Modele de constructie a multimii numerelor reale

Cum ne imaginam aceasta multime?

- colectia tuturor punctelor de pe axa reala
- colectia tuturor fractiilor zecimale

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

Enumeram mai jos cateva *modele de constructie* a multimii numerelor reale.

a) cu ajutorul sirurilor de numere rationale (Cantor)

$$\mathbb{R} = \left\{ x \middle| \, \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \text{ sir convergent} : \lim_{n \to \infty} q_n = x \right\}$$

Ex. $q_0 = 1$, $q_1 = 1.4$, $q_2 = 1.41$, $q_3 = 1.414$, $q_4 = 1.4142$, $\ldots$

$$\lim_{n \to \infty} q_n = \sqrt{2}$$

Ex.

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{2} + \frac{1}{q_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\, q_0 = 1.$$

b) cu ajutorul submultimilor de numere rationale (Dedekind)

O submultime $S \subseteq \mathbb{Q}$ se numeste *sectiune (taietura) Dedekind* daca

1. $\emptyset \neq S \neq \mathbb{Q}$

2. $\forall s \in S,\, t \in \mathbb{Q} \setminus S : s < t$

3. $\forall s_1 \in S,\, \exists s_2 \in S : s_1 < s_2$ (S nu admite un cel mai mare element).

Oricarei sectiuni S i se poate asocia un numar real unic x_S cu proprietatea

$$s < x_S \leq t, \quad \forall s \in S,\, t \in \mathbb{Q} \setminus S.$$

Ex. $S = \{x \in \mathbb{Q} |\, x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} |\, x^2 < 2\}$

$$S = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \setminus S = [\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} = \left\{ x_S \middle|\, S \subseteq \mathbb{Q} \text{ sectiune} \right\}$$

c) cu ajutorul numerelor suprareale (Conway)

Fie L si R doua submultimi de numere deja construite (initial ambele sunt multimea vida).

Numar (suprareal). Forma algebrica $\{L|R\}$ defineste un numar (suprareal) daca niciun element din R nu este mai mic sau egal decat vreun element din L, adica

$$\nexists r \in R, \nexists l \in L : r \leq l.$$

Definim in continuare relatia de ordine intre doua numere (forme algebrice).

Relatia de ordine. Fie $x = \{X_L|X_R\}$ si $y = \{Y_L|Y_R\}$ doua forme algebrice. Definim

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} \nexists x_L \in X_L : y \leq x_L \\ \nexists y_R \in Y_R : y_R \leq x \end{cases}$$

$$x = y \Leftrightarrow (x \leq y) \quad \text{si} \quad (y \leq x)$$

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \quad \text{si} \quad \text{not}(y \leq x)$$

Relatia de ordine $\leq$ este definita in mod minimal, incat ea sa implice ca

$$x_L < x < x_R, \quad \forall x_L \in X_L, \forall x_R \in X_R. \tag{1}$$

Ex. $L = R = \emptyset \Rightarrow \{\,|\,\} \overset{\text{not}}{=} 0$ este un numar. Mai mult, $0 \leq 0$ si $0 = 0$

$L = \{0\}, R = \emptyset \Rightarrow \{0|\,\} \overset{\text{not}}{=} 1$ este un numar. Mai mult, $0 < 1$ caci

$$0 \leq 1 \Leftrightarrow \{\,|\,\} \leq \{0|\,\} \Leftrightarrow \nexists x_L \in \emptyset : 1 \leq x_L, \quad \nexists y_R \in \emptyset : y_R \leq 0$$

$$\text{not}(1 \leq 0) \Leftrightarrow \text{not}(\{0|\,\} \leq \{\,|\,\}) \Leftrightarrow \exists x_L \in \{0\} : 0 \leq x_L \quad \text{sau} \quad \ldots$$

$L = \{0\}, R = \{0\} \Rightarrow \{0|0\}$ nu este un numar!

