Geometria

5 giugno 2015

Capitolo 1

Diagonalizzazione

1.1 Autovalori e autovettori

Definizione 1.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e T un endomorfismo su V. Si dice* autovalore *di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$ uno scalare $\lambda \in K$ per il quale esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Un tale vettore v si dice* autovettore *di T associato all'autovalore λ.*

Ad esempio, l'applicazione

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

individua una rotazione di un vettore di $\mathbb{R}^2$. Se α è diverso da multipli interi di π, allora A non ammette alcun autovalore; se invece $\alpha = k\pi$ la matrice A individua una rotazione di 0 oppure π, cioè una dilatazione di v, eventualmente con un cambiamento di verso del vettore, quindi qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$ è un autovettore di A.

Teorema 1.1.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Il determinante della matrice associata a un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$ non dipende dalla scelta della base per rappresentarla.

Dimostrazione. Sia $\dim V = m$. Fissata una medesima base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^m$ di V sia in arrivo che in partenza, sia A_T la matrice associata a T nella base data, definita quindi come $(A_T)_{ij} = T(e_i)_j$. Scegliendo una base differente $\mathcal{B} = \{e'_i\}_{i=1}^m$ per V, essa si può sempre ottenere applicando una matrice C alla precedente base $\mathcal{B}$, quindi

$$e'_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} e_i,$$

e detta A'_T la matrice che rappresenta T nella nuova base, si ha $A'_T = C^{-1} A_T C$. Il determinante di A_T, sotto questa nuova base, è dunque $\det A'_T = \det(C^{-1} A_T C) = \det C^{-1} \det A_T \det C = (\det C)^{-1} \det A_T \det C = \det A_T$, per il teorema di Binet e la commutatività di K. $\square$

Possiamo quindi definire il *determinante di un endomorfismo*, sapendo che sarà lo stesso qualunque matrice si scelga per rappresentarlo.

Teorema 1.1.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda \in K$. Le seguenti affermazioni si equivalgono:

1. λ è un autovalore di T;

2. l'operatore lineare $T - \lambda I$ non è iniettivo;

3. $\det(T - \lambda I) = 0$.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore, allore esiste un vettore $v \in V$ non nullo per cui $T(v) = \lambda v = (\lambda I)(v)$ quindi $T(v) - (\lambda I)(v) = (T - \lambda I)(v) = 0_V$. Ma ciò significa che $\ker(T - \lambda I)$ non contiene soltanto 0_V, dunque non è iniettivo. Viceversa, se $\ker(T - \lambda I) \neq \{0_V\}$ vuol dire che esiste un $v \in V$ per cui $(T - \lambda I)(v) = 0_V$, cioè risalendo i passaggi precedenti $T(v) = \lambda v$.

Se $T - \lambda I$ non è iniettivo, non può essere di conseguenza invertibile, quindi il suo determinante deve essere nullo. Viceversa, se il determinante è nullo allora non è invertibile, vale a dire $T - \lambda I$ non è iniettivo o non è suriettivo. Se fosse inettivo, l'applicazione dovrebbe essere, per come è definita un'isomorfismo, quindi il determinante non dovrebbe essere zero. Questo caso è allora da escludere. Se fosse suriettivo avremmo che per ogni $s \in V$ $(T - \lambda I)(v) = s$. Poichè s può anche essere il vettore nullo questo significa che il $\ker(T - \lambda I)$ non può essere costituito dal solo zero. Quindi se l'applicazone è suriettiva non può essere iniettiva e quindi un'isomorfismo. Questo implica che l'ultima affermazione è equivalente alla seconda. □

Definizione 1.1.4. *Si definisce* poliniomio caratteristico *dell'applicazione* $T \in \mathrm{End}(V)$ *il polinomio* $\chi_T(x) = \det(T - xI)$.

