

1 Dissipative charging of a quantum battery (F. Barra)

En este paper [7] se estudia un método para cargar una batería cuántica utilizando el método de interacciones repetidas. En este caso la batería es un sistema con estado ρ_s y hamiltoniano H_s . Además de la batería se cuenta con sistemas auxiliares (en principio tantos como se quiera, no aclara) con hamiltoniano H_A que se encuentran en estados térmicos a temperatura β : $\omega_\beta(H_A)$. El proceso de carga consiste en acoplar al sistema ρ_s con uno de los sistemas auxiliares mediante una interacción V por un tiempo τ y luego desconectarlo, y así sucesivamente con los distintos sistemas auxiliares. Cada sistema auxiliar usado se descarta, de este modo siempre se conecta la batería a un sistema auxiliar en estado térmico. La evolución de la batería en cada paso es:

$$\rho_S((n+1)\tau) = \mathcal{E}(\rho_S(n\tau)) = \text{Tr}_A(U(\rho_S(n\tau) \otimes \omega_\beta(H_A))U^\dagger)$$

donde $U = e^{i\tau(H_s + H_A + V)}$.

El calor, trabajo, y producción de entropía de cada paso son:

$$Q_n = -\text{Tr}_A[H_A(\rho_A(n\tau)) - \omega_\beta(H_A)]$$

$$W_n = \text{Tr}[(H_S + H_A)(\rho_{tot}(n\tau) - \rho_{tot}([n-1]\tau))]$$

$$\Sigma_n = D(\rho_{tot}(n\tau) || \rho_s(n\tau) \otimes \omega_\beta(H_A)) \geq 0$$

El calor es (menos) el cambio de energía del baño térmico. El trabajo externo es el cambio de la energía total (baño más batería), y es producto de prender y apagar la interacción.

La evolución queda entonces definida concatenando los mapas ($\mathcal{E} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{E} \dots$). El mapa \mathcal{E} se construye de manera que tenga un único estado estacionario $\pi = \mathcal{E}(\pi)$. Concatenando muchas veces estos mapas se llega al estado estacionario partiendo de cualquier estado inicial, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}^n(\rho_S(0)) = \pi$. Si la acción de \mathcal{E} sobre π da producción de entropía 0, π es un estado de equilibrio. Estos son los estados a los que le interesa llegar, ya que en este caso cuando se llega al estado de equilibrio se puede continuar repitiendo el proceso con costo de trabajo 0, lo que resulta útil para mantener a la batería en el estado de equilibrio, corrigiendo pequeñas desviaciones de ese estado.

La evolución unitaria U de un mapa con equilibrio satisface

$$[U, H_0 + H_A] = 0$$

Donde H_0 es un operador del espacio de Hilbert y el estado de equilibrio es $\pi = e^{-\beta H_0} / \text{Tr}(e^{-\beta H_0}) = \omega_\beta(H_0)$. El calor, trabajo y producción de entropía de cada paso se puede escribir como:

$$Q_n = \text{Tr}(H_0\{\rho_S(n\tau) - \rho_S[(n-1)\tau]\})$$

$$W_n = \text{Tr}((H_S - H_0)\{\rho_S(n\tau) - \rho_S[(n-1)\tau]\})$$

$$\Sigma_n = D(\rho_S[(n-1)\tau] || \pi) - D(\rho_S(n\tau) || \pi) \geq 0$$

Se puede ver que cuando se llega al estado estacionario las tres magnitudes se vuelven 0. Y en el caso particular en el que $H_0 = H_S$ se tiene un proceso de relajación donde el estado final es un estado térmico con la misma temperatura que los sistemas auxiliares y que el costo de trabajo total es 0.

Si el operador H_0 es distinto a H_S se puede llegar a un estado de equilibrio activo, que es la situación buscada para las baterías, donde se quiere un estado final “cargado”.

Protocolo para estado de equilibrio activo.

Un proceso de equilibrio interesante es el dado por interacciones del tipo $V = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \otimes A_{\alpha}$ donde los operadores S_{α} y A_{α} satisfacen $[H_S, S_{\alpha}] = \lambda_{\alpha} S_{\alpha}$ y $[H_A, A_{\alpha}] = \lambda_{\alpha} A_{\alpha}$. En este caso se tiene $[V, -H_S + H_A] = 0$, por lo tanto $H_0 = -H_S$, entonces el estado de equilibrio es $\pi = e^{\beta H_S} / \text{Tr}(e^{\beta H_S})$, que es un estado activo, y en el caso de un espectro de energía simétrico con respecto a un valor \bar{E} se satura la cota para la ergotropía de la batería [2]. En este caso la batería y los sistemas auxiliares tienen el mismo espectro de frecuencias de Bohr $\{\lambda_{\alpha}\}$, esta condición es poco probable, por lo tanto el protocolo debe ser diseñado con sistemas auxiliares que sean copias de la batería.

2 Ecuación maestra para equilibrio activo.

Para construir la ecuación maestra que lleve al sistema a un estado de equilibrio activo usé el método de interacciones repetidas [8] modificando la interacción entre el sistema y el baño térmico. En este trabajo se concentran en interacciones que satisfagan balance detallado local, es decir en nuestro caso $[V, H_S + H_A] = 0$. Para llevar la batería al estado de equilibrio activo $\pi = \omega_{\beta}(-H_S)$ vimos que debía satisfacerse la condición $[V, -H_S + H_A] = 0$, por lo tanto debemos modificar la interacción para que esto se cumpla. Basándonos en el protocolo de Barra proponemos una interacción

$$V = \sum_k g_k (L_k^{\dagger} A_k^{\dagger} + L_k A_k) \quad (1)$$

con $[H_S, L_k] = -\omega_k L_k$ y $[H_A, A_k] = -\omega_k A_k$, donde también pedimos que la batería y los sistemas auxiliares tengan el mismo espectro de frecuencias de Bohr. Con esta interacción se cumple $[V, -H_S + H_A] = 0$.

Para llegar a la ecuación maestra utilizando el modelo de interacciones repetidas se parte de la evolución del estado en un paso, es decir de la interacción del sistema S con un sistema auxiliar A durante un tiempo τ :

$$\rho_s((n+1)\tau) = \text{Tr}_A [e^{-iH_{tot}\tau} (\rho_s(n\tau) \otimes \rho_A) e^{iH_{tot}\tau}] \quad (2)$$

con

$$H_{tot} = H_S + H_A + \frac{1}{\sqrt{\tau}} V \quad (3)$$

Expandiendo (1) en potencias de τ se obtiene:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i[H_S, \rho_S] + D(\rho_S) \quad (4)$$

donde el disipador es

$$D(\rho_S) = -\frac{1}{2} \text{Tr}_A [V, [V, \rho_S \otimes \rho_A]] \quad (5)$$

Reemplazando la interacción (1) en la ecuación (5), y teniendo en cuenta que $\langle A_k A_l \rangle = \langle A_k^{\dagger} A_l^{\dagger} \rangle = 0$ y que $\langle A_k^{\dagger} A_l \rangle \propto \delta_{kl}$ se obtiene:

$$D(\rho_S) = \sum_k (\gamma_k^+ \mathcal{L}[L_k, \rho_S] + \gamma_k^- \mathcal{L}[L_k^{\dagger}, \rho_S]) \quad (6)$$

Donde $\gamma_k^+ = g_k^2 \langle A_k^{\dagger} A_k \rangle$ y $\gamma_k^- = g_k^2 \langle A_k A_k^{\dagger} \rangle$. Se llega al mismo resultado que en su paper intercambiando γ_k^+ y γ_k^- .

Calor y Trabajo.

En cada paso, la variación de energía en la batería y el sistema auxiliar está dado por:

$$\Delta H_S = -\frac{\tau}{2} \langle [V, [V, H_S]] \rangle \quad (7)$$

$$\Delta H_A = -\frac{\tau}{2} \langle [V, [V, H_A]] \rangle \quad (8)$$

Reemplazando (1) en (7) y (8), y definiendo el calor como $\frac{-\Delta H_A}{\tau}$ se obtiene:

$$\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = \sum_k \omega_k (\gamma_k^- \langle L_k L_k^\dagger \rangle - \gamma_k^+ \langle L_k^\dagger L_k \rangle) \quad (9)$$

$$\dot{Q} = \sum_k \omega_k (\gamma_k^+ \langle L_k^\dagger L_k \rangle - \gamma_k^- \langle L_k L_k^\dagger \rangle) \quad (10)$$

Se puede ver entonces que:

$$\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = -\dot{Q}$$

Utilizando que $\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}$ encontramos la variación en el trabajo

$$\dot{W} = -2\dot{Q} \quad (11)$$

Si ahora permitimos que el sistema esté compuesto por partes que interactúan entre sí y sólo una de las partes interactúe con el baño térmico el trabajo externo va a ser distinto. El calor va a ser igual ya que el hamiltoniano de los sistemas auxiliares seguirá siendo el mismo. Pero ahora la ecuación (9) se transforma en

$$\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = \sum_k \omega_k (\gamma_k^- \langle L_k L_k^\dagger \rangle - \gamma_k^+ \langle L_k^\dagger L_k \rangle) + \frac{1}{2} \sum_k (\gamma_k^+ \langle [L_k^\dagger, V] L_k - L_k^\dagger [L_k, V] \rangle + \gamma_k^- \langle [L_k, V] L_k^\dagger - L_k [L_k^\dagger, V] \rangle)$$

Donde V es la interacción entre las partes del sistema. La primer sumatoria es igual a $-\dot{Q}$ por lo tanto la segunda debe ser igual a $\dot{W} + 2\dot{Q}$ para que se cumpla que $\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}$, entonces se obtiene

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \sum_k (\gamma_k^+ \langle [L_k^\dagger, V] L_k - L_k^\dagger [L_k, V] \rangle + \gamma_k^- \langle [L_k, V] L_k^\dagger - L_k [L_k^\dagger, V] \rangle) - 2\dot{Q} \quad (12)$$

En el caso en que $V = 0$ se recupera la ecuación (11).

Ejemplo Qubit

En [6] Barra muestra el ejemplo de una batería compuesta por un qubit. El hamiltoniano de la batería es $H_S = \frac{h}{2} \sigma_S^z$ y el de los sistemas auxiliares $H_A = \frac{h}{2} \sigma_A^z$ con $h \geq 0$. La interacción entre los sistemas es

$$V = a(\sigma_S^+ \sigma_A^+ + \sigma_S^- \sigma_A^-) \quad (13)$$

En esta situación

$$\gamma^\pm = a^2 \frac{e^{\pm \beta h/2}}{2 \cosh(\beta h/2)} \quad (14)$$

Por lo tanto la ecuación maestra (4) queda

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i\frac{h}{2}[\sigma_S^z, \rho_S] + \frac{a^2}{2\cosh(\beta h/2)} \left\{ e^{\beta h/2} \mathcal{L}[\sigma^-, \rho_S] + e^{-\beta h/2} \mathcal{L}[\sigma^+, \rho_S] \right\} \quad (15)$$

Mientras que las expresiones para las derivadas temporales del trabajo y el calor son:

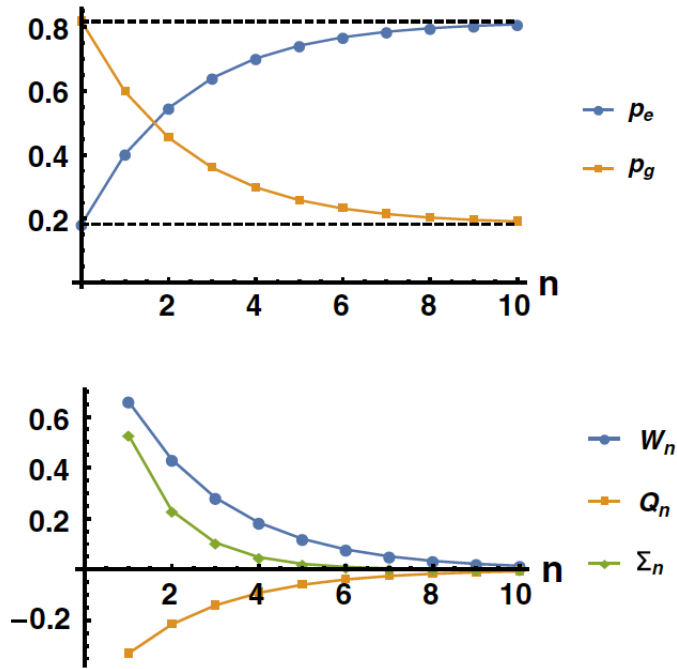
$$\dot{Q} = \frac{-a^2 h}{2\cosh(\beta h/2)} \left\{ e^{\beta h/2} \langle \sigma^+ \sigma^- \rangle - e^{-\beta h/2} \langle \sigma^- \sigma^+ \rangle \right\} \quad (16)$$

$$\dot{W} = \frac{-a^2 h}{\cosh(\beta h/2)} \left\{ e^{-\beta h/2} \langle \sigma^- \sigma^+ \rangle - e^{\beta h/2} \langle \sigma^+ \sigma^- \rangle \right\} \quad (17)$$

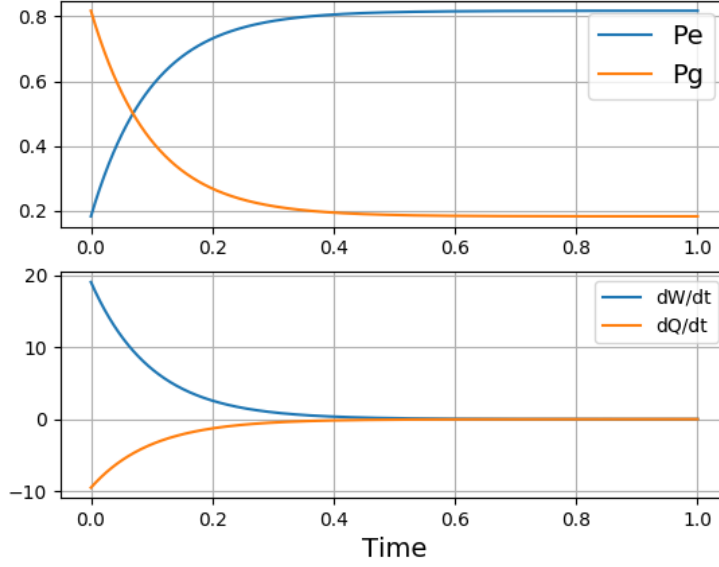
Donde los promedios están tomados sobre el estado de la batería.

