{Ker} T \leq V$.

Definizione 1.1.4. *Sia $T \in \mathscr{L}(V, Z)$. Si definisce* immagine *di T l'insieme degli elementi $z \in Z$ per i quali esiste una controimmagine $v \in V$:*

$$\operatorname{Im} T = \{z \in Z : \exists v \in V : T(v) = z\}.$$

Sia il nucleo che l'immagine di un omomorfismo $T \in \mathscr{L}(V, Z)$ sono sottospazi vettoriali, rispettivamente di V e di Z. Infatti:

- Siano $v, w \in \operatorname{Ker} T$ e $k \in K$. Allora $T(v + w) = T(v) + T(w) = 0_V + 0_V = 0_V$, e $T(kv) = kT(v) = k0_V = 0_V$, quindi $v + w$ e kv appartengono a $\operatorname{Ker} T$.
- Siano $y, z \in \operatorname{Im} T$ e $k \in K$. Esistono due vettori $a, b \in V$ per i quali $T(a) = y$ e $T(b) = z$. Allora $z + y = T(a) + T(b) = T(a + b)$, cioè $z + y$ è l'immagine di un elemento $a + b$, che appartiene V che è uno spazio vettoriale; analogamente $T(ka) = kT(a) = ky$, quindi ky è a sua volta l'immagine di un elemento $ka \in V$. Di conseguenza $z + y$ e ky appartengono ancora a $\operatorname{Im} T$.

1.2 Teoremi degli isomorfismi

Il seguente teorema è importante perché consente di esprimere l'immagine di un omomorfismo come somma di un elemento del suo nucleo e di una sua immagine.

Teorema 1.2.1. Siano $T \in \mathscr{L}(V, Z)$ e z un elemento di Z per cui $T(x) = z$, con $x \in V$. La classe di equivalenza $\operatorname{Ker} T + x$ è l'insieme degli elementi y di V che sono controimmagini di z:

$$V/\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T + x = \{y \in V : T(y) = z\}.$$

Dimostrazione. Un elemento della classe $\operatorname{Ker} T + x$ è del tipo $\alpha + x$, con $\alpha \in \operatorname{Ker} T$. La sua immagine è $T(\alpha + x) = T(\alpha) + T(x) = 0_Z + T(x) \in Z$, quindi $\operatorname{Ker} T + x \subseteq \{y \in V : T(y) = z\}$.

Sia invece $y \in V$, tale che $T(y) = z$: questo elemento appartiene a $\operatorname{Ker} T + x$, e si può sempre esprimere come $y = \beta + x$ con $\beta \in \operatorname{Ker} T$. Allora $T(y) = T(\beta) + T(x) = 0_Z + T(x)$; posti $T(x) = T(y) = z$, si ha $T(x) - T(y) = 0_Z$, ossia $x - y \in \operatorname{Ker} T$: allora $\exists \beta \in \operatorname{Ker} T$ per cui $x - y = \beta$, oppure $y = x + \beta$, cioè ogni y avente un'immagine in Z tramite T appartiene al laterale $\operatorname{Ker} T + x$. Quindi, poiché i due insiemi si includono a vicenda, devono coincidere. □

Teorema 1.2.2. Sia $W \leq V$ con V di dimensione finita. La dimensione di V/W è finita e vale $\dim V - \dim W$.

Dimostrazione. Il sottospazio W ha certamente dimensione finita: sia $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base di W. Essa si può estendere ad una base di V, per il teorema **??**. Allora $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\}$ è una base di V. Ora, prendiamo $W + a$, e $a \in V$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di E: $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} f_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m} f_{n+m}$. Poiché i termini fino a $\lambda_n e_n$ individuano un elemento di W, si ha che $a = W + \mu_1 f_{n+1} + \dots + \mu_m f_{n+m}$. Per la definizione della somma $\oplus$, questo è equivalente ad $a = \mu_1(W + f_{n+1}) \oplus \dots \oplus \mu_m(W + f_{n+m})$, ma allora la famiglia $\{W + f_{n+i}\}_{i=1}^m$ è un sistema di generatori di W, avente ovviamente m elementi. Una combinazione lineare di questa base può essere allora nulla se e solo se tutti i coefficienti sono nulli: sia quindi

$$\lambda_1(W + f_{n+1}) \oplus \lambda_2(W + f_{n+2}) \oplus \dots \oplus \lambda_m(W + f_{n+m}) = 0_{V/W} = W + 0_V.$$

Essa è per definizione equivalente a $W + (\lambda_1 f_{n+1} + \dots + \lambda_m f_{n+m})$. Per l'uguaglianza precedente, quindi, deve essere $\lambda_1 f_{n+1} + \dots + \lambda_m f_{n+m} = 0_V$, ma dato che l'insieme $\{f_{n+i}\}_{i=1}^m$ è linearmente indipendente, questo può accadere se e solo se tutti i λ_i sono nulli. Quindi anche l'insieme $\{W + f_{n+i}\}_{i=1}^m$ è linearmente indipendente, e poiché genera V/W è una base di V/W, che quindi ha dimensione m. $\square$

Teorema 1.2.3. Sia $T \in \mathscr{L}(V, Z)$ e $\{e_i\}_{i \in I} \subset V$. Allora:

1. Se $\{e_i\}_{i \in I}$ è un sistema di generatori per V e T è suriettivo, allora $\{T(e_i)\}_{i \in I}$ è un sistema di generatori per Z;

2. Se $\{e_i\}_{i \in I}$ è un sistema linearmente indipendente e T è iniettivo, allora $\{T(e_i)\}_{i \in I}$ è linearmente indipendente in Z.