È possibile definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo, equivalentemente, come $\det(A - xI)$ dive A rappresenta T in qualche base $\mathcal{B}$. Ma se $\tilde{\mathcal{B}}$ è un'altra base e L la matrice di cambiamento di base tra le due, allora la matrice che rappresenta T in $\tilde{\mathcal{B}}$ è $\tilde{A} = L^{-1}AL$. Il polinomio caratteristico di questa nuova matrice è

$$\chi_{\tilde{A}}(x) = \det(\tilde{A} - xI) = \det(L^{-1}AL - xI) = \det(L^{-1}AL - L^{-1}xIL) = \det(L^{-1})\det(A - xI)\det L = \chi_A(x)$$

quindi matrici simili hanno il medesimo polinomio caratteristico. La definizione data tramite l'endomorfismo è quindi ben posta, in quanto le matrici rappresentanti un endomorfismo rispetto a basi differenti sono tutte simili.[1]

Le radici di $\chi_T(x)$, per l'ultimo punto del teorema precedente, sono chiaramente gli autovalori di T. Il grado di questo polinomio inoltre equivale alla dimensione dello spazio vettoriale V. Si può alternativamente definire il polinomio caratteristico come $\chi_T(x) = \det(xI - T)$: gli autovalori trovati come radici non variano, perché per le proprietà del determinante vale $\det(xI - T) = (-1)^m \det(T - xI)$, dove $m = \dim V$, quindi le radici sono le stesse per entrambe le definizioni.

Rifacendosi al primo esempio

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = &\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = \\ &= \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1, \end{aligned}$$

il cui discriminante è $-4\sin^2\alpha$, che quindi non è negativo solo se $\alpha = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Soltanto per questi valori A ammette dunque autovalori.

Se v è un autovettore associato a λ, anche i suoi multipli per uno scalare sono a loro volta autovettori: infatti se $T(v) = \lambda v$ e $k \in K$ segue per la linearità di T che $T(kv) = kT(v) = k\lambda v$, cioè qualsiasi multiplo kv è un autovettore di T associato a λ.

Definizione 1.1.5. *L'insieme V_λ degli autovettori associati ad un unico autovalore λ è detto* autospazio *di T:*

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}.$$

[1] Questo ovviamente vale purché le basi di partenza e di arrivo coincidono!

L'autospazio V_λ non si riduce mai allo zero, poiché gli autovettori sono per definizione non nulli, ed è anche un sottospazio vettoriale di V. Se $v, w \in V_\lambda$ e $h, k \in K$, si ha

$$T(hv + kw) = hT(v) + kT(w) = h\lambda v + k\lambda w = \lambda(hv + kw),$$

quindi $hv + kw$ è ancora un autovettore associato a λ, cioè appartiene a V_λ. La somma di due autovettori di T associati a due autovalori distinti però *non* è ancora necessariamente un autovettore di T.

Teorema 1.1.6. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, T un endomorfismo in V. Siano $v_1, v_2, \dots, v_k$ autovettori di T associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k$. Se questi autovalori sono tutti distinti, allora i $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione rispetto a k. Se $k = 1$, un elemento soltanto $v_1 \in V$ è linearmente indipendente perché essendo un autovettore non è mai nullo, quindi il teorema è subito dimostrato. Sia ora $k > 1$. Consideriamo una combinazione lineare

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0, \tag{a}$$

e si dimostra che $a_1 = \dots = a_k = 0_K$. Moltiplicando la (a) per λ_1 si ottiene

$$a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_1v_2 + \dots + a_k\lambda_1v_k = 0, \tag{b}$$

e applicando T sempre alla (a) si ottiene un'altra combinazione

$$a_1\lambda_1v_1 + \dots + a_k\lambda_kv_k = 0. \tag{c}$$

Sottraendo la (b) a quest'ultima risulta

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0.$$

Dato che $\lambda_i \neq \lambda_1$ per ogni $i > 1$, non può che essere $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0_K$, a cui segue nella (a) che $a_1v_1 = 0_V$, da cui $a_1 = 0$. Poiché dunque $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0_K$, l'insieme $\{v_1, v_2 \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente. □

Definizione 1.1.7. *Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, con $\dim V < +\infty$, e λ un autovalore di T. Si chiama* molteplicità geometrica *di λ, e si indica con γ_λ, la dimensione dell'autospazio V_λ; si chiama* molteplicità algebrica*, e si indica con α_λ, la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di T.*

