

Geometria

7 giugno 2015

1	Diagonalizzazione	3
1.1	Autovalori e autovettori	3
1.2	Diagonalizzabilità	6
1.3	Polinomio minimo	7
1.4	Sottospazi invarianti	8
1.5	Applicazioni e matrici triangolari	11

Capitolo 1

Diagonalizzazione

1.1 Autovalori e autovettori

Definizione 1.1.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K , e T un endomorfismo su V . Si dice *autovalore* di un endomorfismo $T \in \text{End}(V)$ uno scalare $\lambda \in K$ per il quale esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Un tale vettore v si dice *autovettore* di T associato all'autovalore λ .

Ad esempio, l'applicazione

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

individua una rotazione di un vettore di \mathbb{R}^2 . Se α è diverso da multipli interi di π , allora A non ammette alcun autovalore; se invece $\alpha = k\pi$ la matrice A individua una rotazione di 0 oppure π , cioè una dilatazione di v , eventualmente con un cambiamento di verso del vettore, quindi qualunque vettore di \mathbb{R}^2 è un autovettore di A .

Teorema 1.1.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Il determinante della matrice associata a un endomorfismo $T \in \text{End}(V)$ non dipende dalla scelta della base per rappresentarla.

Dimostrazione. Sia $\dim V = m$. Fissata una medesima base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^m$ di V sia in arrivo che in partenza, sia A_T la matrice associata a T nella base data, definita quindi come $(A_T)_{ij} = T(e_i)_j$. Scegliendo una base differente $\mathcal{B}' = \{e'_i\}_{i=1}^m$ per V , essa si può sempre ottenere applicando una matrice C alla precedente base \mathcal{B} , quindi

$$e'_j = \sum_{i=1}^m C_{ij} e_i,$$

e detta A'_T la matrice che rappresenta T nella nuova base, si ha $A'_T = C^{-1} A_T C$. Il determinante di A_T , sotto questa nuova base, è dunque $\det A'_T = \det(C^{-1} A_T C) = \det C^{-1} \det A_T \det C = (\det C)^{-1} \det A_T \det C = \det A_T$, per il teorema di Binet e la commutatività di K . \square

Possiamo quindi definire il *determinante di un endomorfismo*, sapendo che sarà lo stesso qualunque matrice si scelga per rappresentarlo.

Teorema 1.1.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K , $T \in \text{End}(V)$ e $\lambda \in K$. Le seguenti affermazioni si equivalgono:

1. λ è un autovalore di T ;
2. l'operatore lineare $T - \lambda I$ non è iniettivo;
3. $\det(T - \lambda I) = 0$.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore, allora esiste un vettore $v \in V$ non nullo per cui $T(v) = \lambda v = (\lambda I)(v)$ quindi $T(v) - (\lambda I)(v) = (T - \lambda I)(v) = 0_V$. Ma ciò significa che $\ker(T - \lambda I)$ non contiene soltanto 0_V , dunque non è iniettivo. Viceversa, se $\ker(T - \lambda I) \neq \{0_V\}$ vuol dire che esiste un $v \in V$ per cui $(T - \lambda I)(v) = 0_V$, cioè risalendo i passaggi precedenti $T(v) = \lambda v$.

Se $T - \lambda I$ non è iniettivo, non può essere di conseguenza invertibile, quindi il suo determinante deve essere nullo. Viceversa, se il determinante è nullo allora non è invertibile, vale a dire $T - \lambda I$ non è iniettivo o non è suriettivo. Se fosse iniettivo, l'applicazione dovrebbe essere, per come è definita un'isomorfismo, quindi il determinante non dovrebbe essere zero. Questo caso è allora da escludere. Se fosse suriettivo avremmo che per ogni $s \in V$ $(T - \lambda I)(v) = s$. Poichè s può anche essere il vettore nullo questo significa che il $\ker(T - \lambda I)$ non può essere costituito dal solo zero. Quindi se l'applicazione è suriettiva non può essere iniettiva e quindi un'isomorfismo. Questo implica che l'ultima affermazione è equivalente alla seconda. \square

Definizione 1.1.4. Si definisce polinomio caratteristico dell'applicazione $T \in \text{End}(V)$ il polinomio $\chi_T(x) = \det(T - xI)$.

