Geometria

26 maggio 2015

Capitolo 1

Spazi vettoriali

1.1 Proprietà principali

Definizione 1.1.1. *Dato un campo K, un insieme V non vuoto e due operazioni interne $+\colon V \times V \to V$ e $\cdot\colon K \times V \to V$, la terna $(V, +, \cdot)$ si definisce* spazio vettoriale *sul campo K se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

- *$(V, +)$ è un gruppo abeliano;*
- *$1_K x = x$ per ogni $x \in V$;*
- *la proprietà associativa, ossia se $\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall x \in V$, si ha $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;*
- *la proprietà distributiva, ossia se $\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall x, y \in V$, si ha $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ e $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.*

Gli elementi di V si chiamano *vettori* mentre quelli di K *scalari.* L'elemento neutro della somma, che per le proprietà note dei gruppi esiste ed è unico, sarà indicato con 0, oppure O_V in caso di ambiguità. Lo zero e l'unità del campo K seguono la convenzione già usata per la quale saranno indicati con 0 e 1, o anche 0_K e 1_K; il fatto che 0 indichi sia lo zero di K che quello di V sarà chiaro dal contesti

Esempi

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, infatti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha, rappresentando i vettori come colonne,
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$
eccetera.
- L'anello dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con l'usuale addizione e con il prodotto per un numero reale. Siano infatti $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$, con $m < n$, allora
$$\begin{aligned} p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots +& \\ + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n&, \end{aligned}$$
che è un polinomio appartenente a $\mathbb{R}[x]$. Moltiplicare un polinomio per uno scalare λ equivale a moltiplicare per tale scalare tutti i suoi termini.
- L'insieme $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$, con $X \neq \varnothing$, è l'insieme delle funzioni (qualunque) definite in X e a valori reali. Si hanno le operazioni $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, quindi $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale.

- Ogni campo può essere visto come spazio vettoriale su se stesso o un suo opportuno sottoinsieme. Ad esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ ma anche su $\mathbb{R}$.

Elenchiamo ora una serie di proprietà di base sugli spazi vettoriali, in cui assumiamo V come spazio vettoriale su un campo K.

Proprietà 1.1.2. Per ogni vettore $x \in V$, $0_K x = 0_V$.

Dimostrazione. Lo 0_K si può sempre scrivere come somma di 0_K con se stesso, quindi $0_K x = (0_K + 0_K)x = 0_K x + 0_K x$. Poiché V è abeliano, sommando l'inverso di $0_K x$ ai due membri si ottiene $0_K x = 0_V$ □

Proprietà 1.1.3. Per ogni scalare $a \in K$ e $\forall x \in V$, $-(ax) = (-a)x$.

Dimostrazione. Per la proprietà precedente si ha $0_V = 0_K x$, e lo zero scalare si scrive come somma degli inversi $a + (-a)$, quindi $0_V = [a + (-a)]x = ax + (-a)x$, che significa che $(-a)x$ è il vettore inverso di ax — quindi è $-(ax)$ — rispetto alla somma perché insieme danno 0_V. □

Proprietà 1.1.4. Per ogni $a \in K$, $a0_V = 0_V$.

Dimostrazione. Si ha che $a0_V = a(0_V + 0_V) = a0_V + a0_V$, e come per la proprietà 1.1.2 poiché V è abeliano si somma ai due membri dell'uguaglianza l'inverso di $a0_V$, ottenendo $a0_V = 0_V$. □

Proprietà 1.1.5. Se $ax = 0_V$ per $a \in K$ e $x \in V$, allora $a = 0_K$ o $x = 0_V$.

Dimostrazione. Sia $a \neq 0_K$: allora esiste il suo inverso, $a^{-1} \in K$, rispetto al prodotto in K (cioè tale che $aa^{-1} = 1_K$). Quindi $0_V = a^{-1}0_V$, e poiché per per ipotesi $ax = 0$ segue che $0_V = a^{-1}(ax) = (aa^{-1})x = 1_K x = x$, perciò $x = 0_V$. □

Proprietà 1.1.6. Per ogni $a, b \in K$ e per ogni $x \in V$, se $ax = bx$ allora $a = b$ oppure $x = 0_V$.

Dimostrazione. Se vale che $ax = bx$, allora aggiungendo l'inverso di bx per la somma si ottiene $ax + \big(-(bx)\big) = 0_V$. Inoltre per la proprietà distributiva questo è uguale ad $ax + (-b)x = \big(a + (-b)\big)x = 0_V$. Per la proprietà 1.1.5, infine, $a + (-b) = 0_K$ oppure $x = 0_V$. Sommando b alla prima delle due risulta $a = b$ o $x = 0_V$. □

Proprietà 1.1.7. Per ogni scalare $\lambda \in K$ e $\forall x, y \in V$, se $\lambda x = \lambda y$ allora $\lambda = 0_K$ o $x = y$.