Teorema 1.1.8. Sia λ un autovalore di $T \in \mathrm{End}(V)$, con V di dimensione finita. Vale la relazione

$$1 \leq \gamma_\lambda \leq \alpha_\lambda \leq \dim V.$$

Dimostrazione. Se λ è un autovalore, esiste un autospazio ad esso associato non vuoto, che ha quindi una dimensione non nulla; inoltre esiste una radice di $\chi_T(x)$, ed essa ha quindi una molteplicità non nulla. Allora $\alpha_\lambda, \gamma_\lambda \geq 1$.

L'autospazio è un sottospazio vettoriale di V, quindi $\gamma_\lambda \dim V_\lambda \leq \dim V$, e il grado di $\chi_T(x)$ (che equivale alla dimensione di V) non può essere superato dalla somma delle molteplicità delle radici per il teorema **??** dunque $\alpha_\lambda \leq \dim V$. Si può individuare una base dell'autospazio V_λ composta da γ_λ elementi, che sono autovettori associati a λ. Nell'autospazio V_λ l'endomorfismo T si comporta come un multiplo dell'identità, precisamente λI_n (dove n è la dimensione dell'autospazio, cioè è γ_λ), dato che sono tutti autovettori con autovalore λ. Nella base scelta, dunque, T è rappresentato da

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

con $n = \gamma_\lambda$ come già visto, e M è una matrice qualunque (è il blocco corrispondente all'azione di T su V meno l'autospazio V_λ). Il suo polinomio caratteristico è $\chi_T(x) = \det(A - xI) = \det(\lambda I_n - xI_n)\det(M - xI_{\dim V - n}) = (\lambda - x)^n g(x)$ dove $g(x) = \det(M - xI_{\dim V - n})$ è un generico polinomio di grado $\dim V - n$. Allora $\lambda - x$ divide $\chi_T(x)$ almeno γ_λ volte, vale a dire che la molteplicità della radice λ non è minore di γ_λ, cioè $\alpha_\lambda \geq \gamma_\lambda$. □

1.2 Diagonalizzabilità

Definizione 1.2.1. *Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, di dimensione finita. T si dice diagonalizzabile se esiste una base di V costituita soltanto da autovettori di V.*

Se T è rappresentato in una base $\mathcal{B}$ da una matrice A ed è diagonalizzabile, tale matrice si può porre in forma diagonale con il coniugio $D = P^{-1}MP$, dove P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di T (espressi chiaramente nella base $\mathcal{B}$): essi infatti formano una base, e P è proprio la matrice per cambiare la base da $\mathcal{B}$ a quella degli autovettori. La matrice diagonale risultante avrà l'i-esima colonna $A_i = \lambda_i e_i$, in ordine come sono stati posti in ordine gli autovettori nella base, e di conseguenza nella matrice P utilizzata.

Teorema 1.2.2. Siano $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, di molteplicità geometrica $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ e algebrica $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T è diagonalizzabile;
- $\sum_{i=1}^k \gamma_i = \dim V$;
- il polinomio caratteristico è $\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \dots (\lambda_k - x)^{\alpha_k}$, con $\alpha_i = \gamma_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$;

Dimostrazione. Se T è diagonalizzabile allora esiste una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^k$ di autovettori dell'endomorfismo. Possiamo riordinarli in modo che i primi γ_1 siano gli autovettori relativi a λ_1, quelli da $\gamma_1 + 1$ a $\gamma_1 + \gamma_2$ siano gli autovettori relativi a λ_2 e così via, fino a esaurirli, ossia

$$
\begin{gathered}
e_1, \dots, e_{\gamma_1} \in V_1, \\
e_{\gamma_1+1}, \dots, e_{\gamma_1+\gamma_2} \in V_2, \\
\vdots \\
e_{\gamma_1+\dots+\gamma_{k-1}}, \dots, e_{\gamma_1+\dots+\gamma_{k-1}+\gamma_k} \in V_k
\end{gathered}
$$

dove V_j è l'autospazio dell'autovalore λ_j. In tale base, T è rappresentato da una matrice D diagonale, poiché $T(e_i) = \lambda_i e_i$: in ogni autospazio V_i l'endomorfismo agisce infatti come $\lambda_i I_{\gamma_i}$, ossia come un multiplo dell'identità, quindi

$$
D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\gamma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\gamma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{\gamma_k} \end{bmatrix}. \tag{1.2.1}
$$