Dimostrazione. Sia $z \in Z$: poiché T è suriettivo, esiste $v \in V$ per cui $T(v) = z$. Allora dato che v è dato da una combinazione lineare di elementi del sistema di generatori, cioè $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_r e_r$, con $\lambda_i \in K$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_r\} \subset \{e_i\}_{i \in I}$, si ha che $z = T(v) = \lambda_1 T(e_i) + \dots + \lambda_r T(e_r)$, quindi $\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ è un sistema di generatori per Z.

Sia ora I_0 un sottoinsieme di cardinalità finita di I. Presa una combinazione lineare che dia 0_Z, per la linearità dell'operazione T si ha

$$\sum_{j \in I_0} \lambda_j T(e_j) = T\big(\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j\big) = 0_Z.$$

Questo significa che $\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j \in \operatorname{Ker} T$, ma poiché T è iniettivo il suo nucleo è composto dal solo 0_V. Allora $\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j = 0_V$, e dato che $\{e_i\}_{i \in I_0}$ è un sistema linearmente indipendente ciò può accadere se e solo se $\forall j \in I_0\ \lambda_j = 0_K$. Quindi $\{T(e_j)\}_{j \in I_0}$ è un sistema linearmente indipendente. $\square$

Dunque combinando le due affermazioni risulta che l'immagine di una base tramite un isomorfismo è una base per lo spazio di arrivo.

Teorema 1.2.4 (Primo teorema dell'isomorfismo)**.** Sia $T \in \mathscr{L}(V, Z)$. Esiste ed è unico un omomorfismo iniettivo $\tilde{T} \in \mathscr{L}(V \,/\, \operatorname{Ker} T, Z)$ tale che $\tilde{T} \circ \pi = T$, dove π è la proiezione canonica da V in $V \,/\, \operatorname{Ker} T$. Allora $V \,/\, \operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Im} T$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\
& V \,/\, \operatorname{Ker} T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Verifichiamo che l'applicazione è ben definita, ossia che non dipenda dal rappresentante scelto per le classi in $V \,/\, \operatorname{Ker} T$, dimostriamo poi la linearità e infine l'iniettività.

Gli elementi di $V \,/\, \operatorname{Ker} T$ sono del tipo $\operatorname{Ker} T + a$, e la proiezione canonica π manda a in $\operatorname{Ker} T + a$. Deve quindi risultare $\tilde{T}\big(\pi(a)\big) = \tilde{T}(\operatorname{Ker} T + a) = T(a)$. Affinché $\tilde{T}$ sia ben definito, se $\operatorname{Ker} T + a = \operatorname{Ker} T + b$ deve essere $T(a) = T(b)$. Questo è mostrato applicando T all'uguaglianza, e la seconda segue automaticamente per la linearità di T, oppure notando che $a \sim b$ quando $a - b \in \operatorname{Ker} T$, e in tal caso $0_Z = T(a-b) = T(a) - T(b)$ cioè $T(a) = T(b)$. Se poi $\operatorname{Ker} T + a$ e $\operatorname{Ker} T + b$ sono distinte, si ha $a + b \notin \operatorname{Ker} T$: sia quindi per assurdo che $\tilde{T}(\operatorname{Ker} T + a) = \tilde{T}(\operatorname{Ker} T + b)$, cioè per definizione dell'applicazione lineare $\tilde{T}$ che $T(a) = T(b)$, che è in contraddizione con quanto ipotizzato in precedenza. Quindi l'applicazione esiste unica.

Si considerino le due classi di $V \,/\, \operatorname{Ker} T$ con rappresentante a e b: applicando $\tilde{T}$ alla loro somma (come definita nel capitolo **??**) si ottiene

$$\tilde{T}[(\operatorname{Ker} T + a) \oplus (\operatorname{Ker} T + b)] = \tilde{T}(\operatorname{Ker} T + a) + \tilde{T}(\operatorname{Ker} T + b) = T(a) + T(b), \tag{1.2.1}$$

e allo stesso tempo

$$\tilde{T}[(\operatorname{Ker} T + a) \oplus (\operatorname{Ker} T + b)] = \tilde{T}[\operatorname{Ker} T + (a + b)] = T(a+b) = T(a) + T(b). \tag{1.2.2}$$

perciò $\tilde{T}$ è lineare.

