1 Enfriamiento con interacciones repetidas.

Consideramos que tenemos un sistema con hamiltoniano H_s que se encuentra en un estado térmico a temperatura inversa β, y un reservorio térmico a la misma temperatura, constituido por N sistemas auxiliares con hamiltoniano H_B y en estado térmico a temperatura inversa β. Nuestro objetivo es enfriar al sistema.

Sabemos que utilizando el método de interacciones repetidas acoplamos al sistema a los sistemas auxiliares secuencialmente con una interacción V, el el sistema tiene un estado estacionario

$$\rho_{est} = \frac{e^{-\beta H_0}}{Z_0} \tag{1}$$

Donde H_0 es un operador que satisface las relaciones de conmutación $[V\,,\,H_0\,+\,H_B] = 0$ y $[H_s\,,\,H_0] = 0$[1]. Por lo tanto, si encontramos una forma de que $H_0\,=\,\alpha\,H_s$, entonces el estado estacionario del sistema sería:

$$\rho_{est} = \frac{e^{-\beta\,\alpha\,H_s}}{Z} \tag{2}$$

Por lo tanto, si $\alpha\,>\,1$ tenemos que el sistema llega a un estado térmico de menor temperatura que la temperatura del estado inicial y el reservorio. Ya que $[V\,,\,H_s\,+\,H_B]\,\neq\,0$ hay un trabajo externo, por lo tanto no se viola la segunda ley.

Veamos un ejemplo con un qubit.

Tenemos un qubit con hamiltoniano $H_s\,=\,\frac{h_s}{2}\sigma_z$ inicialmente en estado térmico a tempeartura inversa β y un reservorio formado por qubits con hamiltoniano $H_B\,=\,\frac{\alpha h_s}{2}\sigma_z$ con $\alpha\,>\,1$. Por lo tanto los qubits del reservorio tienen un gap más grande que el sistema. Elegimos la interacción

$$V\,=\,g\,(\sigma^{+}\otimes\sigma^{-}\,+\,\sigma^{-}\otimes\sigma^{+}) \tag{3}$$

Con estos hamiltonianos e interacción se obtiene que $[V\,,\,\alpha H_s\,+\,H_B] = 0$, entonces $H_0\,=\,\alpha H_s$. Por lo tanto el estado estacionario del sistema es un estado térmico con temperatura inversa $\beta\acute{}\,=\,\alpha\,\beta \geq \beta$, y el sistema se encuentra más frío que al inicio.

Para calcular el calor que deja al sistema y el trabajo externo realizado utilizamos las siguientes relaciones[2].

$$\frac{dE}{dt}\,=\,-\frac{1}{2}\langle[V\,,\,[V\,,\,H_s]]\rangle \tag{4}$$

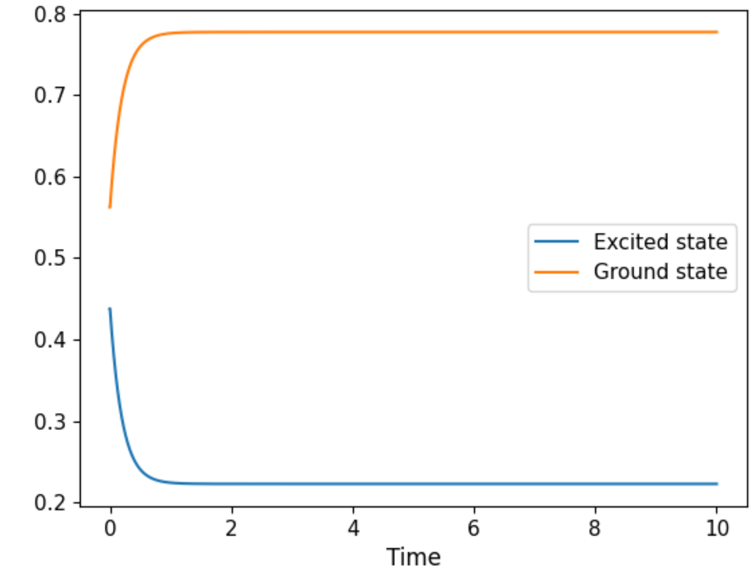
$$\frac{dQ}{dt}\,=\,\frac{1}{2}\langle[V\,,\,[V\,,\,H_E]]\rangle \tag{5}$$