Il polinomio caratteristico di D, quindi anche di T, è ovviamente

$$
\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\gamma_1} (\lambda_2 - x)^{\gamma_2} \dots (\lambda_k - x)^{\gamma_k} = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\gamma_i} \tag{1.2.2}
$$

Sappiamo però che ogni λ_i è radice di χ_T con molteplicità α_i, dunque $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ risulta $(\lambda_i - x)^{\alpha_i} | \chi_T$. Allora per il teorema di Ruffini **??** possiamo fattorizzare χ_T con le sue radici, come

$$
\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} (\lambda_2 - x)^{\alpha_2} \dots (\lambda_k - x)^{\alpha_k} g(x) = g(x) \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\alpha_i}
$$

con $g \in K[x]$. Ma $K[x]$ è un dominio a fattorizzazione unica dunque le due versioni di χ_T devono coincidere, cioè i fattori irriducibili devono essere uguali: deve allora verificarsi che $\alpha_i = \gamma_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Di conseguenza risulta $\deg g = 0$, vale a dire $g = 1$. Quindi

$$
\chi_T(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\alpha_i}.
$$

Poiché la somma delle molteplicità algebriche, dato che i fattori $(\lambda_i - x)$ sono gli unici presenti in χ_T, dà il grado di χ_T, segue immediatamente se $\gamma_i = \alpha_i$ che

$$\dim V = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i. \tag{1.2.3}$$

In ogni autospazio V_i troviamo γ_i vettori linearmente indipendenti (tutti autovettori di T), che formano una base di tale sottospazio. Riunendo le base di tutti gli autospazi, otteniamo ancora un insieme $\mathcal{I}$ linearmente indipendente, in base al teorema **??** in quanto gli autospazi sono linearmente indipendenti per il teorema 1.1.6. Per il punto precedente, $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \dim V$ quindi il numero di vettori in $\mathcal{I}$ è proprio $\dim V$. Per il teorema **??** segue dunque che $\mathcal{I}$ è una base di V, e ciò prova che T è diagonalizzabile. □

Teorema 1.2.3. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ con V di dimensione finita. Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti con i corrispondenti autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ si ha che T è diagonalizzabile se V può essere scritto come somma diretta degli autospazi, ossia $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda i}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla seconda parte di quella svolta nel teorema **??**. □

1.3 Polinomio minimo

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e $T \in \mathrm{End}(V)$. Diciamo che un polinomio $f \in K[x]$ *annulla* T se $f(T) = 0$ (l'endomorfismo nullo). Considerando $T \in \mathrm{End}(V)$ ho che la dimensione della matrice associata, se la dimensione di V è m ed è finita, è m^2, ora consideriamo $f(T)$ come il polinomio che annulla T, si ha quindi $f(T) = 0$, quindi $T^0 = I, T = T^1, T^2 = T \circ T, \dots, T^k = T \circ T^{k-1}$, possiamo riscrivere con queste considerazioni prendendo la matrice associata a V rispetto a L:

$$f(T) = a_{m^2} T^{m^2} + a_{m^2-1} T^{m^2-1} + \dots + a_0 I,$$

ora le varie potenze presenti in T sono $m^2 + 1$ quindi il sistema deve essere linearmente dipendente. Esistono allora opportuni a_i per cui il sistema ammette una soluzione. Concludiamo che esiste sempre un polinomio, al massimo di grado m^2 che annulla l'operatore T.