Barra resuelve el problema numéricamente con los siguientes parámetros: $\tau = 0.1$, $a = \sqrt{10}$, $h = 1.5$ y $\beta = 1$. Partiendo de la batería en estado térmico llega finalmente al estado de equilibrio, que en este caso consiste en una inversión de población. Una vez llegado al estado estacionario, tanto el calor como el trabajo correspondientes a cada paso se vuelven 0, como se puede ver en la Figura 1. El estado inicial es

$$\rho_s = \frac{e^{-\beta H_s}}{Z} \quad (18)$$



Resolviendo la ecuación maestra (14) numéricamente se obtienen las curvas que se muestran en la Figura 2(a) para las poblaciones de los dos niveles, y con las ecuaciones (16) y (17) se obtienen las curvas de la Figura 2(b)



Se puede ver que en ambos casos los resultados son muy similares, aunque en el caso de la ecuación maestra, donde el tiempo de interacción entre la batería y cada sistema auxiliar tiende a 0, la convergencia al estado de equilibrio se da en un tiempo menor. En ambos casos el trabajo y el calor correspondientes a cada “paso” de las interacciones repetidas se vuelve 0 cuando se alcanza el estado estacionario. El calor y el trabajo por “paso” son mayores en el segundo caso. Por lo tanto el segundo proceso carga la batería más rápido, pero requiere un *rate* mayor de trabajo externo.

Ejemplo 2 Qubits:

En este caso hay dos qubits, pero sólo uno de ellos interactúa con el baño térmico. Estudiamos dos casos, con dos interacciones diferentes entre qubits.

$$V = \sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^- \quad (19)$$

$$V' = \sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+ \quad (20)$$

Entonces el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{\hbar}{2} \sigma_1^z + \frac{\hbar}{2} \sigma_2^z + V \quad (21)$$

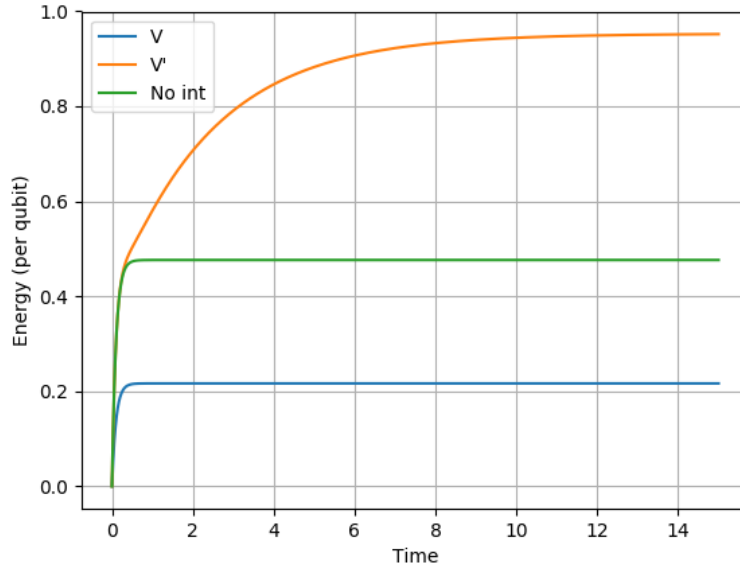
El qubit 1 interactúa con el baño térmico de la misma forma que en el ejemplo anterior. La ecuación maestra resultante es:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + D_1(\rho) \quad (22)$$

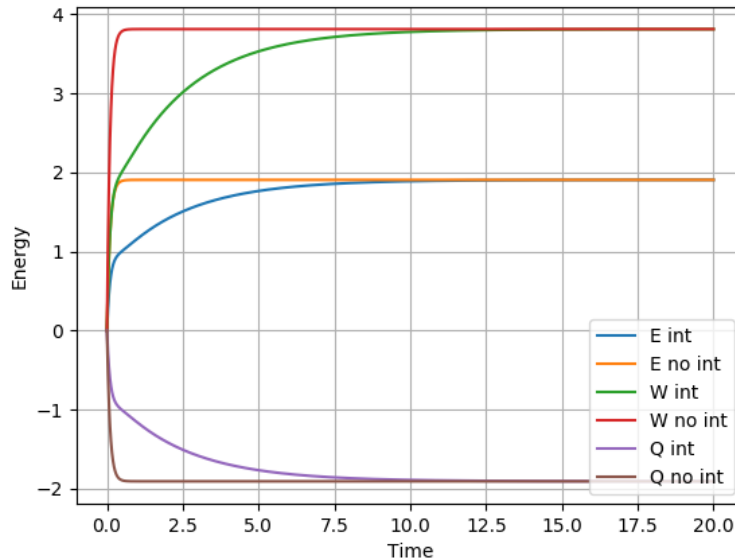
Donde el disipador es el mismo que en (15), cambiando σ^\pm por σ_1^\pm .

Resolvimos numéricamente para las dos interacciones (19) y (20) utilizando como estado inicial un estado producto donde cada qubit se encuentra en un estado térmico (18).

La evolución de la energía del sistema (por qubit) se muestra en la Figura 3, para cada una de las interacciones. Se toma como 0 de energía de cada caso a la energía inicial.



Se puede ver que la interacción (19) hace que el sistema llegue a una energía más baja que en el caso de no haber interacciones, por lo tanto no resulta de interés para un proceso de carga de batería. Mientras que la interacción (20) lleva al sistema a una energía final que es el doble que en el caso sin interacción, aunque en un tiempo mucho mayor (del orden de 10 veces más lento). A pesar de ser más lento, es interesante ver que en el tiempo que le toma al sistema sin interacción en realizar una carga completa, el sistema con la interacción (20) alcanza la misma energía. Por lo tanto, si se desea cargar la batería en un tiempo corto, los dos procesos le dan el mismo resultado, pero si se dispone de más tiempo, se puede alcanzar una energía mayor con el segundo caso.



En esta Figura se muestran las energías del sistema para dos casos. Uno donde no hay interacción entre los qubits y se acopla cada uno a un baño térmico diferente (el mismo proceso que en el ejemplo de un qubit), y otro donde los dos qubits tienen una interacción de la forma (20) y solamente el qubit 1 se encuentra acoplado al baño térmico.

En ambos casos se parte del mismo estado inicial, que es el estado producto de los dos qubits en estado térmico con $\beta=1$ y se llega al mismo estado final, el estado producto de los dos qubits en estado térmico con $\beta=-1$. En la Figura se muestra la energía del sistema restándole

la energía inicial. Como el estado inicial es térmico, esta magnitud es la ergotropía \mathcal{W} .

En [1] Barra define la eficiencia del proceso de carga como el cociente de la ergotropía sobre el trabajo externo.

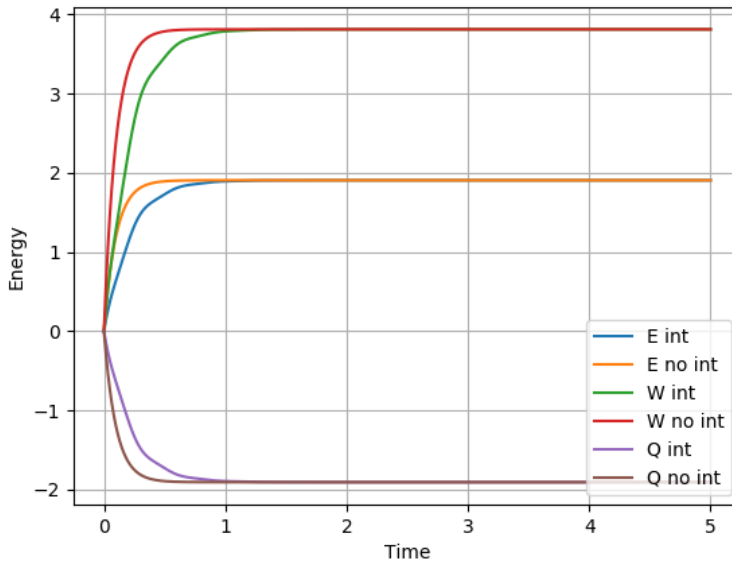
$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{W} = 1 - \frac{|Q|}{W} \quad (23)$$

Para ambos casos se obtiene una eficiencia $\eta = 1/2$.

Si ahora modificamos la interacción (20) agregándole un factor de proporcionalidad

$$V' = \epsilon(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \quad (24)$$

se puede acelerar el proceso de carga, aumentando el rate de trabajo, pero manteniendo el costo total de trabajo externo. En la siguiente Figura se muestra el proceso de carga sin interacción y con interacción para $\epsilon = 10$.



Correlaciones y potencia.

Otro caso de interés es en el caso sin interacción comparar qué sucede si se usa un estado inicial que sea entrelazado en vez de un estado producto, ya que en varios trabajos se vio que se puede mejorar la potencia de la batería al incluir procesos que generen entrelazamiento. Para esto se utilizó el estado inicial:

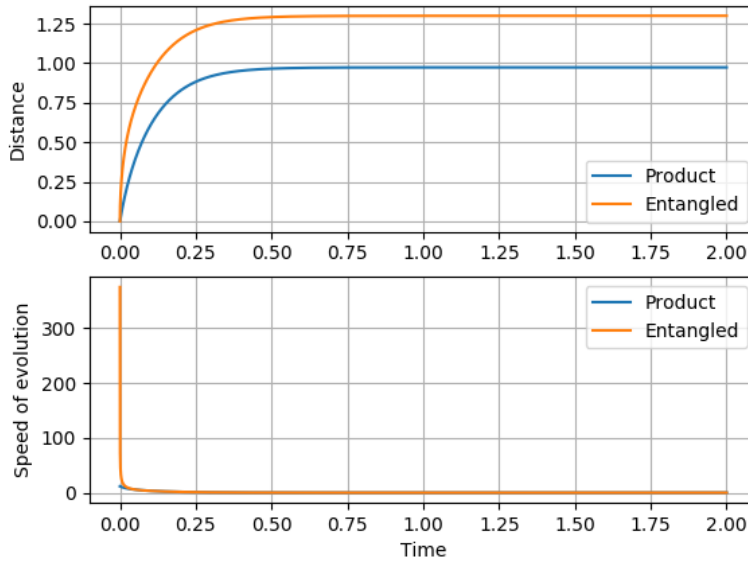
$$\rho_E = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{Z} |00\rangle\langle 11| + \frac{1}{Z} |11\rangle\langle 00| + \frac{e^{-\beta H_S}}{Z} |11\rangle\langle 11|$$

Las matrices densidad reducidas de cada qubit dan lo mismo que para el estado producto.

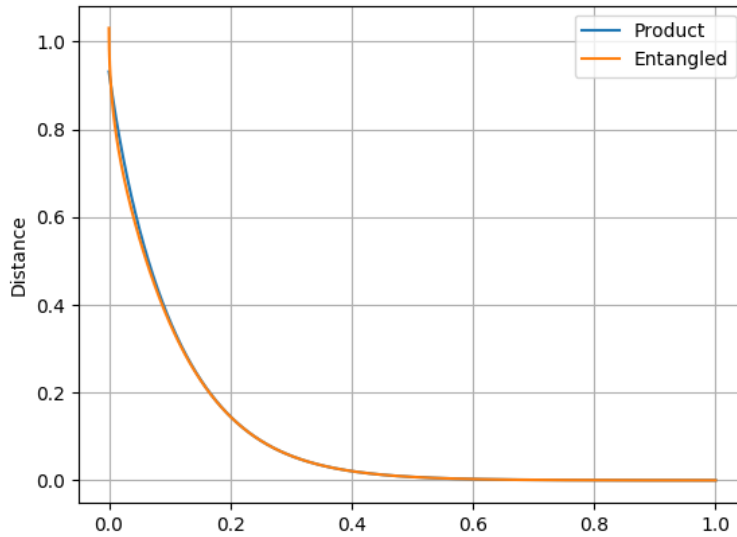
En este caso la energía del sistema se comporta exactamente igual que en el caso del estado producto. Por lo tanto no se obtiene ninguna ventaja debido al entrelazamiento.

Para entender un poco por qué no se encuentra ventaja cuántica se me ocurrió analizar el problema como lo hacen en [4]. Lo que hacen es estudiar la velocidad de evolución del sistema y la longitud de la trayectoria que debe recorrer hasta llegar al estado final. Se usa como medida de distancia la distancia angular de Bures. Debido a que en general se puede dar una evolución entre estados distintos pero con la misma energía, esta medida puede resultar engañosa, ya que la velocidad de evolución es distinta de 0, pero la potencia de carga de la batería es 0. Por lo

tanto modifican la medida y usan la distancia angular de Bures pero para los estados defasados en la base de energías. Con este procedimiento encontramos los siguientes resultados.



El estado inicialmente entrelazado comienza con una velocidad mucho mayor que el estado separable, lo que muestra una “ventaja cuántica” cuando hay presencia de entrelazamiento, pero a su vez es un estado que se encuentra a una distancia mayor del estado de equilibrio. Debido a que la “trayectoria” que debe seguir el estado entrelazado es más larga que la del estado separable esta ventaja se pierde y se obtiene que los dos estados llegan al equilibrio en simultáneo. En la siguiente figura se muestra la distancia al equilibrio en función de tiempo, y se puede observar cómo los dos estados iniciales convergen.