Numar negativ. Fie $x = \{X_L | X_R\}$ un numar. Definim opusul sau

$$-x = \{-X_R | -X_L\},$$

unde s-a notat $-A = \{-a | \, a \in A\}$.

Aceasta definitie este sugerata de implicatia

$$x_L < x < x_R \Rightarrow -x_R < -x < -x_L.$$

Ex. Evident $-0 = 0$.

$L = \emptyset, R = \{0\} \Rightarrow \{\,|0\} = -1$. Mai mult, $-1 < 0$ si $-1 < 1$ (tema).

Putem forma acum alte numere $\{-1, 0|\,\}$, $\{-1|1\}$, $\{1|\}$, $\{0, 1|\}$ etc.

Proprietati. Pentru orice numere $x = \{X_L|X_R\}$, $y = \{Y_L|Y_R\}$ si $z = \{Z_L|Z_R\}$ au loc urmatoarele proprietati

1) $x \leq x$ (reflexivitatea)
2) Daca $x \leq y$ si $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitatea)
3) $x \leq y$ sau $y \leq x$ (total ordonare)
4) $x < y \Leftrightarrow \text{not}(y \leq x)$
5) $x_L < x < x_R, \quad \forall x_L \in X_L, \forall x_R \in X_R$ (conditia 1)
6) Daca $y < x \Rightarrow \{y, X_L|X_R\} = x$
7) Daca $x < y \Rightarrow \{X_L|y, X_R\} = x$

(demonstratiile se fac inductiv, prin reducere la absurd)

Ex. $1 = \{0|\,\} = \{-1, 0|\,\}$ si $0 = \{\,|\,\} = \{-1|\,\} = \{-1|1\}$.

Notam $x = \{1|\,\}$, atunci

$$1 < x \Leftrightarrow \text{not}(x \leq 1) \Leftrightarrow \text{not}(\{1|\,\} \leq \{0|\,\}) \Leftrightarrow \exists x_L \in \{1\} : 1 \leq x_L \quad \text{sau} \quad \ldots$$

Ce valoare atribuim lui x?

Adunarea numerelor. Fie $x = \{X_L|X_R\}$, $y = \{Y_L|Y_R\}$ doua numere. Definim

$$x + y = \{X_L + y, x + Y_L | X_R + y, x + Y_R\},$$

unde s-a notat $a + B = \{a + b | \, b \in B\}$ si $A + b = \{a + b | \, a \in A\}$.

Definitia este sugerata de implicatiile

$$x_L < x < x_R \Rightarrow x_L + y < x + y < x_R + y$$

$$y_L < y < y_R \Rightarrow x + y_L < x + y < x + y_R$$

Se justifica imediat ca $x + 0 = 0 + x = x$ (elementul neutru).

Ex. Revenim la numarul $x = \{1|\,\}$.

$$1 + 1 = \{0|\,\} + \{0|\,\} = \{0 + 1, 1 + 0|\} = \{1|\,\} \overset{\text{not}}{=} 2.$$

In general, $\{n - 1|\,\} = n$ si $\{\,| - (n - 1)\} = -n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Se obtin astfel toate *numerele intregi.*