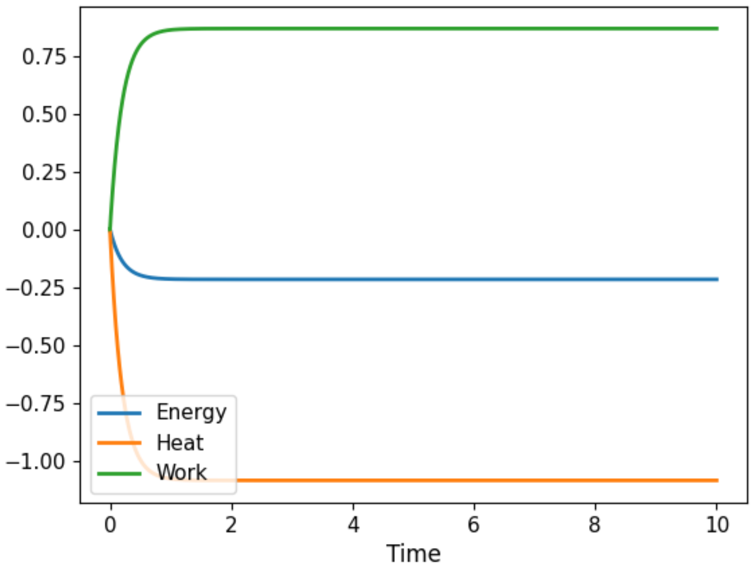
$$\dot{E} = \dot{Q}\,+\,\dot{W}_{ext} \tag{6}$$

Se obtiene que $\dot{Q}\,=\,\alpha\,\dot{E}$ y por lo tanto el trabajo externo es $\dot{W}_{ext}\,=\,\dot{Q}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}$. $\alpha\,=\,\frac{h_B}{h_s}$ es igual al cociente entre el gap de los sistemas de reservorio y el gap del sistema. Para este sistema resulta entonces

$$COP\,=\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\,=\,\frac{h_B}{h_s - h_B} \tag{7}$$

A continuación se muestra una simulación con un qubit para $\beta = 0.25$, $h_s = 1$ y $h_B = 5$





Para enfriar al cero absoluto el gap de los sistemas del reservorio debería ser infinito, por lo tanto estamos en conconrdancia con la tercera ley.

Trabajo para enfriar

Calculamos analíticamente el trabajo externo que se requiere para enfriar al qubit desde una temperatura β a una temperatura $\beta' = \alpha\,\beta$. El trabajo requerido es

$$W \;=\; h\,(\alpha - 1)\,(P^f_{gs} \;-\; P^i_{gs}) \geq 0 \tag{8}$$

Donde P^i_{gs} y P^f_{gs} son las poblaciones del groundstate antes y despúes de enfriar el sistema, h es el gap del sistema.

El trabajo puede reescribirse como:

$$W \;=\; \frac{h}{2}\,(\alpha - 1)\,(\tanh(\beta\,\alpha\,h/2) \;-\; \tanh(\beta\,h/2)) \tag{9}$$

Para un sistema cualquiera obtenemos:

$$W_{ext} = (\alpha - 1)\,Tr[H_s(\frac{e^{-\beta H_s}}{Z} \;-\; \frac{e^{-\alpha\beta H_s}}{Z_\alpha})] \tag{10}$$

Enfriar un oscilador con un reservorio de qubits

Todavía me falta leer sobre las trampas de iones, pero entiendo que la idea de enfriamiento que buscamos se puede estudiar como enfriar un oscilador armónico usando el método de interacciones repetidas con un reservorio de qubits, que representarían los niveles electrónicos del ion.

Entonces la idea es ver si usando este método se puede enfriar a un oscilador armónico acoplándolo secuencialmente al reservorio térmico de qubits.

Tenemos entonces un oscilador armónico de frecuencia ω que se acopla al reservorio de qubits con gap h. El hamiltoniano del oscilador es

$$H_{osc} = \omega(a^\dagger a + 1/2) \tag{11}$$

Y el hamiltoniano de los qubits es

$$H_B = \frac{h}{2}\sigma_z \tag{12}$$

La interacción que elegimos para acoplar los sistemas es

$$V = g(a^\dagger \sigma^- + a\,\sigma^+) \tag{13}$$

Ahora vemos que

$$[V, H_s + H_B] = (h - \omega)\,(a^\dagger\sigma^- - a\sigma^+) \tag{14}$$

Se ve claramente entonces que si elegimos

$$H_0 = h\,(a^\dagger a + 1/2) \tag{15}$$

Entonces se cumple la relación de conmutación $[V, H_0 + H_B] = 0$. Definiendo $\alpha = \frac{h}{\omega}$ el estado estacionario del oscilador es entonces

$$\rho_{est} = \frac{e^{-\beta\alpha H_{osc}}}{Z} \tag{16}$$

Por lo tanto siempre que $h \geq \omega$ el oscilador se encontrará a menor temperatura al finalizar el proceso.