Así se entiende mejor por qué no hay ventaja en el caso del estado entrelazado.

Al ver esto me puse a buscar ejemplos de mejora en potencia debido al entrelazamiento y vi que nadie lo plantea usando un estado inicial entrelazado. En todos los casos parten de un estado separable y llegan a otro estado separable, el entrelazamiento aparece cuando se usan interacciones globales en los sistemas. Por lo tanto usé el siguiente sistema para ver si aparecía la mejora en potencia debido al entrelazamiento: Dos qubits (1 y 2), cada uno de ellos acoplado a un baño térmico distinto de la misma forma que en los ejemplos anteriores. El hamiltoniano

del sistema es el de la ecuación (21), en uno de los casos la interacción es 0, es decir que los qubits evolucionan independientemente, y en el otro la interacción es la de la ecuación (20).

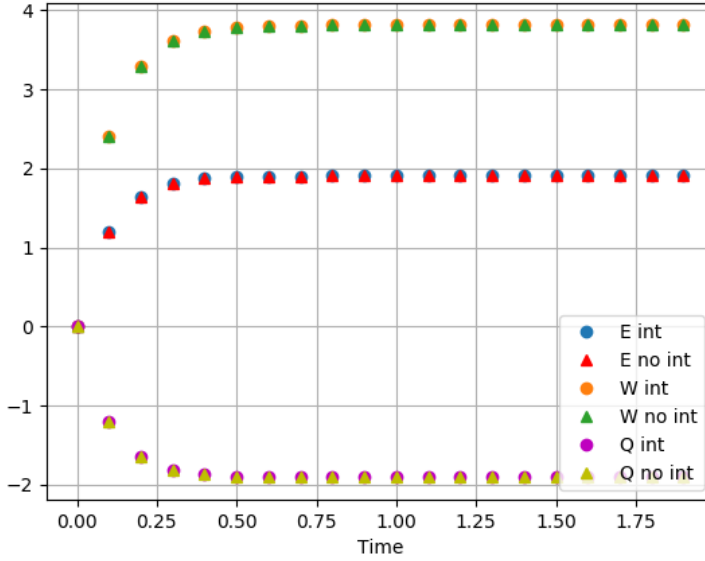
En ambos casos los sistemas empiezan en el estado

$$\rho = \left(\frac{e^{-\beta h/2}}{Z} |0\rangle\langle 0|_1 + \frac{e^{\beta h/2}}{Z} |1\rangle\langle 1|_1 \right) \otimes \left(\frac{e^{-\beta h/2}}{Z} |0\rangle\langle 0|_2 + \frac{e^{\beta h/2}}{Z} |1\rangle\langle 1|_2 \right) \quad (25)$$

y terminan en el estado

$$\rho = \left(\frac{e^{\beta h/2}}{Z} |0\rangle\langle 0|_1 + \frac{e^{-\beta h/2}}{Z} |1\rangle\langle 1|_1 \right) \otimes \left(\frac{e^{\beta h/2}}{Z} |0\rangle\langle 0|_2 + \frac{e^{-\beta h/2}}{Z} |1\rangle\langle 1|_2 \right) \quad (26)$$

El resultado para energía calor y trabajo de los dos sistemas es el siguiente:



Los dos casos evolucionan de la misma forma, no se encuentra ventaja debido a haber introducido una interacción global. Por lo tanto se calculó la información mutua de el estado en el sistema con interacción para saber que tan entrelazado estuvo el sistema durante la evolución, y se obtuvo que la información mutua valió 0 durante toda la evolución, por lo tanto no hubo entrelazamiento. Al no haber habido entrelazamiento, la interacción usada no genera mejoras en la potencia de carga de la batería. En los trabajos anteriores se obtiene la mejora en potencia cuando se genera entrelazamiento durante el período de carga, por lo tanto para ver esta mejora hay que modificar la interacción del sistema para que se genere entrelazamiento entre los dos qubits.

Hasta acá se explicó (o se intentó explicar) por qué no se ven los efectos del entrelazamiento en los dos ejemplos trabajados.

Dos qubits acoplados al baño térmico con una interacción que genera entrelazamiento.

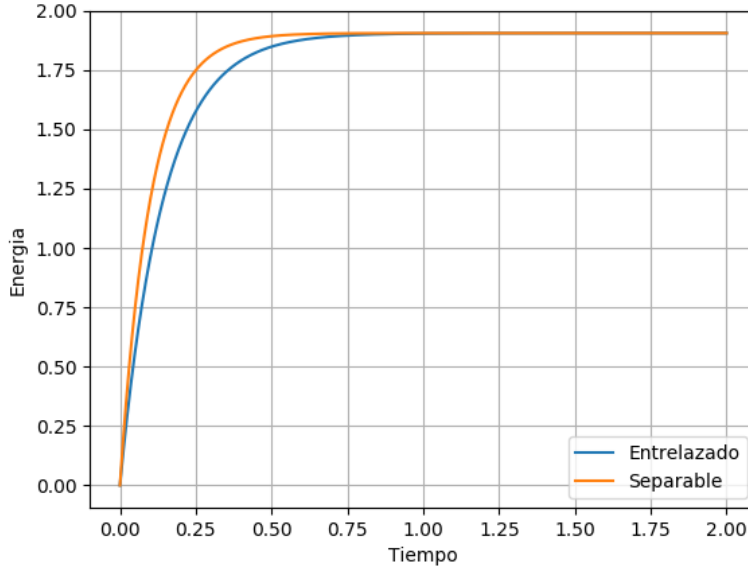
La idea en este caso es que la batería formada por dos qubits (igual que la anterior) se acopla a un baño térmico también formado por dos qubits, con el mismo hamiltoniano que la batería, mediante dos tipos de interacciones. La primera acopla a cada qubit de la batería con uno de los qubits del baño y por lo tanto no genera entrelazamiento entre los constituyentes de la batería. La segunda interacción acopla a los cuatro qubits entre sí. Esta interacción es

$$V = \epsilon(\sigma_{B1}^+ \otimes \sigma_{B2}^+ \otimes \sigma_{A1}^+ \otimes \sigma_{A2}^+ + \sigma_{B1}^- \otimes \sigma_{B2}^- \otimes \sigma_{A1}^- \otimes \sigma_{A2}^-) \quad (27)$$

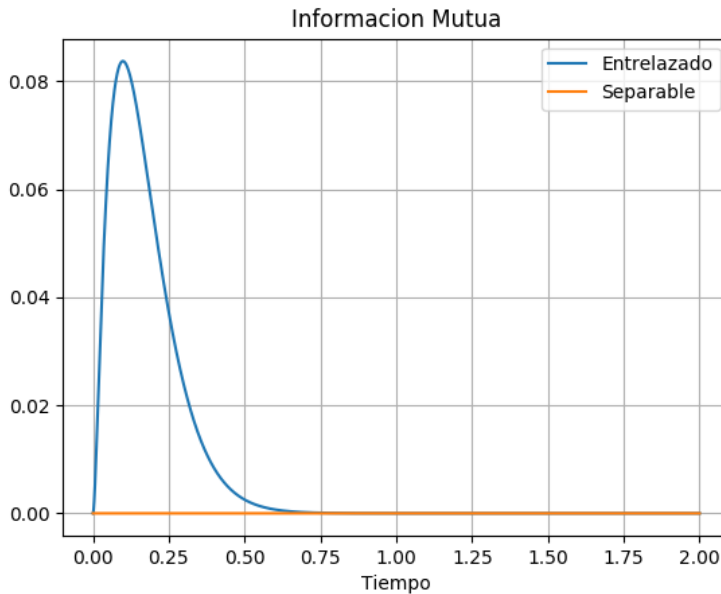
Mientras que la interacción que mantiene separable al estado de la batería es

$$V = \epsilon(\sigma_{B1}^+ \otimes \sigma_{A1}^+ + \sigma_{B1}^- \otimes \sigma_{A1}^- + \sigma_{B2}^+ \otimes \sigma_{A2}^+ + \sigma_{B2}^- \otimes \sigma_{A2}^-) \quad (28)$$

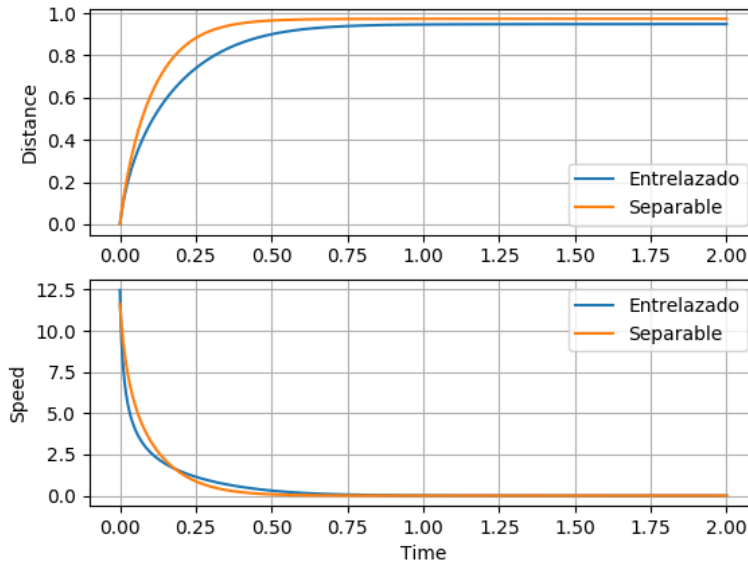
Donde B1 y B2 se refieren a los qubits de la batería y A1 y A2 a los del baño térmico. Utilizando las ecuaciones (4) y (5) se obtienen las ecuaciones maestras. Con estas dos interacciones, la evolución de la batería llega al mismo estado de equilibrio (26). A continuación se muestra la evolución de la energía de la batería para ambas interacciones partiendo del mismo estado inicial (25).



Se puede observar que el sistema que genera entrelazamiento durante el proceso evoluciona más lentamente que el que se mantiene separable. Esto es contrario a lo que se espera, ya que se ha mostrado que la generación de entrelazamiento mejora la potencia de la batería. Para verificar que se haya generado entrelazamiento durante el proceso se calculó la información mutua del sistema a lo largo del proceso, y se puede observar que efectivamente se generó entrelazamiento.

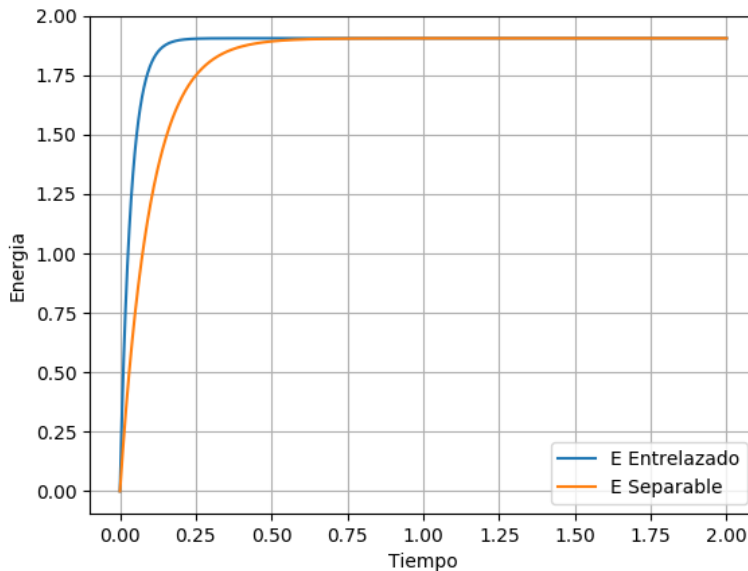


Por lo tanto en este caso se concluye que la generación de entrelazamiento resultó perjudicial para la potencia de carga de la batería. Repitiendo el análisis en función de la distancia de Bures y la evolución se encontró lo siguiente



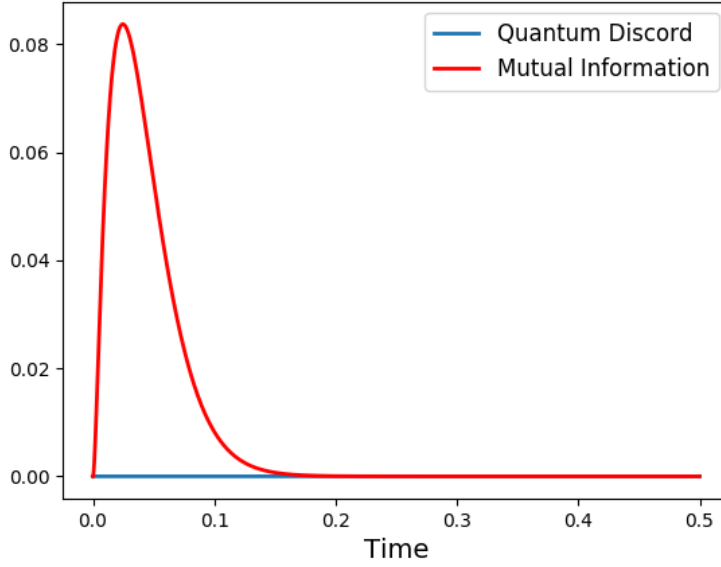
Se ve que la evolución que mantiene al estado de la batería separable en todo momento recorre una distancia mayor, pero igualmente llega antes al estado de equilibrio.

Me di cuenta que si vemos la norma operador de las dos interacciones, la separable vale el doble que la interacción que entrelaza. Por lo tanto, para que las dos interacciones sean comparables, multiplico por dos a la interacción (27). Este cambio se ve reflejado en los rates de disipación de la ecuación maestra para la interacción que genera entrelazamiento, y se obtiene un nuevo resultado donde ahora sí la batería que tiene entrelazamiento es la que carga más rápido.



