

Geometria

2 luglio 2015

1	Applicazioni lineari	3
1.1	Definizione	3
1.2	Teoremi degli isomorfismi	5
1.3	Matrice associata	7
1.4	Proprietà della matrice associata	9
1.5	Spazio duale	12

Capitolo 1

Applicazioni lineari

1.1 Definizione

Definizione 1.1.1. Siano V e Z due spazi vettoriali su un campo K . Si definisce applicazione lineare una funzione $T: V \rightarrow Z$ omogenea e additiva, ossia per la quale $\forall x, y \in V$ e $\lambda \in K$, si ha

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad e \quad T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

dove i primi membri delle uguaglianze sono operazioni in V , e i secondi sono operazioni in Z (indicando con $+$ e \cdot le due operazioni interne per entrambi gli spazi).

Le applicazioni lineari sono dunque degli omomorfismi tra spazi vettoriali, in quanto ne preservano la struttura data dalle operazioni interne. Per linearità, vale sempre la relazione $T(0_V) = 0_Z$, poiché $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, da cui $T(0_V) = 0_Z$ sottraendo $T(0_V)$ a entrambi i membri: quest'è una condizione facile da usare per verificare la linearità di una data funzione. L'insieme delle applicazioni lineari da V a Z è indicato con $\mathcal{L}(V, Z)$. Un'applicazione lineare da uno spazio in sé stesso è detta *endomorfismo* (lineare), e indichiamo l'insieme degli endomorfismi di uno spazio V con $\text{End}(V)$.

Esempi

- L'applicazione identità di V , indicata con \mathbb{I}_V , per la quale $\mathbb{I}_V(v) = v$ per ogni $v \in V$, è ovviamente lineare.
- L'applicazione nulla, che associa ad ogni elemento lo zero dello spazio di arrivo: $0(v) = 0_Z$ per ogni $v \in V$, anch'essa lineare in modo ovvio.
- Sia W un sottospazio di V : chiamiamo *proiezione canonica* in W la funzione $\pi: V \rightarrow V/W$ che ad ogni $v \in V$ associa la classe di equivalenza $[v]_W = W + v$. Tale funzione è additiva in quanto per $a, b \in V$, $\pi(a + b) = W + (a + b) = (W + a) + (W + b) = \pi(a) + \pi(b)$. È anche omogenea perché $\pi(\lambda a) = W + \lambda a = \lambda(W + a) = \lambda\pi(a)$. La funzione π è quindi un'applicazione lineare.
- La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f([x, y]^T) = [x + y, y + 1]^T$ non è un'applicazione lineare, poiché $f([0, 0]^T) = [0, 1]^T \neq [0, 0]^T$.

L'iniettività e la suriettività delle applicazioni lineari sono definite allo stesso modo di una qualsiasi funzione. In particolare, un'applicazione lineare che è sia iniettiva che suriettiva è detta *isomorfismo lineare* (o solo isomorfismo). Due spazi vettoriali V e Z legati da un isomorfismo $T: V \rightarrow Z$ sono detti *isomorfi*, e si indica ciò con la scrittura $V \cong Z$.

Come ogni omomorfismo, definiamo un nucleo anche per le applicazioni lineari.

Definizione 1.1.2. Si definisce nucleo dell'omomorfismo T l'insieme degli elementi $x \in V$ tali per cui $T(x) = 0_Z$:

$$\text{Ker } T = \{x \in V : T(x) = 0_Z\}.$$

La linearità permette una facile verifica dell'iniettività di un'applicazione lineare.

Teorema 1.1.3. Un'applicazione lineare $T \in \mathcal{L}(V, Z)$ è iniettiva se e solo se $\text{Ker } T = \{0_V\}$.

Dimostrazione. Per ogni applicazione lineare vale $T(0_V) = 0_Z$, come già visto. Per l'iniettività, ogni $z \in Z$ ha un'unica controimmagine, quindi l'unico $v \in V$ per cui $T(v) = 0_Z$ è proprio 0_V , di conseguenza $\text{Ker } T = \{0_V\}$.

Viceversa, ipotizziamo $\text{Ker } T = \{0_V\}$. Se $T(v) = T(w)$ allora $T(v) - T(w) = 0_Z$, e per linearità si ha $T(v - w) = 0_Z$, cioè $v - w \in \text{Ker } T$. Ma $\text{Ker } T = \{0_V\}$ implica $v - w = 0_V$, dunque $v = w$ e T è iniettiva. \square

Definizione 1.1.4. Sia $T \in \mathcal{L}(V, Z)$. Si definisce immagine di T l'insieme degli elementi $z \in Z$ per i quali esiste una controimmagine $v \in V$:

$$\text{Im } T = \{z \in Z : \exists v \in V : T(v) = z\}.$$

Sia il nucleo che l'immagine di un omomorfismo $T \in \mathcal{L}(V, Z)$ sono sottospazi vettoriali, rispettivamente di V e di Z . Infatti:

- Siano $v, w \in \text{Ker } T$ e $\lambda \in K$. Allora $T(v + w) = T(v) + T(w) = 0_Z + 0_Z = 0_Z$, e $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0_Z = 0_Z$, quindi $v + w, \lambda v \in \text{Ker } T$.
- Siano $y, z \in \text{Im } T$ e $\mu \in K$. Esistono due vettori $a, b \in V$ per i quali $T(a) = y$ e $T(b) = z$. Allora $z + y = T(a) + T(b) = T(a + b)$, cioè $z + y$ è l'immagine di un elemento $a + b$, che appartiene ancora a V ; analogamente $T(\mu a) = \mu T(a) = \mu y$, quindi μy è a sua volta l'immagine di un elemento $\mu a \in V$. Di conseguenza $z + y$ e μy appartengono ancora a $\text{Im } T$.