È possibile definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo, equivalentemente, come $\det(A - xI)$ dove A rappresenta T in qualche base \mathcal{B} . Ma se $\tilde{\mathcal{B}}$ è un'altra base e L la matrice di cambiamento di base tra le due, allora la matrice che rappresenta T in $\tilde{\mathcal{B}}$ è $\tilde{A} = L^{-1}AL$. Il polinomio caratteristico di questa nuova matrice è

$$\chi_{\tilde{A}}(x) = \det(\tilde{A} - xI) = \det(L^{-1}AL - xI) = \det(L^{-1}AL - L^{-1}xIL) = \det(L^{-1}) \det(A - xI) \det L = \chi_A(x)$$

quindi matrici simili hanno il medesimo polinomio caratteristico. La definizione data tramite l'endomorfismo è quindi ben posta, in quanto le matrici rappresentanti un endomorfismo rispetto a basi differenti sono tutte simili.¹

Le radici di $\chi_T(x)$, per l'ultimo punto del teorema precedente, sono chiaramente gli autovalori di T . Il grado di questo polinomio inoltre equivale alla dimensione dello spazio vettoriale V . Si può alternativamente definire il polinomio caratteristico come $\chi_T(x) = \det(xI - T)$: gli autovalori trovati come radici non variano, perché per le proprietà del determinante vale $\det(xI - T) = (-1)^m \det(T - xI)$, dove $m = \dim V$, quindi le radici sono le stesse per entrambe le definizioni.

Rifacendosi al primo esempio

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha = \\ &= \lambda^2 - 2 \cos \alpha \lambda + 1, \end{aligned}$$

il cui discriminante è $-4 \sin^2 \alpha$, che quindi non è negativo solo se $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Soltanto per questi valori A ammette dunque autovalori.

Se v è un autovettore associato a λ , anche i suoi multipli per uno scalare sono a loro volta autovettori: infatti se $T(v) = \lambda v$ e $k \in K$ segue per la linearità di T che $T(kv) = kT(v) = k\lambda v$, cioè qualsiasi multiplo kv è un autovettore di T associato a λ .

Definizione 1.1.5. L'insieme V_λ degli autovettori associati ad un unico autovalore λ è detto autospazio di T :

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}.$$

¹Questo ovviamente vale purché le basi di partenza e di arrivo coincidono!

L'autospazio V_λ non si riduce mai allo zero, poiché gli autovettori sono per definizione non nulli, ed è anche un sottospazio vettoriale di V . Se $v, w \in V_\lambda$ e $h, k \in K$, si ha

$$T(hv + kw) = hT(v) + kT(w) = h\lambda v + k\lambda w = \lambda(hv + kw),$$

quindi $hv + kw$ è ancora un autovettore associato a λ , cioè appartiene a V_λ . La somma di due autovettori di T associati a due autovalori distinti però *non* è ancora necessariamente un autovettore di T .

Teorema 1.1.6. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K , T un endomorfismo in V . Siano v_1, v_2, \dots, v_k autovettori di T associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Se questi autovalori sono tutti distinti, allora i v_1, v_2, \dots, v_k sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione rispetto a k . Se $k = 1$, un elemento soltanto $v_1 \in V$ è linearmente indipendente perché essendo un autovettore non è mai nullo, quindi il teorema è subito dimostrato. Sia ora $k > 1$. Consideriamo una combinazione lineare

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0, \quad (\text{a})$$

e si dimostra che $a_1 = \dots = a_k = 0_K$. Moltiplicando la (a) per λ_1 si ottiene

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 + \dots + a_k \lambda_1 v_k = 0, \quad (\text{b})$$

e applicando T sempre alla (a) si ottiene un'altra combinazione

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_k \lambda_k v_k = 0. \quad (\text{c})$$

Sottraendo la (b) a quest'ultima risulta

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0.$$

Dato che $\lambda_i \neq \lambda_1$ per ogni $i > 1$, non può che essere $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0_K$, a cui segue nella (a) che $a_1 v_1 = 0_V$, da cui $a_1 = 0$. Poiché dunque $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0_K$, l'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente. \square

Definizione 1.1.7. Sia $T \in \text{End}(V)$, con $\dim V < +\infty$, e λ un autovalore di T . Si chiama molteplicità geometrica di λ , e si indica con γ_λ , la dimensione dell'autospazio V_λ ; si chiama molteplicità algebrica, e si indica con α_λ , la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di T .