Consideriamo il $\operatorname{Ker} \tilde{T}$: esso è definito da

$$\operatorname{Ker} \tilde{T} = \{\operatorname{Ker} T + v \in V/\operatorname{Ker} T \colon T(v) = 0\}.$$

Si ha quindi che $\operatorname{Ker} \tilde{T}$ si riduce al solo $\operatorname{Ker} T$ e per come $\tilde{T}$ è definita questo si riduce al solo zero. Ciò prova che $\tilde{T}$ è iniettiva. Inoltre, $T(V)$ è anche automaticamente suriettiva poichè tutti gli elementi su cui agisce T sono queli su cui agisce anche $\tilde{T}$), dunque $\tilde{T}$ è un isomorfismo: allora $V \,/\, \operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Im} T$. □

Corollario 1.2.5. Se V ha dimensione finita e $T \in \mathscr{L}(V, Z)$, allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.

Dimostrazione. Segue facilmente dal teorema precedente e dal 1.2.2. □

Teorema 1.2.6 (Secondo teorema dell'isomorfismo)**.** Siano W, Z sottospazi vettoriali di V. Allora $(W + Z) \,/\, Z$ e $W \,/\, (W \cap Z)$ sono isomorfi per mezzo dell'applicazione lineare T definita come $T \colon Z + (w + z) \mapsto Z \cap W + w$, con $w \in W$ e $z \in Z$.

Dimostrazione. Affinche il teorema sia verificato l'applicazione T deve essere ben definita, cioè non dipendere dai rappresentanti della classe. Si verifica poi che l'applicazione T e lineare e sia iniettiva che suriettiva, perciò è un isomorfismo.

Verifichiamo sia ben definita: prendiamo due elementi dello spazio di partenza $Z + (w + z)$ e $Z + (w' + z')$, deve essere che $w - w' + z - z'$ è contenuto in Z poichè $w + z \sim w' + z'$ per definizione di spazio quoziente, questo mi permette di verificare che $Z \cap W + w = Z \cap W + w'$ appartengono entrambi a $Z \cap W$. Non è possibile che $w - w'$ appartiene a Z, deve però essere che $Z + (w + z - w' - z') = Z + 0_K$, affinchè l'applicazione sia ben definita nello spazio di partenza, deve essere per forza che $w - w'$ è contenuto in Z quindi abbiamo verificato $Z \cap W + w = Z \cap W + w'$ implica $w = w'$.

Verifichiamo che è lineare: sapendo $T \colon Z + (w + z) \mapsto Z \cap W + w$ consideriamo sempre due elementi $Z + (w + z)$ e $Z + (w' + z')$, inoltre consideriamo $\lambda \in K$, si ha che:

$$(Z + z + w) \oplus (\lambda[Z + z' + w']),$$
$$(Z + z + w + \lambda z' + \lambda w') \to Z \cap W + (w + \lambda w').$$

Possiamo riscrivere l'ultimo passaggio considerando l'effetto di T:

$$\begin{aligned} & Z \cap W + w + Z \cap W + \lambda w' = \\ = Z \cap W + (w + \lambda w') = & = T(Z + z + w + \lambda z' + \lambda w') = \\ & = T(Z + z + w) + T(+\lambda z' + \lambda w') = \\ & = T(Z + z + w) + \lambda T(+z' + w'), \end{aligned}$$

quindi è lineare.

Verifichiamo che è anche un isomorfismo: per come l'applicazione è definita si ha la suriettività, per verificare che è inettiva determiniamo il $\operatorname{Ker} T$ e ci assicuriamo che sia il solo 0_w.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker} T = \{\ Z + z + w \to Z \cap W + 0_w\},\\
&\operatorname{Ker} T = \{\ Z + z + w \colon Z \cap W + 0_w = Z \cap W + w\},\\
&\operatorname{Ker} T = \{\ Z + z + w \colon (w + z) \in Z \cap W\},\\
&\operatorname{Ker} T = \{\ Z + z + w \colon (w + z) \in Z\}.
\end{aligned}$$

Essendo $Z + 0_W$ si ha che l'unica classe che sta nel nucleo è Z poiche l'altra si riduce al solo 0_W. Abbiamo prima verificato $(w + z) \in Z$, questo per gli stessi passaggi compiuti inizialmente, che avevano come scopo verificare se l'applicazione fosse ben definita. Il $\operatorname{Ker} T$ si riduce allora al solo Z e per come T è definito è quindi composto dal solo zero, come dimostrato per il primo teorema dell'isomorfismo 1.2.4. Si conclude che il $\operatorname{Ker} T$ si riduce al solo zero da cui l'iniettività dell'applicazione. □

Corollario 1.2.7 (Formula di Grassmann)**.** Se gli spazi vettoriali W e Z hanno dimensione finita, allora $\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$.

Dimostrazione. I due spazi $(W + Z) / Z$ e $W / (W \cap Z)$ dal teorema precedente sono isomorfi, perciò hanno la stessa dimensione. Allora per il teorema 1.2.2 si ha che $\dim(W + Z) - \dim Z = \dim W - \dim(W \cap Z)$, da cui la tesi. □

1.3 Matrice associata

Definizione 1.3.1. *Si consideri un'applicazione lineare da $T \colon K^n \to K^m$, si fissano due basi nei rispettivi spazi, $\{v_i\}_{i=1}^n$ e $\{z_i\}_{i=1}^m$, con n, m dimensioni dei due spazi, la* matrice associata *a T rispetto a queste due basi è la matrice che ha per i-esima colonna il vettore ottenuto dai coefficienti della combinazione lineare ottenuta dalle immagini dei vettori della base di partenza in quella di arrivo.*

Diamo ora una defizione a scopo applicativo.