Para estudiar la naturaleza de las correlaciones se calculararon la “Información Mutua” que mide tanto las correlaciones clásicas como cuánticas, la “Quantum Discord” que mide las correlaciones cuánticas y la “Concurrence” que mide el entrelazamiento. Se encontró que tanto la Concurrence como la Quantum Discord valen 0 durante toda la evolución, lo que indica que no hay entrelazamiento y que todas las correlaciones son clásicas. Por lo tanto en todos los

lugares a lo largo de este texto donde se habla de entrelazamiento está mal, en realidad son correlaciones clásicas.



Acá me surge una duda. Ya que la matriz densidad para la cual la información mutua es máxima es

$$\rho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11| - \frac{1}{Z^2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10|) \quad (29)$$

Las matrices densidad reducidas de cada sistema son

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad (30)$$

Entonces el producto de los estados de los dos subsistemas no me dan la matriz densidad total. ¿Esto no indica entrelazamiento?

Como la Quantum Discord vale 0, la concurrence tiene que valer 0, pero si estoy equivocado con esto significa que calculé mal las dos cosas.

El estado es separable, ya que se puede escribir como

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$$

Estaba mezclando las definiciones de estado separable y estado producto. Así que los resultados obtenidos para concurrence y quantum discord tienen sentido.

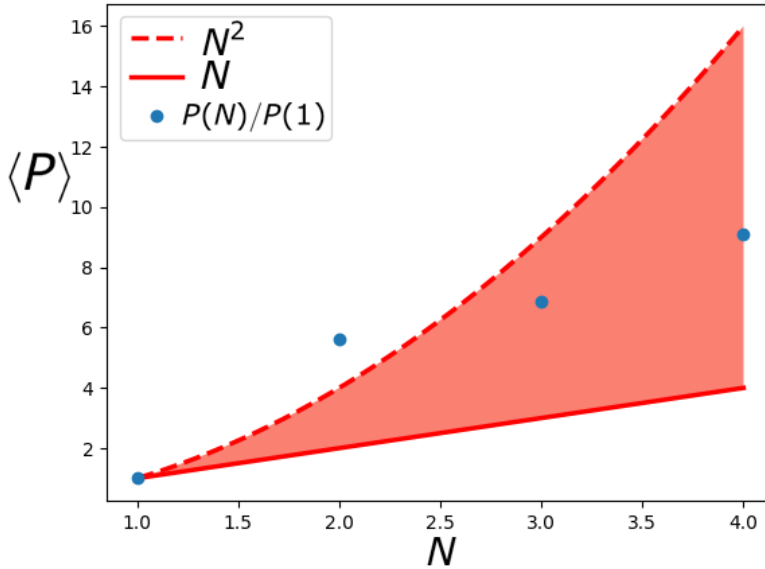
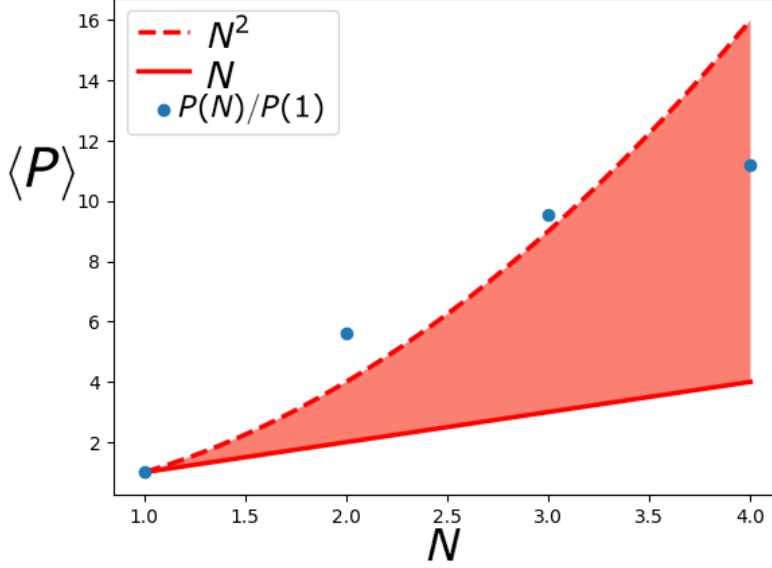
3 o más qubits (Interacciones de N cuerpos)

No llegaba al equilibrio porque estaba planteando mal las interacciones. Tengo que tener en cuenta que para sistemas de mayor dimensión hay que hacer permutaciones con más niveles, por lo tanto hay que agregar más términos que los de la forma (27).

Por ejemplo, para 3 qubits se utilizó la interacción

$$V = \epsilon(\sigma_{B1}^+ \otimes \sigma_{B2}^+ \otimes \sigma_{B3}^+ \otimes \sigma_{A1}^+ \otimes \sigma_{A2}^+ \otimes \sigma_{A3}^+ + \sigma_{B1}^- \otimes \sigma_{B2}^- \otimes \sigma_{B3}^- \otimes \sigma_{A1}^- \otimes \sigma_{A2}^- \otimes \sigma_{A3}^- + \sigma_{B1}^+ \otimes \sigma_{B2}^+ \otimes \sigma_{B3}^- \otimes \sigma_{A1}^+ \otimes \sigma_{A2}^+ \otimes \sigma_{A3}^- \\ + \sigma_{B1}^- \otimes \sigma_{B2}^- \otimes \sigma_{B3}^+ \otimes \sigma_{A1}^- \otimes \sigma_{A2}^- \otimes \sigma_{A3}^+ + \text{permutaciones})$$

Utilizando las interacciones de este modo, para todos los casos se alcanza el estado final deseado. Se calculó la potencia media del ciclo de carga para sistemas de uno, dos, tres y cuatro qubits, utilizando para cada caso interacciones de uno, dos, tres y cuatro cuerpos respectivamente. Se muestran los resultados en los siguientes gráficos. En el primero se mide el tiempo de carga hasta que la batería se encuentra cargada en un 95% y en el segundo un 99%. Se grafica en rojo la región que queda acotada por la carga paralela $P(N) = NP(1)$, y el límite a la ventaja cuántica encontrado por Campaioli et.al.[5] $P(N) = N^2P(1)$.



Se observa que la potencia media es menor cuando se considera la carga de 99% con respecto a la de 95%, esto se debe a que el sistema evoluciona más lentamente cerca del equilibrio. El resultado más interesante es que para el caso de una batería de dos qubits se obtiene una potencia media superior a la cota de N^2 de Campaioli et.al.[5]. Otro resultado interesante es que efectivamente estas baterías muestran una ventaja sobre las clásicas, ya que la potencia para N baterías es mayor a N veces la de una batería.

Batería con Hamiltoniano dependiente del tiempo y Coherencias.

Basándonos en el trabajo de Dann y Kosloff [6] donde estudian shortcuts isotérmicos con generación de coherencia para un ciclo de carnot, queremos ver si en el caso de la batería que estamos estudiando podemos lograr algún speed up utilizando Hamiltonianos dependientes del tiempo que generen coherencias.

Para esto usamos el sistema de un qubit que ya estudiamos, sólomente que ahora el hamiltoniano del sistema será dependiente del tiempo. La interacción y el hamiltoniano de los sistemas auxiliares se mantienen igual. Para generar coherencias buscamos que durante parte del proceso el hamiltoniano del sistema no conmute con la interacción (13) y que $[H_s(t), H_s(t')] \neq 0$. La idea es estudiar el proceso utilizando el método de interacciones repetidas, pero modificado debido a la evolución temporal de $H_s(t)$. Ahora cada paso del proceso se divide en dos partes: primero el sistema interactúa con uno de los sistemas auxiliares durante un tiempo dt , igual que antes. A continuación se separa al sistema del auxiliar y se hace evolucionar a su hamiltoniano durante un tiempo dt . Estos dos pasos se repiten hasta que el sistema llegue al equilibrio.

Cada paso comienza con un estado ρ_0 , que se acopla a un sistema auxiliar. Al finalizar la interacción se obtiene el estado ρ_1 :

$$\rho_1 = \rho_0 + \int_{t_0}^{t_1} (-i[H(t_0), \rho(t)] + D(\rho(t)))dt \quad (31)$$

A continuación se aísla al sistema en el estado ρ_1 y se modifica al hamiltoniano. Al final de este paso se obtiene el estado ρ_2 según la ecuación de Von Neumann;

$$\rho_2 = \rho_1 + \int_{t_1}^{t_2} (-i[H(t), \rho(t)])dt \quad (32)$$

Supongamos ahora que $t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = \delta t$, juntando las ecuaciones (31) y (32) obtenemos:

$$\rho(t + 2\delta t) = \rho(t) + \int_t^{t+\delta t} (-i[H(s), \rho(s)] + D(\rho(s)))ds + \int_{t+\delta t}^{t+2\delta t} (-i[H(s), \rho(s)])ds \quad (33)$$

Suponiendo que para δt pequeño el hamiltoniano, el disipador y el estado varían poco, podemos aproximar la ecuación (33) por:

$$\rho(t + 2\delta t) = \rho(t) + (-i[H(t), \rho(t)] + D(\rho(t))) - i[H(t), \rho(t)]\delta t$$

pasando $\rho(t)$ de término, dividiendo a ambos lados por $2\delta t$ y tomando el límite $\delta t \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación maestra

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H(t), \rho(t)] + \frac{1}{2}D(\rho(t)) \quad (34)$$

Se verificó que la ecuación (34) funciona correctamente resolviéndola numéricamente para el caso de un qubit y comparando los resultados con la evolución de sistema aplicando secuencialmente las ecuaciones (31) y (32).

Primeros dos intentos de Hamiltoniano.

Para comenzar el estudio se utilizaron dos hamiltonianos diferentes, aunque la idea de ambos es la misma. El sistema comienza en un estado térmico (18). Al comenzar el proceso el hamiltoniano del sistema es $H_s = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$, luego se cambia el hamiltoniano a $H_s = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ mediante

un quench. Una vez que el hamiltoniano es proporcional a σ_x se diseñaron dos evoluciones distintas. En ambos casos el hamiltoniano evoluciona de manera dependiente del tiempo hasta un tiempo límite τ_D , una vez llegado a este tiempo se realiza otro quench desde $H(\tau_D)$ hasta $H_s = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$. En el primer caso, el hamiltoniano entre $t = 0$ y $t = \tau_D$ es

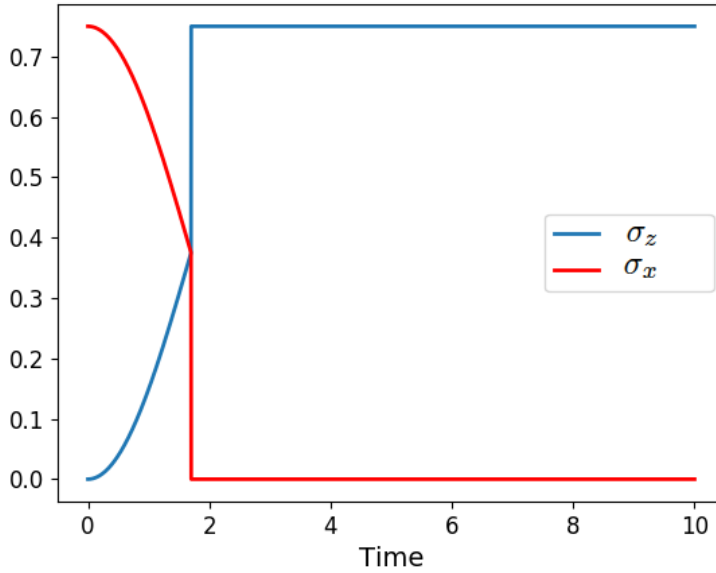
$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \cos^2\left(\frac{\pi t}{4\tau_D}\right)\sigma_x + \frac{\hbar}{2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4\tau_D}\right)\sigma_z \quad (35)$$

y el segundo

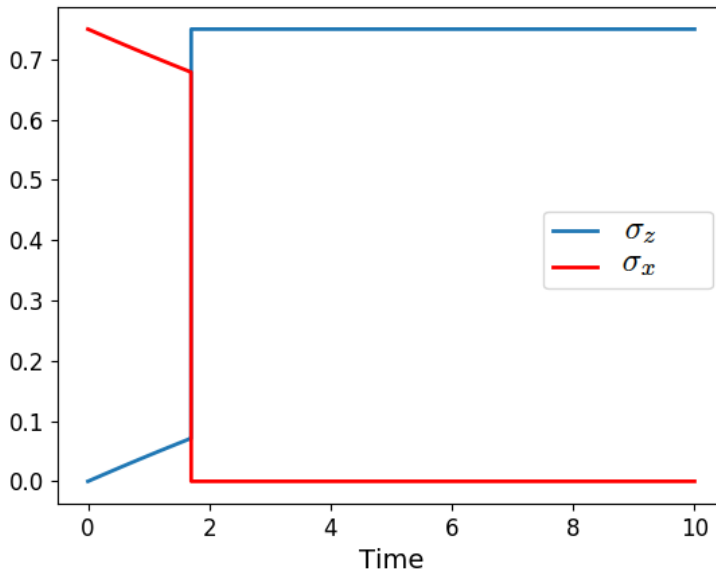
$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sigma_x + \frac{\hbar}{2} (1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right))\sigma_z \quad (36)$$

donde se eligió $\tau = 20\tau_D$. Primero se eligieron las formas funcionales de los dos casos y luego se fueron ajustando los parámetros a prueba y error hasta llegar a un caso donde la carga de la batería fuera la más rápida posible.