Osservazione 1.1.5. Le applicazioni lineari conservano, in generale, i rapporti tra sottospazi: dati due sottospazi $W \leq V$ e $U \leq Z$ e un'applicazione lineare $T: V \rightarrow Z$, allora $T(W) \leq \text{Im } T$; analogamente le controimmagini di $U \leq \text{Im } T$ sono $T^{-1}(U) \leq V$.

Ad esempio, siano $y_1, y_2 \in T(W)$. Essi certamente hanno le loro controimmagini in W : siano esse $w_1, w_2 \in W$, per le quali $T(w_1) = y_1$ e $T(w_2) = y_2$. Allora per $\lambda, \mu \in K$ risulta $T(W) \ni T(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda T(w_1) + \mu T(w_2) = \lambda y_1 + \mu y_2$, poiché $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$: di conseguenza $T(W) \leq \text{Im } T$ (ma anche $T(W) \leq Z$).

Teorema 1.1.6. Siano $T \in \mathcal{L}(V, Z)$ e $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in I} \subset V$.

1. Se \mathcal{E} è un sistema di generatori per V e T è suriettiva, allora $\{T(e_i)\}_{i \in I}$ genera Z ;
2. Se \mathcal{E} è linearmente indipendente in V e T è iniettiva, allora $\{T(e_i)\}_{i \in I}$ è linearmente indipendente in Z .

Dimostrazione. 1. Sia $z \in Z$ e T suriettiva: allora esiste $v \in V$ per cui $T(v) = z$. Dato che \mathcal{E} genera V , possiamo scrivere v come una combinazione lineare $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_r e_r$, con $\lambda_i \in K$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_r\} \subset \mathcal{E}$. Risulta allora $z = T(v) = \lambda_1 T(e_1) + \dots + \lambda_r T(e_r)$, cioè $\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ è un sistema di generatori per Z .

2. Sia ora T iniettiva e I_0 un sottoinsieme di cardinalità finita di I . Consideriamo una combinazione lineare dei $T(e_i)$ nulla: per linearità

$$0_Z = \sum_{j \in I_0} \lambda_j T(e_j) = T\left(\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j\right).$$

Questo significa che $\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j \in \text{Ker } T$, ma poiché T è iniettiva il suo nucleo è composto dal solo 0_V . Allora $\sum_{j \in I_0} \lambda_j e_j = 0_V$, e dato che $\{e_i\}_{i \in I_0}$ è un sistema linearmente indipendente ciò può accadere se e solo se $\forall j \in I_0 \lambda_j = 0_K$. Quindi $\{T(e_j)\}_{j \in I}$ è un sistema linearmente indipendente. \square

Combinando le due affermazioni, risulta che l'immagine di una base tramite un isomorfismo è una base dello spazio di arrivo.

1.2 Teoremi degli isomorfismi

Teorema 1.2.1. Sia $T \in \mathcal{L}(V, Z)$, e fissiamo $z \in \text{Im } T$. Preso $x \in V$ tale che $T(x) = z$, la classe di equivalenza $\text{Ker } T + x$ è l'insieme degli elementi y di V che sono controimmagini di z :

$$\text{Ker } T + x = \{y \in V : T(y) = z\}.$$

Dimostrazione. Sia $v \in \text{Ker } T + x$, cioè $v = \alpha + x$ per un certo $\alpha \in \text{Ker } T$. La sua immagine è $T(v) = T(\alpha) + T(x) = 0_Z + T(x) = T(x) = z$, quindi $v \in \{y \in V : T(y) = z\}$ ossia $\text{Ker } T + x \subseteq \{y \in V : T(y) = z\}$.

Sia invece $w \in \{y \in V : T(y) = z\}$: possiamo scriverlo come $w = \beta + x$ per un certo $\beta \in V$. Allora $T(w) = T(\beta) + T(x)$, ma $T(w) = T(x)$ per come è scelto w quindi $T(\beta) = T(w) - T(x) = 0$ poiché $T(w) = T(x) = z$. Di conseguenza $\beta \in \text{Ker } T$, ossia $w \in \text{Ker } T + x$ vale a dire $\{y \in V : T(y) = z\} \subseteq \text{Ker } T + x$.

Quindi, poiché i due insiemi si includono a vicenda, devono coincidere. \square

Teorema 1.2.2 (Primo teorema dell'isomorfismo). Sia $T \in \mathcal{L}(V, Z)$. Esiste ed è unico un omomorfismo iniettivo $\tilde{T} \in \mathcal{L}(V / \text{Ker } T, Z)$ tale che $\tilde{T} \circ \pi = T$, dove π è la proiezione canonica da V in $V / \text{Ker } T$. Allora $V / \text{Ker } T \cong \text{Im } T$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & Z \\ \pi \searrow & & \nearrow \tilde{T} \\ & V / \text{Ker } T & \end{array}$$

Dimostrazione. Verifichiamo che l'applicazione è ben definita, ossia che non dipenda dal rappresentante scelto per le classi in $V / \text{Ker } T$, dimostriamo poi la linearità e infine l'injectività.