Teorema 1.1.8. Sia λ un autovalore di $T \in \text{End}(V)$, con V di dimensione finita. Vale la relazione

$$1 \leq \gamma_\lambda \leq \alpha_\lambda \leq \dim V.$$

Dimostrazione. Se λ è un autovalore, esiste un autospazio ad esso associato non vuoto, che ha quindi una dimensione non nulla; inoltre esiste una radice di $\chi_T(x)$, ed essa ha quindi una molteplicità non nulla. Allora $\alpha_\lambda, \gamma_\lambda \geq 1$.

L'autospazio è un sottospazio vettoriale di V , quindi $\gamma_\lambda \dim V_\lambda \leq \dim V$, e il grado di $\chi_T(x)$ (che equivale alla dimensione di V) non può essere superato dalla somma delle molteplicità delle radici per il teorema ?? dunque $\alpha_\lambda \leq \dim V$. Si può individuare una base dell'autospazio V_λ composta da γ_λ elementi, che sono autovettori associati a λ . Nell'autospazio V_λ l'endomorfismo T si comporta come un multiplo dell'identità, precisamente λI_n (dove n è la dimensione dell'autospazio, cioè è γ_λ), dato che sono tutti autovettori con autovalore λ . Nella base scelta, dunque, T è rappresentato da

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

con $n = \gamma_\lambda$ come già visto, e M è una matrice qualunque (è il blocco corrispondente all'azione di T su V meno l'autospazio V_λ). Il suo polinomio caratteristico è $\chi_T(x) = \det(A - xI) = \det(\lambda I_n - xI_n) \det(M - xI_{\dim V - n}) = (\lambda - x)^n g(x)$ dove $g(x) = \det(M - xI_{\dim V - n})$ è un generico polinomio di grado $\dim V - n$. Allora $\lambda - x$ divide $\chi_T(x)$ almeno γ_λ volte, vale a dire che la molteplicità della radice λ non è minore di γ_λ , cioè $\alpha_\lambda \geq \gamma_\lambda$. \square

1.2 Diagonalizzabilità

Definizione 1.2.1. Sia $T \in \text{End}(V)$, di dimensione finita. T si dice diagonalizzabile se esiste una base di V costituita soltanto da autovettori di V .

Se T è rappresentato in una base \mathcal{B} da una matrice A ed è diagonalizzabile, tale matrice si può porre in forma diagonale con il coniugio $D = P^{-1}MP$, dove P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di T (espressi chiaramente nella base \mathcal{B}): essi infatti formano una base, e P è proprio la matrice per cambiare la base da \mathcal{B} a quella degli autovettori. La matrice diagonale risultante avrà l' i -esima colonna $A_i = \lambda_i e_i$, in ordine come sono stati posti in ordine gli autovettori nella base, e di conseguenza nella matrice P utilizzata.

Teorema 1.2.2. Siano $T \in \text{End}(V)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, di molteplicità geometrica $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ e algebrica $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T è diagonalizzabile;
- $\sum_{i=1}^k \gamma_i = \dim V$;
- il polinomio caratteristico è $\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \dots (\lambda_k - x)^{\alpha_k}$, con $\alpha_i = \gamma_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$;

Dimostrazione. Se T è diagonalizzabile allora esiste una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^k$ di autovettori dell'endomorfismo. Possiamo riordinarli in modo che i primi γ_1 siano gli autovettori relativi a λ_1 , quelli da $\gamma_1 + 1$ a $\gamma_1 + \gamma_2$ siano gli autovettori relativi a λ_2 e così via, fino a esaurirli, ossia

$$\begin{aligned} e_1, \dots, e_{\gamma_1} &\in V_1, \\ e_{\gamma_1+1}, \dots, e_{\gamma_1+\gamma_2} &\in V_2, \\ &\vdots \\ e_{\gamma_1+\dots+\gamma_{k-1}}, \dots, e_{\gamma_1+\dots+\gamma_{k-1}+\gamma_k} &\in V_k \end{aligned}$$

dove V_j è l'autospazio dell'autovalore λ_j . In tale base, T è rappresentato da una matrice D diagonale, poiché $T(e_i) = \lambda_i e_i$: in ogni autospazio V_i l'endomorfismo agisce infatti come $\lambda_i I_{\gamma_i}$, ossia come un multiplo dell'identità, quindi