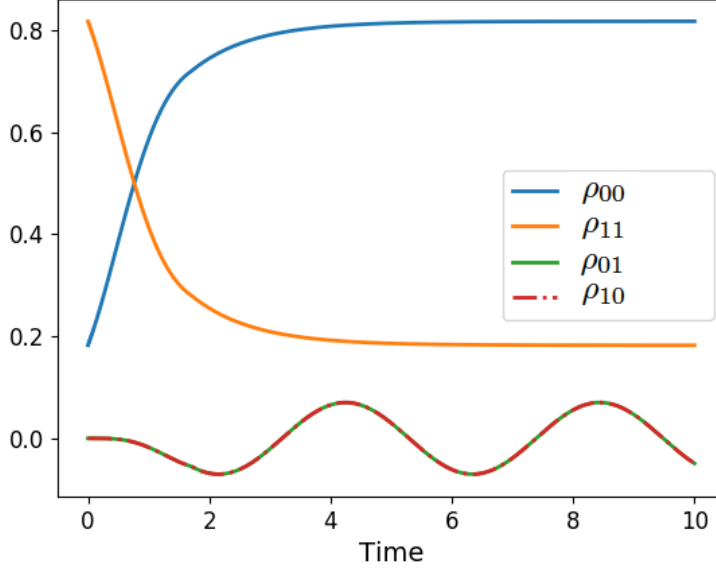
En las siguientes figuras se muestra cómo evolucionan σ_z y σ_x mientras varía el hamiltoniano. Para el caso de la ecuación (35)



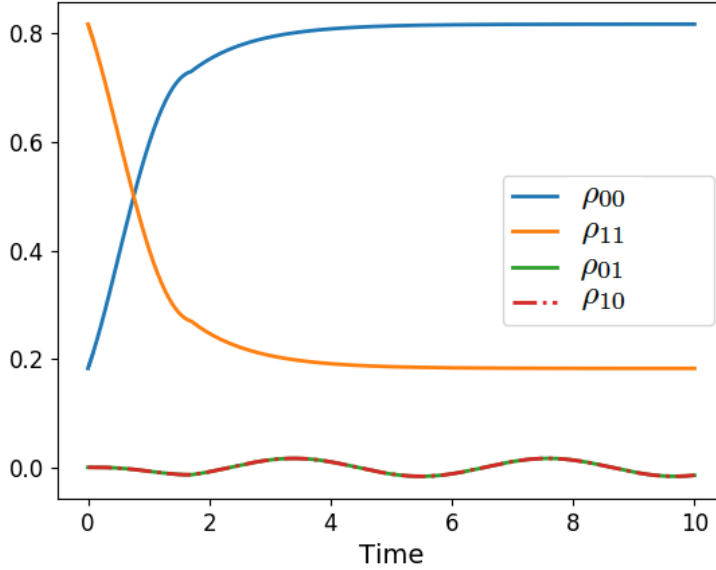
Mientras que para el caso de la ecuación (36) la evolución es:



Para ver que estos hamiltonianos generaban coherencias se graficaron los cuatro elementos de la matriz densidad en función del tiempo para cada caso. En la siguiente figura se muestran los del hamiltoniano (35)



Y los del hamiltoniano (36)

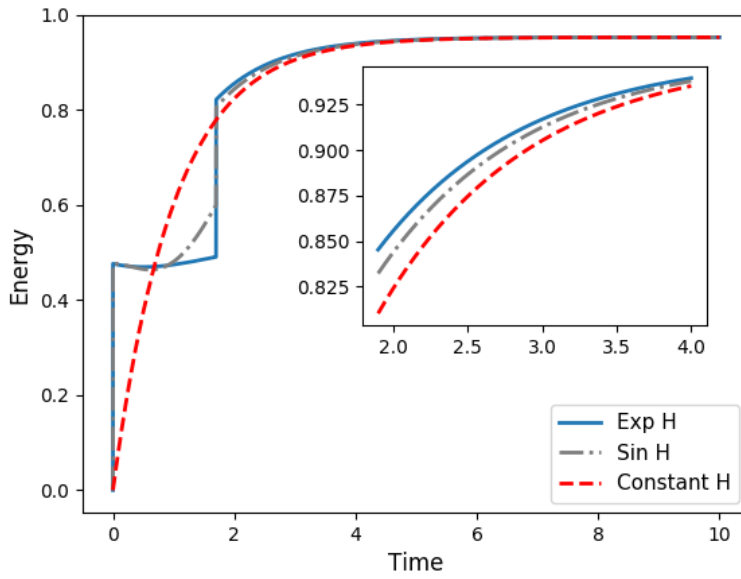
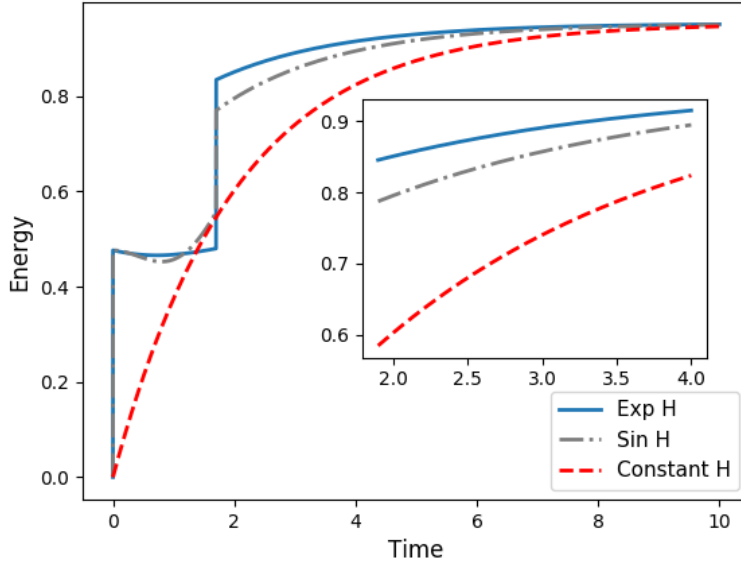


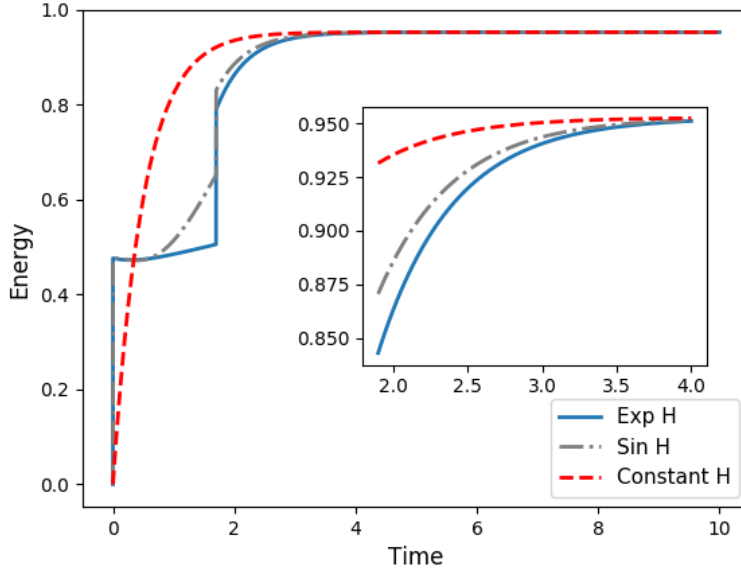
Se puede observar que en ambos casos aparecen coherencias, y que una vez que el hamiltoniano se vuelve constante, los elementos fuera de la diagonal oscilan alrededor del 0. Lo que es raro acá es que los elementos fuera de la diagonal deberían irse a 0 para llegar al estado estacionario, como sucede en el caso del hamiltoniano constante. Quizas debido a que durante la primera parte de la evolución el hamiltoniano no conmuta con la interacción esto no llega a suceder.

Yo entiendo que a partir de que el hamiltoniano se vuelve constante, obtengo una evolución como la del paper de Barra [7], así que no veo por qué no se llega al mismo estado estacionario. Los valores de los elementos de la diagonal sí son los del estado estacionario. Tengo que calcularlo, pero igualmente me parece que el calor y el trabajo se van a 0 cuando la batería se encuentra cargada, ya que no deberían depender de los elementos fuera de la diagonal.

Se calculó la evolución para los dos casos (35) y (36) y también para el caso donde el

hamiltoniano es constante a lo largo de todo el proceso y por lo tanto no se generan coherencias. Para resolver numéricamente se utilizó el método de midpoint rule, intercalando las ecuaciones (31) y (32) y se observó que se obtenía lo mismo calculando con la ecuación (34). Se calculó para tres valores diferentes de la constante de acoplamiento $\epsilon = \{1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$. A continuación se muestran los resultados en ese orden.





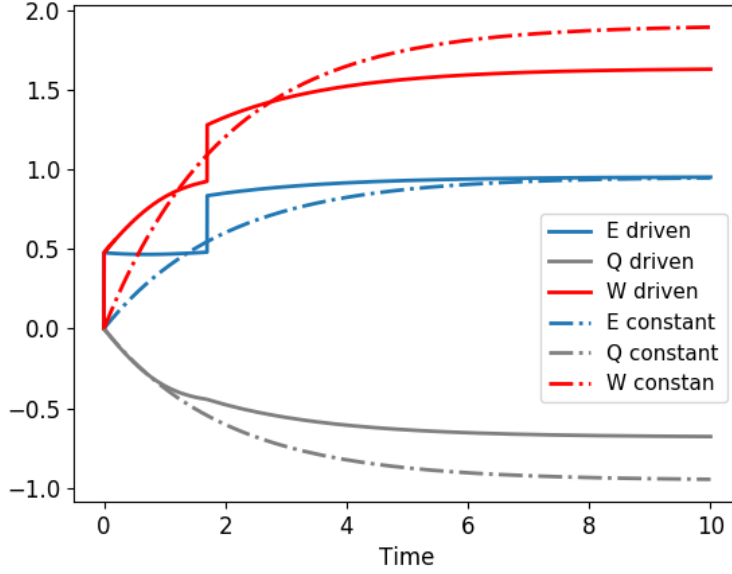
Donde se llamó Exp H al hamiltoniano de la ecuación (36) y Sin H al de la (35).

Se puede apreciar que cuando el acoplamiento con el baño térmico es débil, los protocolos con hamiltonianos dependientes del tiempo aceleran notablemente la carga de la batería, y que el correspondiente a la ecuación (36) es el más rápido. Sin embargo para acoplamientos fuertes el proceso con hamiltoniano constante es el más rápido. Esto puede entenderse viendo la ecuación (34), donde el disipador, que es el término donde aparece el acoplamiento, está dividido por dos, por lo tanto el sistema disipa más lentamente en estos casos y tarda más en llegar al equilibrio. Pero cuando el acoplamiento se hace más débil, la contribución de los disipadores es menor, y en ese caso ganan los términos con hamiltonianos dependientes del tiempo.

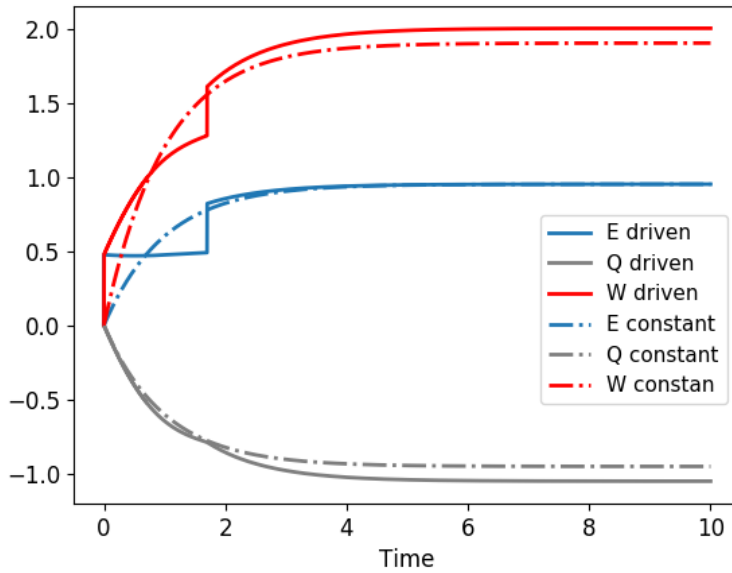
No estoy seguro de si este “beneficio” a tiempos cortos puede ser atribuido a la generación de coherencias, o si podría hacerse un protocolo similar donde la carga resulte igualmente rápida pero sin generar coherencias, le tengo que preguntar a Augusto a ver si hay alguna forma de verlo. En principio lo que veo es que los términos fuera de la diagonal oscilan con una amplitud menor en el caso de Exp H que en el de Sin H, es decir que la amplitud de las oscilaciones es menor en el caso donde la carga es más rápida, lo que me hace dudar de que haya una relación tan simple entre coherencias y velocidad de carga. A su vez, no estoy seguro de que eso sea una buena medida de coherencias, queda para discutirlo. También quiero discutir el tema de que para los casos dependientes del tiempo el estado no alcance el equilibrio y que los términos fuera de la diagonal queden oscilando.

Calculé el trabajo y calor correspondientes a los casos donde el Hamiltoniano era dependiente del tiempo, más precisamente en el caso exponencial. Para calcular el calor usé la ecuación (10), y el trabajo fue calculado como la diferencia entre la energía y el trabajo, de modo de que se cumpla la primera ley. Los resultados se muestran en las siguientes Figuras:

$$\epsilon = 1/\sqrt{2}$$



$\epsilon = 1$

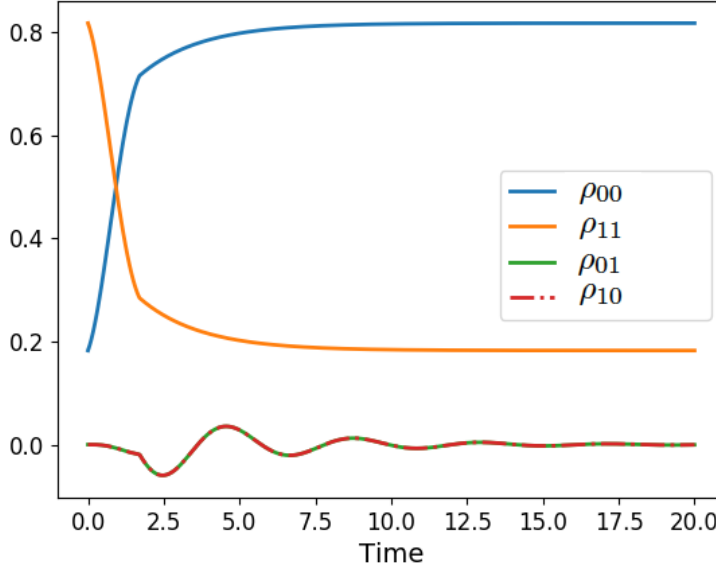


Se puede observar que para el caso donde el acoplamiento es más débil no sólo la carga de la batería es más rápida, sino que además el trabajo requerido para cargarla es menor cuando se generan coherencias. Esto es muy interesante ya que en general una mayor potencia implica menor eficiencia.