Gli elementi di $V / \text{Ker } T$ sono del tipo $\text{Ker } T + a$, e la proiezione canonica π manda a in $\text{Ker } T + a$. Deve quindi risultare $\tilde{T}(\pi(a)) = \tilde{T}(\text{Ker } T + a) = T(a)$. Affinché \tilde{T} sia ben definito, se $\text{Ker } T + a = \text{Ker } T + b$ deve essere $T(a) = T(b)$. Questo è mostrato applicando T all'uguaglianza, e la seconda segue automaticamente per la linearità di T , oppure notando che $a \sim b$ quando $a - b \in \text{Ker } T$, e in tal caso $0_Z = T(a - b) = T(a) - T(b)$ cioè $T(a) = T(b)$. Se poi $\text{Ker } T + a$ e $\text{Ker } T + b$ sono distinte, si ha $a + b \notin \text{Ker } T$: sia quindi per assurdo che $\tilde{T}(\text{Ker } T + a) = \tilde{T}(\text{Ker } T + b)$, cioè per definizione dell'applicazione lineare \tilde{T} che $T(a) = T(b)$, che è in contraddizione con quanto ipotizzato in precedenza. Quindi l'applicazione esiste unica.

Si considerino le due classi di $V / \text{Ker } T$ con rappresentante a e b : applicando \tilde{T} alla loro somma (come definita nel capitolo ??) si ottiene

$$\tilde{T}[(\text{Ker } T + a) \oplus (\text{Ker } T + b)] = \tilde{T}(\text{Ker } T + a) + \tilde{T}(\text{Ker } T + b) = T(a) + T(b), \quad (1.2.1)$$

e allo stesso tempo

$$\tilde{T}[(\text{Ker } T + a) \oplus (\text{Ker } T + b)] = \tilde{T}[\text{Ker } T + (a + b)] = T(a + b) = T(a) + T(b). \quad (1.2.2)$$

perciò \tilde{T} è lineare.

Consideriamo il $\text{Ker } \tilde{T}$: esso è definito da

$$\text{Ker } \tilde{T} = \{\text{Ker } T + v \in V / \text{Ker } T : T(v) = 0\}.$$

Si ha quindi che $\text{Ker } \tilde{T}$ si riduce al solo $\text{Ker } T$ e per come \tilde{T} è definita questo si riduce al solo zero. Ciò prova che \tilde{T} è iniettiva. Inoltre, $T(V)$ è anche automaticamente suriettiva poiché tutti gli elementi su cui agisce T sono quelli su cui agisce anche \tilde{T} , dunque \tilde{T} è un isomorfismo: allora $V / \text{Ker } T \cong \text{Im } T$. \square

Corollario 1.2.3. Se V ha dimensione finita e $T \in \mathcal{L}(V, Z)$, allora $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$.

Dimostrazione. Segue facilmente dal teorema precedente e dal ??.

□

Teorema 1.2.4 (Secondo teorema dell'isomorfismo). Siano W, Z sottospazi vettoriali di V . Allora $(W + Z) / Z$ e $W / (W \cap Z)$ sono isomorfi per mezzo dell'applicazione lineare T definita come $T: Z + (w + z) \mapsto Z \cap W + w$, con $w \in W$ e $z \in Z$.

Dimostrazione. Affinche il teorema sia verificato l'applicazione T deve essere ben definita, cioè non dipendere dai rappresentanti della classe. Si verifica poi che l'applicazione T è lineare e sia iniettiva che suriettiva, perciò è un isomorfismo.

Verifichiamo sia ben definita: prendiamo due elementi dello spazio di partenza $Z + (w + z)$ e $Z + (w' + z')$, deve essere che $w - w' + z - z'$ è contenuto in Z poichè $w + z \sim w' + z'$ per definizione di spazio quoziente, questo mi permette di verificare che $Z \cap W + w = Z \cap W + w'$ appartengono entrambi a $Z \cap W$. Non è possibile che $w - w'$ appartiene a Z , deve però essere che $Z + (w + z - w' - z') = Z + 0_K$, affinché l'applicazione sia ben definita nello spazio di partenza, deve essere per forza che $w - w'$ è contenuto in Z quindi abbiamo verificato $Z \cap W + w = Z \cap W + w'$ implica $w = w'$.

Verifichiamo che è lineare: sapendo $T: Z + (w + z) \mapsto Z \cap W + w$ consideriamo sempre due elementi $Z + (w + z)$ e $Z + (w' + z')$, inoltre consideriamo $\lambda \in K$, si ha che:

$$\begin{aligned} & (Z + z + w) \oplus (\lambda[Z + z' + w']), \\ & (Z + z + w + \lambda z' + \lambda w') \rightarrow Z \cap W + (w + \lambda w'). \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere l'ultimo passaggio considerando l'effetto di T :

$$\begin{aligned} & Z \cap W + w + Z \cap W + \lambda w' = \\ & = Z \cap W + (w + \lambda w') = T(Z + z + w + \lambda z' + \lambda w') = \\ & = T(Z + z + w) + T(\lambda z' + \lambda w') = \\ & = T(Z + z + w) + \lambda T(z' + w'), \end{aligned}$$

quindi è lineare.

Verifichiamo che è anche un isomorfismo: per come l'applicazione è definita si ha la suriettività, per verificare che è iniettiva determiniamo il $\text{Ker } T$ e ci assicuriamo che sia il solo 0_w .