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\gamma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\gamma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{\gamma_k} \end{bmatrix}. \quad (1.2.1)$$

Il polinomio caratteristico di D , quindi anche di T , è ovviamente

$$\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\gamma_1} (\lambda_2 - x)^{\gamma_2} \dots (\lambda_k - x)^{\gamma_k} = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\gamma_i} \quad (1.2.2)$$

Sappiamo però che ogni λ_i è radice di χ_T con molteplicità α_i , dunque $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ risulta $(\lambda_i - x)^{\alpha_i} | \chi_T$. Allora per il teorema di Ruffini ?? possiamo fattorizzare χ_T con le sue radici, come

$$\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} (\lambda_2 - x)^{\alpha_2} \dots (\lambda_k - x)^{\alpha_k} g(x) = g(x) \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\alpha_i}$$

con $g \in K[x]$. Ma $K[x]$ è un dominio a fattorizzazione unica dunque le due versioni di χ_T devono coincidere, cioè i fattori irriducibili devono essere uguali: deve allora verificarsi che $\alpha_i = \gamma_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Di conseguenza risulta $\deg g = 0$, vale a dire $g = 1$. Quindi

$$\chi_T(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{\alpha_i}.$$

Poiché la somma delle molteplicità algebriche, dato che i fattori $(\lambda_i - x)$ sono gli unici presenti in χ_T , dà il grado di χ_T , segue immediatamente se $\gamma_i = \alpha_i$ che

$$\dim V = \sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \gamma_i. \quad (1.2.3)$$

In ogni autospazio V_i troviamo γ_i vettori linearmente indipendenti (tutti autovettori di T), che formano una base di tale sottospazio. Riunendo le base di tutti gli autospazi, otteniamo ancora un insieme \mathcal{I} linearmente indipendente, in base al teorema ?? in quanto gli autospazi sono linearmente indipendenti per il teorema 1.1.6. Per il punto precedente, $\sum_{i=1}^k \gamma_i = \dim V$ quindi il numero di vettori in \mathcal{I} è proprio $\dim V$. Per il teorema ?? segue dunque che \mathcal{I} è una base di V , e ciò prova che T è diagonalizzabile. \square

Teorema 1.2.3. Sia $T \in \text{End}(V)$ con V di dimensione finita. Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti con i corrispondenti autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ si ha che T è diagonalizzabile se V può essere scritto come somma diretta degli autospazi, ossia $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla seconda parte di quella svolta nel teorema ?? \square

1.3 Polinomio minimo

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e $T \in \text{End}(V)$. Diciamo che un polinomio $f \in K[x]$ *annulla* T se $f(T) = 0$ (l'endomorfismo nullo). Considerando $T \in \text{End}(V)$ ho che la dimensione della matrice associata, se la dimensione di V è m ed è finita, è m^2 , ora consideriamo $f(T)$ come il polinomio che annulla T , si ha quindi $f(T) = 0$, quindi $T^0 = I, T = T^1, T^2 = T \circ T, \dots, T^k = T \circ T^{k-1}$, possiamo riscrivere con queste considerazioni prendendo la matrice associata a V rispetto a L :

$$f(T) = a_m T^{m^2} + a_{m^2-1} T^{m^2-1} + \dots + a_0 I,$$

ora le varie potenze presenti in T sono $m^2 + 1$ quindi il sistema deve essere linearmente dipendente. Esistono allora opportuni a_i per cui il sistema ammette una soluzione. Concludiamo che esiste sempre un polinomio, al massimo di grado m^2 che annulla l'operatore T .