Dimostrazione. Se $\lambda x = \lambda y$, allora $\lambda x + \big(-(\lambda y)\big) = \lambda x + \lambda(-y) = 0_V$. Per la proprietà distributiva equivale a $\lambda\big(x + (-y)\big) = 0_V$, da cui sempre per la 1.1.5 $\lambda = 0_K$ oppure $x + (-y) = 0_V$, da cui sommando y ai due membri risulta che $\lambda = 0_K$ oppure $x = y$. □

1.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 1.2.1. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Un suo sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto si dice* sottospazio *vettoriale se $(W, +, \cdot)$, per il quale le operazioni sono ristrette nel modo $+\colon W \times W \to W$ e $\cdot\colon K \times W \to W$, è uno spazio vettoriale.*

Con la restrizione delle operazioni si intende che operando tra due vettori di W il risultato è ancora un vettore di W (e non di V), e lo stesso per il prodotto tra un vettore di W e uno scalare di K. Si scrive anche che $W \leq V$.

Esempi

- Preso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, l'insieme
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}$$
è un sottospazio vettoriale, perché ognuna delle due operazioni dà sempre come risultato un vettore con l'n-esima componente nulla.

- Dato lo spazio vettoriale V, $\{0_V\}$ è un sottospazio vettoriale di V. Anche V è un sottospazio vettoriale di se stesso.

- Dato $\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi di grado non maggiore di n, indicato con $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$, formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Infatti la somma di due poliniomi di grado massimo n è ancora un polinomio di grado massimo n, mentre moltiplicando un polinomio per uno scalare non nullo si moltiplicano i coefficienti di ogni termine per tale scalare, quindi il grado rimane immutato. Moltiplicando per zero si ottiene invece un polinomio nullo, che ha ancora ovviamente grado minore di n. Lo stesso vale per $\mathbb{C}_n[x] \leq \mathbb{C}[x]$.

- L'insieme $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ delle funzioni definite da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e continue è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni (qualsiasi) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Infatti sommando due funzioni continue si ottiene una funzione continua, e ovviamente anche moltiplicando una funzione continua per uno scalare.

Teorema 1.2.2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{W_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottospazi vettoriali di V. Allora
$$\bigcap_{i\in I} W_i$$
è ancora un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Siano $w_1, w_2 \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Allora $\forall i \in I$, w_1 e w_2 appartengono a W_i (appartengono a tutti i sottospazi). Poiché i W_i sono sottospazi vettoriali, allora accade sempre che $\forall i \in I$, $w_1 + w_2 \in W_i$, quindi appartengono anche a $\bigcap_{i\in I}$. Un ragionamento analogo si effettua per il prodotto per scalare. Quindi $\bigcap_{i\in I}$ è un sottospazio vettoriale di V. □

Il teorema non vale se al posto dell'intersezione si effettua l'unione dei W_i: ad esempio le due rette $x = 0$ e $y = x$, rappresentate in forma vettoriale come $\left\{\binom{x}{0} : x \in \mathbb{R}\right\}$ e $\left\{\binom{x}{x} : x \in \mathbb{R}\right\}$, sono banalmente due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$. Prendendo però un elemento del primo e uno del secondo, $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$, sommandoli si ottiene $\binom{2}{1}$ che non appartiene all'unione dei due sottospazi.

Definizione 1.2.3. *Siano V uno spazio vettoriale su K e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. Si dice* sottospazio generato *di V, e si indica con $\langle S\rangle$, un sottospazio vettoriale che soddisfa le seguenti due proprietà:*

- *$S \subseteq \langle S\rangle$;*
- *se $W \leq V$ tale che $S \subseteq W$, allora $\langle S\rangle \leq W$.*

Teorema 1.2.4. Siano V uno spazio vettoriale su K e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto, esiste sempre $\langle S\rangle$ ed è unico.

Dimostrazione. *(Unicità)* Siano $Z_1 \neq Z_2$ due sottospazi vettoriali di V che soddisfino la definizione 1.2.3 di sottospazio generato. Poiché per tale definizione $S \subseteq Z_1$, dato W sottospazio di V e $S \subseteq W$ segue che $Z_1 \leq W$. Si ripete lo stesso ragionamento per Z_2, per cui anche $Z_2 \leq W$, quindi sia Z_1 che Z_2 sono sottospazi vettoriali di V come di W, quindi sostituendoli si conclude che $Z_1 \leq Z_2$ ma anche $Z_2 \leq Z_1$. Poiché un sottospazio vettoriale è anche un sottoinsieme, segue che $Z_1 \subseteq Z_2$ e $Z_2 \subseteq Z_1$, ossia $Z_1 \equiv Z_2$.

(Esistenza) Sia $\langle S \rangle = \bigcap_{i=I} Z_i$ dove $\{Z_i\}_{i \in I}$ sono tutti sottospazi vettoriali di V che includono S; ogni Z_i non è vuoto perché include S. Sicuramente $\langle S \rangle$ è, a sua volta, un sottospazio di V per il teorema 1.2.2. S è contenuto in ogni Z_i, quindi è incluso anche in $\langle S \rangle = \bigcap_{i \in I} Z_i$. Inoltre, sia W un sottospazio di V tale che $S \subseteq W$. Sicuramente, poiché $\langle S \rangle$ è un sottospazio vettoriale, una combinazione lineare di elementi di S lo è anche di elementi di $\langle S \rangle$ quindi è un elemento di $\langle S \rangle$; ora, tutti gli elementi di S sono anche elementi di W, quindi $\langle S \rangle$ soddisfa la definizione 1.2.1 e dunque $\langle S \rangle \leq W$. Allora uno spazio che soddisfi la definizione 1.2.3 si può sempre costruire. □

Definiamo ora la somma di sottospazi come l'insieme $U + W = \{u + w \colon u \in U, w \in W\}$: esso è un sottospazio vettoriale, infatti

- $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$;
- $\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w \in U + W$.