Chiamiamo I_T, con $T \in \mathrm{End}(V)$ e V spazio di dimensione finita e sul campo K, l'insieme

$$I_T = \{p \in K[x] \colon p(T) = 0\}$$

che non è mai uguale al solo $0 \in \mathrm{End}(V)$. Si ha che per $p, q \in I_T$ la loro somma sta ancora in I_T, perché $(p + q)(T) = p(T) + q(T) = 0 + 0 = 0$, e analogamente $(\lambda p)(T) = \lambda p(T) = \lambda 0 = 0$, dunque I_T è un ideale. Essendo $K[x]$ un dominio a ideali principali, quindi, I_T ammette un (unico) generatore monico.

Definizione 1.3.1. *Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, con V spazio di dimensione finita e sul campo K, si definisce* polinomio minimo *di T, e si indica com $m_T(x)$, il generatore monico dell'ideale I_T dei polinomi che annullano T.*

Poiché $T^n \in \mathrm{End}(V)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, ogni polinomio $f \in K[x]$ è tale che $f(T) \in \mathrm{End}(V)$. In virtù dell'isomorfismo tra matrici quadrate ed endomorfismi, se T è rappresentato da A allora l'endomorfismo $f(T)$ è rappresentato da $f(A)$.

È inoltre facile vedere che due matrici simili hanno lo stesso polinomio minimo: infatti se $C = B^{-1}AB$, allora

$$\begin{gathered} C^0 = I = B^{-1}IB \\ C = B^{-1}AB \\ C^2 = B^{-1}ABB^{-1}AB = B^{-1}A^2B \\ \dots \\ C^n = B^{-1}A^nB \end{gathered}$$

come si verifica facilmente per induzione. Si possono raggruppare allora tutti i termini B^{-1} e B, per cui per qualsiasi polinomio si ha $f(C) = B^{-1}f(A)B$.

Teorema 1.3.2. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K. Il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di T hanno le stesse radici.

Dimostrazione.

- Verifichiamo prima che $m_T(\lambda) = 0 \implies \chi_T(\lambda) = 0$. Sia $\lambda \in k$ e $m_T(\lambda) = 0$. Consideriamo $q \in K[x]$ tale che $q(T) \neq 0$: si ha sicuramente che $\deg q < \deg m_T$, quindi per il teorema di Ruffini **??** risulta $m_T(x) = (x - \lambda)q(x)(\dots)$. Allora $\exists \alpha, \beta \in V : \alpha = q(T)(\beta) \neq 0$, per cui deve essere:

  $$0 = m_T(T)\beta = (T - \lambda I)q(T)\beta, \text{ ora per definizione } \alpha \neq 0, \text{ e quindi } (T - \lambda I)\alpha = 0,$$

  Abbiamo determinato che α è un autovettore relativo a λ, quindi $\chi_T(\lambda) = 0$.

- Viceversa, siano $\lambda \in k$ e $\chi_T(\lambda) = 0$, allora $\exists \alpha \neq 0 \colon (T - \lambda I)\alpha = 0_v$, λ è allora una radice di $m_T(x)$ e ciò implica $0_V = m_T(T)\alpha = m_T(\lambda)\alpha$, poichè $T(\alpha) = \lambda\alpha$. Allora α annulla T. Volendo si può darne una dimostrazione semplice considerando una generica funzione e compiendo i passaggi sopra elencati: sia $f \in K[x]$, con χ_T il suo polinomio caratteristico:

  $$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \\ f(T) &= aT^2 + bT + c, \\ f(T)\alpha &= aTT(\alpha) + bT(\alpha) + c, \\ f\big(T(\alpha)\big) &= aT(\alpha)\lambda + b\lambda\alpha + c, \\ f\big(T(\alpha)\big) &= a\lambda^2\alpha + b\lambda\alpha + c. \end{aligned}$$

  Quindi α annulla $f(x)$.

□

1.4 Sottospazi invarianti

Definizione 1.4.1. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, e W un suo sottospazio. Dato $T \in \mathrm{End}(V)$, diremo che W è T-*invariante *se $T(W) \subseteq W$, ossia se $\forall w \in W$ si ha $T(w) \in W$.*

La proprietà principale di un sottospazio W che sia T-invariante è che è possibile restringere l'applicazione in tale insieme, ossia è possibile definire $T|_W \colon W \to W$. L'intero spazio V e $\{0\}$ sono, banalmente, sottospazi invarianti di qualsiasi applicazione lineare.