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \{ Z + z + w \rightarrow Z \cap W + 0_w \}, \\ \text{Ker } T &= \{ Z + z + w: Z \cap W + 0_w = Z \cap W + w \}, \\ \text{Ker } T &= \{ Z + z + w: (w + z) \in Z \cap W \}, \\ \text{Ker } T &= \{ Z + z + w: (w + z) \in Z \}. \end{aligned}$$

Essendo $Z + 0_w$ si ha che l'unica classe che sta nel nucleo è Z poichè l'altra si riduce al solo 0_w . Abbiamo prima verificato $(w + z) \in Z$, questo per gli stessi passaggi compiuti inizialmente, che avevano come scopo verificare se l'applicazione fosse ben definita. Il $\text{Ker } T$ si riduce allora al solo Z e per come T è definito è quindi composto dal solo zero, come dimostrato per il primo teorema dell'isomorfismo 1.2.2. Si conclude che il $\text{Ker } T$ si riduce al solo zero da cui l'iniettività dell'applicazione.

□

Corollario 1.2.5 (Formula di Grassmann). Se gli spazi vettoriali W e Z hanno dimensione finita, allora $\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$.

Dimostrazione. I due spazi $(W + Z) / Z$ e $W / (W \cap Z)$ dal teorema precedente sono isomorfi, perciò hanno la stessa dimensione. Allora per il teorema ?? si ha che $\dim(W + Z) - \dim Z = \dim W - \dim(W \cap Z)$, da cui la tesi.

□

1.3 Matrice associata

Definizione 1.3.1. Si consideri un'applicazione lineare da $T: K^n \rightarrow K^m$, si fissano due basi nei rispettivi spazi, $\{v_i\}_{i=1}^n$ e $\{z_i\}_{i=1}^m$, con n, m dimensioni dei due spazi, la matrice associata a T rispetto a queste due basi è la matrice che ha per i -esima colonna il vettore ottenuto dai coefficienti della combinazione lineare ottenuta dalle immagini dei vettori della base di partenza in quella di arrivo.

Diamo ora una definizione a scopo applicativo.

Definizione 1.3.2. Si definisce matrice associata all'applicazione lineare $T: V \rightarrow Z$ la matrice A_L rispetto alle basi fissate $E = \{e_i\}$ in V e $Y = \{y_i\}$ in Z tale da rispettare la seguente relazione per ogni generico vettore v di V :

$$[f(v)]_E = A[v]_Y;$$

con $[v]_Y$ le coordinate di v rispetto alla base Y e $f(v)$ le coordinate dell'immagine rispetto alla base E .

La matrice associata rispetta alcune proprietà ed è caratterizzata da una particolare applicazione lineare, per determinarle si devono compiere i seguenti passaggi che andremo a verificare.

Effetto dell'applicazione associata Sia $A \in \text{Mat}_{n,m}$ e consideriamo l'applicazione $T: K^m \rightarrow K^n$, sapendo

$$K^m = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} : v_i \in K \right\} = \text{Mat}_{m,1}(K)$$

Cerco di determinare l'azione compiuta da T_A sul generico vettore v_i e ottengo che non è altro che il prodotto righe per colonne tra il vettore e la matrice A . Quindi si ha:

$$T_A: \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m A_{1i}v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m A_{ni}v_i \end{pmatrix}.$$

Si ha che se consideriamo la base canonica e applichiamo ad essa T_A otteniamo che il vettore risultante ha come i -esimo elemento la i -esima riga della matrice A considerata.

Lo spazio $\mathcal{L}(V, Z)$ è vettoriale Se prendiamo gli spazi V, Z e consideriamo $\mathcal{L}(V, Z)$, se diamo a queste applicazioni la struttura di spazi vettoriali possiamo verificare la linearità (questo sarà utile in seguito). Prendiamo $U, S \in \mathcal{L}(V, Z)$, $v \in V$ e $\lambda \in K$ definiamo la somma e il prodotto per uno scalare;

$$(U + S)v = U(v) + S(v); (\lambda \cdot U)(v) = \lambda \cdot U(v)$$

Si ha quindi che entrambe le operazioni danno come risultato elementi di $\mathcal{L}(V, Z)$, quindi $(\mathcal{L}(V, Z), +, \cdot)$ è spazio vettoriale.

Linearità di T_A Considerando T_A e verificando che è lineare rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Si verifica $T_A \in \mathcal{L}(V, Z)$. Concludiamo che ad ogni matrice è possibile associare un omomorfismo T , quindi $\text{Mat}_{n,m}(K) \rightarrow L(K^m, K^n)$.

Estensione di un'applicazione lineare a uno spazio

Lemma 1.3.3. Sia $T: V \rightarrow Z$ e $\{e_i\}$ una base di V . Se $\exists \tilde{T} \in \mathcal{L}(V, Z)$ tale che $\forall i T(e_i) = \tilde{T}(e_i)$, allora $T = \tilde{T}$.

Dimostrazione. un elemento $v \in V$ si scrive come $v = \sum_{k=1}^r \lambda_k e_{i_k}$. Allora poichè T è lineare si ha che

$$T(v) = \sum_{k=1}^r \lambda_k T(e_{i_k}), \text{ con } T(e_i) = \tilde{T}(e_i); T(v) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \tilde{T}(e_{i_k}) = \tilde{T} \sum_{k=1}^r \lambda_k e_{i_k} = \tilde{T}(v).$$

Allora abbiamo verificato $T = \tilde{T}$. Un'applicazione lineare è allora univocamente determinata dalla sua azione sulla base di uno spazio. \square

Noto questo si può affermare che, dato V spazio vettoriale di dimensione m (finita) sul campo K e $\{e_i\}$ una base di V con $T: \{e_i\} \rightarrow K$ lineare, cioè $T(e_i) = k_i$, si può espandere l'applicazione a tutto lo spazio vettoriale V per linearità. Infatti dato $v \in V$ esso è uguale a

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i.$$

Si ha applicando T a v che

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m T(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i T(e_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (k_i).$$

I passaggi precedenti ci permettono ora di dare il seguente teorema relativo all'applicazione che associa ad ogni matrice un'applicazione.

