

# Seminar 1

## Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

În acest seminar vom studia ecuații diferențiale de ordinul întâi în formă normală rezolvabile efectiv.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1.1)$$

### 1.1 Ecuatii cu variabile separabile

Ecuatiile diferențiale de ordinul întâi în formă normală cu variabile separabile au următoarea formă:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \quad (1.2)$$

unde  $f \in C(I)$ ,  $g \in C(J, \mathbb{R}^*)$ ,  $J \subset \mathbb{R}$ , sunt continue.

Fie  $y$  o soluție a ecuației (1.2) și  $f : ]x_1; x_2[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : ]y_1; y_2[ \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Din (1.2) obținem:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Știind că  $y' = \frac{dy}{dx}$  deducem:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Fie  $x_0 \in ]x_1; x_2[$  și notăm cu  $y_0 = y(x_0)$ . Integrăm relația de mai sus:

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s)ds. \quad (1.3)$$

Considerăm funcția:

$$G(\xi) = \int_{y_0}^{\xi} \frac{dt}{g(t)},$$

funcție ce este derivabilă și strict monotonă datorită semnelui funcției  $g$ , fapt ce asigură existența inversei  $G^{-1}$ . Astfel din relația (1.3) obținem:

$$G(y) = \int_{x_0}^x f(s)ds \implies$$

$$y(x) = G^{-1} \left( \int_{x_0}^x f(s)ds \right) \quad (1.4)$$

Reciproc se poate arăta că orice funcție de forma (1.4) este soluție a ecuației (1.2).

**Observația 1.1.1** Dacă există  $y_0 \in ]y_1; y_2[$  astfel încât  $g(y_0) = 0$  atunci funcția constantă  $y(x) \equiv y_0$  este soluție a ecuației (1.2). Astfel de soluții se numesc **soluții singulare**.

**Exercițiul 1.1.1** Să se rezolve ecuațiile diferențiale:

1.  $y' = 2x(1 + y^2)$ ;
2.  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ ;
3.  $xy' = y^3 + y$ ;
4.  $xy + (2x - 1)y' = 0$ ;
5.  $y' = k \cdot \frac{y}{x}$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$ ;
6.  $y - xy' = a(1 + x^2y')$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**Rezolvare.**

1.  $f(x) = 2x$ ,  $g(y) = 1 + y^2 > 0$

$$\frac{y'}{1 + y^2} = 2x \implies \int \frac{dt}{1 + t^2} = \int 2sds \implies \arctg(y) = x^2 + c \implies y = tg(x^2 + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Observația 1.1.2** Orice funcție de forma de mai sus definită pe un interval este soluție a ecuației.

$$2. \quad y' = -\frac{2x}{x^2 - 1} \cdot y^2$$

$$f(x) = -\frac{2x}{x^2 - 1}, \quad f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(y) = y^2, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se observă că pentru  $y_0 = 0 \implies g(y_0) = 0$ . Astfel  $y \equiv 0$  este soluție singulară.

Pentru cazul în care  $y \neq 0$  avem:

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}dx \implies y^{-1} = \ln|x^2 - 1| + c \implies y(x) = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conform teoriei generale ar trebui să considerăm 5 cazuri distincte corespunzătoare intervalelor, dar cum expresiile primitivelor sunt aceleași se pot rezolva simultan toate cazurile.

De exemplu, dacă  $c < 0$  atunci soluțiile sunt definite pe intervalele:

$$\left] -\infty; -(1 + e^{-c})^{\frac{1}{2}} \right[; \left] -(1 + e^{-c})^{\frac{1}{2}}; -1 \right[; ] -1; 1[; \left] 1; (1 + e^{-c})^{\frac{1}{2}} \right[; \left] (1 + e^{-c})^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[.$$

**Observația 1.1.3** *În ecuația inițială nu apar discontinuitățile  $x = -1$  și  $x = 1$ . De aceea suntem tentați să extindem prin continuitate soluția atribuindu-i valoarea 0 în  $x = -1$  și  $x = 1$ . Acest lucru nu este posibil deoarece extensiile obținute nu sunt funcții derivabile (nici măcar lateral) în  $x = -1$  și  $x = 1$ .*

3. Soluția în formă implicită este:  $\ln y - \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \ln x + c$  sau dacă înlocuim  $c$  cu  $\ln c$  obținem soluția în formă explicită