Dimostriamo inoltre che $U + W$ è lo spazio generato dall'unione dei due sottospazi, seguendo la definizione 1.2.3.

Teorema 1.2.5. Siano U, W sottospazi vettoriali di V su un campo K. Allora $\langle U \cup W \rangle \equiv U + W$.

Dimostrazione. Ogni $u \in U$ si può scrivere come $u + 0_W = u + 0_V$ che quindi appartiene a $U + W$, quindi $U \subseteq U + W$ e analogamente $W \subseteq U + W$, quindi $U \cup W \subseteq U + W$. Consideriamo un sottospazio vettoriale T di V che includa $U \cup W$: ogni elemento $u + w$ appartiene anche a T per qualunque u e w, ma allora $U + W$ è un sottoinsieme di T oltre che uno spazio vettoriale, e ciò lo rende un sottospazio vettoriale di T. Abbiamo allora dimostrato che $U + W$ soddisfa la definizione 1.2.1, perciò $U + W = \langle U \cup W \rangle$. □

1.3 Sistemi di generatori

Sia V uno spazio vettoriale su K, e $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. Le combinazioni lineari (sempre finite!) di elementi di S sono definite come

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \cdots + \lambda_n s_n,$$

con $\lambda_i \in K$, $s_i \in S$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.1. Sia V uno spazio vettoriale su K, e $S \subseteq V$ non vuoto. Allora

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \colon \lambda_i \in K, s_i \in S, i = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrazione. Questo particolare $\langle S \rangle$ deve soddisfare la definizione 1.2.3:

- i s_i appartengono a S, e possiamo esprimerli come $s_i = 1_K s_i$ quindi $S \subseteq \langle S \rangle$;
- se $W \leq V$ e $S \subseteq W$, allora dato che $\langle S \rangle \supseteq S$ se prendiamo una combinazione lineare di due elementi di S, lo è anche di elementi di W, e poiché il risultato è sempre un elemento di $\langle S \rangle$ quest'ultimo è un sottospazio vettoriale di W.

□

Definizione 1.3.2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia $S \subseteq V$ un insieme non vuoto. S è detto* sistema di generatori *per V se $\langle S \rangle = V$.*

Con questa definizione possiamo studiare anziché l'intero spazio vettoriale V solo un suo sottoinsieme.

Esempi

- Come già detto, i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono definiti dalle loro coordinate, quindi possono essere scritti come combinazioni lineari di questi elementi: allora

$$\mathbb{R}^n = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

  I vettori dello spazio generatore sono a tutti gli effetti dei versori di $\mathbb{R}^n$, in questo esempio sono i versori allineati con gli assi cartesiani.

- $\mathbb{R}[x]$ è generato da $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$; questo insieme è infinito, perché non esiste un polinomio "di grado massimo". Ogni $x \in \mathbb{R}[x]$ è determinato da una combinazione lineare di questi componenti, in modo univoco.

- In $\mathbb{R}^2$ si può individuare il sistema di generatori $\left\langle \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\rangle$. Con questo insieme però si può scrivere l'elemento $\binom{2}{2}$ in due modi diversi, ossia come $2\binom{0}{1} + 2\binom{1}{0} + 0\binom{1}{1}$ ma anche come $0\binom{0}{1} + 0\binom{1}{0} + 2\binom{1}{1}$. Questo sistema di generatori quindi non permette di scrivere in maniera univoca i vettori di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.3.3. *Sia V uno spazio vettoriale su K, e $\{v_i\}_{i \in I} \subseteq V$. Si dice che l'insieme $\{v_i\}$ è* linearmente dipendente *se esiste $I_0 \subseteq I$, di cardinalità n finita, e un insieme di scalari $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in K \setminus \{0_K\}$ tali per cui*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V,$$

dove $\{v_i\}_{i=1}^n$ è una numerazione di $\{v_i\}_{i \in I}$.

In parole povere, un insieme è linearmente dipendente se esiste almeno una combinazione lineare (con i coefficienti non tutti nulli) dei suoi componenti che dia lo zero dello spazio. Per l'ultimo degli esempi precedenti l'insieme $\left\{ \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\}$ è linearmente dipendente.

Ovviamente, un sistema che non è linearmente dipendente si dice *linearmente indipendente*, o anche *libero*.

Definizione 1.3.4. *Un insieme finito di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ si dice* linearmente indipendente*, se in ogni combinazione lineare dei k vettori che produce 0_V i coefficienti sono tutti nulli:*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_V \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0_K.$$

Un insieme infinito di vettori $\{v_i\}_{i \in I}$ (con I quindi anche di cardinalità infinita) è linearmente indipendente se $\forall J \subseteq I$ di cardinalità finita $\{v_j\}_{j \in J}$ è linearmente indipendente (cioè se lo è ogni suo sottoinsieme).