Definizione 1.3.2. *Si definisce* matrice associata *all'applicazione lineare $T \colon V \to Z$ la matrice A_L rispetto alle basi fissate $E = \{e_i\}$ in V e $Y = \{y_i\}$ in Z tale da rispettare la seguente relazione per ogni generico vettore v di V:*

$$[f(v)]_E = A[v]_Y;$$

con $[v]_Y$ le coordinate di v rispetto alla base Y e $f(v)$ le coordinate dell'immagine rispetto alla base E.

La matrice associata rispetta alcune proprietà ed è caratterizzata da una particolare applicazione lineare, per determinarle si devono compiere i seguenti passaggi che andremo a verificare.

Effetto dell'applicazione associata Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}$ e consideriamo l'applicazione $T \colon K^m \to K^n$, sapendo

$$K^m = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} : v_i \in K\} = \mathrm{Mat}_{m,1}(k)$$

Cerco di determinare l'azione compiuta da T_A sul generico vettore v_i e ottengo che non è altro che il prodotto righe per colonne tra il vettore e la matrice A. Quindi si ha:

$$T_a \colon \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{mi} v_i \end{pmatrix}.$$

Si ha che se consideriamo la base canonica e applichiamo ad essa T_A otteniamo che il vettore risultante ha come i-esimo elemento la i-esima riga della matrice A considerata.

Lo spazio $\mathscr{L}(V, Z)$ è vettoriale Se prendiamo gli spazi V, Z e consideriamo $\mathscr{L}(V, Z)$, se diamo a queste applicazioni la struttura di spazi vettoriali possiamo verificare la linearità (questo sarà utile in seguito). Prendiamo $U, S \in \mathscr{L}(V, Z)$, $v \in V$ e $\lambda \in K$ definiamo la somma e il prodotto per uno scalare;

$$(U + S)v = U(v) + S(v); (\lambda \cdot U)(v) = \lambda \cdot U(v)$$

Si ha quindi che entrambe le operazioni danno come risultato elementi di $\mathscr{L}(V, Z)$, quindi $(\mathscr{L}(V, Z), +, \cdot)$ è spazio vettoriale.

Linearità di T_A Considerando T_A e verificando che è lineare rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Si verifica $T_A \in \mathscr{L}(V, Z)$. Concludiamo che ad ogni matrice è possibile associare un omomorfismo T, quindi $\mathrm{Mat}_{n,m}(K) \to L(K^m, K^n)$.

Estensione di un'applicazione lineare a uno spazio

Lemma 1.3.3. Sia $T \colon V \to Z$ e $\{e_i\}$ una base di V. Se $\exists \tilde{T} \in \mathscr{L}(V, Z)$ tale che $\forall i\ T(e_i) = \tilde{T}(e_i)$, allora $T = \tilde{T}$.

Dimostrazione. un elemento $v \in V$ si scrive come $v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_{i_k}$. Allora poichè T è lineare si ha che

$$T(v) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k T(e_{i_k}),\ \text{con } T(e_i) = \tilde{T}(e_i); T(v) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \tilde{T}(e_{i_k}) = \tilde{T} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_{i_k} = \tilde{T}(v).$$

Allora abbiamo verificato $T = \tilde{T}$. Un'applicazione lineare è allora univocamente determinata dalla sua azione sulla base di uno spazio. □

Noto questo si può affermare che, dato V spazio vettoriale di dimensione m (finita) sul campo K e $\{e_i\}$ una base di V con $T \colon \{e_i\} \to K$ lineare, cioè $T(e_i) = k_i$, si può espendere l'applicazione a tutto lo spazio vettoriale V per linearità. Infatti dato $v \in V$ esso è uguale a

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i.$$

Si ha applicando T a v che

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} T(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(k_i).$$

I passaggi precedenti ci permettono ora di dare il seguente teorema relativo all'applicazione che associa ad ogni matrice un'applicazione.

Isomorfismo tra applicazioni lineari e matrici

Teorema 1.3.4. $T \colon \mathrm{Mat}_{n,m}(K) \to \mathscr{L}(K^m, K^n)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Verifichiamo che T è sia lineare che iniettiva e suriettiva.

- Prendiamo la base canonica di K^m, $\{e_i\}_{i \in I_0}$, posto I_0 sottoinsieme di cardinalità finita, sapendo $T(A) = T_A$, $T(B) = T_B$ verifichiamo $T_{A+B} = T_A + T_B$.

$$T_{A+B} = \begin{pmatrix} (A+B)_{1i} \\ \vdots \\ (A+B)_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)_{1i} \\ \vdots \\ (A)_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (B)_{1i} \\ \vdots \\ (B)_{mi} \end{pmatrix} = T_A + T_B.$$

Se verifichiamo il loro effetto sulla base otteniamo analogamente che

$$T_{A+B}(e_I) = T_A(e_i) + T_B(e_i),$$

ricordando che $T_A(e_i) = \sum_{i=1}^{n}(T_A)_{ji} f_j$, con $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ base di K^n. È semplice verificare che questo vale anche con il prodotto per uno scalare $\lambda \in K$. Quindi T è lineare.

