Geometria

22 giugno 2015

Capitolo 1

Spazi vettoriali

1.1 Proprietà principali

Definizione 1.1.1. *Dato un campo K, un insieme V non vuoto e due operazioni interne $+\colon V \times V \to V$ e $\cdot\colon K \times V \to V$, la terna $(V, +, \cdot)$ si definisce* spazio vettoriale *sul campo K se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

- *$(V, +)$ è un gruppo abeliano;*
- *$1_K x = x$ per ogni $x \in V$;*
- *la proprietà associativa, ossia se $\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall x \in V$, si ha $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;*
- *la proprietà distributiva, ossia se $\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall x, y \in V$, si ha $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ e $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.*

Gli elementi di V si chiamano *vettori* mentre quelli di K *scalari*. L'elemento neutro della somma, che per le proprietà note dei gruppi esiste ed è unico, sarà indicato con 0, oppure 0_V in caso di ambiguità. Lo zero e l'unità del campo K seguono la convenzione già usata per la quale saranno indicati con 0 e 1, o anche 0_K e 1_K; il fatto che 0 indichi sia lo zero di K che quello di V sarà spesso chiaro dal contesto.

Esempi

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, infatti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha, rappresentando i vettori come colonne,

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

  eccetera definendo somma e prodotto per scalare componente per componente.

- L'anello dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con l'addizione e il prodotto per un numero reale, dove moltiplicare un polinomio per $\lambda \in \mathbb{R}$ equivale a moltiplicare per tale scalare tutti i suoi termini.

- L'insieme delle funzioni (qualunque) definite da un insieme $X \neq \varnothing$ e a valori reali forma uno spazio vettoriale, con le operazioni di addizione e prodotto per numero reale "puntuali", ossia $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

- Ogni campo può essere visto come spazio vettoriale su se stesso: ad esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ ma anche su $\mathbb{R}$ se lo consideriamo come l'insieme delle coppie $(a, b) = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Elenchiamo ora una serie di proprietà di base sugli spazi vettoriali, in cui assumiamo V come spazio vettoriale su un campo K.

Proprietà 1.1.2. Per ogni vettore $x \in V$, $0_K x = 0_V$.

Dimostrazione. Lo 0_K si può sempre scrivere come somma di 0_K con se stesso, quindi $0_K x = (0_K + 0_K)x = 0_K x + 0_K x$. Poiché V è abeliano, sommando l'inverso di $0_K x$ ai due membri si ottiene $0_K x = 0_V$ □

Proprietà 1.1.3. Per ogni scalare $a \in K$ e $\forall x \in V$, $-(ax) = (-a)x$.

Dimostrazione. Per la proprietà precedente si ha $0_V = 0_K x$, e lo zero scalare si scrive come somma degli inversi $a + (-a)$, quindi $0_V = [a + (-a)]x = ax + (-a)x$, che significa che $(-a)x$ è il vettore inverso di ax rispetto alla somma, ossia $(-a)x = -(ax)$. □

Proprietà 1.1.4. Per ogni $a \in K$, $a0_V = 0_V$.

Dimostrazione. Si ha che $a0_V = a(0_V + 0_V) = a0_V + a0_V$, e come per la proprietà 1.1.2 poiché V è abeliano si somma ai due membri dell'uguaglianza l'inverso di $a0_V$, ottenendo $a0_V = 0_V$. □

Proprietà 1.1.5. Se $ax = 0_V$ per $a \in K$ e $x \in V$, allora $a = 0_K$ o $x = 0_V$.

Dimostrazione. Se $a = 0_K$ è ovvia, se invece $a \neq 0_K$ allora esiste il suo inverso, $a^{-1} \in K$, rispetto al prodotto in K (cioè tale che $aa^{-1} = 1_K$). Quindi $0_V = a^{-1}0_V$, e poiché per per ipotesi $ax = 0$ segue che $0_V = a^{-1}(ax) = (aa^{-1})x = 1_K x = x$, perciò $x = 0_V$. □

Proprietà 1.1.6. Per ogni $a, b \in K$ e per ogni $x \in V$, se $ax = bx$ allora $a = b$ oppure $x = 0_V$.

Dimostrazione. Se vale che $ax = bx$, allora aggiungendo l'inverso di bx per la somma si ottiene $ax - (bx) = 0_V$. Inoltre per la proprietà distributiva questo è uguale ad $ax + (-b)x = (a - b)x = 0_V$. Per la proprietà 1.1.5, infine, $a + (-b) = 0_K$ oppure $x = 0_V$. Sommando b alla prima delle due risulta $a = b$ o $x = 0_V$. □

Proprietà 1.1.7. Per ogni scalare $\lambda \in K$ e $\forall x, y \in V$, se $\lambda x = \lambda y$ allora $\lambda = 0_K$ o $x = y$.

Dimostrazione. Da $\lambda x = \lambda y$ risulta $\lambda x + \big(-(\lambda y)\big) = \lambda x + \lambda(-y) = 0_V$. Per la proprietà distributiva equivale a $\lambda\big(x + (-y)\big) = 0_V$, da cui sempre per la 1.1.5 $\lambda = 0_K$ oppure $x + (-y) = 0_V$, da cui sommando y ai due membri risulta $\lambda = 0_K$ oppure $x = y$. □

1.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 1.2.1. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Un suo sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto si dice* sottospazio *vettoriale se $(W, +, \cdot)$, con le operazioni indotte da V, è a sua volta uno spazio vettoriale.*

In altre parole un sottospazio (ometteremo spesso l'attributo "vettoriale" per brevità) è un sottoinsieme che risulta chiuso rispetto alle due operazioni dello spazio vettoriale che lo contiene. Per verificare che un insieme W sia un sottospazio bisogna dunque provare che le combinazioni lineari di elementi di W siano ancora in W: una condizione necessaria facile da verificare è che W deve contenere lo 0_V.