Alcuni esempi di insiemi linearmente indipendenti:

- il sistema che genera $K_n[x]$, ossia $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, è linearmente indipendente perché un polinomio è identicamente nullo se e solo se tutti i coefficienti dei vari termini sono nulli. Lo stesso vale per i polinomi di grado non limitato di $K[x]$, poiché la definizione è verificata da "blocchi" di termini.

- l'insieme $\{v, w, 0_V, z\} \subset V$ spazio vettoriale su K non lo è, poiché $0_K v + 0_K w + 1_K 0_V + 0_K z = 0_V$ anche se uno dei coefficienti, 1_K, non è nullo.

Il seguente teorema indica un modo più semplice di verificare questa definizione.

Teorema 1.3.5. Un insieme di vettori $\{v_i\}_{i\in i} \subset V$ è linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi è una combinazione lineare di un numero finito dei rimanenti.

Dimostrazione. Sia dato l'insieme, linearmente dipendente, $\{v_i\}_{0<i\leq k}$: esiste una combinazione lineare $\sum_{n=1}^{k} \lambda_n v_n$ nulla senza che tutti i λ_n siano nulli. Trascurando nella serie gli eventuali termini nulli, rimangono un numero finito di termini tali che ad esempio $\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n$. Poiché λ_1 non è nullo, esiste il suo inverso rispetto al rapporto, $(\lambda_1)^{-1}$, e moltiplicando la precedente equazione per questo risulta che il primo termine è $(\lambda_1)^{-1}(\lambda_1 v_1) = (\lambda_1^{-1}\lambda_1)v_1 = 1_K v_1 = v_1$, allora

$$v_1 = (\lambda_1^{-1})(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n),$$

che è quindi combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme.

Sia $v^* \neq 0_V$ un vettore dell'insieme dato, combinazione lineare (in cui quindi i coefficienti non possono essere tutti nulli) di alcuni dei vettori rimanenti, quindi

$$v^* = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r.$$

Portando tutto al primo termine risulta $v^* - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 - \cdots - \mu_r v_r = 0_V$ sebbene non siano tutti nulli. □

1.4 Basi e dimensioni

Definizione 1.4.1. *Si chiama* base *di uno spazio vettoriale V ogni sistema S linearmente indipendente che genera S.*

Un sistema di generatori esiste sempre per ogni spazio non vuoto: semmai si può prendere lo spazio stesso; non è sempre certa, però, l'esistenza di un insieme linearmente indipendente.

Teorema 1.4.2. Sia $\{e_i\}_{i\in I}$ un insieme di V. Esso è una base di V se e solo se ogni elemento $v \in V$ (non nullo) si può scrivere in modo univoco come combinazione lineare finita, a coefficienti non nulli, di elementi di $\{e_i\}_{i\in I}$.

Gli elementi v non devono essere nulli, perché 0_V si può scrivere come combinazione lineare di *qualunque* sistema di vettori; inoltre i coefficienti della combinazione non devono essere nulli, altrimenti si potrebbe affermare che $v = ae_1 + be_2$ ma anche $v = ae_1 + be_2 + 0_K e_3 + \cdots + 0_K e_n + \ldots$ quanto si vuole.

Dimostrazione. Dimostriamo che la condizione è necessaria. Sia $\{e_i\}_{i\in I}$ una base di V: allora genera tutto V. Preso un elemento $v \in V$ non nullo, si può scrivere come la combinazione lineare finita

$$v = \sum_{i\in I_0} \lambda_i e_i, \tag{1.4.1}$$

con $I_0 \subset I$ di cardinalità finita. Dimostriamo che questa scrittura è unica: supponiamo che $\forall i \in I_0$ $\lambda_i \neq 0_K$ (eventuali termini nulli nella combinazione lineare si trascurano); allora esiste anche

$$v = \sum_{j\in J_0} \mu_j e_j \tag{1.4.2}$$

con $\mu_j \neq 0_K$ $\forall j \in J_0 \subset I$ e di cardinalità finita. Sommando gli opposti della (1.4.2) alla (1.4.1) si ha

$$\sum_{i\in I_0} \lambda_i e_i + \sum_{j\in J_0} -\mu_j e_j = 0_V.$$

Sia $I_0 \subseteq J_0$, e ipotizziamo che esista j_0 appartenente a J_0 ma non a I_0. Allora l'elemento e_{j_0}, nella combinazione, è associato al coefficiente $-\mu_{j_0} \neq 0_K$ (quindi esiste il suo reciproco). Portando $-\mu_{j_0} e_{j_0}$ al secondo membro dell'uguaglianza e moltiplicando per il reciproco di μ_{j_0} risulta

$$\sum_{i \in I_0} (\lambda_i \mu_{j_0}^{-1}) e_i + \sum_{j \in J_0} (\mu_j \mu_{j_0}^{-1}) e_j = e_{j_0},$$

cioè uno degli elementi di $\{e_i\}$ è espresso come combinazione lineare degli altri, vale a dire che la base è linearmente dipendente, il che è assurdo perché è una base: quindi non può esistere un j_0 che appartiene a J_0 ma non a I_0. Ponendo $J_0 \subseteq I_0$ si ottiene allo stesso modo un altra contraddizione. Allora non può che essere $I_0 \equiv J_0$, ma ciò significa che

$$\sum_{i \in I_0} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_V,$$

cui segue che $\lambda_i = \mu_i \ \forall i \in I_0$, cioè le (1.4.1) e (1.4.2) sono identiche e dunque la scrittura di v in termini della base è unica.