Para el caso donde el acoplamiento es mayor el trabajo en el caso del hamiltoniano dependiente del tiempo es mayor y la eficiencia es menor, sin embargo la carga de la batería sigue siendo más rápida en este caso.

Tengo que ver si la forma de calcular el calor es la correcta. Si este es el caso se vería un gran beneficio incluyendo las coherencias para acoplamientos débiles, no sólo en potencia sino también en eficiencia. Esta ventaja desaparece para acoplamientos fuertes.

El tema de que las coherencias no desaparecían era porque había un error en el programa, en el disipador. Ahora lo corregí y las coherencias desaparecen y se llega al estado estacionario correcto.



Caracterización de Coherencias

Para verificar si la ventaja encontrada se debe a las coherencias vamos a introducir a lo largo del proceso “ruido de dephasing”[7], es decir que cada vez que el sistema interactúa con el sistema auxiliar, además se le aplicará el mapa

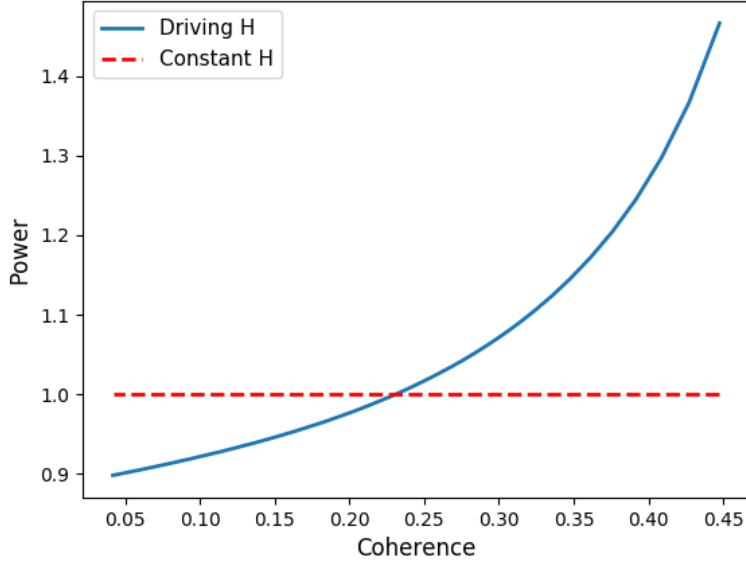
$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - \frac{1}{2}p)\rho + \frac{1}{2}p\sigma_3\rho\sigma_3 \quad (37)$$

Con este ruido se eliminan las coherencias con una probabilidad p a lo largo del proceso. De este modo podremos ver si la ventaja encontrada es debido a las coherencias o si es debido a la evolución del hamiltoniano. Para medir las coherencias se usará la medida[8]

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| \quad (38)$$

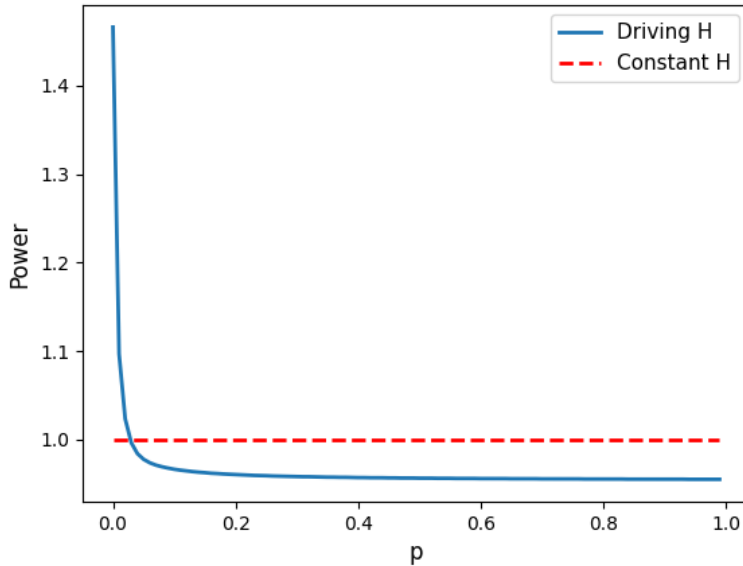
Tomaremos como medida de coherencia el máximo valor de (38) a lo largo del proceso.

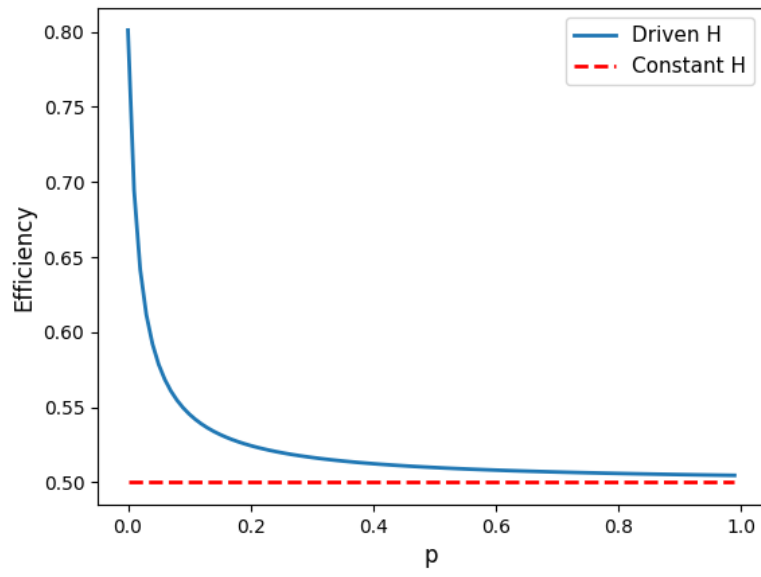
Primero se vio cómo variaba la potencia media del ciclo de carga en función de las coherencias. Para esto cada vez que la batería interactuaba con uno de los sistemas auxiliares además se le aplicaba el mapa (37). Se repitió el proceso para diferentes valores de p , lo que dio como resultado ciclos con distintas cantidades de coherencias. En cada caso se consideraba a la batería como cargada cuando el valor de la energía era 95% del valor de la ergotropía. Los resultados se muestran en la siguiente figura, las líneas punteadas rojas muestran la potencia media de la carga de batería con hamiltoniano constante $H_S = \frac{\hbar}{2}\sigma_S^z$. La curva azul muestra la potencia media del proceso con el hamiltoniano (36) normalizada con la potencia media del proceso con hamiltoniano constante.



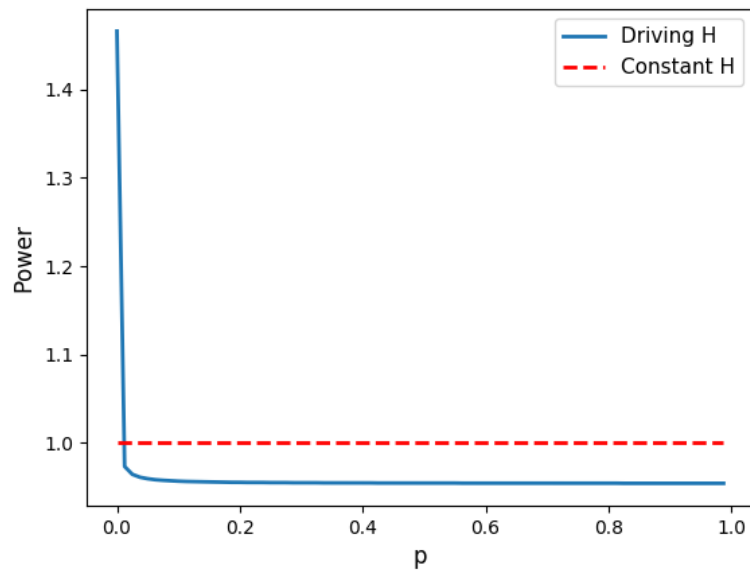
Se puede observar que la potencia mejora notablemente cuando se generan coherencias utilizando el Hamiltoniano de la ecuación (36). Cuando el valor de p en la ecuación (37) es 0, se obtiene el proceso con máxima coherencia, que en este caso da una potencia media 1.5 veces la potencia del hamiltoniano constante. A medida que se eliminan las coherencias con el ruido de dephasing se observa que la potencia decrece hasta volverse menor que la potencia del proceso con hamiltoniano constante. Esto indicaría que las coherencias juegan un rol importante en la ventaja encontrada, ya que cuando se las elimina esta ventaja desaparece.

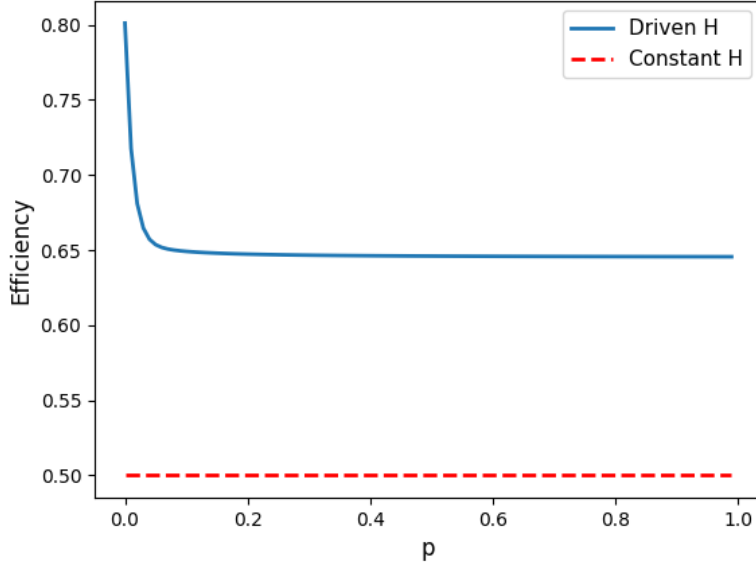
También se había encontrado que aparecía una ventaja en la eficiencia del proceso (23). Por lo tanto se estudió la dependencia de la eficiencia con las coherencias y se encontró que a medida que desaparecen las coherencias también desaparece la ventaja en la eficiencia, por lo que nuevamente parece razonable atribuir esta ventaja a la generación de coherencias.





También hicimos lo mismo pero proyectando en la base de energía, y se obtuvieron resultados similares:





Esta es la eficiencia cuando se aplica el dephasing noise en la base de la energía. Se puede ver que la eficiencia mejora con las coherencias, pero aún cuando se eliminan las coherencias con el ruido la eficiencia sigue siendo superior a la del caso para hamiltoniano constante.

3 Ciclo de Otto de un Qubit sin coherencias

El ciclo de Otto es un ciclo termodinámico de cuatro ramas: primero se pone en contacto al gas con un reservorio térmico caliente. El gas se calienta mientras su volumen permanece constante. Luego se realiza una expansión adiabática, donde el gas hace trabajo positivo. Una vez finalizada la expansión adiabática se pone en contacto al gas con un reservorio frío, al cual el gas le entrega calor. Finalmente se realiza una compresión adiabática con la cual se cierra el ciclo. En esta rama el gas hace trabajo negativo.

Ya se han estudiado este tipo de ciclos en el régimen cuántico, utilizando por ejemplo un oscilador armónico en lugar del gas[9]. En este caso estudiaremos el ciclo de Otto realizado con un qubit. Las ramas abiertas del ciclo, donde el qubit se encuentra en contacto con un baño térmico serán modeladas con el método de interacciones repetidas[3].

Para comenzar, vamos a considerar que en vez de un gas, el sistema de interés es un qubit, es decir un sistema de dos niveles. El hamiltoniano del sistema es

$$H_s = \frac{h(t)}{2} \sigma_z \quad (39)$$

donde h es positiva. A continuación debemos determinar cómo serán las cuatro etapas del ciclo, buscando analogías al caso clásico.

La primera rama del ciclo es una isocora caliente, donde se pone al gas en contacto con un reservorio térmico de temperatura T_h . Se deja que el gas termalice manteniendo su volumen constante. Por analogía, en el ciclo cuántico vamos a poner al sistema en contacto con un reservorio térmico a temperatura T_h y mantendremos su hamiltoniano constante.

La segunda rama es una expansión adiabática, donde se aísla térmicamente al gas y se expande su volumen. Este proceso resulta en trabajo positivo realizado por el gas. En analogía, se aislará al qubit y se modificará $h(t)$ (39) resultando en una evolución unitaria que disminuya la energía del sistema, y por lo tanto resulte en trabajo positivo.

La tercera rama es una isocora fría. En este caso se pone en contacto al sistema con un reservorio a temperatura T_c y se deja que el sistema termalice manteniendo su hamiltoniano

constante.

Por último, se aísla al sistema y se realiza la “compresión” adiabática modificando $h(t)$ hasta que el hamiltoniano vuelva a ser el hamiltoniano inicial. En esta etapa el trabajo realizado por el sistema es negativo.