- Consideriamo il $\operatorname{Ker} T$ per deterrminare l'iniettività:

  $$\operatorname{Ker} T = \{A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(K) \colon T_A = 0 \in \mathscr{L}(K^m, K^n)\};$$

  Quindi per ogni vettore $v \in V$ deve essere che l'immagine rispetto a T sia il vettore nullo, se consideriamo la base canonica $\{e_i\}_{i \in I_0}$, dovremmo quindi avere, per considerazioni preccedenti sull'azione di T_a su tale base che

  $$T_A(e_i) = \begin{pmatrix} (A)_{1i} \\ \vdots \\ (A)_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Quindi la matrice deve essere la matrice nulla, il $\operatorname{Ker} T$ contiene quindi solo lo zero dello spazio, per cui l'applicazione è inettiva.

- Se consideriamo un'altra applicazione $L \in \mathscr{L}(K^m, K^n)$ e consideriamo la loro azione sulla base canonica $\{e_i\}_{i \in I_0}$. Si deve avere che l'applicazione T e l'applicazione L hanno lo stesso effetto su tutti gli elementi della base canonica, quindi $T = L$ e ogni oggetto ha almeno una preimmagine. Abbiamo quindi verificato la suriettività.

Concludiamo che T è un'isomorfismo. □

Ora considerando l'applicazione inversa possiamo avvalorare la definizione di matrice associata ad un'applicazione, volendo, possiamo tramite essa dare una dimosttrazione del teorema precedente.

Applicazione inversa Avendo determinato che l'applicazione T del teorema precedente è isomorfismo di spazi vettoriali si può determinare l'applicazione inversa, che dovrà esistere e avere le stesse proprietà della sua inversa. Data l'applicazione $T \colon \operatorname{Mat}_{n,m}(K) \to L(K^m, K^n)$ esiste sempre $\tilde{T}$, inversa di T tale che $\tilde{T} \colon L \in L(K^m, K^n) \to mat_{n,m}(K)$. Considerando infatti $L(e_i) = \sum_{j=1}^{n}(\tilde{T}_L)_{ji} y_j$, in quanto si può sempre esprimere l'immagine di un applicazione come combinazione di elementi nello spazio di arrivo, date $\{e_i\} \in K^m, \{y_i\} \in K^n$

$$L(e_i) = z_i = t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{T}_L)_{ji} y_j.$$

Se si ha che $\tilde{T}_L \in \operatorname{Mat}_{n,m}(K)$ allora posso determinare l'inversa. Dato che

$$T \circ \tilde{T} = \mathbb{I}[L(V, Z)],$$
$$\tilde{T} \circ T = \mathbb{I}[\operatorname{Mat}_{n,m}(K)],$$

allora se cosideriamo l'applicazione L si dovrebbe avere $L = (\tilde{T} \circ T)(L)$. La composizione tra le applicazioni mi deve quindi dare l'applicazione identità, verifichiamo che deve essere:

$$L = (T \circ \tilde{T})(L) = T(\tilde{T}(L)) = T(\tilde{T}_L), \text{ quindi } T \colon \tilde{T}_L \to L.$$

Avendo poi definito $T_A = \sum_{j=1}^{n}(T_A)_{ji} y_j$ con $A \in \operatorname{Mat}_{n,m}(K)$ si ha che

$$L(e_i) = (\tilde{T} \circ T)(L(e_i)) = \tilde{T}(T(L(e_i))) = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{T}_L)_{ji} y_j,$$

Abbiamo concluso i passaggi necessari a generalizzare la matrice associata definita all'inizio del paragrafo, essa risulta quindi vera su spazi vettoriali qualsiasi.

1.4 Proprietà della matrice associata

Determinate le relazioni tra le applicazioni lineari e le matrici si possono introdurre le loro proprietà:

Teorema 1.4.1. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n$ base di V, $\{f_j\}_{j=1}^m$ base di Z e $\{g_k\}_{k=1}^s$ base di W con V, Z, W spazi vettoriali, date le applicazioni $L \in \mathscr{L}(V, Z)$ e $H \in \mathscr{L}(Z, W)$. Si ha che ad L corrisponde la matrice $A_L \in \operatorname{Mat} m, n(K)$ secondo le rispettive basi mentre ad H corrisponde analogamente $A_H \in \operatorname{Mat} s, m(K)$. Si ha che $H \circ L \in \mathscr{L}(V, W)$ quindi $A_{H\circ L} \in M_{s,n}(K)$, perciò $A_{H\circ L} = A_H A_L$ (secondo il prodotto riga per colonna).