Isomorfismo tra applicazioni lineari e matrici

Teorema 1.3.4. $T: \text{Mat}_{n,m}(K) \rightarrow \mathcal{L}(K^m, K^n)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Verifichiamo che T è sia lineare che iniettiva e suriettiva.

- Prendiamo la base canonica di K^m , $\{e_i\}_{i \in I_0}$, posto I_0 sottoinsieme di cardinalità finita, sapendo $T(A) = T_A$, $T(B) = T_B$ verifichiamo $T_{A+B} = T_A + T_B$.

$$T_{A+B} = \begin{pmatrix} (A+B)_{1i} \\ \vdots \\ (A+B)_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)_{1i} \\ \vdots \\ (A)_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (B)_{1i} \\ \vdots \\ (B)_{mi} \end{pmatrix} = T_A + T_B.$$

Se verifichiamo il loro effetto sulla base otteniamo analogamente che

$$T_{A+B}(e_i) = T_A(e_i) + T_B(e_i),$$

ricordando che $T_A(e_i) = \sum_{j=1}^n (T_A)_{ji} f_j$, con $\{f_i\}_{i=1}^n$ base di K^n . È semplice verificare che questo vale anche con il prodotto per uno scalare $\lambda \in K$. Quindi T è lineare.

- Consideriamo il $\text{Ker } T$ per determinare l'iniettività:

$$\text{Ker } T = \{A \in \text{Mat}_{m,n}(K) : T_A = 0 \in \mathcal{L}(K^m, K^n)\};$$

Quindi per ogni vettore $v \in V$ deve essere che l'immagine rispetto a T sia il vettore nullo, se consideriamo la base canonica $\{e_i\}_{i \in I_0}$, dovremmo quindi avere, per considerazioni precedenti sull'azione di T_a su tale base che

$$T_A(e_i) = \begin{pmatrix} (A)_{1i} \\ \vdots \\ (A)_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice deve essere la matrice nulla, il $\text{Ker } T$ contiene quindi solo lo zero dello spazio, per cui l'applicazione è inettiva.

- Se consideriamo un'altra applicazione $L \in \mathcal{L}(K^m, K^n)$ e consideriamo la loro azione sulla base canonica $\{e_i\}_{i \in I_0}$. Si deve avere che l'applicazione T e l'applicazione L hanno lo stesso effetto su tutti gli elementi della base canonica, quindi $T = L$ e ogni oggetto ha almeno una preimmagine. Abbiamo quindi verificato la suriettività.

Concludiamo che T è un'isomorfismo. \square

Ora considerando l'applicazione inversa possiamo avvalorare la definizione di matrice associata ad un'applicazione, volendo, possiamo tramite essa dare una dimostrazione del teorema precedente.

Applicazione inversa Avendo determinato che l'applicazione T del teorema precedente è isomorfismo di spazi vettoriali si può determinare l'applicazione inversa, che dovrà esistere e avere le stesse proprietà della sua inversa. Data l'applicazione $T: \text{Mat}_{n,m}(K) \rightarrow L(K^m, K^n)$ esiste sempre \tilde{T} , inversa di T tale che $\tilde{T}: L(K^m, K^n) \rightarrow \text{mat}_{n,m}(K)$. Considerando infatti $L(e_i) = \sum_{j=1}^n (\tilde{T}_L)_{ji} y_j$, in quanto si può sempre esprimere l'immagine di un'applicazione come combinazione di elementi nello spazio di arrivo, date $\{e_i\} \in K^m, \{y_j\} \in K^n$

$$L(e_i) = z_i = t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n = \sum_{j=1}^n (\tilde{T}_L)_{ji} y_j.$$

Se si ha che $\tilde{T}_L \in \text{Mat}_{n,m}(K)$ allora posso determinare l'inversa. Dato che

$$\begin{aligned} T \circ \tilde{T} &= \mathbb{I}[L(V, Z)], \\ \tilde{T} \circ T &= \mathbb{I}[\text{Mat}_{n,m}(K)], \end{aligned}$$

allora se consideriamo l'applicazione L si dovrebbe avere $L = (\tilde{T} \circ T)(L)$. La composizione tra le applicazioni mi deve quindi dare l'applicazione identità, verifichiamo che deve essere:

$$L = (T \circ \tilde{T})(L) = T(\tilde{T}(L)) = T(\tilde{T}_L), \text{ quindi } T: \tilde{T}_L \rightarrow L.$$

Avendo poi definito $T_A = \sum_{j=1}^n (T_A)_{ji} y_j$ con $A \in \text{Mat}_{n,m}(K)$ si ha che

$$L(e_i) = (\tilde{T} \circ T)(L(e_i)) = \tilde{T}(T(L(e_i))) = \sum_{j=1}^n (\tilde{T}_L)_{ji} y_j,$$

Abbiamo concluso i passaggi necessari a generalizzare la matrice associata definita all'inizio del paragrafo, essa risulta quindi vera su spazi vettoriali qualsiasi.