Chiamiamo I_T , con $T \in \text{End}(V)$ e V spazio di dimensione finita e sul campo K , l'insieme

$$I_T = \{p \in K[x] : p(T) = 0\}$$

che non è mai uguale al solo $0 \in \text{End}(V)$. Si ha che per $p, q \in I_T$ la loro somma sta ancora in I_T , perché $(p+q)(T) = p(T) + q(T) = 0 + 0 = 0$, e analogamente $(\lambda p)(T) = \lambda p(T) = \lambda 0 = 0$, dunque I_T è un ideale. Essendo $K[x]$ un dominio a ideali principali, quindi, I_T ammette un (unico) generatore monico.

Definizione 1.3.1. Sia $T \in \text{End}(V)$, con V spazio di dimensione finita e sul campo K , si definisce polinomio minimo di T , e si indica con $m_T(x)$, il generatore monico dell'ideale I_T dei polinomi che annullano T .

Poiché $T^n \in \text{End}(V)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, ogni polinomio $f \in K[x]$ è tale che $f(T) \in \text{End}(V)$. In virtù dell'isomorfismo tra matrici quadrate ed endomorfismi, se T è rappresentato da A allora l'endomorfismo $f(T)$ è rappresentato da $f(A)$.

È inoltre facile vedere che due matrici simili hanno lo stesso polinomio minimo: infatti se $C = B^{-1}AB$, allora

$$\begin{aligned} C^0 &= I = B^{-1}IB \\ C &= B^{-1}AB \\ C^2 &= B^{-1}ABB^{-1}AB = B^{-1}A^2B \\ &\vdots \\ C^m &= B^{-1}A^mB \end{aligned}$$

come si verifica facilmente per induzione. Si possono raggruppare allora tutti i termini B^{-1} e B , per cui per qualsiasi polinomio si ha $f(C) = B^{-1}f(A)B$.

Teorema 1.3.2. Sia $T \in \text{End}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K . Il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di T hanno le stesse radici.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in K$ una radice del polinomio minimo, ossia $m_T(\lambda) = 0$. Per il teorema di Ruffini ?? allora $(x-\lambda)|m_T$, dunque possiamo scrivere il polinomio minimo come $m_T(x) = (x-\lambda)q(x)$ per un certo $q \in K[x]$. Inoltre $\deg q < \deg m_T$, perciò $q \notin I_T$ non essendo un multiplo di m_T : di conseguenza $q \neq 0$. Esiste allora $v \in V$ tale che $q(T)(v) \neq 0$: sia $w = q(T)(v)$. Poiché per come è definito il polinomio minimo $m_T(T) = 0$, si ha dunque

$$0 = m_T(T)(v) = [(T - \lambda I)q(T)](v) = (T - \lambda I)(w)$$

cioè w è un autovettore di T con autovalore λ : ma allora $\chi_T(\lambda) = 0$.

Viceversa, sia ora $\lambda \in K$ tale che $\chi_T(\lambda) = 0$. Allora λ è un autovalore di T , dunque esiste un $v \in V$ per il quale $T(v) = \lambda v$, di conseguenza $m_T(T)(v) = m_T(\lambda)(v)$.² Dunque $0 = m_T(T)(v) = m_T(\lambda)(v)$. Poiché $v \neq 0$, deve necessariamente essere $m_T(\lambda) = 0$, quindi λ è una radice del polinomio minimo. \square

Prendiamo ad esempio un endomorfismo T di \mathbb{R}^3 che sia la proiezione nel sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Rispetto alla base canonica, la matrice che lo rappresenta è

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $\chi_T(x) = \det(A - xI_3) = -x^3 + 2x^2 - x = -x(x-1)^2$. Allo stesso tempo, poiché è una proiezione, sappiamo che $T^2 - T = 0$, ossia $T^2 - T = 0$. Il polinomio $x^2 - x$ dunque annulla T , ed è anche il suo polinomio minimo: esso ha 0 e 1 come radici, che sono anche quelle di χ_T , seppur con molteplicità diversa.

1.4 Sottospazi invarianti

Definizione 1.4.1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K , e W un suo sottospazio. Dato $T \in \text{End}(V)$, diremo che W è T -invariante se $T(W) \subseteq W$, ossia se $\forall w \in W$ si ha $T(w) \in W$.