Dimostrazione. Se $A_{H\circ L} = A_H A_L$ si deve avere che applicando $H \circ L$ alla base $\{e_i\}$ si deve ottenere per la combinazione lineare

$$H \circ L(e_i) = \sum_{k=1}^{s} (A_{H\circ L})_{ki} g_k,$$

questo poichè $P = A_{H\circ L}$ deve essere tale da $P\colon V \to W$, per cui A_P deve essere tale da avere il seguente comportamento su elementi della base di V:

$$P(e_i) = \sum_{k=1}^{s} (A_P)_{ki} g_k.$$

Partendo dalla relazione trovata per combinazione lineare verifichiamo che è vero:

$$\begin{aligned}
H \circ L(e_i) &= H(L(e_i)) = \\
&= H(\sum_{j=1}^{n} (A_L)_{ji} f_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (A_L)_{ji} H(f_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (A_L)_{ji} (\sum_{k=1}^{s} (A_H)_{kj} g_k) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} (A_L)_{ji} (A_H)_{kj} g_k = \\
&= \sum_{k=1}^{s} (A_H A_L)_{ki} g_k,
\end{aligned}$$

Abbiamo allora:

$$H \circ L(e_i) = \sum_{k=1}^{s} (A_H A_L)_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{s} (A_{H\circ L})_{ki} g_k.$$

Possiamo quindi affermare:

$$(A_H A_L)_{ki} = (A_{H\circ L})_{ki},$$

i coefficienti delle due matrici coincidono, quinidi devono per forza essere uguali. □

Teorema 1.4.2. Sia $\{e_i\}_{i=1}^m$ base di V e sia $L \in \mathscr{L}(V, V)$, cioè un endomorfismo lineare in V, sapendo inoltre $A_L \in \operatorname{Mat}_{m,m}(K)$ la matrice associata a L, rispetto alla stessa base in partenza e arrivo, si ha che L è invertibile (dunque un isomorfismo) se e solo se A_L è invertibile.

Dimostrazione. Considerando $x \in V$ si dice che x è invertibile se $\exists y \in V : xy = yx = I_v$, nello spazio delle matrici quadrate $A \in \operatorname{Mat}_{m,m}(K)$ se $\exists B \in \operatorname{Mat}_{m,m}(K)\colon AB = I = BA$.

- Ipotizziamo che L sia isomorfismo. Ciò significa che esiste L^{-1}, verifichiamo che è lineare. Consideriamo $P\colon G \to H$ con P omomorfismo biettivo, allora si ha che $P^{-1}\colon H \to G$, ed esso è un isomorfismo, quindi manda basi in basi, quindi è lineare. Allora riprendendo $L^{-1}\colon V \to V$ e $L\colon V \to V$ si ha $L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = \mathbb{I}_v$. Quindi $I = A_{L^{-1}\circ L}$ e quindi per teorema 1.4.1 $I = A_{L^{-1}} A_L$ è invertibile.

- Supponiamo ora che A_L sia invertibile. Consideriamo A_L^{-1} e $I = A_L^{-1} \circ A_L$, ponendo $\{f_i\}_{i=1}^m$ un'altra base di V, si ha che, per l'applicazione T_A, precedentemente definita, vale l'uguaglianza

$$T_{A_L}(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j.$$

Poichè $I = A_{L^{-1}} \circ A_L$, applicando T a entrambi i membri, si ha che $T(I) = T_{A_{L^{-1}}} \circ T_{A_L}$, da cui si ricava che $T_{A_{L^{-1}}}$ deve essere tale da rispettare

$$T_{A_{L^{-1}}}(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_{L^{-1}})_{ji} e_j.$$

Ora è noto anche che

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} f_j,$$

Quindi deve risultare che $T_{A_{L^{-1}}}$ inverso (destro e sinistro) di L e posso dimostrarlo:

$$\begin{aligned}
T_{A_{L^{-1}}} \circ L(e_i) = T_{A_{L^{-1}}}(L(e_i)) = \\
&= T_{A_{L^{-1}}}(\sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j = \\
&= \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} T_{A_{L^{-1}}}(f_j) = \\
&= \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} (\sum_{s=1}^m (A_{L^{-1}})_{js} e_j) = \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^m ((A_L)_{ji} (A_{L^{-1}})_{sj}) e_j = \\
&= \sum_{j=1}^m \delta_{si} e_j,
\end{aligned}$$

L'ultima parte ci da il delta di Kronecker e l'elemento $e_j = e_i$, quindi l'applicazione è un'isomorfismo poichè $T_{A_{L^{-1}}} \circ L(e_i)$ è tale che $T_{A_{L^{-1}}} = L^{-1} = T_{A_L}$.

□

1.4.1 Cambiamenti di base

Mediante l'opportuna applicazione lineare è sempre possibile passare da una base ad un'altra mediante il seguente procedimento. Siano $\{e_i\}_{i=1}^m, \{\tilde{e_i}\}_{i=1}^m$ basi di V tramite l'applicazione T è possibile passare da una all'altra, infatti si può porre $T(e_i) = \tilde{e_i} = \sum_{j=1}^m (A_T)_{ji} e_j$, considerando ora $\{f_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{f_i}\}_{i=1}^n$ basi di Z e l'applicazione U che compie lo stesso processo di T tra le basi di Z. Si ha che A_T e A_U rappresentano la matrice del cambio di base nei due spazi, andiamo a determinare $L \in \mathscr{L}(V, Z)$ e la matrice associata A_L tale che permetta un cambio di base da $\{e_i\} \in V \to \{f_i\} \in Z$ alle rispettive $\{\tilde{e_i}\}, \{\tilde{f_i}\}$:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j,$$