Ogni spazio vettoriale V contiene sempre due spazi vettoriali, che sono banalmente $\{0_V\}$ e V stesso. Vediamone altri esempi.

- Preso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, l'insieme

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale, perché ognuna delle due operazioni dà sempre come risultato un vettore con l'n-esima componente nulla.

- Dato $\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi di grado non maggiore di n, indicato con $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$, formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Infatti la somma di due poliniomi di grado massimo n è ancora un polinomio di grado massimo n, mentre moltiplicando un polinomio per uno scalare non nullo si moltiplicano i coefficienti di ogni termine per tale scalare, quindi il grado rimane immutato. Moltiplicando per zero si ottiene invece un polinomio nullo, che ha ancora ovviamente grado minore di n. Lo stesso vale per $\mathbb{C}_n[x] \leq \mathbb{C}[x]$.
- L'insieme $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ delle funzioni definite da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e continue è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Infatti sommando due funzioni continue si ottiene una funzione continua, e ovviamente anche moltiplicando una funzione continua per uno scalare.

Teorema 1.2.2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{W_i\}_{i\in I}$ un insieme di sottospazi vettoriali di V. Allora la loro intersezione $\bigcap_{i\in I} W_i$ è ancora un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Siano $w_1, w_2 \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Allora $\forall i \in I$, w_1 e w_2 appartengono a W_i (appartengono a tutti i sottospazi). Poiché i W_i sono sottospazi vettoriali, allora accade sempre che $\forall i \in I$, $w_1 + w_2 \in W_i$, quindi appartengono anche a $\bigcap_{i\in I}$. Un ragionamento analogo si effettua per il prodotto per scalare. Quindi $\bigcap_{i\in I}$ è un sottospazio vettoriale di V. $\square$

Il teorema non vale se al posto dell'intersezione si effettua l'unione dei W_i: ad esempio le due rette $x = 0$ e $y = x$, rappresentate in forma vettoriale come $\left\{\binom{x}{0} : x \in \mathbb{R}\right\}$ e $\left\{\binom{x}{x} : x \in \mathbb{R}\right\}$, sono banalmente due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$. Prendendo però un elemento del primo e uno del secondo, $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$, sommandoli si ottiene $\binom{2}{1}$ che non appartiene all'unione dei due sottospazi.

Definizione 1.2.3. *Siano V uno spazio vettoriale su K e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. Si dice* sottospazio generato *di V, e si indica con $\langle S\rangle$, un sottospazio vettoriale che soddisfa le seguenti due proprietà:*

- *$S \subseteq \langle S\rangle$;*
- *se $W \leq V$ tale che $S \subseteq W$, allora $\langle S\rangle \leq W$.*

Teorema 1.2.4. Siano V uno spazio vettoriale su K e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto, esiste sempre $\langle S\rangle$ ed è unico.

Dimostrazione. Mostriamo l'esistenza: costruiamo l'insieme $\langle S\rangle = \bigcap_{i\in I} Z_i$ dove $\{Z_i\}_{i\in I}$ sono tutti sottospazi vettoriali di V che includono S; ogni Z_i non è vuoto perché include S. Sicuramente $\langle S\rangle$ è, a sua volta, un sottospazio di V per il teorema 1.2.2. S è contenuto in ogni Z_i, quindi è incluso anche in $\langle S\rangle = \bigcap_{i\in I} Z_i$. Inoltre, sia W un sottospazio di V tale che $S \subseteq W$: allora $S \subseteq \langle S\rangle \subseteq W$. Poiché $\langle S\rangle$ è un sottospazio vettoriale, per ogni $x, y \in S$ e $\lambda, \mu \in K$ (x e y appartengono a $\langle S\rangle$ e a W), mentre $\lambda x + \mu y \in \langle S\rangle$, quindi $\langle S\rangle \leq W$. Tale $\langle S\rangle$ rispetta dunque la definizione 1.2.3.

Vediamo ora l'unicità. Se Z_1, Z_2 sono due sottospazi vettoriali di V che soddisfano la definizione 1.2.3, allora $S \subseteq Z_1$ e $S \subseteq Z_2$. Se poi per un altro sottospazio vettoriale W si ha $S \subseteq W$, allora sempre dalla definizione si deve avere $Z_1 \leq W$ e analogamente $Z_2 \leq W$. Ma anche Z_2 è un sottospazio di V e $S \subseteq Z_2$, dunque $Z_1 \leq Z_2$, e allo stesso modo $Z_2 \leq Z_1$, quindi $Z_1 = Z_2$. $\square$

Definiamo ora la somma di sottospazi come l'insieme $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$: esso è un sottospazio vettoriale, infatti

$$
\begin{gathered}
(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W \\
\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w \in U + W.
\end{gathered}
$$

Dimostriamo inoltre che $U + W$ è lo spazio generato dall'unione dei due sottospazi, seguendo la definizione 1.2.3.

Teorema 1.2.5. Siano U, W sottospazi vettoriali di V su un campo K. Allora $\langle U \cup W \rangle \equiv U + W$.