La proprietà principale di un sottospazio W che sia T -invariante è che è possibile restringere l'applicazione in tale insieme, ossia è possibile definire $T|_W : W \rightarrow W$. L'intero spazio V e $\{0\}$ sono, banalmente, sottospazi invarianti di qualsiasi applicazione lineare.

Ecco alcuni esempi di sottospazi invarianti.

- Per alcune applicazioni, i sottospazi banali sono gli unici sottospazi invarianti: un facile esempio è una rotazione in \mathbb{R}^2 di un angolo diverso da $k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.
- Per ogni spazio V e $T \in \text{End}(V)$, $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ sono T -invarianti. Se infatti $v \in \text{Ker } T$, allora $T(v) = 0$ e $0 \in \text{Ker } T$, come in tutti i sottospazio vettoriali. Analogamente $T(v) \in \text{Im } T$, banalmente, qualsiasi sia $v \in V$, dunque anche per $v \in \text{Im } T$.
- Un autospazio V_λ associato a un autovalore λ di un $T \in \text{End}(V)$ è T -invariante, poiché per ogni $v \in V_\lambda$ si ha $T(v) = \lambda v \in V_\lambda$.
- Se $T, S \in \text{End}(V)$ commutano, se $a \in \text{Ker } T$ allora $T(S(a)) = S(T(a)) = S(0) = 0$ quindi $S(a) \in \text{Ker } T$, cioè $\text{Ker } T$ è S -invariante. Vale anche per $\text{Im } T$?

²Ciò vale per un generico $f \in K[x]$: ad esempio, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, allora $f(T)(v) = aT^2(v) + bT(v) + cI(v) = aT(\lambda v) + b\lambda v + cv = a\lambda^2 v + b\lambda v + cv = f(\lambda)(v)$.

Sia $W \leq V$ sottospazio dello spazio vettoriale V sul campo K . Dato $T \in \text{End}(V)$, posto $v \in V$ definiamo l'insieme

$$S_T(v, W) = \{g \in K[x] : g(T)(v) \in W\}$$

ossia, fissati $v \in V$ e il sottospazio W , l'insieme dei polinomi di $K[x]$ tali che, valutati in T , portano v in W . Il polinomio minimo appartiene a questo insieme: risulta infatti $m_T(T)(v) = 0(v) = 0 \in W$, per ogni $v \in V$ e $W \leq V$.

Lemma 1.4.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e $T \in \text{End}(V)$. Se $W \leq V$ è T -invariante, allora è anche $g(T)$ -invariante per ogni $g \in K[x]$, ossia

$$S_T(v, W) = \{g \in K[x] : g(T)(v) \in W\}$$

è un ideale di $K[x]$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. Se W è T -invariante, allora per ogni $w \in W$ si ha $T(w) \in W$. Prendiamo un generico polinomio di secondo grado $g(x) = ax^2 + bx + c$ e, valutato in T , applichiamo l'endomorfismo che ne risulta a w :

$$g(T)(w) = aT^2(w) + bT(w) + cw. \quad (1.4.1)$$

Chiaramente $cw \in W$, e dato che $T(w) \in W$ allora anche $T^2(w) = T(T(w)) \in W$, dunque $g(T)(w) \in W$. Lo stesso ragionamento si applica a polinomi di grado qualunque, poiché si ha $T^n(w) \in W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora W è $g(T)$ -invariante.

Mostriamo quindi che $S_T(v, W)$ è un ideale. Siano $f, g \in S_T(v, W)$ e $h \in K[x]$: risulta, per $v \in V$,

$$[(f + g)(T)](v) = [f(T) + g(T)](v) = f(T)(v) + g(T)(v) \quad (1.4.2)$$

che appartiene a W , poiché esso è un sottospazio e $f(T)(v), g(T)(v) \in W$ dato che $f, g \in S_T(v, W)$, dunque anche $f + g$ è nell'insieme. Inoltre

$$[(hf)(T)](v) = h(T)[f(T)(v)],$$

ma $f(T)(v) \in W$, e dato che come mostrato prima W è $p(T)$ -invariante per ogni $p \in K[x]$, lo è anche per $h(T)$, perciò $h(T)[f(T)(v)] \in W$, cioè $hf \in S_T(v, W)$. Ciò prova che $S_T(v, W)$ è un ideale di $K[x]$. \square

Siano V uno spazio vettoriale sul campo K , $T \in \text{End}(V)$, e W un sottospazio T -invariante di V . Dato l'insieme $S_T(\alpha, W)$ come definito in precedenza, chiamiamo polinomio T -conducente, di α in W , il generatore monico di $S_T(\alpha, W)$.