1.4 Proprietà della matrice associata

Determinate le relazioni tra le applicazioni lineari e le matrici si possono introdurre le loro proprietà:

Teorema 1.4.1. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n$ base di V , $\{f_j\}_{j=1}^m$ base di Z e $\{g_k\}_{k=1}^s$ base di W con V, Z, W spazi vettoriali, date le applicazioni $L \in \mathcal{L}(V, Z)$ e $H \in \mathcal{L}(Z, W)$. Si ha che ad L corrisponde la matrice $A_L \in \text{Mat } m, n(K)$ secondo le rispettive basi mentre ad H corrisponde analogamente $A_H \in \text{Mat } s, m(K)$. Si ha che $H \circ L \in \mathcal{L}(V, W)$ quindi $A_{H \circ L} \in M_{s,n}(K)$, perciò $A_{H \circ L} = A_H A_L$ (secondo il prodotto riga per colonna).

Dimostrazione. Se $A_{H \circ L} = A_H A_L$ si deve avere che applicando $H \circ L$ alla base $\{e_i\}$ si deve ottenere per la combinazione lineare

$$H \circ L(e_i) = \sum_{k=1}^s (A_{H \circ L})_{ki} g_k,$$

questo poichè $P = A_{H \circ L}$ deve essere tale da $P: V \rightarrow W$, per cui A_P deve essere tale da avere il seguente comportamento su elementi della base di V :

$$P(e_i) = \sum_{k=1}^s (A_P)_{ki} g_k.$$

Partendo dalla relazione trovata per combinazione lineare verifichiamo che è vero:

$$\begin{aligned} H \circ L(e_i) &= H(L(e_i)) = \\ &= H\left(\sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} f_j\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} H(f_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} \left(\sum_{k=1}^s (A_H)_{kj} g_k\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (A_L)_{ji} (A_H)_{kj} g_k = \\ &= \sum_{k=1}^s (A_H A_L)_{ki} g_k, \end{aligned}$$

Abbiamo allora:

$$H \circ L(e_i) = \sum_{k=1}^s (A_H A_L)_{ki} g_k = \sum_{k=1}^s (A_{H \circ L})_{ki} g_k.$$

Possiamo quindi affermare:

$$(A_H A_L)_{ki} = (A_{H \circ L})_{ki},$$

i coefficienti delle due matrici coincidono, quindi devono per forza essere uguali. \square

Teorema 1.4.2. Sia $\{e_i\}_{i=1}^m$ base di V e sia $L \in \mathcal{L}(V, V)$, cioè un endomorfismo lineare in V , sapendo inoltre $A_L \in \text{Mat}_{m,m}(K)$ la matrice associata a L , rispetto alla stessa base in partenza e arrivo, si ha che L è invertibile (dunque un isomorfismo) se e solo se A_L è invertibile.

Dimostrazione. Considerando $x \in V$ si dice che x è invertibile se $\exists y \in V: xy = yx = I_v$, nello spazio delle matrici quadrate $A \in \text{Mat}_{m,m}(K)$ se $\exists B \in \text{Mat}_{m,m}(K): AB = I = BA$.

- Ipotizziamo che L sia isomorfismo. Ciò significa che esiste L^{-1} , verifichiamo che è lineare. Consideriamo $P: G \rightarrow H$ con P omomorfismo biiettivo, allora si ha che $P^{-1}: H \rightarrow G$, ed esso è un isomorfismo, quindi manda basi in basi, quindi è lineare. Allora riprendendo $L^{-1}: V \rightarrow V$ e $L: V \rightarrow V$ si ha $L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = \mathbb{I}_v$. Quindi $I = A_{L^{-1} \circ L}$ e quindi per teorema 1.4.1 $I = A_{L^{-1}} A_L$ è invertibile.
- Supponiamo ora che A_L sia invertibile. Consideriamo A_L^{-1} e $I = A_L^{-1} \circ A_L$, ponendo $\{f_i\}_{i=1}^m$ un'altra base di V , si ha che, per l'applicazione T_A , precedentemente definita, vale l'uguaglianza

$$T_{A_L}(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j.$$

Poichè $I = A_{L^{-1}} \circ A_L$, applicando T a entrambi i membri, si ha che $T(I) = T_{A_{L^{-1}}} \circ T_{A_L}$, da cui si ricava che $T_{A_{L^{-1}}}$ deve essere tale da rispettare

$$T_{A_{L^{-1}}}(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_{L^{-1}})_{ji} e_j.$$

Ora è noto anche che

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} f_j,$$

Quindi deve risultare che $T_{A_{L^{-1}}}$ inverso (destro e sinistro) di L e posso dimostrarlo:

$$\begin{aligned} T_{A_{L^{-1}}} \circ L(e_i) &= T_{A_{L^{-1}}}(L(e_i)) = \\ &= T_{A_{L^{-1}}} \left(\sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} T_{A_{L^{-1}}}(f_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} \left(\sum_{s=1}^m (A_{L^{-1}})_{js} e_s \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^m ((A_L)_{ji} (A_{L^{-1}})_{js}) e_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \delta_{ji} e_j, \end{aligned}$$

L'ultima parte ci dà il delta di Kronecker e l'elemento $e_j = e_i$, quindi l'applicazione è un'isomorfismo poichè $T_{A_{L^{-1}}} \circ L(e_i)$ è tale che $T_{A_{L^{-1}}} = L^{-1} = T_{A_L}$.