Dimostrazione. Ogni $u \in U$ si può scrivere come $u + 0_W = u + 0_V$ che quindi appartiene a $U + W$, quindi $U \subseteq U + W$ e analogamente $W \subseteq U + W$, quindi $U \cup W \subseteq U + W$. Consideriamo un sottospazio vettoriale T di V che includa $U \cup W$: ogni elemento $u + w$ appartiene anche a T per qualunque u e w, ma allora $U + W$ è un sottoinsieme di T oltre che uno spazio vettoriale, e ciò lo rende un sottospazio vettoriale di T. Abbiamo allora dimostrato che $U + W$ soddisfa la definizione 1.2.1, perciò $U + W = \langle U \cup W \rangle$. □

1.3 Sistemi di generatori

Sia V uno spazio vettoriale su K, e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. Le combinazioni lineari (sempre finite!) di elementi di S sono definite come

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \cdots + \lambda_n s_n,$$

con $\lambda_i \in K$, $s_i \in S$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.1. Sia V uno spazio vettoriale su K, e $S \subseteq V$ non vuoto. Allora

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \colon \lambda_i \in K, s_i \in S, i = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrazione. Questo particolare $\langle S \rangle$ deve soddisfare la definizione 1.2.3:

- gli elementi s_i appartengono a S, e possiamo esprimerli come $s_i = 1_K s_i$ quindi $S \subseteq \langle S \rangle$;
- se $W \leq V$ e $S \subseteq W$, allora dato che $\langle S \rangle \supseteq S$ se prendiamo una combinazione lineare di due elementi di S, lo è anche di elementi di W, e poiché il risultato è sempre un elemento di $\langle S \rangle$ quest'ultimo è un sottospazio vettoriale di W. □

Per l'unicità del sottospazio generato, questa è anche l'unica forma che $\langle S \rangle$ assume.

Definizione 1.3.2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. S è detto* sistema di generatori *per V se $\langle S \rangle = V$.*

Il fatto che con alcuni elementi di uno spazio $V = \langle S \rangle$ possiamo ricostruire tramite delle combinazioni lineari tutti i restanti è molto utile, in quanto possiamo dedurre molte proprietà di V studiando soltanto S. La situazione però si può ancora migliorare, come vedremo in seguito: il problema principale è che, senza ulteriori ipotesi, potrebbero esistere molti modi di esprimere $v \in V$ in termini di combinazioni lineari di elementi di S.

Esempi

- Come già detto, i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono definiti dalle loro coordinate, quindi possono essere scritti come combinazioni lineari di questi elementi: allora

$$\mathbb{R}^n = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

  I vettori dello spazio generatore sono a tutti gli effetti dei versori di $\mathbb{R}^n$; in questo esempio sono i versori allineati con gli assi cartesiani.

- $\mathbb{R}[x]$ è generato da $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$; questo insieme è infinito, perché non esiste un polinomio "di grado massimo". Ogni $x \in \mathbb{R}[x]$ è determinato da una combinazione lineare di questi componenti, in modo univoco.
- In $\mathbb{R}^2$ si può individuare il sistema di generatori $\left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$. Con questo insieme però si può scrivere l'elemento $\binom{2}{2}$ in due modi diversi, ossia come $2\binom{0}{1} + 2\binom{1}{0} + 0\binom{1}{1}$ ma anche come $0\binom{0}{1} + 0\binom{1}{0} + 2\binom{1}{1}$.

Definizione 1.3.3. *Sia V uno spazio vettoriale su K, e $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$. Si dice che l'insieme $\{v_i\}_{i\in I}$* è linearmente dipendente *se esiste $I_0 \subseteq I$, di cardinalità n finita, e un insieme di scalari $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ non tutti nulli tali per cui*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0_V.$$

Nell'ultimo degli esempi precedenti l'insieme $\left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$ è linearmente dipendente.

Ovviamente, un sistema che non è linearmente dipendente si dice *linearmente indipendente.*

Definizione 1.3.4. *Un insieme finito di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ si dice* linearmente indipendente*, se in ogni combinazione lineare dei k vettori che produce 0_V i coefficienti sono tutti nulli:*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0_V \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0_K.$$

Un insieme infinito di vettori $\{v_i\}_{i\in I}$ è linearmente indipendente se $\forall J \subseteq I$ di cardinalità finita $\{v_j\}_{j\in J}$ è linearmente indipendente.

Alcuni esempi di insiemi linearmente indipendenti:

- il sistema che genera $K_n[x]$, ossia $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, è linearmente indipendente perché un polinomio è identicamente nullo se e solo se tutti i coefficienti dei vari termini sono nulli. Lo stesso vale per i polinomi di grado non limitato di $K[x]$, poiché la definizione è verificata da "blocchi" di termini.
- l'insieme $\{v, w, 0_V, z\} \subset V$ spazio vettoriale su K non lo è, poiché $0_K v + 0_K w + 1_K 0_V + 0_K z = 0_V$ anche se uno dei coefficienti, 1_K, non è nullo. In generale ogni insieme che contenga l'elemento nullo dello spazio è sempre linearmente dipendente.

Il seguente teorema indica un modo più semplice di verificare questa definizione.

Teorema 1.3.5. Un insieme di vettori $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ è linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi è una combinazione lineare di un numero finito dei rimanenti.

Dimostrazione. Sia dato un insieme $\{v_i\}_{i=1}^k$ linearmente dipendente: esiste allora una combinazione lineare $\sum_{n=1}^k \lambda_n v_n = 0_V$ senza che tutti i λ_n siano nulli. Trascurando nella serie gli eventuali termini nulli, possiamo allora scrivere $\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n$. Poiché λ_1 non è nullo, esiste il suo inverso rispetto al rapporto, $(\lambda_1)^{-1}$, e moltiplicando la precedente equazione per questo risulta che il primo termine è $(\lambda_1)^{-1}(\lambda_1 v_1) = (\lambda_1^{-1}\lambda_1)v_1 = v_1$ da cui

$$v_1 = (\lambda_1^{-1})(-\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n),$$

cioè v_1 è combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme.

