Seminarul 6

1. Într-un joc, se aruncă trei monede. Un jucător câștigă 1 euro pentru fiecare apariție a unui cap și pierde 8 euro în cazul apariției a trei pajuri. Calculați pentru suma de bani a jucătorului: funcția de repartiție, valoarea medie și deviația standard.

2. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:
a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu;
b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

Funcţia de densitate pentru distribuţia uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

3. Fie $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ și Ω spațiul de selecție. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente definite pe Ω, care au aceeaşi distribuţie ca X.
a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \leq 3 \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > 3 \end{cases}$, $\omega \in \Omega$.

Ce distribuţie are Y_n? Spre ce valoare converge a.s. şirul $\left(\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right)_n$?
b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$Z_n : \Omega \to [0, 1] \qquad Z_n(\omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i(\omega) \leq 3\}}{n}.$$

Ce relație avem între $Y_1 + ... + Y_n$ și Z_n? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

4. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1, 3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:
i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.
ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.
iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

5. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_1, un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_2, un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer.
a) Calculaţi probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mică decât 5 secunde.
b) Calculaţi valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

6. Fie v.a. $U \sim Unif[1, 3]$. Să se calculeze $E(U^2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce U^2 *nu* urmează distribuţia $Unif[1, 9]$!

7. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$. Să se calculeze $V(U_1 + U_2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce $U_1 + U_2$ *nu* urmează distribuţia $Unif[0, 6]$!

8. Timpii de funcţionare (în ore) a două baterii sunt două variabile aleatoare independente $X \sim Unif[0, 2]$ şi $Y \sim Exp(1)$. Fie $T = \min\{X, Y\}$ timpul de funcţionare a bateriilor legate în serie. Calculaţi: $P(X < 0{,}5)$, $P(T > 1)$, $P(T < 1 | X \geq 1)$.