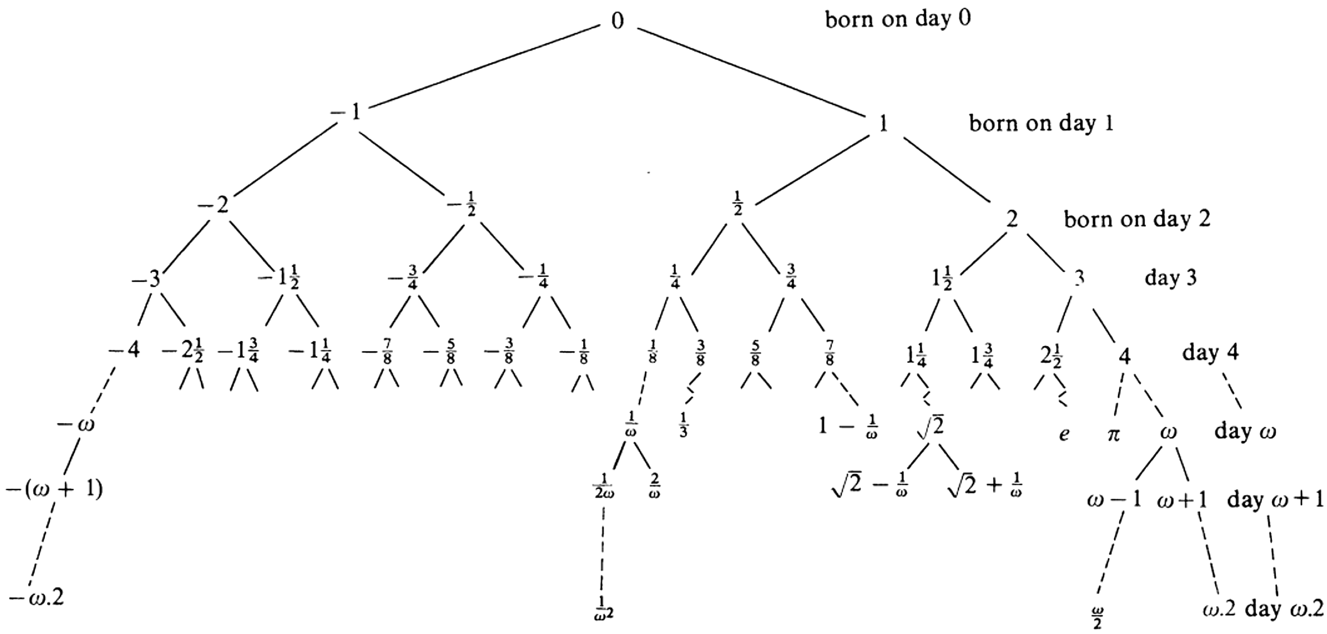
Ex. Fie acum $x = \{0|1\}$. Se justifica (tema) ca $0 < x < 1 < x + 1$.

$$x + x = \{0|1\} + \{0|1\} = \{0 + x, x + 0|1 + x, x + 1\} = \{x|x + 1\}$$
$$1 = \{0|\,\} = \{0|x + 1\} = \{0, x|x + 1\} = \{x|x + 1\}$$

Deci $x = \{0|1\} \overset{\text{not}}{=} \frac{1}{2}$.

Alte exemple $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$, $\{\frac{1}{4}|\frac{1}{2}\} = \{\frac{2}{8}|\frac{4}{8}\} = \frac{3}{8}$, etc.

Succesiv se formeaza toate *numerele diadice* $\frac{m}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.



Varsta unui numar. Este *numarul minim de iteratii* $v(x)$ necesar construirii numarului x, plecand de la elementul nul $0 = \{\,|\,\}$.

Ex. $v(0) = 0$, $v(-1) = v(1) = 1$, $v(\frac{1}{2}) = v(2) = 2$, $v(\frac{1}{4}) = v(3) = 3, \ldots$

Alte numere se vor obtine aplicand acest procedeu de un numar *transfinit* de ori.

Ex. Fie $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}$ si $b_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}}\right)$, $\forall n \geq 1$. Se arata usor folosind analiza de liceu (tema) ca $(a_n)_{n\geq 1}$ si $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt siruri de numere diadice care satisfac $a_n < \frac{1}{3} < b_n$, $\forall n \geq 1$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$. Astfel

$$\frac{1}{3} = \{a_1, a_2, \ldots | b_1, b_2, \ldots\}.$$

Analog se pot construi toate *numerele rationale* si toate *numerele irationale*, caci putem scrie

$$\sqrt{2} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{45}{32}, \frac{181}{128}, \ldots | \ldots, \frac{363}{256}, \frac{91}{64}, \frac{23}{16}, \frac{3}{2}, 2\},$$

unde numerele diadice din membrul drept se obtin succesiv prin metoda injumatatirii intervalului.

Astfel apar toate *numerele reale*.