Analogamente si ha

$$L(\tilde{e_i}) = \sum_{j=1}^n (\tilde{A_L})_{ji} \tilde{f_j}.$$

Determino ora la relazione tra A_L e $\tilde{A}_L$, ricordando che vale $f_t = \sum_{j=1}^{n} (A_U)^{-1}_{jt} \tilde{f}_t$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (\tilde{A}_L)_{ji} \tilde{f}_j = L(\tilde{e}_i) = & \\
&= L(\sum_{k=1}^{m} (A_T)_{ki} e_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (A_T)_{ki} L(e_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (A_T)_{ki} \sum_{t=1}^{n} (A_L)_{tk} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (A_T)_{ki} (A_L)_{tk} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^{n} (A_T A_L)_{ti} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^{n} (A_T A_L)_{ti} \sum_{j=1}^{n} (A_U)^{-1}_{jt} \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{t=1}^{n} (A_U)^{-1}_{jt}) (A_T A_L)_{ti} \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (A_U^{-1} A_L A_T)_{ji} \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\tilde{A}_L)_{ji} \tilde{f}_j .
\end{aligned}$$

Si ha quindi che $\tilde{A}_L = A_U^{-1} A_L A_T$, si è dunque trovata la relazione tra le diverse basi e le relative matrici. Se $V = Z$ e quindi $e_i = f_i$ e $\tilde{e}_i = \tilde{f}_i$ si ha che $A_U = A_T$ da cui si ha la relazione tra A_L e $\tilde{A}_L$:

$$\tilde{A}_L = A_T^{-1} A_L A_T .$$

Date le matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ relative a un'endomorfismo su due basi in K, come nella situazione precedente, si definisce *matrice del cambio di base* la matrice $H \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ tale che $A = H^{-1} B H$.

Definizione 1.4.3. *Date due matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ qualunque, esse si dicono simili se vale la precedente relazione, cioè se $\exists H \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)\colon A = H^{-1} B H$.*

Se ci troviamo in un'algebra commutativa, allora le matrici simili sono solo quelle uguali.

1.5 Spazio duale

Si definisce *funzionale lineare* l'applicazione C^j che ha il seguente effetto su una base $\{e_i\}_{i=1}^{m} \in V$ spazio vettoriale con $\dim V = m$ finita su K:

$$C^j(e_i) = \delta_i^j .$$

Posso definire quindi m funzionali ognuno legato ad un elemento della base, essi sono definiti su $\mathscr{L}(V, K)$ e riconsiderando allora C_j, dato un generico vettore $a \in V$, la coordinata j-esima del vettore. Consideriamo uno spazio vettoriale V sul generico campo K, si può sempre esprimere K come spazio vettoriale su se stesso e si ha $\dim_K(K) = 1$.

Definizione 1.5.1. *Si definisce* spazio duale *lo spazio, indicato con V^*, dei funzionali lineari $\mathscr{L}(V,K)$, con V spazio vettoriale su K, cioè lo spazio delle applicazioni lineari definite su V e a valori in K. Se V ha dimensione finita m si ha* $\dim(V^*) = m \dim_K(K) = m$.

Teorema 1.5.2. Il sistema $\{C^i\}_{i=i}^m$ è una base per lo spazio duale V^*, quindi $0_{v^*} = \sum_{j=1}^m \lambda_j C^i$ (con $0_{V^*} : 0_{V^*}(v) = 0_K$). La base $\{C^i\}_{i=i}^m$ si dice base associata alla base $\{e_i\}_{i=1}^m \in V$.

Dimostrazione. Si ha che $\forall v \in V$ si ha che applicando $0_{V^*}(v) = 0_K$, quindi anche V^* è spazio vettoriale su K, per cui applicandolo ad un elemento della base:

$$0_K = 0_{V^*}(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j C^i(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta_i^j = \lambda_i,$$

Questo poichè per tutti gli altri elementi è zero, per come è definita la delta di Kronecker. Ora essendo l'elemento della base scelto arbitrariamente deve essere che $\lambda_i = 0 \forall i$. Per cui $\{C^i\}_{i=i}^m$ è un sistema linearmente indipendente e avendo lo spazio duale la stessa dimensione dello spazio di partenza si ha che devono essere per teorema **??** una base di V^*. □

Definizione 1.5.3. *Sia $T\colon V \to Z$ omomorfismo, si può definire l'applicazione lineare T^* nello spazio duale tale che $T^*\colon Z^* \to V^*$, l'applicazione è detta* trasposta *di T.*

Per far vedere l'effetto dell'applicazione T^t consideriamo $w, \boldsymbol{\sigma} \in Z^*$ e ricerchiamo $(T^t)(w)$, che deve essere un elemento di V^*, verifichiamo la sua azione su un generico elemento di V, considerando $\lambda \in K$ prima verifico che la funzione sia ben definita:

$$v \in V\colon (T^t)(w)(v) = w(Tv),$$

Essendo $T(v)$ in Z allora è verificato. Ora controllo la linearità mediante moltiplicazione per λ:

$$(T^t)(\lambda w + \boldsymbol{\sigma}) = \lambda(T^t)(w) + (T^t)(\boldsymbol{\sigma}),$$

Se entrambi gli elementi dell'equazone compiono la stessa azione sul generico elemento $v \in V$ allora T^t è un'applicazione lineare per definizione.