Viceversa, sia $v^* \neq 0_V$ un vettore dell'insieme dato, combinazione lineare (in cui quindi i coefficienti non possono essere tutti nulli) di alcuni dei vettori rimanenti, quindi

$$v^* = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r.$$

Portando tutto al primo termine risulta $v^* - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 - \dots - \mu_r v_r = 0_V$ sebbene non siano tutti nulli, ossia l'insieme dei v_i è linearmente dipendente. $\square$

1.4 Basi e dimensioni

Definizione 1.4.1. *Si chiama* base *di uno spazio vettoriale V ogni sistema S linearmente indipendente che genera S.*

La base in un certo senso "codifica" tutto ciò che è necessario sapere dello spazio vettoriale: tramite delle combinazioni lineari possiamo ricostruire tutto lo spazio a partire da un numero limitato di elementi. Il vantaggio delle basi è che esiste sempre un unico modo di esprimere ogni vettore dello spazio in termini dei suoi elementi, come dimostriamo nel teorema seguente.

Teorema 1.4.2. Sia $\{e_i\}_{i\in I}$ un insieme di V. Esso è una base di V se e solo se ogni elemento $v \in V$ non nullo si può scrivere in modo univoco come combinazione lineare finita, a coefficienti non nulli, di elementi di $\{e_i\}_{i\in I}$.

Gli elementi v non devono essere nulli, perché 0_V si può scrivere come combinazione lineare di *qualunque* sistema di vettori; inoltre i coefficienti della combinazione non devono essere nulli poiché altrimenti si potrebbe affermare che $v = ae_1 + be_2$ ma anche $v = ae_1 + be_2 + 0_K e_3 + \cdots + 0_K e_n + \ldots$ a piacere.

Dimostrazione. Dimostriamo che la condizione è necessaria. Sia $\{e_i\}_{i\in I}$ una base di V: essa per definizione genera tutto V. Preso un elemento $v \in V$ non nullo, possiamo scriverlo come una combinazione lineare finita

$$v = \sum_{i\in I_0} \lambda_i e_i, \tag{1.4.1}$$

con $I_0 \subset I$ di cardinalità finita. Dimostriamo che questa scrittura è unica: supponiamo che $\forall i \in I_0$ $\lambda_i \neq 0_K$ (eventuali termini nulli nella combinazione lineare si trascurano), e supponiamo che esista anche

$$v = \sum_{j\in J_0} \mu_j e_j \tag{1.4.2}$$

con $\mu_j \neq 0_K$ $\forall j \in J_0 \subset I$ e tale J_0 di cardinalità finita. Sommando gli opposti della (1.4.2) alla (1.4.1) si ha

$$\sum_{i\in I_0} \lambda_i e_i + \sum_{j\in J_0} -\mu_j e_j = 0_V.$$

Sia $I_0 \neq J_0$, e prendiamo $j_0 \in J_0$ ma $\notin I_0$. L'elemento e_{j_0}, nella combinazione, è associato a un coefficiente $-\mu_{j_0} \neq 0_K$ (quindi esiste il suo reciproco). Portando $-\mu_{j_0} e_{j_0}$ al secondo membro dell'uguaglianza e moltiplicando per il reciproco di μ_{j_0} risulta

$$\sum_{i\in I_0} (\lambda_i \mu_{j_0}^{-1}) e_i + \sum_{j\in J_0} (\mu_j \mu_{j_0}^{-1}) e_j = e_{j_0},$$

cioè uno degli e_i è espresso come combinazione lineare degli altri, vale a dire la base è linearmente dipendente, il che è assurdo: quindi non può esistere un j_0 che appartiene a J_0 ma non a I_0. Ponendo $j_0 \in I_0$ e $\notin J_0$ si ottiene allo stesso modo un altra contraddizione. Allora non può che essere $I_0 = J_0$, ma ciò significa che

$$\sum_{i\in I_0} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_V,$$

cui segue che $\lambda_i = \mu_i$ $\forall i \in I_0$, cioè le (1.4.1) e (1.4.2) sono identiche: dunque la scrittura di v in termini della base è unica.

Mostriamo ora che la condizione è anche sufficiente: innanzitutto, $\langle \{e_i\}_{i\in I} \rangle = V$ perché per ipotesi possiamo scrivere ogni vettore di V come combinazione lineare di elementi di questo insieme. Supponiamo per assurdo che $\{e_i\}_{i\in I}$ sia linearmente dipendente, ossia che esista $I_0 \subset I$ di cardinalità finita per cui

$$\sum_{i\in I_0} \lambda_i e_i = 0_V, \tag{1.4.3}$$

e come prima che $\lambda_i \neq 0_K$ $\forall i \in I_0$. Considerando un $i^* \in I_0$, λ_{i^*} non è nullo, quindi moltiplicando la (1.4.3) per il suo inverso si trova

$$\sum_{i \in I_0} (\lambda_{i^*}^{-1} \lambda_i) e_i = 0_V.$$

Isolando il termine in i^* si ottiene poi che

$$\sum_{i^* \neq i \in I_0} (\lambda_{i^*}^{-1} \lambda_i) e_i = -e_{i^*} \tag{1.4.4}$$

vale a dire che e_{i^*} si esprime come combinazione lineare di altri elementi dell'insieme. Ma allora ogni volta che scriviamo un vettore come combinazione lineare che contenga e_{i*} possiamo scegliere di usare, indifferentemente, il primo o il secondo membro della (1.4.4), e ciò viola l'ipotesi che la scrittura di ogni vettore di V in termini degli e_i sia unica. Dunque un tale I_0 non può esistere: dunque l'insieme è linearmente indipendente, e dato che genera V è una sua base. □