Apoi

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots | \,\} \stackrel{\text{not}}{=} \omega.$$

Deci $v(\frac{1}{3}) = v(\sqrt{2}) = v(\omega) = \omega$, insa procedeul de constructie poate continua.

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots | \omega\} \stackrel{\text{not}}{=} \omega - 1$$
$$\{0, 1, 2, 3, \ldots | \omega, \omega - 1, \omega - 2, \ldots\} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{2}$$
$$\{0, 1, 2, 3, \ldots | \omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{8}, \ldots\} \stackrel{\text{not}}{=} \sqrt{\omega}$$
$$\{0 | 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{\omega}$$

Proprietate (regula varstei). Fie doua numere x si $y = \{Y_L | Y_R\}$ cu proprietatile
i) $v(x) < v(y)$
ii) $y_L < x < y_R, \quad \forall y_L \in Y_L, \forall y_R \in Y_R$,
atunci $x = y$.

Ex. $\{\frac{1}{2} | 2\} = 1$.

Inmultirea numerelor. Fie $x = \{X_L | X_R\}$, $y = \{Y_L | Y_R\}$ doua numere. Definim

$$xy = \{X_L y + x Y_L - X_L Y_L, x Y_R + X_R y - X_R Y_R | X_L y + x Y_R - X_L Y_R, x Y_L + X_R y - X_R Y_L\},$$

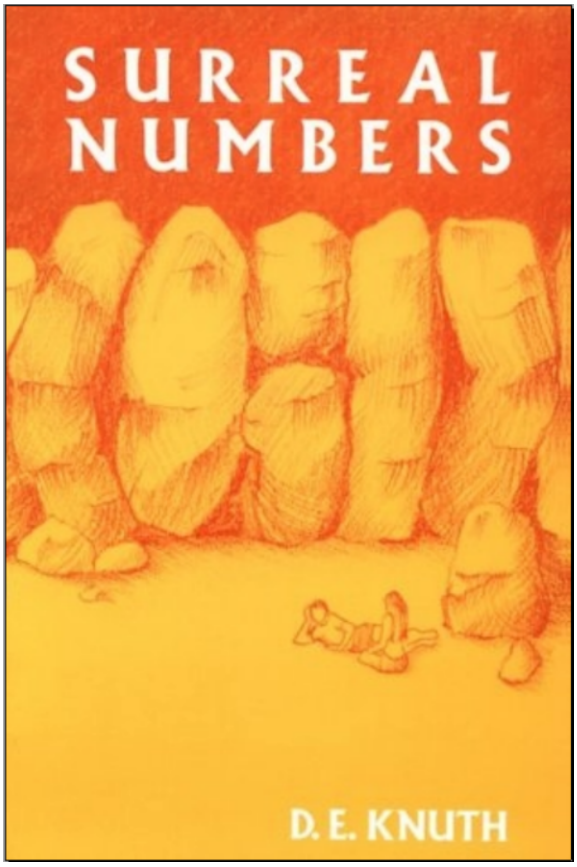
unde s-a notat $aB = \{ab |\, b \in B\}$, $Ab = \{ab |\, a \in A\}$, respectiv $AB = \{ab |\, a \in A,\, b \in B\}$.

Aceasta definitie este sugerata de implicatiile

$$x_L < x < x_R,\, y_L < y < y_R \Rightarrow \begin{cases} (x_L - x)(y - y_L) < 0 \Rightarrow x_L y + x y_L - x_L y_L < xy \\ (x - x_R)(y_R - y) < 0 \Rightarrow x y_R + x_R y - x_R y_R < xy \\ (x_L - x)(y - y_R) > 0 \Rightarrow x_L y + x y_R - x_L y_R > xy \\ (x - x_R)(y_L - y) > 0 \Rightarrow x y_L + x_R y - x_R y_L > xy \end{cases}$$

Operatiile de adunare si inmultire definite mai sus vor avea toate proprietatile uzuale.