Mostriamo ora che la condizione è anche sufficiente: innanzitutto, $\langle \{e_i\}_{i \in I} \rangle = V$ perché per ipotesi possiamo scrivere ogni vettore di V come combinazione lineare di elementi di questo insieme. Supponiamo che esista $I_0 \subset I$ di cardinalità finita, per cui

$$\sum_{i \in I_0} \lambda_i e_i = 0_V, \tag{1.4.3}$$

e come prima che $\lambda_i \neq 0_K \ \forall i \in I_0$. Considerando un $i^* \in I_0$, λ_{i^*} non è nullo, quindi moltiplicando la (1.4.3) per il suo inverso si trova

$$\sum_{i \in I_0} (\lambda_{i^*}^{-1} \lambda_i) e_i = 0_V.$$

Isolando il termine in i^* si ottiene poi che

$$\sum_{i^* \neq i \in I_0} (\lambda_{i^*}^{-1} \lambda_i) e_i = -e_{i^*}$$

vale a dire che e_{i^*} si esprime come combinazione lineare di altri elementi dell'insieme. Questo elemento però non è unico, dato che il ragionamento vale per qualsiasi $i \in I_0$ preso volta per volta. Allora è assurdo che esista un tale I_0, cioè che per tali $i \in I_0$ la combinazione lineare sia nulla pur non avendo tutti i coefficienti nulli; dunque l'insieme è linearmente indipendente, e dato che genera V è una sua base. $\square$

In $\mathbb{R}^3$ ad esempio ogni punto è univocamente individuato da un vettore v che è esprimibile nelle sue (tre) coordinate come $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, infatti l'insieme $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (detta comunemente *base canonica*). I coefficienti di ogni termine formano le componenti del vettore.

Definizione 1.4.3. *Sia V uno spazio vettoriale su K: esso si dice di dimensione finita se ammette un sistema finito di generatori, altrimenti si dice di dimensione infinita.*

Teorema 1.4.4. Sia $G \subset V$ un sistema di generatori di V finito. Se S è un sottoinsieme di G linearmente indipendente, allora esiste una base B di V tale da comprendere il sistema S e che sia inclusa in G (cioè $S \subseteq B \subseteq G$).

Dimostrazione. Si supponga che V abbia dimensione finita: allora esiste un sistema di generatori G. Escludiamo il caso in cui $V \equiv \{0_V\}$ perché non esisterebbe nemmeno una base. Esiste $e \in G$, non nullo, che ovviamente forma un sistema linearmente indipendente poiché $\lambda e \neq 0_V \ \forall \lambda \neq 0_K$. Inoltre, per come si è scelto e, $S \equiv \{e\} \subseteq G$. Quindi esiste sempre una base di V per cui $\{e\} \subseteq B \subseteq G$.

Indichiamo con S_n il fatto che nell'insieme linearmente indipendente S ci siano n vettori. Potrebbe essere che $\langle S_n \rangle \equiv V$, ma allora possiamo scegliere subito S_n come base per V, e poiché $B = S_n \subseteq G$ il teorema è dimostrato. Sia allora $\langle S_n \rangle \subsetneqq V$: deve esistere $x_{n+1} \in G$, ma $\notin \langle S_n \rangle$, perché altrimenti dato che $\langle S \rangle \supseteq G$ si avrebbe che $\langle S_n \rangle \equiv V$. Definiamo $S_{n+1} = S_n \cup \{x_{n+1}\}$ (quindi l'insieme ha $n+1$ elementi), per cui sicuramente vale $S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq G$. Questo S_{n+1} è un insieme linearmente indipendente, altrimenti avremmo che $x_{n+1} \in \langle S_n \rangle$. Se $\langle S_{n+1} \rangle = V$ il teorema è dimostrato, altrimenti procediamo aggiungendo un altro elemento di $G \setminus \langle S_{n+1} \rangle$. Iteriamo il processo per $n+2$, $n+3$ e così via, fino a quando si esauriscono gli elementi di G, ottenendo la relazione

$$S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq S_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq G.$$

La dimensione di G è finita, quindi prima o poi gli elementi da aggiungere termineranno: esisterà $k \in \mathbb{N}$ per cui $\langle S_{n+k} \rangle = \langle G \rangle$, e anche in questo caso abbiamo trovato che S_{n+k} è base di V. □

Sempre in $\mathbb{R}^3$, per esempio, una delle possibili basi è quella composta dai tre versori $\{\hat{\mathbf{\imath}}, \hat{\mathbf{\jmath}}, \hat{\mathbf{k}}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, ma anche $\{e_1, e_2, e_3\} = \{\hat{\mathbf{\imath}}, \hat{\mathbf{\jmath}}, (\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}})\}$ è un'altra base. In effetti ruotando $\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ di un angolo qualsiasi si ottiene un altra base, e se ne ottengono ancora delle altre moltiplicando per degli scalari (anche differenti) i tre versori. Quindi le basi di uno spazio vettoriali sono infinite; quello che non cambia è il numero di elementi di queste basi, che è sempre costante (in questo esempio, la base è sempre composta da tre vettori).