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{c^2 x^2}{1 - c^2 x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Soluții singulare:  $y(x) = 0$ ;

soluția generală în formă implicită:  $\ln |y| = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |2x - 1| + c$

sau dacă înlocuim  $c$  cu  $\ln c$  obținem soluția în formă explicită

$$y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot |2x - 1|^{-\frac{1}{4}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. Soluții singulare:  $y(x) = 0$ ;

soluția generală în formă explicită:  $y(x) = cx^k, \quad c \in \mathbb{R}.$

6. Ecuația devine  $y' = \frac{y - a}{x(ax + 1)}$

Soluții singulare:  $y(x) = 0$ ;

Soluția generală în formă explicită:  $y(x) = a + \frac{cx}{1 + ax}, \quad c \in \mathbb{R}.$

## 1.2 Ecuații omogene în sens Euler

Ecuațiile diferențiale omogene în sens Euler au următoarea formă:

$$y'(x) = g(x, y), \tag{1.5}$$

unde funcția  $g$  este omogenă de grad 0.

**Definiția 1.2.1** *Funcția  $g(x, y)$  este omogenă de grad  $k$  dacă:*

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y).$$

Pentru  $k = 0$  avem  $g(\lambda x, \lambda y) = g(x, y)$ , lucru ce ne permite scrierea ecuației (1.5) în forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Rezolvarea acestei ecuații se face prin substituția:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Înlocuind în (1.6) obținem ecuația cu variabile separabile:

$$z'(x) = \frac{1}{x} \cdot [f(z) - z]$$

**Exercițiul 1.2.1** *Să se rezolve:*

1.  $2x^2y' = x^2 + y^2;$

2.  $y' = -\frac{x+y}{y};$

3.  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$

4.  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$

5.  $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

6.  $x - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x \cos\left(\frac{y}{x}\right) y' = 0$

**Soluții:**

1. Soluția generală:  $y(x) = x - \frac{2}{\ln|x| + c}$

soluție singulară  $y(x) = x;$

2. Soluția generală:  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2y-x}{x}\right)\right) = -\ln|x| + c$

3. Soluția generală:  $y(x) = x \ln|\ln|x| + c|$

4. Soluția generală:  $y(x) = x \sin(\ln|x| + c)$

Soluții singulare:  $y(x) = \pm x$

5. Soluția generală:  $y(x) = x \arcsin(cx);$

6. Soluția generală:  $y(x) = -x \arcsin(\ln|x| + c)$

Soluții singulare:  $y(x) = k\pi x, k \in \mathbb{Z}.$

## 1.3 Ecuații liniare

Forma generală a ecuațiilor diferențiale liniare este:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (1.7)$$

unde  $P$  și  $Q$  sunt funcții continue. Rezolvarea ecuațiilor liniare se face astfel:

1. Se rezolvă ecuația liniară omogenă:

$$y' + P(x)y = 0, \quad (1.8)$$

ecuația omogenă fiind o ecuație cu variabile separabile, soluția generală o notăm cu  $y_0$ ;

2. Se caută o soluție particulară a ecuației neomogene  $y_p$  prin metoda variațiilor constantelor;
3. Soluția generală a ecuației diferențiale liniare neomogene este:

$$y = y_0 + y_p \quad (1.9)$$

**Exercițiul 1.3.1** *Să se rezolve:*

1.  $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ;
2.  $y' + \frac{2}{x} \cdot y = x^3$ ;
3.  $y' + 2x \cdot y = 2xe^{-x^2}$ ;
4.  $xy' - y + x = 0$ ;
5.  $y' - y = \sin(x)$
6.  $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x + \arcsin(x)$

**Soluții:**

1.  $y(x) = c \cdot \cos(x) + \sin(x)$ ;
2.  $y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$ ;
3.  $y(x) = (c + x^2)e^{-x^2}$ ;
4.  $y(x) = cx - x \ln|x|$ ;
5.  $y(x) = xe^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$ ;
6.  $y(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2(x)$ .

# Bibliografie

- [1] Gh. Micula, P. Pavel, *Ecuatii diferențiale și integrale prin probleme și exerciții*, Ed. Dacia, 1989.
- [2] G. Moroșanu, *Ecuatii diferențiale. Aplicații*, Ed. Acad. RSR, 1989.
- [3] M.A. Șerban, *Ecuatii și sisteme de ecuații diferențiale*, Ed. Presa Univ. Clujană, Cluj-Napoca, 2009.