Ecco alcuni esempi di sottospazi invarianti.

- Per alcune applicazioni, i sottospazi banali sono gli unici sottospazi invarianti: un facile esempio è una rotazione in $\mathbb{R}^2$ di un angolo diverso da $k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.
- Per ogni spazio V e $T \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Ker}\, T$ e $\mathrm{Im}\, T$ sono T-invarianti. Se infatti $v \in \mathrm{Ker}\, T$, allora $T(v) = 0$ e $0 \in \mathrm{Ker}\, T$, come in tutti i sottospazio vettoriali. Analogamente $T(v) \in \mathrm{Im}\, T$, banalmente, qualsiasi sia $v \in V$, dunque anche per $v \in \mathrm{Im}\, T$.
- Un autospazio V_λ associato a un autovalore λ di un $T \in \mathrm{End}(V)$ è T-invariante, poiché per ogni $v \in V_\lambda$ si ha $T(v) = \lambda v \in V_\lambda$.
- Se $T, S \in \mathrm{End}(V)$ commutano, se $a \in \mathrm{Ker}\, T$ allora $T\big(S(a)\big) = S\big(T(a)\big) = S(0) = 0$ quindi $S(a) \in \mathrm{Ker}\, T$, cioè $\mathrm{Ker}\, T$ è S-invariante. Vale anche per $\mathrm{Im}\, T$?

Sia $W \leq V$ sottospazio dello spazio vettoriale V sul campo K. Dato $T \in \mathrm{End}(V)$, se W è T-invariante, posto $v \in V$ definiamo l'insieme

$$S_T(v, W) = \{g \in K[x] \colon g(T)(v) \in W\}$$

Il polinomio minimo appartiene a questo insieme: risulta infatti $m_T(T)(v) = 0v = 0 \in W$, per ogni $W \leq V$.

Lemma 1.4.2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e $T \in \mathrm{End}(V)$. Se $W \leq V$ è T-invariante, allora è anche $g(T)$-invariante per ogni $g \in K[x]$, ossia $S_T(\alpha, W)$ è un ideale di $K[x]$ per ogni $\alpha \in V$.

Dimostrazione. Per definizione di invarianza, si ha che $T(W) \subseteq W$, quindi $\forall \beta \in W$ si ha $T(\beta) \in W$. Consideriamo ora un generico polinomio $g(x) = ax^2 + bx + c \in K[x]$ e applichiamogli T:

$$g(T) = aT^2 + bT + c,$$
$$g(T)\beta = aTT(\beta) + bT(\beta) + cI(\beta),$$

I vari componenti dell'equazione stanno in W, il primo sempre per definizone di T-invarianza, il secondo e il terzo per come l'applicazione T è definita. Quindi W è $g(T)$-invariante. Per verificare che è un ideale di $K[x]$ applichiamo la definizione. Quindi consideriamo $f, r \in S_T(\alpha, W)$ e $h \in K[x]$ e verifichiamo per la somma:

$$(f + g)(T)(\alpha) = f(T)(\alpha) + g(T)(\alpha) \in W$$

Gli elementi appartengono a W e di conseguenza anche la loro somma, mentre per il prodotto

$$(hf)(T)(\alpha) = h(T)f(T)(\alpha) = h(T)\big(f(T)(\alpha)\big) \in W$$

in quanto $f(T)(\alpha) \in W$ dato che $f \in S_T(\alpha, W)$. Allora $f + g, hf \in S_T(\alpha, W)$, cioè $S_T(\alpha, W)$ è un ideale. □

Definizione 1.4.3. *Sa V uno spazio vettoriale sul campo K, $T \in \mathrm{End}(V)$ e W un sottospazio T-invariante di V. Dato l'insieme $S_T(\alpha, W)$ come definito in precedenza, si definisce* T-conducente*, di α in W, il generatore monico di $S_T(\alpha, W)$.*

Lemma 1.4.4. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ con V spazio vettoriale sul campo K di dimensione finita. Se il suo polinomio minimo è della forma $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \ldots (x - \lambda_k)^{r_k}$, con $\lambda_i \in K$ e se $W \leq V$ ($W \neq V$) è T-invariante, Allora $\exists v \in V \setminus W$ tale che $(T - \lambda I)(v) \in W$ per qualche autovalore λ di T.