Escribimos la ecuación maestra para el oscilador:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma^+(a^\dagger\rho\, a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \rho\}) + \gamma^-(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \rho\})$$

con $\gamma^+ = g^2\frac{e^{-\beta h/2}}{Z}$ y $\gamma^- = g^2\frac{e^{\beta h/2}}{Z}$. Vemos entonces que:

$$\frac{\gamma^+}{\gamma^-} = e^{-\beta h} = e^{-\alpha\beta\omega} \tag{17}$$

Por lo tanto el sistema satisface balance detallado para temperatura $\alpha\beta$ que es la temperatura de equilibrio.

Partiendo de un estado diagonal se llega a la siguiente ecuación para las poblaciones del oscilador:

$$\dot{P}_n = \gamma^+ n\, P_{n-1} + \gamma^- (n+1)\, P_{n+1} - (\gamma^+(n+1) + \gamma^- n)P_n \tag{18}$$

Para el estado fundamental tenemos entonces:

$$\dot{P}_0 = \gamma^- P_1 - \gamma^+ P_0 \tag{19}$$

Suponiendo que la temperatura final es muy cercana a 0, podemos asumir que sólamente van a estar poblados los primeros dos niveles, por lo tanto $P_0 = 1 - P_1$, obtenemos en esta aproximación:

$$P_0 = 1 - e^{-\alpha\beta\omega} \tag{20}$$

2 Enfriamiento con quenches

Lo que hablamos en la reunión de enfriar al qubit con un quench y después con una evolución adiabática me parece que no va a funcionar, porque

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho]$$

Y haciendo un quench para cambiar el gap el estado y los hamiltonianos conmutan, entonces el estado no cambia. (Si no me equivoco).

Pero se me ocurrió otra forma de enfriar incluyendo un reservorio térmico a la misma temperatura que el estado inicial, igual que en el caso de interacciones repetidas. En este caso no hace falta dar detalles sobre cómo es el reservorio, lo importante es que cuando pongamos en contacto el sistema con el reservorio termalice.

Entonces el proceso para enfriar es el siguiente.

Tenemos el qubit con hamiltoniano $H_s = \frac{h}{2}\sigma_z$ y estado térmico $\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H_s}$.

1) Cambiamos el gap de h a αh. Esto tiene un trabajo $W_{12} = \frac{h}{2}(1\text{-}\alpha)\tanh(\beta\, h/2)$.

2) Ponemos en contacto al sistema con el reservorio hasta que termaliza, llegando al estado $\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta\,\alpha\, H_s}$. Entregando un calor $Q = \alpha\,\frac{h}{2}\,(\tanh(\beta h/2)\,-\,\tanh(\beta\,\alpha\, h/2))$.

3) Desconectamos el sistema del reservorio y cambiamos el gap nuevamente a h. Esto tiene un trabajo $W_{34} = \frac{h}{2}(\alpha-1)\tanh(\beta\,\alpha\, h/2)$.

Entonces terminamos con un sistema en estado térmico a temperatura $\beta\alpha$ y hamiltoniano H_s.

El trabajo total que lleva este proceso es

$$W \;=\; \frac{h}{2}\,(\alpha-1)\,(\tanh(\beta\,\alpha\, h/2)\,-\,\tanh(\beta\, h/2))$$

Que es lo mismo que en en el caso de interacciones repetidas. Y el COP también da igual que en el caso de interacciones repetidas. Por lo tanto los dos procesos dan los mismos resultados.

El segundo proceso me parece que es muy similar, sino igual, a lo que se describe en [3] en la sección 2 A, llamado Nernst Setup.

Comparación con [3]

En [3] estudian Dynamic cooling, donde tienen un sistema y un reservorio térmico que inicialmente no interactúan, luego los acoplan con una interacción V durante un tiempo τ, de modo que los dos sistemas evolucionen de manera unitaria (global). Al finalizar este proceso llegan a un estado que en general no es de equilibrio. Hacen como un único paso de interacciones repetidas, por lo tanto llegan a un estado que no es de equilibrio. La dinámica del sistema + reservorio es unitaria, por lo que me parece que nuestro caso es más general, además de que llegamos siempre a estados térmicos. Al estar fuera del equilibrio ellos estudian el enfriamiento en función al aumento de la población del groundstate, mientras que en nuestro caso estamos hablando de temperaturas bien definidas.

References

[1] F. Barra, Phys. Rev. Lett. 122, 210601 (2019) 2

[2] G. De Chiara, G. Landi, A. Hewgill, B. Reid, A. Ferraro, A. J. Roncaglia, and M. Antezza, New J. Phys. 20, 113024 (2018).

[3] Armen E. Allahverdyan, Karen V. Hovhannisyan, Dominik Janzing, and Guenter Mahler Phys. Rev. E 84, 041109