- Il primo elemento ha il seguente effetto:

$$(T^t)(\lambda w + \boldsymbol{\sigma})v = (\lambda w + \boldsymbol{\sigma})(Tv) = (\lambda w)(Tv) + (\boldsymbol{\sigma})(Tv),$$

- Il secondo invece

$$((T^t)\lambda w + (T^t)\boldsymbol{\sigma})v = (Tv\lambda w) + (Tv\boldsymbol{\sigma}).$$

Ora avendo verificato che hanno lo stesso comportamento si ha che $T^t \in \mathscr{L}(Z^*, V^*)$.

Teorema 1.5.4. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n \in V$ e $\{f_j\}_{j=1}^m \in Z$ e siano $\{\theta^i\}_{i=1}^n \in V^*$ e $\{C^j j\}_{j=1}^m \in Z^*$, con V, Z, coi i rispettivi duali, spazi vettoriali sul generico campo K: Data $L \in \mathscr{L}(V,Z)$ $A_L \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ la matrice che corrisponde a L nelle basi $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{f_j\}_{j=1}^m$, allora considerata $L^t \in \mathscr{L}(V^*, Z^*)$ sia ha che la martice associata a L^t nelle basi dello spazio duale $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ e $\{C^j j\}_{j=1}^m$ è data da $(A_L)^t \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$.

Dimostrazione. Consideriamo la i-esima colonna della matrice A_L e la j-esima della matrice che corrisponde a L^t, cioè A_{L^t}:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j,$$

$$L^t(C^j) = \sum_{i=1}^m (A_{L^t})_{ij} \theta^i.$$

Consideriamo il primo elemento e utilizziamo la definizione di trasposta, cioè applichiamo C^j a $L(e_i)$ poichè C^j è definito in Z e può quindi essere applicato solo a elementi nello stesso spazio. Si ottiene

$$C^k L(e_i) = C^k(\sum_{j=1}^{m} (A_L)_{ji} f_j) = \sum_{j=1}^{m} (A_L)_{ji} C^k(f_j),$$

sapendo $C^k(f_j)$ corrispondente alla base duale di f_j otteniamo che è il delta di Kronecker, rimane quindi un'unico addendo nella sommatoria che è $\sum_{j=1}^{m} (A_L)_{ji} C^k(f_j) = (A_L)_{jk}$. Per come è definita L^t è possibile valutare il secondo elemento su $e_k \in V$:

$$L^t(C^j)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (A_{L^t})_{ij} \theta^i(e_k),$$

Ora $\theta^i(e_k)$ è il delta di Kronecker, per definizione di funzionale lineare, mi resta un'unico elemento della sommatoria, cioè quello corrispondente a θ^i che è fisso, quindi $L^t(C^j)(e_k) = (A_{L^t})_{kj}$. Si ha ora che i due elementi valutati sopra, per come abbiamo definito L e L^t devono coincidere, si ha quindi $(A_{L^t})_{kj} = (A_L)_{jk}$. Le due matrici sono quindi una la trasposta dell'altra, allora $A_{L^t} = (A_L)^t$. □

Teorema 1.5.5. Sia $L \in \mathscr{L}(V, Z)$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se L è iniettiva si ha $L^t \in \mathscr{L}(Z^*, V^*)$ suriettiva.
2. Se L è suriettiva si ha $L^t \in \mathscr{L}(Z^*, V^*)$ iniettiva.

Dimostrazione. Se L è iniettiva ogni elemento in V ha immagini distinte. Prendiamo per esempio $\{e_i\}_{i=1}^n$ base di V e applichiamo il funzionale lineare C^j alle sue immagini, poichè il funzionale può essere applicato solo agli elementi nello spazio di arrivo, si ha che per ognuno di questi elementi $C^j(L(e_i))$ esiste un elemento corrispondente duale della base $\{e_i\}_{i=1}^n$, quindi $L^t \in \mathscr{L}(Z^*, V^*)$ è per definizione suriettiva.

Considerando invece L suirettiva e verifichiamo che $\operatorname{Ker} L^t$ contiene il solo 0_{V^*} (cioè il funzionale lineare nullo). Per farlo consideriamo $C \in Z^*$, con $C = 0_{z^*}$, abbiamo $L^t(C) = 0_{V^*}$, questo è vero se $C(z) = 0_k$ con $z \in Z$. Consideriamo $C(z) = C(L(v)) = C((L)(v)) = L^t((C)(v)) = (L^t(C))(v) = 0_{V^*}(v) = 0_K$. Poichè ogni elemento ha una controimmagine si ha che nei rispettivi duali vale la dimostrazione del teorema 1.1.3. Quindi $\operatorname{Ker} L^t = \{0_{Z^*}\}$, per cui L^t è iniettiva. □

Definizione 1.5.6. *Si definisce* rango *di un'applicazione lineare $L \in \mathscr{L}(V, Z)$, con V, Z spazi vettoriali di dimensione finita, e viene indicato con $R_K(L)$ la $\dim L(V)$, che è sempre minore di Z.*