3.1 Isocoras

A lo largo de las isocoras se pone en contacto al sistema con un baño térmico a temperatura T_h para la isocora caliente y T_c para la isocora fría y se deja evolucionar al sistema manteniendo su hamiltoniano constante. Para modelar estos procesos se utiliza el método de interacciones repetidas. Consideramos que el reservorio térmico está formado por varios sistemas auxiliares independientes en estado térmico

$$\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{Z_B} \quad (40)$$

Donde el hamiltoniano de los sistemas auxiliares es el mismo que el del sistema de interés (39). Es importante recordar que en las isocoras el hamiltoniano permanece constante, es decir que $h(t) = h_h$ para la rama caliente y $h(t) = h_c$ para la fría. En el modelo de interacciones repetidas el sistema ρ_s interactúa secuencialmente con los sistemas auxiliares ρ_B . Esto quiere decir que primero interactúa con un sistema auxiliar durante un tiempo τ y luego se descarta al sistema auxiliar y el sistema interactúa con otro, así sucesivamente. Esto da como resultado la evolución descrita por las ecuaciones (4) y (5).

A diferencia de lo que veníamos haciendo para el estudio de las baterías, en este caso cambiaremos el tipo de interacción por una que cumpla balance detallado y conservación de energía

$$[V, H_S + H_B] = 0 \quad (41)$$

de este modo no se realiza trabajo externo al conectar al sistema con los sistemas auxiliares, y toda la energía que deja el sistema va al reservorio térmico y viceversa. La interacción que usamos es:

$$V = \epsilon (\sigma_S^+ \sigma_B^- + \sigma_S^- \sigma_B^+)$$

donde ϵ mide la intensidad de la interacción.

La ecuación maestra que describe las isocoras es entonces

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -i[H_s, \rho_s(t)] + (\gamma_k^+ \mathcal{L}[\sigma_s^+, \rho_s] + \gamma_k^- \mathcal{L}[\sigma_s^-, \rho_s]) \quad (42)$$

con $\mathcal{L}[A, \rho] = A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}\{A^\dagger A, \rho\}$, $\gamma^+ = \epsilon^2 \langle \sigma^+ \sigma^- \rangle$ y $\gamma^- = \epsilon^2 \langle \sigma^- \sigma^+ \rangle$ donde los valores medios se toman con respecto al estado de los sistemas auxiliares.

Durante las isocoras el sistema intercambia energía con el ambiente en forma de calor. El calor del sistema en estas ramas se describe con la ecuación

$$\dot{Q} = h\{\gamma^+ \langle \sigma^- \sigma^+ \rangle_s - \gamma^- \langle \sigma^+ \sigma^- \rangle_s\} \quad (43)$$

y el trabajo en las isocoras es cero. La diferencia entre las isocoras calientes y frías está en la temperatura a la que se encuentran los sistemas auxiliares y en el valor de “h” en (39).

Es importante remarcar que en las isocoras no se generan coherencias, y si las hay inicialmente desaparecen a lo largo del proceso.

3.2 Adiabáticas

Durante las ramas adiabáticas el sistema se encuentra aislado, es decir que su evolución es unitaria y está regida por la ecuación de Von Neumann:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i [H(t), \rho(t)] \quad (44)$$

Como el estado siempre es diagonal en la base de la energía (no hay coherencias) el estado se mantiene constante a lo largo de las ramas adiabáticas. Lo que cambia durante estas ramas es el hamiltoniano del sistema.

Ya que el estado se mantiene constante, el cambio de energía entre el principio y el final de la rama adiabática está dado por

$$\Delta E = Tr[\rho_s(H_f - H_i)] \quad (45)$$

En el caso de la expansión adiabática, donde inicialmente tenemos que $h(t) = h_h$ y finalmente $h(t) = h_c$ se obtiene que la diferencia en energía es

$$\Delta E = Tr\left[\frac{(h_c - h_h)}{2}\sigma_z\rho_s\right] \quad (46)$$

Cuando el ciclo es lo suficientemente lento como para que el sistema termalice en las isocoras, el estado del sistema durante la expansión adiabática es el estado térmico de temperatura T_h y con $h(t) = h_h$. En este caso el trabajo realizado por el sistema en la expansión es $(-\Delta E)$

$$W = (h_h - h_c) \tanh(\beta_h h_h/2) \quad (47)$$

Como en la expansión queremos que el trabajo realizado por el sistema sea positivo obtenemos entonces que $h_h > h_c$.

Es interesante notar que como el estado es constante a lo largo de las adiabáticas, estas ramas pueden realizarse instantaneamente cambiando h_h por h_c o viceversa. Por lo tanto estas dos ramas no influyen en la duración del ciclo. Distinto sería el caso en un proceso donde se generan coherencias.

3.3 Eficiencia del ciclo

Se define a la eficiencia del ciclo como

$$\eta = \frac{W}{Q_{hot}} \quad (48)$$

Donde W es el trabajo realizado por el sistema a lo largo del ciclo completo y Q_{hot} es el calor de la isocora caliente. El proceso puede caracterizarse con el estado del sistema en dos procesos: ρ_{hot} el estado del sistema al finalizar la isocora caliente y ρ_{cold} al finalizar la isocora fría. Como durante las adiabáticas el estado no se modifica obtenemos que la isocora caliente comienza con el estado ρ_{cold} y finaliza en el estado ρ_{hot} , de este modo el calor intercambiado en esta rama es:

$$Q_{hot} = \frac{h_{hot}}{2} Tr[\sigma_z(\rho_{hot} - \rho_{cold})] \quad (49)$$

El trabajo a lo largo del ciclo viene dado por

$$W = \frac{(h_{hot} - h_{cold})}{2} Tr[\sigma_z\rho_{hot}] + \frac{(h_{cold} - h_{hot})}{2} Tr[\sigma_z\rho_{cold}] \quad (50)$$

Donde el primer término corresponde a la expansión y el segundo a la compresión.

La eficiencia del proceso es entonces

$$\eta = \frac{W}{Q_{hot}} = 1 - \frac{h_{cold}}{h_{hot}} \quad (51)$$

Es interesante que esta eficiencia no depende de la duración del ciclo, ya que no importa cuáles sean los estados ρ_{hot} y ρ_{cold} . Por lo tanto se obtiene la misma eficiencia en el caso de un proceso largo donde el estado llega a termalizar en las dos isocoras como en un proceso corto donde esto no sucede. Lo que sí se ve modificado por la duración del ciclo son la cantidad de calor y trabajo, pero ambas se compensan para dar siempre la misma eficiencia. Esto fue verificado resolviendo numéricamente para distintas duraciones de ciclo.

Para que el ciclo funcione como motor, es decir generando trabajo, se deben cumplir dos relaciones:

$$h_{hot} > h_{cold}$$

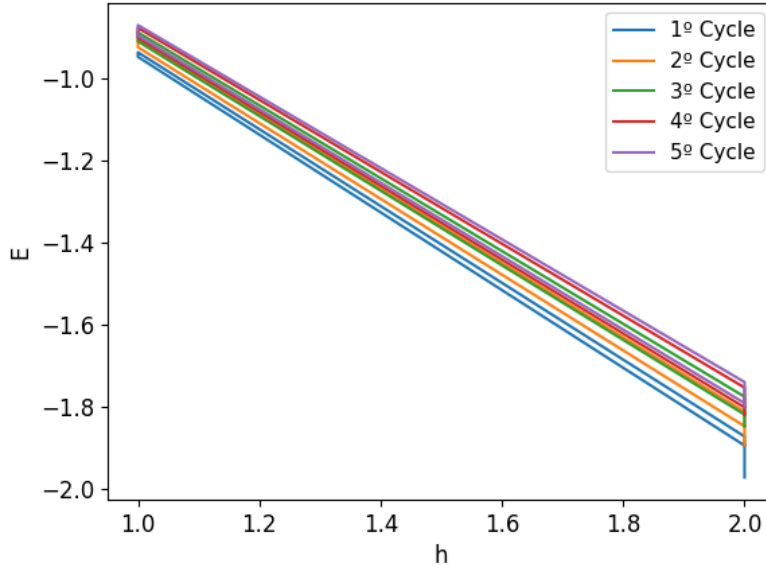
y

$$\frac{h_{cold}}{T_{cold}} > \frac{h_{hot}}{T_{hot}}$$

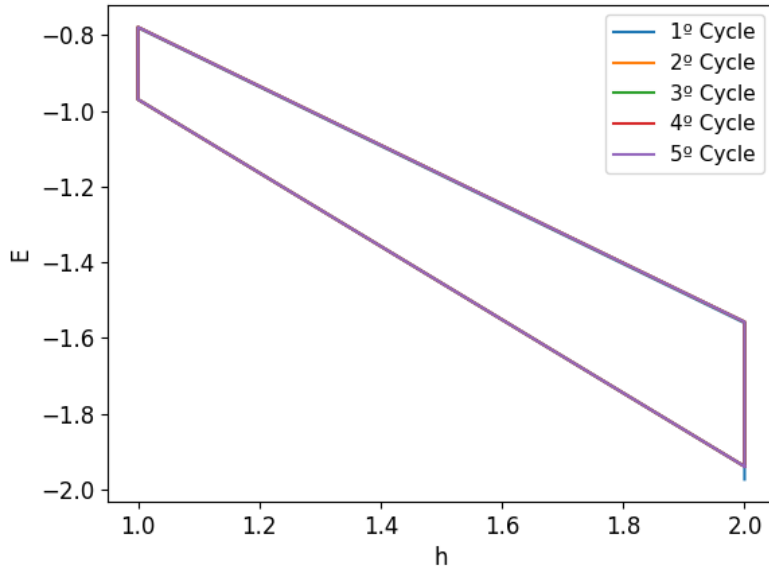
3.4 Ciclo estacionario

Todas las simulaciones están hechas con $h_{cold} = 1$, $h_{hot} = 2$

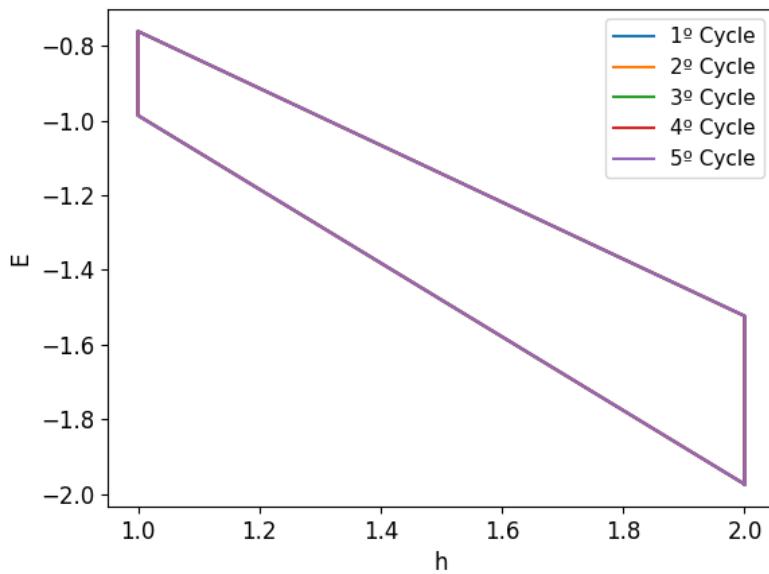
Decimos que el ciclo es estacionario cuando repeticiones sucesivas dan los mismos estados a lo largo de cada ciclo, llevando a que la cantidad de calor y trabajo en cada ciclo sea la misma que la de las otras realizaciones del ciclo. Se encontró que la cantidad de ciclos necesarios hasta llegar al estacionario depende de la duración del ciclo. A continuación se muestran repeticiones del ciclo con distintas duraciones.



Duración del ciclo 0.1.



Duración del ciclo 1.



Duración del ciclo 10.

En las figuras se muestran cinco repeticiones del ciclo (Energía vs h) para distintas duraciones del ciclo. Se puede observar que para el ciclo de duración 10 la primera realización coincide con las cuatro siguientes, mientras que este no es el caso para las otras duraciones. El otro extremo es el caso de duración del ciclo 0.1, donde ninguna de las realizaciones del ciclo coincide con las anteriores y por lo tanto no se alcanzó el estacionario.

A lo largo del trabajo siempre que se hable de magnitudes del ciclo como eficiencia o potencia nos estaremos refiriendo a estas magnitudes en el ciclo estacionario.

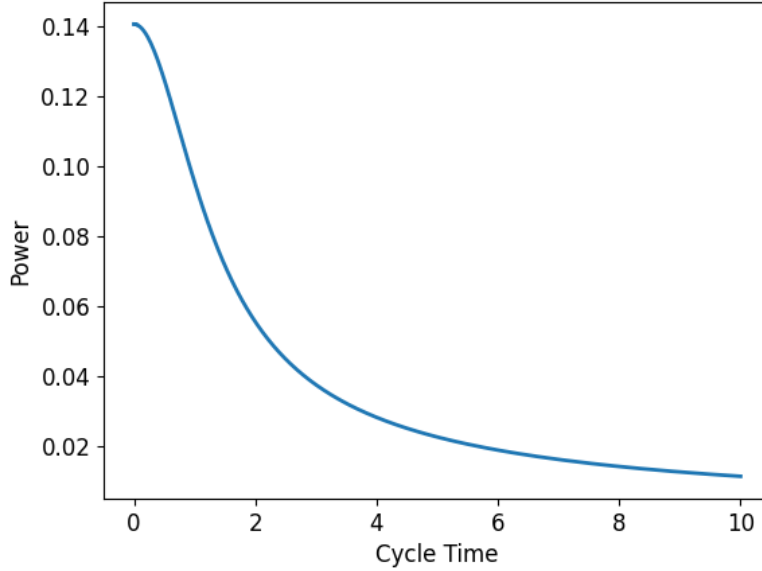
3.5 Potencia vs Duración del ciclo

Ya vimos que la eficiencia del ciclo no depende de la duración del mismo, ahora estudiamos qué pasa con la potencia del ciclo. Para esto medimos el trabajo para distintas duraciones del

ciclo, esperando siempre que llegue al estacionario, y definimos la potencia como

$$P = \frac{W_{cycle}}{T_{cycle}} \quad (52)$$

Donde W_{cycle} es el trabajo a lo largo de un ciclo entero y T_{cycle} es la duración del ciclo. El resultado se muestra en la siguiente figura:



La duración mínima de ciclo que se calculó es 0.001.