Dimostrazione. Sia $\beta \in V \backslash W$ e g il polinomio T-conducente per $\beta \in W$: ciò implica che $g(T)\beta \in W$. Nell'ideale del polinomio g si trova anche il polinomio minimo, quindi $m_T | g$ in quanto g per la definizione precedente 1.4.3 è il più piccolo dell'ideale. Inoltre $\deg g \neq 1$, poichè se lo fosse allora $g(T) = I$, e considerando il suo effetto sull'elemento β si avrebbe $g(T)(\beta) = \beta$, da cui $\beta \in W$, ma proprio nelle ipotesi avevamo considerato $\beta \notin W$. Quindi $\deg g > 1$ e per l'ipotesi sulla forma del polinomio minimo deve essere scritto come:

$$g(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \ldots (x - \lambda_k)^{b_k},$$

con almeno un b_i maggiore di 1 per quanto ricavato dai passaggi precedenti. Poniamo che sia $b_j > 1$, corrispondente a λ_j: per il teorema di Ruffini **??** possiamo riscrivere g come $g(x) = (x - \lambda_j)h(x)$, per un certo $h \in K[x]$. Ora ponaimo $\alpha = h(T)(\beta) \notin W$, per cui:

$$(T - \lambda_j I)(\alpha) = (T - \lambda_j I)\big(h(T)(\beta)\big) = g(T)(\beta).$$

Ora, $\alpha = h(T)(\beta) \neq 0$ e non appartiene a W, ma $g(T)(\beta)$ è un autovettore del polinomio caratteristico e abbiamo precedentemente definito W come il sottospazio generato dagli autovalori; gli ultimi passaggi hanno verificato che per certi h, corrispondenti a dei λ_j, vale $(T - \lambda_j I)\big(h(T)(\beta)\big) = (T - \lambda_j I)(\alpha) \subset W$. Quindi abbiamo dimostrato le due implicazioni del lemma. □

Teorema 1.4.5. Sia V spazio vettoriale sul campo K con $\dim V$ finita (m), sia T un'endomorfismo in V, si ha che T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_t(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_k)$, con $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ valori distinti di K.

Dimostrazione.

- Sia prima T diagonalizzabile. Presi gli autovalori distinti $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di T e consideriamo $(T-\lambda_1 I), \dots, (T-\lambda_k I)$, sia inoltre α autovettore di T. Il prododotto tra l'autovettore α e il corrispondente $(T-\lambda_j)$ deve dare lo zero per il teorema 1.1.3. Ora l'operazione tra i vari operatori precedenti potrebbe essere commutativa, se lo è aggiungendo α alla composizione essa è uguale allo zero, poichè vi si può affiancare il corrispondente operatore. Quindi prendiamo due autovalori φ, μ e verifichiamone la commutatività:

$$(T-\varphi I)(T-\mu I) = T^2 - \varphi T - \mu T + \varphi\mu T,$$
$$(T-\mu I)(T-\varphi I) = T^2 - \mu T - \varphi T + \varphi\mu T.$$

  Allora la composizione è commutativa e si ha

$$(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_k I)(\alpha) = (T-\lambda_1)\dots(T-\lambda_k)(T-\lambda_j)(\alpha) = 0.$$