□

1.4.1 Cambiamenti di base

Mediante l'opportuna applicazione lineare è sempre possibile passare da una base ad un'altra mediante il seguente procedimento. Siano $\{e_i\}_{i=1}^m, \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^m$ basi di V tramite l'applicazione T è possibile passare da una all'altra, infatti si può porre $T(e_i) = \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^m (A_T)_{ji} e_j$, considerando ora $\{f_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{f}_i\}_{i=1}^n$ basi di Z e l'applicazione U che compie lo stesso processo di T tra le basi di Z . Si ha che A_T e A_U rappresentano la matrice del cambio di base nei due spazi, andiamo a determinare $L \in \mathcal{L}(V, Z)$ e la matrice associata A_L tale che permetta un cambio di base da $\{e_i\} \in V \rightarrow \{f_i\} \in Z$ alle rispettive $\{\tilde{e}_i\}, \{\tilde{f}_i\}$:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^n (A_L)_{ji} f_j,$$

Analogamente si ha

$$L(\tilde{e}_i) = \sum_{j=1}^n (\tilde{A}_L)_{ji} \tilde{f}_j.$$

Determino ora la relazione tra A_L e \tilde{A}_L , ricordando che vale $f_t = \sum_{j=1}^n (A_U)^{-1}_{jt} \tilde{f}_t$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (\tilde{A}_L)_{ji} \tilde{f}_j &= L(\tilde{e}_i) = \\
&= L\left(\sum_{k=1}^m (A_T)_{ki} e_k\right) = \\
&= \sum_{k=1}^m (A_T)_{ki} L(e_k) = \\
&= \sum_{k=1}^m (A_T)_{ki} \sum_{t=1}^n (A_L)_{tk} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^m (A_T)_{ki} (A_L)_{tk} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^n (A_T A_L)_{ti} f_t = \\
&= \sum_{t=1}^n (A_T A_L)_{ti} \sum_{j=1}^n (A_U)^{-1}_{jt} \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{t=1}^n (A_U)^{-1}_{jt} (A_T A_L)_{ti}\right) \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^n (A_U^{-1} A_L A_T)_{ji} \tilde{f}_t = \\
&= \sum_{j=1}^n (\tilde{A}_L)_{ji} \tilde{f}_j.
\end{aligned}$$

Si ha quindi che $\tilde{A}_L = A_U^{-1} A_L A_T$, si è dunque trovata la relazione tra le diverse basi e le relative matrici. Se $V = Z$ e quindi $e_i = f_i$ e $\tilde{e}_i = \tilde{f}_i$ si ha che $A_U = A_T$ da cui si ha la relazione tra A_L e \tilde{A}_L :

$$\tilde{A}_L = A_T^{-1} A_L A_T.$$

Date le matrici $A, B \in \text{Mat}_{m,m}(K)$ relative a un'endomorfismo su due basi in K , come nella situazione precedente, si definisce *matrice del cambio di base* la matrice $H \in \text{Mat}_{m,m}(K)$ tale che $A = H^{-1} B H$.

Definizione 1.4.3. Date due matrici $A, B \in \text{Mat}_{m,m}(K)$ qualunque, esse si dicono simili se vale la precedente relazione, cioè se $\exists H \in \text{Mat}_{m,m}(K): A = H^{-1} B H$.

Se ci troviamo in un'algebra commutativa, allora le matrici simili sono solo quelle uguali.

1.5 Spazio duale

Si definisce *funzionale lineare* l'applicazione C^j che ha il seguente effetto su una base $\{e_i\}_{i=1}^m \in V$ spazio vettoriale con $\dim V = m$ finita su K :

$$C^j(e_i) = \delta_i^j.$$

Posso definire quindi m funzionali ognuno legato ad un elemento della base, essi sono definiti su $\mathcal{L}(V, K)$ e riconsiderando allora C_j , dato un generico vettore $a \in V$, la coordinata j -esima del vettore. Consideriamo uno spazio vettoriale V sul generico campo K , si può sempre esprimere K come spazio vettoriale su se stesso e si ha $\dim_K(K) = 1$.

Definizione 1.5.1. Si definisce spazio duale lo spazio, indicato con V^* , dei funzionali lineari $\mathcal{L}(V, K)$, con V spazio vettoriale su K , cioè lo spazio delle applicazioni lineari definite su V e a valori in K . Se V ha dimensione finita m si ha $\dim(V^*) = m \dim_K(K) = m$.

Teorema 1.5.2. Il sistema $\{C^i\}_{i=1}^m$ è una base per lo spazio duale V^* , quindi $0_{V^*} = \sum_{j=1}^m \lambda_j C^j$ (con $0_{V^*}: 0_{V^*}(v) = 0_K$). La base $\{C^i\}_{i=1}^m$ si dice base associata alla base $\{e_i\}_{i=1}^m \in V$.

Dimostrazione. Si ha che $\forall v \in V$ si ha che applicando $0_{V^*}(v) = 0_K$, quindi anche V^* è spazio vettoriale su K , per cui applicandolo ad un elemento della base:

$$0_K = 0_{V^*}(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j C^j(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta_i^j = \lambda_i,$$

Questo poichè per tutti gli altri elementi è zero, per come è definita la delta di Kronecker. Ora essendo l'elemento della base scelto arbitrariamente deve essere che $\lambda_i = 0 \forall i$. Per cui $\{C^i\}_{i=1}^m$ è un sistema linearmente indipendente e avendo lo spazio duale la stessa dimensione dello spazio di partenza si ha che devono essere per teorema ?? una base di V^* . \square

Definizione 1.5.3. Sia $T: V \rightarrow Z$ omomorfismo, si può definire l'applicazione lineare T^* nello spazio duale tale che $T^*: Z^* \rightarrow V^*$, l'applicazione è detta trasposta di T .