4 Ciclos Termodinámicos con estados activos.

4.1 Sin Coherencias (isotermas sin driving).

Diseñamos un ciclo termodinámico en el cual incorporamos el proceso de carga disipativo de una batería cuántica como una de las ramas. Este ciclo consta de 5 ramas y cuenta con dos reservorios térmicos, uno frío y otro caliente. El ciclo es el siguiente:

- 1) El sistema comienza en el estado activo a temperatura T_1 con hamiltoniano H_1 . Luego se cambia al estado térmico mediante una evolución unitaria.
- 2) Con el sistema en estado térmico se cambia el hamiltoniano H_1 a H_2 de manera adiabática.
- 3) Se acopla el sistema al reservorio de temperatura T_2 y se carga el sistema con el protocolo de carga de baterías, hasta llegar al estado activo con temperatura T_2 y hamiltoniano H_2 .
- 4) Se cambia el hamiltoniano desde H_2 a H_1 de forma adiabática.
- 5) Se pone en contacto al sistema con el reservorio a temperatura T_1 y el sistema vuelve al estado inicial.

El trabajo del sistema a lo largo de cada rama es el siguiente:

$$W_1 = -Tr[H_1 (\omega_{\beta_1}(H_1) - \omega_{-\beta_1}(H_1))] \quad (53)$$

$$W_2 = -Tr[(H_2 - H_1) \omega_{\beta_1}(H_1)] \quad (54)$$

$$W_3 = -2Tr[H_2 (\omega_{-\beta_2}(H_2) - \omega_{\beta_1}(H_1))] \quad (55)$$

$$W_4 = -Tr[(H_1 - H_2) \omega_{-\beta_2}(H_2)] \quad (56)$$

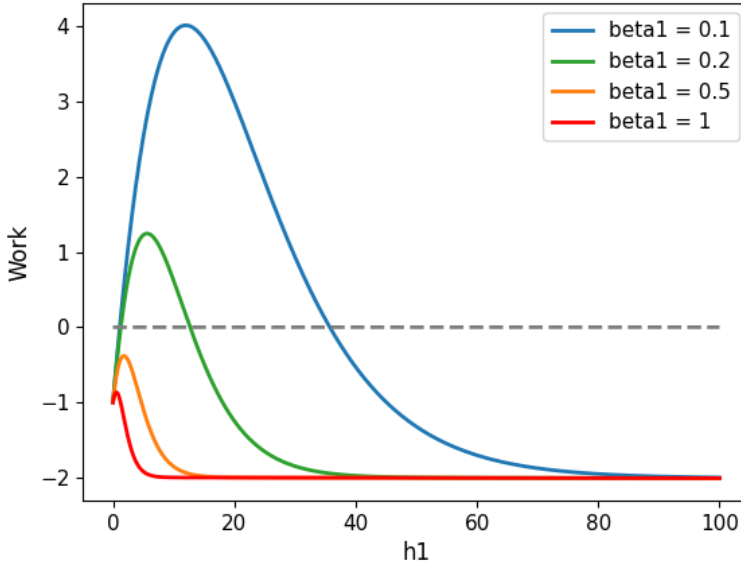
$$W_5 = -2 Tr[H_1 (\omega_{-\beta_1}(H_1) - \omega_{-\beta_2}(H_2))] \quad (57)$$

Donde $\omega_\beta(H)$ es el estado térmico y $\omega_{-\beta}(H)$ es el estado activo que se corresponde con el estado térmico a temperatura negativa.

El trabajo total del ciclo es:

$$W = (h_1 - h_2) \tanh\left(\frac{\beta_2 h_2}{2}\right) - (h_2 + h_1) \tanh\left(\frac{\beta_1 h_1}{2}\right) \quad (58)$$

Eligiendo correctamente los parámetros este ciclo puede dar trabajo positivo, como se muestra en la siguiente figura.



En esta figura se tomaron los parámetros $h_2 = 1$ y $\beta_2 = 10$ y se calculó el trabajo para distintos valores de h_1 y β_1 . Se puede observar que para valores chicos de β_1 (0.1, 0.2) se obtiene un rango de valores de h_1 para los cuales el ciclo termodinámico entrega trabajo positivo, mientras que para valores mayores de β_1 ya no hay valores de h_1 para los que se obtenga trabajo positivo.

Ahora estudiaremos la eficiencia del ciclo. Para esto además del trabajo (58) necesitamos calcular el calor. El ciclo tiene dos ramas abiertas donde puede intercambiar calor, la primera cuando el sistema se pone en contacto con un reservorio a temperatura inversa β_2 y es llevado del estado térmico $\omega_{\beta_1}(H_1)$ al estado activo $\omega_{-\beta_2}(H_2)$. Durante este proceso el calor es:

$$Q_1 = -h_2 \left(\tanh\left(\frac{\beta_2 h_2}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_1 h_1}{2}\right) \right) < 0 \quad (59)$$

Se puede observar que durante esta rama el sistema le entrega calor al reservorio a temperatura inversa β_2 . En la otra rama abierta el sistema se pone en contacto con un reservorio a temperatura inversa β_1 y pasa del estado $\omega_{-\beta_2}(H_2)$ al estado $\omega_{-\beta_1}(H_1)$ cerrando el ciclo. El calor intercambiado a lo largo de esta rama es:

$$Q_2 = h_1 \left(\tanh\left(\frac{\beta_2 h_2}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\beta_1 h_1}{2}\right) \right) \quad (60)$$

En este caso el calor es positivo si :

$$\frac{h_2}{T_2} > \frac{h_1}{T_1} \quad (61)$$

Viendo la ecuación (58) podemos ver que para que el trabajo sea positivo, la condición (61) es necesaria, aunque no suficiente. Esto indica que en el regimen en el que el ciclo da trabajo positivo, el sistema absorbe calor del reservorio a temperatura T_1 y entrega calor al reservorio a temperatura T_2 . La otra condición para que el trabajo sea positivo es $h_1 > h_2$, que junto con (61) implican $T_1 > T_2$.

Por lo tanto en el regimen en el que el ciclo da trabajo positivo el sistema absorbe calor del reservorio caliente y deposita calor en el reservorio frío, cumpliendo con la segunda ley de la termodinámica (menos mal!).

Por lo tanto para obtener la eficiencia tenemos que dividir el trabajo que hace el sistema por Q_2

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{h_2}{h_1} \frac{\tanh(\beta_2 h_2/2) + \tanh(\beta_1 h_1/2)}{\tanh(\beta_2 h_2/2) - \tanh(\beta_1 h_1/2)}$$

Teniendo en cuenta que T_1 es mayor que T_2 pasamos a llamarlas T_{hot} y T_{cold} idem con $h_1 = h_{hot}$ y $h_2 = h_{cold}$.

Entonces tenemos un ciclo termodinámico de cinco ramas que opera entre dos reservorios térmicos. El ciclo da trabajo:

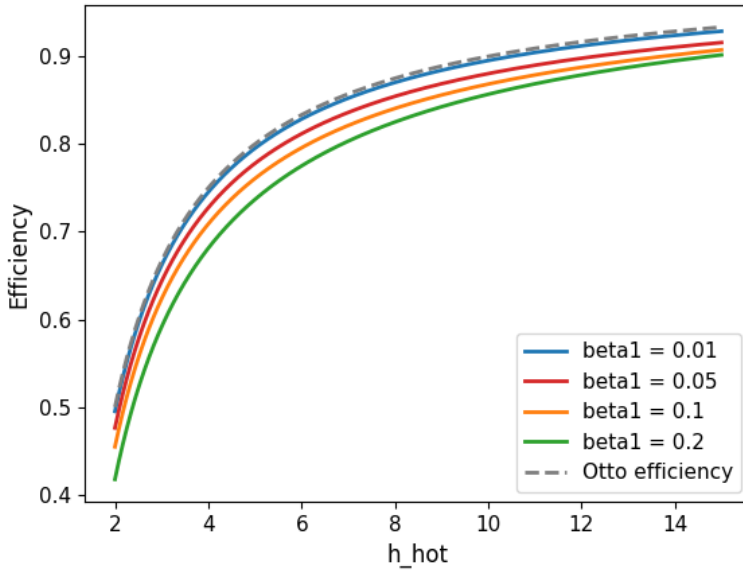
$$W = (h_{hot} - h_{cold}) \tanh\left(\frac{h_{cold}}{2T_{hot}}\right) - (h_{hot} + h_{cold}) \tanh\left(\frac{h_{hot}}{2T_{cold}}\right) \quad (62)$$

La eficiencia del ciclo es:

$$\eta = 1 - \frac{h_{cold}}{h_{hot}} \frac{\tanh(\beta_{cold} h_{cold}/2) + \tanh(\beta_{hot} h_{hot}/2)}{\tanh(\beta_{cold} h_{cold}/2) - \tanh(\beta_{hot} h_{hot}/2)} \leq \eta_{Otto} \quad (63)$$

Se puede observar que este ciclo tiene eficiencia menor que el ciclo de Otto, y que a diferencia de este la eficiencia depende de la temperatura.

En la siguiente figura se muestra la eficiencia en función de h_{hot} para distintas temperaturas. Se puede ver que para $\beta_{hot} \ll 1$ la eficiencia se acerca cada vez más a la de Otto.

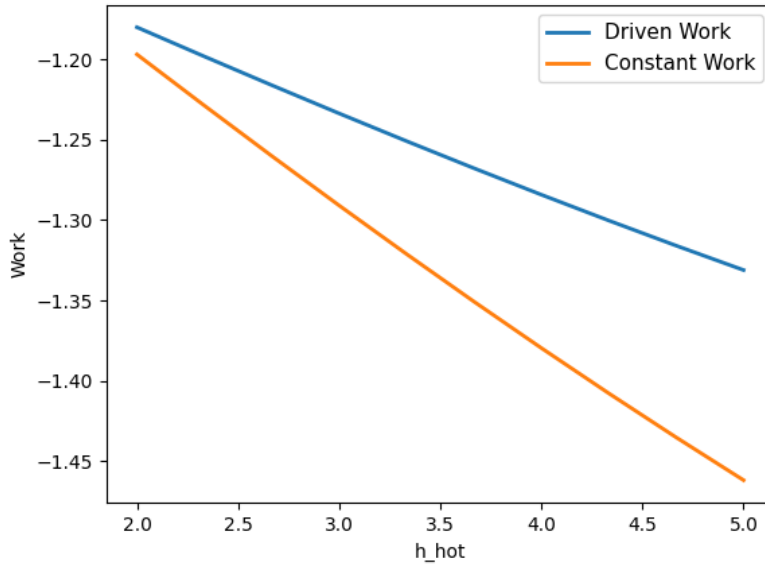


Podemos ver entonces que logramos construir un ciclo termodinámico que genere trabajo positivo incluyendo como una de las ramas el proceso de carga de baterías que estamos estudiando. Esto nos va a permitir utilizar en esa rama los hamiltonianos dependientes del tiempo estudiados, que deberían mejorar tanto la potencia del ciclo como su eficiencia.

4.2 Isoterma con driving.

Estudiamos el mismo ciclo que en la sección anterior, pero ahora en la rama correspondiente al proceso de carga de la batería, cuando el sistema se pone en contacto con el reservorio frío, usaremos el hamiltoniano dependiente del tiempo (ec 36). El objetivo es estudiar si la aparición de coherencias mejora la eficiencia del ciclo. Las otras 4 ramas del ciclo son iguales al caso anterior, por lo tanto el trabajo y calor de esas ramas sigue siendo igual que antes. Para ver si mejora la eficiencia del ciclo entonces tenemos que ver cómo se modifica el trabajo a lo largo de la rama con hamiltoniano dependiente del tiempo.

En la siguiente figura se muestra el trabajo del sistema en función de h_{hot} para temperaturas $\beta_{hot} = 0.1$ y $\beta_{cold} = 10$, tomando $h_{cold} = 1$. Para los valores elegidos el ciclo produce trabajo positivo.



Podemos ver que el trabajo para el caso donde el hamiltoniano es dependiente del tiempo es mayor al caso constante. Debido a que el trabajo en las otras ramas es el mismo para ambos casos, y lo mismo sucede con el calor que absorbe el sistema cuando está en contacto con el reservorio caliente, podemos concluir que la eficiencia del ciclo aumenta al introducir el hamiltoniano dependiente del tiempo.

Ahora falta graficar la eficiencia y ver si el ciclo con coherencias puede tener eficiencia mejor que el ciclo de Otto, y luego ver qué pasa al introducir el ruido de dephasing en esa rama para ver si la mejora encontrada se debe a las coherencias.

References

- [1] F. Barra, Phys. Rev. Lett. 122, 210601 (2019)
- [2] R. Alicki and M. Fannes, Phys. Rev. E 87, 042123 (2013).
- [3] G. De Chiara, G. Landi, A. Hewgill, B. Reid, A. Ferraro, A. J. Roncaglia, and M. Antezza, New J. Phys. 20, 113024 (2018).
- [4] S. Julià-Farré, T. Salamon, A Riera, M. N. Bera, M. Lewenstein, arXiv:1811.04005v2
- [5] F. Campaioli, F. A. Pollock, F. C. Binder, L. C'eleri, J. Goold, S. Vinjanampathy, and K. Modi, Phys. Rev. Lett. 118, 150601 (2017).

- [6] R. Dann, R. Kosloff, New J. Phys. 22 013055 (2020)
- [7] J. Preskill, Lecture Notes for Ph219/CS219: Quantum Information Chapter 3 (2018).
- [8] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio Phys. Rev. Lett. 113, 140401 (2014).
- [9] R. Kosloff, Y. Rezek, 2017 The quantum harmonic Otto cycle Entropy 19 136