Lemma 1.4.3. Sia $T \in \text{End}(V)$ con V spazio vettoriale sul campo K di dimensione finita. Se il suo polinomio minimo è della forma $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k}$, con $\lambda_i \in K$ e se $W \leq V$ ($W \neq V$) è T -invariante, Allora $\exists v \in V \setminus W$ tale che $(T - \lambda I)(v) \in W$ per qualche autovalore λ di T .

Dimostrazione. Sia $\beta \in V \setminus W$ e g il polinomio T -conducente per $\beta \in W$: ciò implica che $g(T)\beta \in W$. Nell'ideale del polinomio g si trova anche il polinomio minimo, quindi $m_T|g$ in quanto g per la definizione precedente ?? è il più piccolo dell'ideale. Inoltre $\deg g \neq 1$, poiché se lo fosse allora $g(T) = I$, e considerando il suo effetto sull'elemento β si avrebbe $g(T)(\beta) = \beta$, da cui $\beta \in W$, ma proprio nelle ipotesi avevamo considerato $\beta \notin W$. Quindi $\deg g > 1$ e per l'ipotesi sulla forma del polinomio minimo deve essere scritto come:

$$g(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_k)^{b_k},$$

con almeno un b_i maggiore di 1 per quanto ricavato dai passaggi precedenti. Poniamo che sia $b_j > 1$, corrispondente a λ_j : per il teorema di Ruffini ?? possiamo riscrivere g come $g(x) = (x - \lambda_j)h(x)$, per un certo $h \in K[x]$. Ora poniamo $\alpha = h(T)(\beta) \notin W$, per cui:

$$(T - \lambda_j I)(\alpha) = (T - \lambda_j I)(h(T)(\beta)) = g(T)(\beta).$$

Ora, $\alpha = h(T)(\beta) \neq 0$ e non appartiene a W , ma $g(T)(\beta)$ è un autovettore del polinomio caratteristico e abbiamo precedentemente definito W come il sottospazio generato dagli autovalori; gli ultimi passaggi hanno verificato che per certi h , corrispondenti a dei λ_j , vale $(T - \lambda_j I)(h(T)(\beta)) = (T - \lambda_j I)(\alpha) \in W$. Quindi abbiamo dimostrato le due implicazioni del lemma. \square

Teorema 1.4.4. Sia V spazio vettoriale sul campo K con $\dim V$ finita (m), sia T un'endomorfismo in V , si ha che T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_t(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$, con $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ valori distinti di K .

Dimostrazione. • Sia prima T diagonalizzabile. Presi gli autovalori distinti $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di T e consideriamo $(T - \lambda_1 I), \dots, (T - \lambda_k I)$, sia inoltre α autovettore di T . Il prodotto tra l'autovettore α e il corrispondente $(T - \lambda_j)$ deve dare lo zero per il teorema 1.1.3. Ora l'operazione tra i vari operatori precedenti potrebbe essere commutativa, se lo è aggiungendo α alla composizione essa è uguale allo zero, poichè vi si può affiancare il corrispondente operatore. Quindi prendiamo due autovalori φ, μ e verifichiamone la commutatività:

$$\begin{aligned}(T - \varphi I)(T - \mu I) &= T^2 - \varphi T - \mu T + \varphi \mu T, \\ (T - \mu I)(T - \varphi I) &= T^2 - \mu T - \varphi T + \varphi \mu T.\end{aligned}$$

Allora la composizione è commutativa e si ha

$$(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_k I)(\alpha) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_k)(T - \lambda_j)(\alpha) = 0.$$