Per far vedere l'effetto dell'applicazione T^t consideriamo $w, \sigma \in Z^*$ e ricerchiamo $(T^t)(w)$, che deve essere un elemento di V^* , verifichiamo la sua azione su un generico elemento di V , considerando $\lambda \in K$ prima verifico che la funzione sia ben definita:

$$v \in V: (T^t)(w)(v) = w(Tv),$$

Essendo $T(v)$ in Z allora è verificato. Ora controllo la linearità mediante moltiplicazione per λ :

$$(T^t)(\lambda w + \sigma) = \lambda(T^t)(w) + (T^t)(\sigma),$$

Se entrambi gli elementi dell'equazione compiono la stessa azione sul generico elemento $v \in V$ allora T^t è un'applicazione lineare per definizione.

- Il primo elemento ha il seguente effetto:

$$(T^t)(\lambda w + \sigma)v = (\lambda w + \sigma)(Tv) = (\lambda w)(Tv) + (\sigma)(Tv),$$

- Il secondo invece

$$((T^t)\lambda w + (T^t)\sigma)v = (Tv\lambda w) + (Tv\sigma).$$

Ora avendo verificato che hanno lo stesso comportamento si ha che $T^t \in \mathcal{L}(Z^*, V^*)$.

Teorema 1.5.4. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n \in V$ e $\{f_j\}_{j=1}^m \in Z$ e siano $\{\theta^i\}_{i=1}^n \in V^*$ e $\{C^j\}_{j=1}^m \in Z^*$, con V, Z , coi i rispettivi duali, spazi vettoriali sul generico campo K : Data $L \in \mathcal{L}(V, Z)$ $A_L \in \text{Mat}_{n,m}(K)$ la matrice che corrisponde a L nelle basi $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{f_j\}_{j=1}^m$, allora considerata $L^t \in \mathcal{L}(V^*, Z^*)$ sia ha che la matrice associata a L^t nelle basi dello spazio duale $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ e $\{C^j\}_{j=1}^m$ è data da $(A_L)^t \in \text{Mat}_{n,m}(K)$.

Dimostrazione. Consideriamo la i -esima colonna della matrice A_L e la j -esima della matrice che corrisponde a L^t , cioè A_{L^t} :

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j,$$

$$L^t(C^j) = \sum_{i=1}^n (A_{L^t})_{ij} \theta^i.$$

Consideriamo il primo elemento e utilizziamo la definizione di trasposta, cioè applichiamo C^j a $L(e_i)$ poichè C^j è definito in Z e può quindi essere applicato solo a elementi nello stesso spazio. Si ottiene

$$C^k L(e_i) = C^k \left(\sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} f_j \right) = \sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} C^k(f_j),$$

sapendo $C^k(f_j)$ corrispondente alla base duale di f_j otteniamo che è il delta di Kronecker, rimane quindi un'unico addendo nella sommatoria che è $\sum_{j=1}^m (A_L)_{ji} C^k(f_j) = (A_L)_{jk}$. Per come è definita L^t è possibile valutare il secondo elemento su $e_k \in V$:

$$L^t(C^j)(e_k) = \sum_{i=1}^m (A_{L^t})_{ij} \theta^i(e_k),$$

Ora $\theta^i(e_k)$ è il delta di Kronecker, per definizione di funzionale lineare, mi resta un'unico elemento della sommatoria, cioè quello corrispondente a θ^i che è fisso, quindi $L^t(C^j)(e_k) = (A_{L^t})_{kj}$. Si ha ora che i due elementi valutati sopra, per come abbiamo definito L e L^t devono coincidere, si ha quindi $(A_{L^t})_{kj} = (A_L)_{jk}$. Le due matrici sono quindi una la trasposta dell'altra, allora $A_{L^t} = (A_L)^t$. \square

Teorema 1.5.5. Sia $L \in \mathcal{L}(V, Z)$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se L è iniettiva si ha $L^t \in \mathcal{L}(Z^*, V^*)$ suriettiva.
2. Se L è suriettiva si ha $L^t \in \mathcal{L}(Z^*, V^*)$ iniettiva.

Dimostrazione. Se L è iniettiva ogni elemento in V ha immagini distinte. Prendiamo per esempio $\{e_i\}_{i=1}^n$ base di V e applichiamo il funzionale lineare C^j alle sue immagini, poichè il funzionale può essere applicato solo agli elementi nello spazio di arrivo, si ha che per ognuno di questi elementi $C^j(L(e_i))$ esiste un elemento corrispondente duale della base $\{e_i\}_{i=1}^n$, quindi $L^t \in \mathcal{L}(Z^*, V^*)$ è per definizione suriettiva.

Considerando invece L suriettiva e verifichiamo che $\text{Ker } L^t$ contiene il solo 0_{V^*} (cioè il funzionale lineare nullo). Per farlo consideriamo $C \in Z^*$, con $C = 0_{Z^*}$, abbiamo $L^t(C) = 0_{V^*}$, questo è vero se $C(z) = 0_k$ con $z \in Z$. Consideriamo $C(z) = C(L(v)) = C((L)(v)) = L^t((C)(v)) = (L^t(C))(v) = 0_{V^*}(v) = 0_K$. Poichè ogni elemento ha una controimmagine si ha che nei rispettivi duali vale la dimostrazione del teorema 1.1.3. Quindi $\text{Ker } L^t = \{0_{Z^*}\}$, per cui L^t è iniettiva. \square

Definizione 1.5.6. Si definisce rango di un'applicazione lineare $L \in \mathcal{L}(V, Z)$, con V, Z spazi vettoriali di dimensione finita, e viene indicato con $R_K(L)$ la $\dim L(V)$, che è sempre minore di Z .