Corollario 1.4.5. Ogni spazio vettoriale $V \neq \{0_V\}$ di dimensione finita ammette almeno una base.

Teorema 1.4.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, contenente una base di n vettori. Allora:

1. ogni sistema linearmente indipendente S di n vettori è una base di V;
2. ogni sistema U di $m > n$ vettori è linearmente dipendente;
3. ogni sistema W di $m < n$ vettori non può generare V, cioè $\langle W \rangle \neq V$;
4. ogni sistema T di n vettori per cui $\langle T \rangle = V$ è una base.

Dimostrazione.

1. Siano $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base di V, e $S = \{f_i\}_{i=1}^n$ un insieme finito linearmente indipendente. Allora

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Poiché S è linearmente indipendente, almeno un λ_i non è nullo, quindi $f_1 \neq 0_V$, e riordinando i vettori nella combinazione possiamo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0_K$: in questo modo $\lambda_1 e_1 \neq 0_V$. Portando quest'ultimo termine al secondo membro e moltiplicando per $\mu_1 = \lambda_1^{-1}$ risulta con opportuni $\mu_i \in K$ che

$$e_1 = \mu_1 f_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i.$$

Ogni vettore di V è una combinazione lineare di elementi di $\{e_i\}_{i=1}^n$, ma sostituendo e_1 con l'espressione trovata sopra abbiamo $\forall v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \lambda_1 \left(\mu_1 f_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i \right) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i$$

che quindi può essere espresso anche come combinazione lineare di $\{f_1, e_2, \ldots, e_n\}$ anziché degli $\{e_i\}_{i=1}^n$, quindi anche l'insieme $\{f_1, e_2, \ldots, e_n\}$ è un sistema di generatori di V. Dunque troviamo anche che

$$f_2 = \sigma_1 f_1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e_i.$$

Almeno uno dei σ_i non è nullo, altrimenti sarebbe che $f_2 = \sigma_1 f_1$ che contraddice l'indipendenza lineare degli f_i. Supponendo $\sigma_2 \neq 0_K$, si esplicita e_2 moltiplicando per σ_2^{-1}, ottenendo

$$e_2 = \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \sum_{i=3}^{n} \rho_i e_i.$$

L'insieme $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ è ancora un sistema di generatori di V. Si itera il procedimento ottenendo alla fine che $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ è ancora un sistema di generatori per V, e dunque ne è una base dato che è linearmente indipendente.

2. Sia U con $m > n$ elementi linearmente indipendente, e si prenda $U' \subset U$ tale che abbia n elementi (dunque $U \setminus U' \neq \varnothing$). Per il punto 1 U' è una base di V, quindi i vettori di U' generano anche quelli di $U \setminus U'$. Ciò contraddice l'indipendenza lineare di U, che deve essere quindi linearmente dipendente.

3. Sia W con $m < n$ elementi un sistema di generatori di V: allora deve esistere una base con al più m vettori, tanti quanti ce ne sono in W. Per il punto precedente, la base $\{e_i\}_{i\in I}$ (considerata nel punto 1) ha più vettori della base estratta da W, quindi sarebbe linearmente dipendente, che è assurdo. Allora W non può essere un sistema di generatori di V.

4. Se $\langle T \rangle = V$, T deve avere almeno n elementi per il punto 3; allora esiste $T' \subseteq T$ che è una base di V. Se T' avesse meno di n elementi, contraddirrebbe il punto 3 prima citato, quindi deve averne esattamente n, perciò $T \equiv T'$, e T è linearmente indipendente. Poiché genera V, T ne è anche una base.

□

Corollario 1.4.7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, contenente una base di n vettori. Ogni altra base V ha a sua volta esattamente n vettori.

Definizione 1.4.8. *Dato uno spazio vettoriale $V \neq \{0_V\}$ su K di dimensione finita, si dice* dimensione *di V su K il numero di vettori di una sua base qualunque.*

La dimensione di V (su K) si indica con $\dim_K V$ o anche solo, se non ci sono ambiguità, con $\dim V$. Convenzionalmente, allo spazio contenente soltanto $\{0_V\}$ si assegna la dimensione 0.

Teorema 1.4.9. Sia V uno spazio vettoriale, e W un suo sottospazio. Se $\dim V$ è finita, allora $\dim W \leq \dim V$.