Definizione 1.4.3. *Sia V uno spazio vettoriale su K: esso si dice di dimensione finita se ammette un sistema finito di generatori, altrimenti si dice di dimensione infinita.*

Teorema 1.4.4. Sia $G \subset V$ un sistema di generatori di V finito. Se $S \subseteq G$ è linearmente indipendente, allora esiste una base B di V tale che $S \subseteq B \subseteq G$.

Dimostrazione. Si supponga che V abbia dimensione finita: allora esiste un sistema di generatori G.[1] Escludiamo il caso in cui $V \equiv \{0_V\}$ perché non esisterebbe nemmeno una base.

Indichiamo con S_n il fatto che nell'insieme linearmente indipendente S ci siano n vettori. Potrebbe essere che $\langle S_n \rangle \equiv V$, ma allora possiamo scegliere subito S_n come base per V, e poiché $B = S_n \subseteq G$ il teorema è dimostrato. Sia allora $\langle S_n \rangle \neq V$: deve esistere $x_{n+1} \in G$, ma $\notin \langle S_n \rangle$ (perché altrimenti dato che $\langle S \rangle \supseteq G$ si avrebbe che $\langle S_n \rangle \equiv V$). Definiamo $S_{n+1} = S_n \cup \{x_{n+1}\}$, per cui sicuramente vale $S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq G$. Questo S_{n+1} è un insieme linearmente indipendente, altrimenti avremmo che $x_{n+1} \in \langle S_n \rangle$. Se $\langle S_{n+1} \rangle = V$ il teorema è dimostrato, altrimenti procediamo aggiungendo un altro elemento di $G \setminus \langle S_{n+1} \rangle$. Iteriamo il processo per $n+2$, $n+3$ e così via: il processo deve necessariamente terminare poiché

$$S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq S_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq G$$

e G è finito. Esisterà dunque $k \in \mathbb{N}$ per cui $\langle S_{n+k} \rangle = \langle G \rangle$, e anche in questo caso abbiamo trovato che S_{n+k} (che è ancora linearmente indipendente per costruzione) è base di V. □

Sempre in $\mathbb{R}^3$, per esempio, una delle possibili basi è quella composta dai tre versori $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, ma anche $\{e_1, e_2, e_2 + e_3\}$ è un'altra base. In effetti ruotando e_1, e_2 e e_3 di un angolo qualsiasi si ottiene un altra base, e se ne ottengono ancora delle altre moltiplicando per degli scalari (anche differenti) i tre versori. Quindi le basi di uno spazio vettoriali sono infinite; quello che non cambia è il numero di elementi di queste basi, che è sempre costante (in questo esempio, la base è sempre composta da tre vettori).

Corollario 1.4.5. Ogni spazio vettoriale $V \neq \{0_V\}$ di dimensione finita ammette almeno una base.

Dimostrazione. L'esistenza di un sistema di generatori G per V è garantita (semmai prendiamo $G = V$). In tale insieme, un elemento singolo $v \neq 0_V$ forma da solo un insieme linearmente indipendente $\{v\}$. Il teorema precedente assicura dunque l'esistenza di una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\{v\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq G$. □

Teorema 1.4.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, contenente una base di n vettori. Allora:

[1] Esiste sempre un sistema di generatori per qualsiasi spazio: nel peggiore dei casi, V genera se stesso, ossia $\langle V \rangle = V$, dunque possiamo prendere $G = V$. La dimensione finita di V ci assicura che esiste un tale G finito.

1. ogni sistema linearmente indipendente S di n vettori è una base di V;
2. ogni sistema U di $m > n$ vettori è linearmente dipendente;
3. ogni sistema W di $m < n$ vettori non può generare V, cioè $\langle W \rangle \neq V$;
4. ogni sistema T di n vettori per cui $\langle T \rangle = V$ è una base.

Dimostrazione.

1. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base di V, e $S = \{f_i\}_{i=1}^n$ un insieme finito linearmente indipendente. Allora
$$f_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$
Poiché S è linearmente indipendente, almeno un λ_i non è nullo, quindi $f_1 \neq 0_V$, e riordinando i vettori nella combinazione possiamo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0_K$: in questo modo $\lambda_1 e_1 \neq 0_V$. Portando quest'ultimo termine al secondo membro e moltiplicando per $\mu_1 = \lambda_1^{-1}$ risulta con opportuni $\mu_i \in K$ che
$$e_1 = \mu_1 f_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i.$$
Ogni vettore di V è una combinazione lineare di elementi di $\{e_i\}_{i=1}^n$, ma sostituendo e_1 con l'espressione trovata sopra abbiamo $\forall v \in V$
$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda_1 \left(\mu_1 f_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i \right) + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i$$
che quindi può essere espresso anche come combinazione lineare di $\{f_1, e_2, \dots, e_n\}$ anziché degli $\{e_i\}_{i=1}^n$, quindi anche l'insieme $\{f_1, e_2, \dots, e_n\}$ è un sistema di generatori di V. Dunque troviamo anche che
$$f_2 = \sigma_1 f_1 + \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i.$$
Almeno uno dei σ_i non è nullo, altrimenti sarebbe che $f_2 = \sigma_1 f_1$ che contraddice l'indipendenza lineare degli f_i. Supponendo $\sigma_2 \neq 0_K$, si esplicita e_2 moltiplicando per σ_2^{-1}, ottenendo
$$e_2 = \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \sum_{i=3}^n \rho_i e_i.$$
L'insieme $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ è ancora un sistema di generatori di V. Si itera il procedimento ottenendo alla fine che $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ è ancora un sistema di generatori per V, e dunque ne è una base dato che è linearmente indipendente.