Ora possiamo scrivere $p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)(x - \lambda_j)$, otteniamo allora che $p(T)\alpha = 0$ per ogni autovettore α . Abbiamo, per le ipotesi iniziali, che T è diagonalizzabile, quindi deve esistere una base di autovettori, proprio per definizione di diagonalizzazione 1.2.1, $p(T)$ deve essere allora fatta in modo da annullare tutti gli elementi della base, di conseguenza è l'operatore nullo di $\text{End}(V)$, quindi $p(T) \in I_T$ e sappiamo che $m_T(x)$ è il generatore monico di I_T , per definizione 1.3.1. Deve per forza essere che $m_T(x) = p(x)$ poichè $m_T(x)$ non può avere meno componenti di $p(x)$ perchè tutti gli zeri del polinomio devono per forza stare in esso (per conseguenza del teorema 1.3.2), allora

$$p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)(x - \lambda_j) = (x - \lambda_1 I) \dots (x - \lambda_k I) = m_T(x).$$

- Sia ora il polinomio minimo esprimibile come sopra e $W \leq V$ sottospazio generato dagli autovettori di T . Allora W è T -invariante ed esiste una base di autovettori, posso fare in modo che coincida con una di V , questo è possibile se $W = V$, in quel caso T è diagonalizzabile per la definizione 1.2.1. Se invece $W \neq V$ procediamo per assurdo: se così fosse potrebbe esistere un elemento $\alpha \in V/W$, autovettore relativo a λ_j autovalore di T , con $\beta = (T - \lambda_j I)\alpha \in W$ e W è T -invariante. Possiamo allora scrivere che $\forall h(x) \in K[x]$ si ha $h(T)\beta \in W$ e considerare il polinomio minimo escludendo il termine relativo a λ_j :

$$m_T(x) = \prod_{i=1, i \neq j}^k (x - \lambda_i)(x - \lambda_j),$$

Rinominando la produttoria come q e $q(\lambda_j) = (x - \lambda_j)$, consideriamo la differenza $q(x) - q(\lambda_j)$, questa differenza ha λ_j come radice, quindi per il teorema di Ruffini ??

$$(x - \lambda_j)h(x) = q(x) - q(\lambda_j),$$

e valutandolo in T e poi in α , cioè l'autovettore prima definito, si ha

$$\begin{aligned}(T - \lambda_j I)h(T) &= q(T) - q(\lambda_j)I, \\ (T - \lambda_j I)h(T)\alpha &= q(T)\alpha - q(\lambda_j)\alpha, \\ \beta h(T) &= q(T)\alpha - q(\lambda_j)\alpha,\end{aligned}$$

con l'ultimo passaggio dovuto a come abbiamo prima definito β . Abbiamo che $q(\lambda_j)\alpha, \beta h(T) \in W$, dobbiamo però determinare l'insieme di appartenenza di $q(T)\alpha$, per farlo torniamo a considerare il polinomio minimo valutato in T e poi in α :

$$\begin{aligned} m_T(T) &= 0 = (T - \lambda_j)q(T), \\ m_T(T)\alpha &= (T - \lambda_j)q(T)\alpha. \end{aligned}$$

Poichè $q(T)\alpha \neq 0$ per le ipotesi fatte, allora deve essere un autovettore relativo a λ_j , se così fosse $q(T)\alpha \in W$ con $\alpha \notin W$, quindi ci sono due autovettori relativi all'autovalore λ_j , che di conseguenza avrebbe molteplicità algebrica almeno uguale a due. Il polinomio minimo si potrebbe allora scrivere come

$$m_T(x) = (x - \lambda_j)(x - \lambda_j) \prod_{i=1, i \neq j}^k (x - \lambda_i).$$

Avremmo quindi un polinomio di secondo grado all'interno di m_T , in contrasto con l'ipotesi iniziale. □

1.5 Applicazioni e matrici triangolari

Definizione 1.5.1. Sia $T \in \text{End}(V)$, con V spazio vettoriale sul campo K , T si dice triangolabile se esiste una base $\{e_i\}_{i=1}^n \in V$ tale che la matrice associata a T rispetto a quella base è in forma triangolare (v. definizione ??).

Teorema 1.5.2. Sia $T \in \text{End}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita su un generico campo, se T è triangolabile allora $\chi_T(x) = 0$ (l'endomorfismo nullo).

Corollario 1.5.3. Con le ipotesi del teorema 1.5.2, si ha che T è triangolabile se e solo se $m_T | \chi_T$.