  Ora possiamo scrivere $p(x) = (T-\lambda_1)\dots(T-\lambda_k)(T-\lambda_j)$, otteniamo allora che $p(T)\alpha = 0$ per ogni autovettore α. Abbiamo, per le ipotesi iniziali, che T è diagonalizzabile, quindi deve esistere una base di autovettori, proprio per definizione di diagonalizzazione 1.2.1, $p(T)$ deve essere allora fatta in modo da annullare tutti gli elementi della base, di conseguenza è l'operatore nullo di $\mathrm{End}(V)$, quindi $p(T) \in I_T$ e sappaimo che $m_T(x)$ è il generatore monico di I_T, per definizione 1.3.1. Deve per forza essere che $m_T(x) = p(x)$ poichè $m_T(x)$ non può avere meno componenti di $p(x)$ perchè tutti gli zeri del polinomio devono per forza stare in esso (per conseguenza del teorema 1.3.2), allora

$$p(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_k)(x-\lambda_j) = (x-\lambda_1 I)\dots(x-\lambda_k I) = m_T(x).$$

- Sia ora il polinomio minimo esprimibile come sopra e $W \leq V$ sottospazio generato dagli autovettori di T. Allora W è T-invariante ed esiste una base di autovettori, posso fare in modo che coincida con una di V, questo è possibile se $W = V$, in quel caso T è diagonalizzabile per la definizione 1.2.1. Se invece $W \neq V$ procediamo per assurdo: se così fosse potrebbe esistere un elemento $\alpha \in V/W$, autovettore relativo a λ_j autovalore di T, con $\beta = (T-\lambda_j I)\alpha \in W$ e W è T-invariante. Possiamo allora scrivere che $\forall h(x) \in K[x]$ si ha $h(T)\beta \in W$ e considerare il polinomio minimo escludendo il termine relativo a λ_j:

$$m_T(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{k} (x-\lambda_i)(x-\lambda_j),$$

  Rinominando la produttoria come q e $q(\lambda_j) = (x-\lambda_j)$, consideriamo la differenza $q(x) - q(\lambda_j)$, questa differenza ha λ_j come radice, quindi per il teorema di Ruffini **??**

$$(x-\lambda_j)h(x) = q(x) - q(\lambda_j),$$

  e valutandolo in T e poi in α, cioè l'autovettore prima definito, si ha

$$(T-\lambda_j I)h(T) = q(T) - q(\lambda_j)I,$$
$$(T-\lambda_j I)h(T)\alpha = q(T)\alpha - q(\lambda_j)\alpha,$$
$$\beta h(T) = q(T)\alpha - q(\lambda_j)\alpha,$$

  con l'ultimo passaggio dovuto a come abbiamo prima definito β. Abbiamo che $q(\lambda_j)\alpha, \beta h(T) \in W$, dobbiamo però determinare l'insieme di appartenenza di $q(T)\alpha$, per farlo torniamo a considerare il polinomio minimo valutato in T e poi in α:

$$m_T(T) = 0 = (T-\lambda_j)q(T),$$
$$m_T(T)\alpha = (T-\lambda_j)q(T)\alpha.$$

  Poichè $q(T)\alpha \neq 0$ per le ipotesi fatte, allora deve essere un autovettore relativo a λ_j, se così fosse $q(T)\alpha \in W$ con $\alpha \notin W$, quindi ci sono due autovettori relativi all'autovalore λ_j, che di conseguenza avrebbe molteplicità algebrica almeno uguale a due. Il polinomio minimo si potrebbe allora scrivere come

$$m_T(x) = (x-\lambda_j)(x-\lambda_j)\prod_{i=1, i\neq j}^{k}(x-\lambda_i).$$

Avremmo quindi un polinomio di secondo grado all'interno di m_T, in contrasto con l'ipotesi iniziale.

□

1.5 Applicazioni e matrici triangolari

Definizione 1.5.1. *Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, con V spazio vettoriale sul campo K, T si dice* triangolabile *se esiste una base $\{e_i\}_{i=1}^n \in V$ tale che la matrice associata a T rispetto a quella base è in forma triangolare (v. definizione* **??***).*

Teorema 1.5.2. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita su un generico campo, se T è triangolabile allora $\chi_T(x) = 0$ (l'endomorfismo nullo).

Corollario 1.5.3. Con le ipotesi del teorema 1.5.2, si ha che T è triangolabile se e solo se $m_T|\chi_T$.