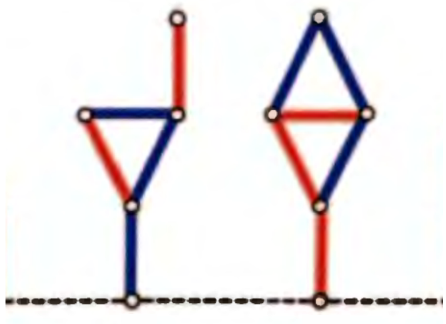
"Surreal numbers" - a mathematical novelette by D.E.Knuth



https://math.ubbcluj.ro/~sberinde/info/Surreal_Numbers.pdf

Numerele suprareale au o interpretare combinatoriala interesanta.

Sa consideram jocul numit "Taierea Arbustilor" (Hackenbush), in care doi jucatori L si R elimina alternativ cate o ramura dintr-o configuratie de genul



cu respectarea urmatoarelor 3 reguli

1. jucatorul L elimina doar ce este cu aLbastru,
2. jucatorul R elimina doar ce este cu Rosu,
3. o structura desprinsa de sol este eliminata.

Jucatorul care se afla in imposibilitatea de a efectua o taietura pierde jocul. Care jucator are strategia sigura de castig, sau pe scurt, care jucator va castiga?

Asociem fiecarui joc o valuare (numar), dupa modelul de constructie al numerelor suprarereale,

$$x = \{X_L | X_R\},$$

unde X_L, respectiv X_R, noteaza multimea optiunilor de joc pentru fiecare jucator (adica valoarea jocului in urma efectuarii unei mutari proprii).

Jocul vid

are optiunile $X_L = X_R = \emptyset$, deci valoarea 0.

Iata mai jos cateva jocuri si valorile lor

{0| } = 1

{ |0} = -1

{-1|1} = 0

{0,1| } = 2

{0|1} = 1/2

{0|1/2} = 1/4

{0,1/2|1} = 3/4

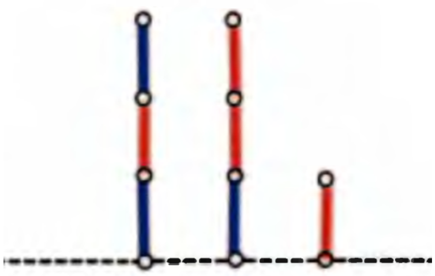
{0,1/2|2} = 1

Proprietati.

1) Un joc are valoare *strict pozitiva* daca va castiga jucatorul L (indiferent daca este la mutare sau nu), jocul are o valoare *strict negativa* daca va castiga jucatorul R (indiferent daca este la mutare sau nu), respectiv, jocul are valoarea *zero* daca castiga al doilea jucator aflat la mutare (indiferent daca este L sau R).

2) Suma valorilor a doua jocuri este egala cu valoarea jocului obtinut prin alaturarea celor doua configuratii.