2. Sia U con $m > n$ elementi linearmente indipendente, e si prenda $U' \subset U$ tale che abbia n elementi (dunque $U \setminus U' \neq \varnothing$). Per il punto 1 U' è una base di V, quindi i vettori di U' generano anche quelli di $U \setminus U'$. Ciò contraddice l'indipendenza lineare di U, che deve essere quindi linearmente dipendente.

3. Sia W con $m < n$ elementi un sistema di generatori di V: allora deve esistere una base con al più m vettori, tanti quanti ce ne sono in W. Per il punto precedente, la base $\{e_i\}_{i \in I}$ (considerata nel punto 1) ha più vettori della base estratta da W, quindi sarebbe linearmente dipendente, che è assurdo. Allora W non può essere un sistema di generatori di V.

4. Se $\langle T \rangle = V$, T deve avere almeno n elementi per il punto 3; allora esiste $T' \subseteq T$ che è una base di V. Se T' avesse meno di n elementi, contraddirrebbe il punto 3 prima citato, quindi deve averne esattamente n, perciò $T \equiv T'$, e T è linearmente indipendente. Poiché genera V, T ne è anche una base.

□

Corollario 1.4.7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, contenente una base di n vettori. Ogni altra base V ha a sua volta esattamente n vettori.

Definizione 1.4.8. *Dato uno spazio vettoriale $V \neq \{0_V\}$ su K di dimensione finita, si dice* dimensione *di V su K il numero di vettori di una sua base qualunque.*

La dimensione di V (su K) si indica con $\dim_K V$ o anche solo, se non ci sono ambiguità, con $\dim V$. Convenzionalmente, allo spazio contenente soltanto $\{0_V\}$ si assegna la dimensione 0.

Ad esempio, preso un campo generico K, nello spazio K^n (insieme delle n-uple di elementi in K) possiamo vedere facilmente che ogni base possiede n elementi, dunque $\dim_K K^n = n$. La dimensione può cambiare però se modifichiamo il campo su cui definiamo lo spazio vettoriale: un noto esempio è $\mathbb{C}^n$. Ovviamente, sul campo complesso, abbiamo $\dim_\mathbb{C} \mathbb{C}^n = n$; allo stesso tempo, però, possiamo vedere $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: ogni componente di un vettore di $\mathbb{C}^n$ è una coppia di numeri reali, perciò $\dim_\mathbb{R} \mathbb{C}^n = 2n$.

Teorema 1.4.9. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e W un suo sottospazio. Se $\dim_K V$ è finita, allora $\dim_K W \leq \dim_K V$.

Dimostrazione. Nel caso banale in cui $W = \{0_V\}$, la sua dimensione è 0 quindi è ovviamente minore o uguale della dimensione di V, qualunque essa sia.

Siano $m \coloneqq \dim_K W$ e $n \coloneqq \dim_K V$. Se W non contiene soltanto il vettore nullo, una base $\mathcal{B}$ (che possiede m elementi) qualunque di W è un insieme linearmente indipendente anche in V. Se $m > n$, per il teorema 1.4.6 $\mathcal{B}$ sarebbe linearmente dipendente, il che è assurdo poiché è una base, dunque $\dim_K W = m \leq n = \dim_K V$. □

Teorema 1.4.10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, W un suo sottospazio e $\mathcal{B}_W$ una base di W. Allora tale base si può estendere per formare una base di V, cioè $\exists \mathcal{B}_V : \mathcal{B}_W \subseteq \mathcal{B}_V$.

Dimostrazione. Prendiamo una base $\mathcal{B}_W$ di W e un sistema di generatori G, finito, di V. Sicuramente $\mathcal{B}_W \cup G$ genera ancora V. Esso contiene inoltre la base di W che per definizione è linearmente indipendente. Per il teorema 1.4.4 allora possiamo trovare una base $\mathcal{B}_V$ di V tale che $\mathcal{B}_W \subseteq \mathcal{B}_V \subseteq (\mathcal{B}_W \cup G)$, e ciò prova la tesi. □

Ad esempio, $\mathbb{R}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$: prendendo una base $\{v\}$ del primo, si ottiene una base del secondo semplicemente aggiungendo due vettori (distinti) perpendicolari a v.

Definizione 1.4.11. *Un insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ di sottospazi vettoriali di V si dice linearmente indipendente se comunque si scelga un vettore $x_i \neq 0$ per ciascun V_i, l'insieme $\{x_i\}_{i\in I}$ è linearmente indipendente.*

Teorema 1.4.12. Un insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ di sottospazi vettoriali di V è linearmente indipendente se e solo se $\forall k \in I$ si ha che l'intersezione tra V_k e lo spazio generato dai restanti V_i contiene soltanto lo zero, cioè[2]

$$V_k \cap \sum_{j \in I \setminus \{k\}} V_j = \{0\}.$$

Dimostrazione. Se i sottospazi V_i sono linearmente indipendenti, e per assurdo $V_k \cap \sum_{j\in I\setminus\{k\}} V_j \neq \{0\}$ per qualche $k \in I$, allora esisterebbe un elemento $v_k \in V_k$ non nullo che è combinazione lineare di elementi dei restanti sottospazi, cioè $v_k = x_{i_1} + \cdots + x_{i_r}$ con $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq I \setminus \{k\}$. Ma allora l'insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ dei sottospazi non sarebbe linearmente indipendente, contraddicendo l'ipotesi, quindi l'uguaglianza deve essere vera.