Dimostrazione. Nel caso banale in cui $W = \{0_V\}$, la sua dimensione è 0 quindi è ovviamente minore o uguale della dimensione di V, qualunque essa sia. Se invece W non contiene soltanto il vettore nullo, una base qualunque di W è un sistema linearmente indipendente anche in V. Siccome $W \neq \{0_V\}$, esiste un vettore $w_1 \in W$ non nullo. Se $\langle w_1 \rangle = W$ allora $\{w_1\}$ è una base di W da cui si ottiene subito la tesi: infatti w_1 appartiene anche a V che dunque ha almeno dimensione 1. Altrimenti $\langle w_1 \rangle \neq W$ ma comunque esiste un altro vettore di W, $w_2 \notin \langle w_1 \rangle$ (quindi appartenente a $W \setminus \langle w_1 \rangle$). Sia $S = \{w_1, w_2\}$: esso è un sistema linearmente indipendente per come abbiamo scelto w_2. Se $\langle S \rangle = W$, come nel caso precedente abbiamo dimostrato il teorema: per teorema precedente (1.4.6) V ha due vettori linearmente indipendenti dunque deve essere $\dim V \geq 2 = \dim W$. Se invece $\langle S \rangle \neq W$, si consideri un altro $w_3 \in W \setminus \langle w_1, w_2 \rangle$ e si ripete il ragionamento compiuto in precedenza. Ogni volta si trova un nuovo insieme $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, ancora linearmente indipendente in V. Per il punto 3, sempre del teorema 1.4.6, $\dim V \geq |S|$, quindi W ha dimensione finita, inoltre $n = \dim W = |S| \leq \dim V$. □

Teorema 1.4.10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, W un suo sottospazio e B_W una base di W. Allora tale base si può estendere per formare una base di V, cioè $\exists B_V : B_W \subseteq B_V$.

Dimostrazione. B_W è linearmente indipendente in W in quanto è una base, e lo è quindi anche in V (quindi $\dim V \geq |B_W|$), che deve avere un sistema finito G di generatori. Allora $B_W \cup G$ è ancora un sistema di generatori per V, ed è anche finito. Da questo insieme, che per generare V deve essere tale che $\dim V \leq |B_W \cup G|$, possiamo estrarre $\dim V$ elementi linearmente indipendenti. Poiché $B_W \subseteq B_W \cup G$ è già linearmente indipendente, esiste una base B_V di V contenente B_W (e contenuta in $B_W \cup G$). □

Ad esempio, $\mathbb{R}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$: prendendo una base $\{v\}$ del primo, si ottiene una base del secondo semplicemente aggiungendo due vettori (distinti) perpendicolari a v.

Definizione 1.4.11. *Un insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ di sottospazi vettoriali di V si dice linearmente indipendente se comunque si scelga un vettore $x_i \neq O_V$ per ciascun V_i, l'insieme $\{x_i\}_{i\in I}$ è linearmente indipendente.*

Teorema 1.4.12. Un insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ di sottospazi vettoriali di V è linearmente indipendente se e solo se $\forall k \in I$ si ha che l'intersezione tra V_k e lo spazio generato dai restanti V_i contiene soltanto lo zero, cioè[1]

$$V_k \cap \sum_{j\in I\setminus\{k\}} V_j = \{0_V\}.$$

Dimostrazione. Se $V_k \cap \sum_{j\in I\setminus\{k\}} V_j \neq \{O_V\}$ per qualche $k \in I$, allora esisterebbe un elemento $v_k \in V_k$ non nullo che è combinazione lineare di elementi dei restanti sottospazi, cioè $v_k = x_{i_1} + \cdots + x_{i_m}$ con $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq I \setminus \{k\}$. Ma allora l'insieme $\{V_i\}_{i\in I}$ dei sottospazi non sarebbe linearmente indipendente, contraddicendo l'ipotesi, quindi l'uguaglianza deve essere vera.

Viceversa se abbiamo che $V_k \cap \sum_{j\in I\setminus\{k\}} V_j = \{0_V\}$, allora significa che l'unico vettore v che appartiene allo spazio considerato è il vettore nullo. Poichè è comunque uno spazio vettoriale, possiamo scrivere 0_V come combinazione lineare di elementi degli altri sottospazi, quindi la famiglia di sottospazi è libera. □

Teorema 1.4.13. Sia $\{V_i\}_{i\in I}$ un insieme linearmente indipendente di sottospazi vettoriali di V. Se $\forall i \in I$ il sistema di vettori $S_i \subset V_i$ è linearmente indipendente, allora $\bigcup_{i\in I} S_i$ è linearmente indipendente in V.

Dimostrazione. Consideriamo un sistema linearmente indipendente di vettori $S_i \subset V_i$ e ipotizziamo per assurdo che l'unione non sia linearmente indipendente. Questo implica che, considerando gli elementi $y_i^k \in S_i$ con $i, k \in I_0$ in cui $I_0 \in I$ ha cardinalità finita,

$$\sum_{1\leq k\leq n_i} \lambda_i^k y_k^i = 0,$$

per ogni λ_i^k meno un $\lambda_{\tilde{i}}^k$, corrispondente a un $\tilde{k}$. Posto $x_i = \sum\limits_{1\leq k\leq n_i} \lambda_i^k x_k^i$ sappiamo che $\sum_{i\in I_0} x_i = 0$ e che un elemento di questa sommatoria non è nullo, ma per ipotesi $x_i \subset S_i$ che è una combinazione di vettori linearmente indipendente, allora deve essere $x_{\tilde{i}} = 0$. L'unione S dei vari S_i è allora linearmente indipendente. □

Definizione 1.4.14. *Uno spazio vettoriale V si dice* somma diretta *di un insieme di sottospazi vettoriali $\{V_i\}_{i\in I}$ se $\{V_i\}_{i\in I}$ è linearmente indipendente e se $\sum_{i\in I} V_i \equiv V$.*

Per indicare che V è composto dalla somma diretta degli spazi V_i si usa la scrittura $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$.