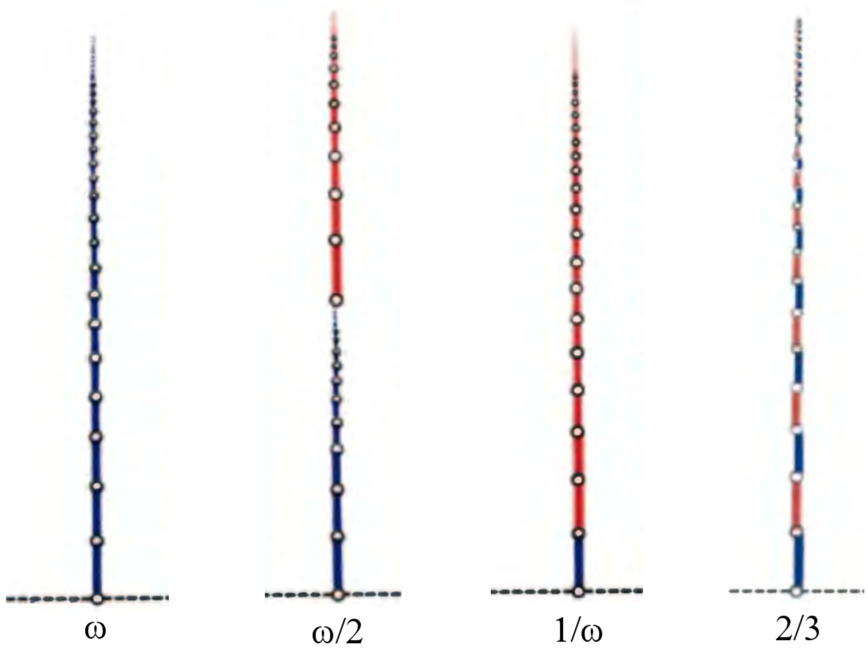
Iata un exemplu



3/4 + 1/4 - 1 = 0

in care al doilea jucator are strategia de castig.

Alte jocuri si valorile lor



Iar acum un joc avand valoarea $\pi \approx 3.1415926...$, obtinut prin urmatoarea tehnica

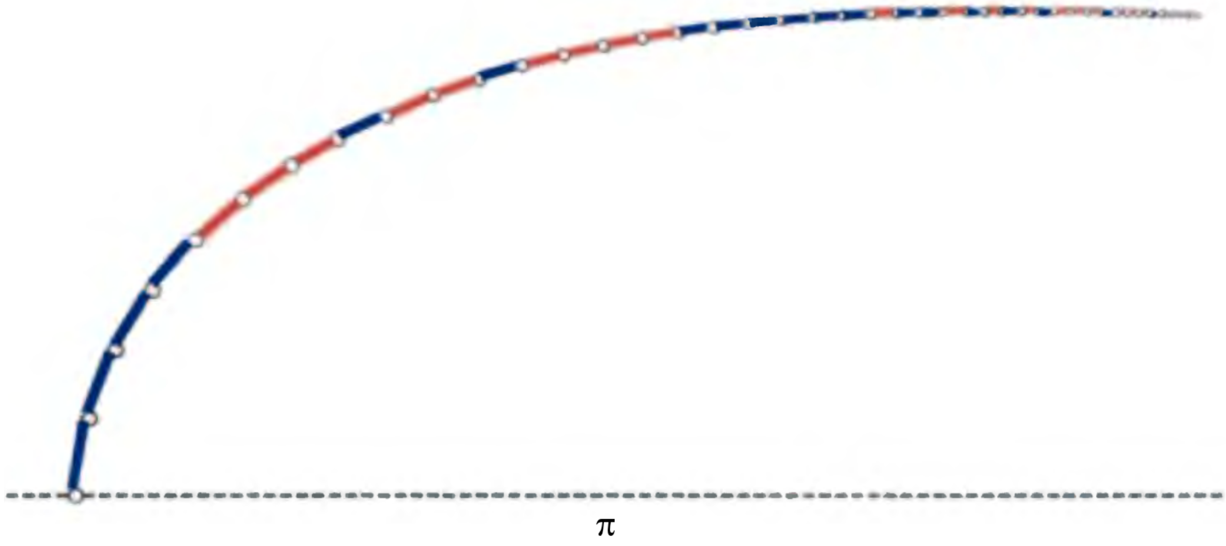
conversia partii intregi: $3 \to 1+1+1 \to 111 \to LLL$

conversia punctului zecimal: $\cdot \to LR$

conversia partii zecimale: $0.1415926... \to 0.0010010000111111... \to 0.RRLRRLRRRRLLLLLL...$

Concatem acum toate secventele de litere

$$\pi \to LLL\,LR\,RRLRRLRRRRLLLLLL...$$



Construiti jocul cu valoarea $\frac{1}{3}$ (tema).

Tehnica de mai sus poate fi utilizata si pentru valori care sunt fractii zecimale finite. In acest caz, ultimul L din secventa se ignora.

Ex. $\frac{9}{8} = 1.125 \to L \quad LR \quad 0.RRL \to LLRRR$