Viceversa, se prendessimo una combinazione lineare nulla di elementi uno da ciascun sottospazio

$$a_{i_1} v_{i_1} + \cdots + a_{i_k} v_{i_k} = 0 \tag{1.4.5}$$

[2] Ricordiamo che la somma di più spazi vettoriali è lo spazio generato dalla loro unione, ossia $\sum_i V_i = \left\langle \bigcup_i V_i \right\rangle$.

con $v_{i_j} \in V_{i_j}$ appartenenti tutti a sottospazi distinti, e ci fosse $a_{i^*} \neq 0$, allora potremmo scrivere

$$v_{i^*} = \sum_{j \in I \setminus \{i^*\}} c_j v_j \tag{1.4.6}$$

ma allora $v_{i^*} \in V_{i^*}$ e anche $v_{i^*} \in \sum_{j \in I \setminus \{i^*\}} V_j$, ossia esiste un $i^* \in I$ tale per cui

$$V_{i^*} \cap \sum_{j \in I \setminus \{i^*\}} V_j \neq \{0\}$$

che contraddice l'ipotesi. Dunque nella (1.4.5) si ha $a_j = 0$ per ogni $j \in I$, cioè i sottospazi sono linearmente indipendenti. □

Teorema 1.4.13. Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ un insieme linearmente indipendente di sottospazi vettoriali di V. Se $\forall i \in I$ il sistema di vettori $S_i \subset V_i$ è linearmente indipendente, allora $\bigcup_{i \in I} S_i$ è linearmente indipendente in V.

Dimostrazione. Consideriamo un sistema linearmente indipendente di vettori $S_i = \{x_k\}_{k=1}^{n_i} \subset V_i$ e ipotizziamo per assurdo che l'unione non sia linearmente indipendente. Questo implica che, considerando gli elementi $x_k^i \in S_i$ con $i \in I_0$ e $1 \leq k \leq n_i$ (in cui $I_0 \in I$ ha cardinalità finita) troviamo

$$\sum_{1 \leq k \leq n_i} \lambda_k^i x_k^i = 0,$$

con λ_k^i nulli per ogni i, k tranne (almeno) un $\lambda_{k^*}^{i^*}$. Posto $y^i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^i x_k^i$ sappiamo che $\sum_{i \in I_0} y^i = 0$ e che $y^{i^*} \neq 0$, ma allora

$$y^{i^*} = - \sum_{i \in I_0 \setminus \{i^*\}} y^i \quad \Rightarrow \quad V_{i^*} \cap \sum_{i \in I_0 \setminus \{i^*\}} V_i \ni y^{i^*} \neq 0$$

che contraddice l'indipendenza lineare dei sottospazi, per il teorema 1.4.12. L'unione S dei vari S_i è allora linearmente indipendente. □

Definizione 1.4.14. *Uno spazio vettoriale V si dice* somma diretta *di un insieme di sottospazi vettoriali $\{V_i\}_{i \in I}$ se $\{V_i\}_{i \in I}$ è linearmente indipendente e se $\sum_{i \in I} V_i = V$.*

Per indicare che V è composto dalla somma diretta degli spazi V_i si usa la scrittura $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$. Per verificare che due spazi siano in somma diretta, per esempio che $V = W \oplus U$, dove W, U sono sottospazi di V, è sufficiente verificare che:

- $U + W = V$, cioè $\langle U \cup W \rangle = V$, ossia che l'unione delle basi contenga una base di V;
- $U \cap W = \{0\}$.

Esempi

- Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ è generato dall'insieme $\{1, x, x^2, \dots\}$. Posto $V_j = \langle \{x^j\} \rangle$, con $j \in \mathbb{N}_0$, si ha che
$$\mathbb{R}[x] = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V_j.$$
- In $\mathbb{R}^3$, siano $V_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ e $V_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Certamente $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma la somma non è diretta poiché la loro intersezione è l'asse y.

1.5 Spazi quoziente

Sia W un sottospazio vettoriale di V. Definiamo la relazione $x \sim y$, con $x, y \in V$, se $x - y \in W$. È una relazione di equivalenza, perché soddisfa le tre proprietà della definizione **??**:

- è riflessiva perché $x - x = 0 \in W$ per ogni $x \in V$;
- se $x - y = w \in W$, allora $-w = y - x \in W$;
- se $x - y = w_1 \in W$ e $y - z = w_2 \in W$ allora anche $w_1 + w_2 = x - y + (y - z) = x - z \in W$.

Prendiamo un elemento $a \in V$: la sua classe di equivalenza, detta anche classe laterale, è formata dunque da tutti i $v \in V$ tali che $a - v \in W$, cioè

$$[a]_W = \{x \in V : x - a = w \in W\} = \{w + a : w \in W\}.$$

Poiché ogni elemento di $[a]_W$ è somma di un elemento (qualsiasi) di W e di a, indichiamo la classe di equivalenza anche come $W + a$.[3] L'insieme delle classi di equivalenza definite da questa relazione è lo spazio quoziente $V \,/\, W$.