[1] Ricordiamo che la somma di più spazi vettoriali è lo spazio generato dalla loro unione, ossia $\sum_i V_i = \left\langle \bigcup_i V_i \right\rangle$.

Esempi

- Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ è generato dall'insieme $\{1, x, x^2, \dots\}$. Posto $V_j = \langle x^j \rangle$, con $j \in \mathbb{N}_0$, si ha che

$$\mathbb{R}[x] = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} V^j = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \left\langle x^j \right\rangle .$$

- In $\mathbb{R}^3$, siano $V_1 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ e $V_2 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Certamente $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma la somma non è diretta poiché la loro intersezione è l'asse y.

1.5 Spazi quoziente

Sia W un sottospazio vettoriale di V. Definiamo la relazione $x \sim y$, con $x, y \in V$, se $x - y \in W$: essa è di equivalenza, perché soddisfa le tre proprietà della definizione **??**. Infatti $x - x = 0_V$ che certamente appartiene a W; se $x - y = w \in W$ esiste, allora deve esistere il suo opposto in W (ed esiste, dato che W è uno spazio vettoriale) che è $-w = y - x \in W$; infine se $x - y = w_1$ e $y - z = w_2$ sono vettori di W, allora sommandoli si ottiene $w_1 - w_2 = x - y + y - z = x - z$ che poiché W è uno spazio vettoriale, vi appartiene. Prendiamo un elemento $a \in V$: la sua classe di equivalenza è formata da tutti quegli elementi di V tali che $a - v \in W$, cioè

$$[a] = \{x \in V : x - a = w \in W\} = \{w + a : w \in W\}.$$

Questa classe si indica anche come $W + a$, che si può leggere come l'insieme degli elementi che sono somma di un elemento di W e di a (e che danno un elemento di V): essa si chiama anche *laterale* destro[2] di W in V, con rappresentante a. L'insieme di queste classi di equivalenza distinte, come appena descritte, di W in V si indica con $V \,/\, W$ e si chiama *spazio quoziente*.

Nello spazio quoziente possiamo definire la somma, che indicheremo con il simbolo $\oplus$, di due laterali come

$$(W + a) \oplus (W + b) = W + (a + b).$$

Se anche fosse $[a] \equiv [a']$ e $[b] \equiv [b']$, non è detto a priori che si abbia $a+b = a'+b'$ come conseguenza della proprietà transitiva[3]. Perché ciò accada serve un'ulteriore condizione, che la relazione sia una *relazione di congruenza*, ossia che sia compatibile con le operazioni in V. Se da $x \sim x'$ e $y \sim y'$ seguono le relazioni $x + y \sim x' + y'$ e $\lambda x \sim \lambda x'$, allora la relazione $\sim$ è una relazione di congruenza nello spazio vettoriale: mostriamo che la relazione da noi usata per definire lo spazio quoziente lo è.

Dimostrazione. Se $x \sim x'$, allora $x - x' = w_1 \in W$, e analogamente $y - y' = w_2 \in W$. Sommandoli, si ottiene $w_1 + w_2 = x - x' + y - y' = (x + y) - (x' + y')$ che essendo W un sottospazio vettoriale vi appartengono: allora $x + y \sim x' + y'$. Anche per il prodotto con uno scalare λ, si ottiene analogamente che se $x - x' = w \in W$, allora sempre poiché W è un sottospazio vettoriale si ha che $\lambda x - \lambda x' = \lambda w$ che appartiene a W. □

Come per $\oplus$, definiamo anche l'operazione analoga al prodotto scalare, che indichiamo con $\odot$:

$$\lambda \odot (W + a) = W + \lambda a.$$

La terna $(V \,/\, W, \oplus, \odot)$ è uno spazio vettoriale su K, dove V è a sua volta uno spazio vettoriale sul medesimo campo. Infatti, oltre alle proprietà appena dimostrate, esiste l'elemento neutro rispetto a $\oplus$, che è $W + 0_V$ (si indica anche solamente con W), e l'opposto, che è $-(W + a) = W + (-a)$.

[2] In questo caso il laterale è detto *destro* perché il rappresentante a si trova alla destra dell'operazione. Ovviamente esistono anche laterali sinistri, che in questo caso sarebbero della forma $a + W$. Trovandoci in spazi vettoriali, però, la somma è commutativa quindi non ha senso distinguere i due casi.

[3] Ovviamente con $a \neq a'$ e $b \neq b'$, altrimenti sarebbe ovvia: è sufficiente a questo scopo che $a \sim a'$, e lo stesso per b.

1.6 Algebre

Definizione 1.6.1. *Si definisce* algebra *sul campo K uno spazio vettoriale A sul campo K munito di un'ulteriore operazione interna di prodotto, che sia associativo e distributivo rispetto alla somma, ossia tale per cui*

- $\forall v, w, z \in A$ *si ha:* $(vw)z = v(wz)$,
- $\forall v, w, z \in A$ *e* $\forall \lambda \in K$ *si ha* $(\lambda v + w)z = \lambda vz + wz$.

Un'algebra A si dice *commutativa* se il prodotto è commutativo, si dice *con unità* se $\exists I_a : \forall a \in A$ si ha $aI_a = I_a a = a$.