Esso possiede una struttura di spazio vettoriale, con le operazioni indotte da V sui rappresentanti. Più precisamente, definiamo la somma tra due classi e il prodotto per scalare come

$$(W + a) + (W + b) = W + a + b, \qquad \lambda(W + a) = W + \lambda a. \tag{1.5.1}$$

Le definizioni appaiono del tutto naturali se interpretiamo W in queste formule come un elemento, appunto, di W: allora troviamo $W + W = W$ e $\lambda W = W$, essendo che sommando due elementi di W o moltiplicandoli per uno scalare otteniamo ancora un elemento in W, per cui possiamo immaginare di svolgere le (1.5.1) proprio come normali operazioni tra vettori.

Osservazione 1.5.1. Se anche fosse $[a]_W = [a']_W$ e $[b]_W = [b']_W$, non è detto a priori che si abbia $[a + b]_W = [a' + b']_W$ o $[\lambda a]_W = [\lambda a']_W$ come conseguenza della proprietà transitiva.[4] Perché ciò accada serve un'ulteriore condizione, che la relazione sia una *relazione di congruenza*, ossia che sia compatibile con le operazioni in V. Questo fatto si verifica facilmente sfruttando la struttura di sottospazio vettoriale di W. Se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, allora $x - x' = w_1$ e $y - y' = w_2$ per qualche $w_1, w_2 \in W$. Sommandoli, otteniamo $W \ni w_1 + w_2 = x - x' + y - y' = (x + y) - (x' + y')$: allora $x + y \sim x' + y'$. Anche per il prodotto con uno scalare $\lambda \in K$, si ottiene analogamente che se $z - z' = w_3 \in W$, allora si ha che $W \ni \lambda w_3 = \lambda(z - z') = \lambda z - \lambda z'$ perciò $\lambda z \sim \lambda z'$.

La terna $(V \,/\, W, +, \cdot)$ è dunque per quanto mostrato uno spazio vettoriale su K, dove V è a sua volta uno spazio vettoriale sul medesimo campo. Infatti, oltre alle proprietà appena dimostrate, esiste l'elemento neutro rispetto all'addizione, che è $W + 0_V$ (si indica anche solamente con W), e l'opposto, che è $-(W + a) = W + (-a)$.

Teorema 1.5.2. Sia $W \leq V$ con V di dimensione finita. La dimensione di V/W è finita e vale $\dim V - \dim W$.

Dimostrazione. Il sottospazio W ha certamente dimensione finita: siano $n \coloneqq \dim W$ e $n + m \coloneqq \dim V$. Sia $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base di W. Essa si può estendere ad una base di V, per il teorema 1.4.10. Allora sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\}$ una base di V.

Ora, presa una classe $W + a$, il rappresentante $a \in V$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$a = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + \mu_{n+1} f_{n+1} + \dots + \mu_{n+m} f_{n+m}.$$

Poiché i termini fino a $\lambda_n e_n$ individuano un elemento di W, risulta $W + a = W + \mu_1 f_{n+1} + \dots + \mu_m f_{n+m}$. Per come è definita la somma nello spazio quoziente questo è equivalente ad $W + a = \mu_1(W + f_{n+1}) + \dots + \mu_m(W + f_{n+m})$: l'insieme $\{W + f_{n+i}\}_{i=1}^m$ genera dunque $V \,/\, W$.

[3] È inutile in questo contesto specificare le classi laterali *destre* e *sinistre*, dato che la somma è commutativa, quindi $W + a = a + W$.

[4] Ovviamente con $a \neq a'$ e $b \neq b'$, altrimenti sarebbe ovvia.

Verifichiamo che è anche linearmente indipendente. Prendiamo una combinazione lineare nulla

$$\lambda_1(W + f_{n+1}) + \lambda_2(W + f_{n+2}) + \cdots + \lambda_m(W + f_{n+m}) = 0_{V\,/\,W} = W + 0_V. \tag{1.5.2}$$

Essa è per definizione equivalente a $W + (\lambda_1 f_{n+1} + \cdots + \lambda_m f_{n+m})$. Per l'uguaglianza precedente, quindi, deve essere

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n+i} \sim 0_V \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{n+i} \in W. \tag{1.5.3}$$

Ma gli f_{n+i} sono tutti vettori che non appartengono a W: dato che formano insieme agli e_i la base $\mathcal{B}$, non è possibile che una combinazione lineare degli f_{n+i} dia un elemento di W (che, ricordiamo, è generato da $\{e_i\}_{i=1}^n$), altrimenti $\mathcal{B}$ sarebbe linearmente dipendente. Se la loro somma deve essere in W, quindi, l'unico modo è che tutti i λ_i siano nulli. Ma allora l'insieme $\{W + f_{n+i}\}_{i=1}^m$ è linearmente indipendente, come volevasi dimostrare: perciò è una base di $V\,/\,W$.

La dimensione dello spazio quoziente è di conseguenza $\dim V\,/\,W = m = \dim V - \dim W$. □

1.6 Algebre

Definizione 1.6.1. *Si definisce* algebra *sul campo K uno spazio vettoriale A sul campo K munito di un'ulteriore operazione interna di prodotto, che sia associativo e distributivo rispetto alla somma, ossia tale per cui*

- $\forall v, w, z \in A$ *si ha:* $(vw)z = v(wz)$,
- $\forall v, w, z \in A$ *e* $\forall \lambda \in K$ *si ha* $(\lambda v + w)z = \lambda vz + wz$.

Un'algebra A si dice *commutativa* se il prodotto è commutativo, si dice *con unità* se $\exists I_a : \forall a \in A$ si ha $aI_a = I_a a = a$.