Curs - Probabilităţi şi Statistică 2025/2026
Secţia Informatică

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca
Conf. Dr. Habil. Hannelore Lisei

Teoria Probabilităţilor

Teoria probabilităţilor este o disciplină a matematicii care se ocupă de studiul fenomenelor aleatoare.

- *aleator* = care depinde de o împrejurare viitoare şi nesigură; supus întâmplării
- provine din latină: *aleatorius*; *alea* (lat.) = zar; joc cu zaruri; joc de noroc; şansă; risc

$\hookrightarrow$ se măsoară *şansele pentru succes* sau *riscul pentru insucces* al unor evenimente

Fenomene şi procese aleatoare apar, de exemplu, în:

[Sursa: www.financialmarket.ro]

$\rightarrow$ pariuri, loto (6 din 49), jocuri de noroc / jocuri online
$\rightarrow$ previziuni meteo
$\rightarrow$ previziuni economice / financiare, investiţii, cumpărături online (predicţia comportamentului clienţilor)
$\rightarrow$ sondaje de opinie (analiza unor strategii politice), asigurări (evaluarea riscurilor / pierderilor)

$\rightarrow$ **în informatică**:
$\triangleright$ sisteme de comunicare, prelucrarea informaţiei, modelarea traficului în reţea, criptografie;
$\triangleright$ analiza probabilistică a performanţei unor algoritmi, fiabilitatea sistemelor, predicţii în cazul unor sisteme complexe;
$\triangleright$ algoritmi de simulare, machine learning, data mining, recunoaşterea formelor / a vocii;
$\triangleright$ generarea de numere aleatoare (pseudo-aleatoare), algoritmi aleatori
$\triangleright$ se pot genera numere cu "'adevarat aleatoare"' (*true random numbers*), folosind ca surse fenomene fizice, ca de exemplu surse radioactive (momentele de timp în care particulele se dezintegrează sunt complet imprevizibile), sau variaţiile de amplitudine din perturbările atmosferice (*atmospheric noise*, folosit de `https://www.random.org/randomness/`), sau comportamentul fotonilor (în mecanica cuantică, când un foton loveşte un separator de fascicule -*beam splitter*-, fotonul are şansa de 50% de a fi reflectat şi 50% de a trece); etc.

Exemplu: Generarea de valori aleatoare (în Python)

```
# Exemplu 1
import numpy as np
n=4
r = np.random.rand(n)
print(n,"valori aleatoare din intervalul (0,1):",r)
N = np.random.randint(-1,6,size=n+3)
print(n+3,"numere intregi aleatoare din intervalul [-1,5]:",N)
L = ["AB", "XY", "EF", "MN","FG"]
print(n,"-extrageri aleatoare cu returnare:",np.random.choice(L,size=n,replace=True))
print(n,"-extrageri aleatoare fara returnare:",np.random.choice(L,size=n,replace=False))

# Exemplu 2
import numpy as np
n=30
R = np.random.randint(1,7,size=n)
print(n,"valori aleatoare:\n",R)
x= sum(R==2)
print("Rezultat ......",x)
```

Algoritmi aleatori

Def. 1. *Un algoritm pe cursul executării căruia se iau anumite decizii aleatoare este numit* ***algoritm aleator (randomizat)***.

▷ durata de execuţie, spaţiul de stocare, rezultatul obţinut sunt variabile aleatoare (chiar dacă se folosesc aceleaşi valori input)

▷ la anumite tipuri de algoritmi corectitudinea e garantată doar cu o anumită probabilitate.

• Algoritm de tip **Las Vegas** este un algoritm aleator, care returnează la fiecare execuţie rezultatul corect (independent de alegerile aleatoare făcute); durata de execuţie este o variabilă aleatoare.
Exemplu: Random QuickSort

• Un algoritm aleator pentru care rezultatele obţinute sunt corecte *doar* cu o anumită probabilitate se numeşte algoritm **Monte Carlo**.
↪ se examinează probabilitatea cu care rezultatul este corect; probabilitatea de eroare poate fi scăzută semnificativ prin execuţii repetate, independente.
Exemplu:
▷ testul Miller-Rabin, care verifică dacă un număr natural este prim sau este număr compus; testul returnează fie răspunsul "numărul este sigur un număr compus" sau răspunsul "numărul este probabil un număr prim".

Exerciţiu: Fie S un vector cu 300 de elemente, din mulţimea $\{0, 1, 2\}$ (ordinea lor este necunoscută; se presupune că şirul conţine cel puţin un 0).
$\longrightarrow$ De care tip este următorul algoritm?

```
import numpy as np
N=60
S = np.random.randint(0,3, size = N)
k=1
i= np.random.randint(low=0, high=N)
while S[i] != 0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[",i,"]=",S[i])
    i= np.random.randint(low=0, high=N)
    k=k+1
if S[i]==0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[",i,"]=",S[i])
print("La iteratia",k,".....")
```

Noţiuni introductive:

• Experienţa aleatoare este acea experienţă al cărei rezultat nu poate fi cunoscut decât după încheierea ei.

• Evenimentul este rezultatul unui experiment.

Exemple:

$\triangleright$ experiment: aruncarea unei monede, eveniment: moneda indică pajură

$\triangleright$ experiment: extragerea unei cărţi de joc, eveniment: s-a extras un as

$\triangleright$ experiment: extragerea unui număr la loto, eveniment: s-a extras numărul 27

• evenimentul imposibil, notat cu $\emptyset$, este evenimentul care nu se realizează niciodată la efectuarea experienţei aleatoare

• evenimentul sigur este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienţei aleatoare

• spaţiul de selecţie, notat cu Ω, este mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat

$\diamond$ spaţiul de selecţie poate fi finit sau infinit

• dacă A este o submulţime a lui Ω atunci A se numeşte eveniment aleator, iar dacă A are un singur element atunci A este un eveniment elementar.

$\triangleright$ O *analogie între evenimente şi mulţimi* permite o scriere şi o exprimare mai comode ale unor idei şi rezultate legate de conceptul de eveniment aleator.

Exemplu: Experimentul: aruncarea unui zar, spaţiul de selecţie: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, e_i: s-a obţinut numărul i ($i = 1, \ldots, 6$) ; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ sunt evenimente elementare

A: s-a obţinut un număr par $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$

$\bar{A}$: s-a obţinut un număr impar $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$ ♣

Operaţii cu evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul reuniune $A \cup B$ este un eveniment care se produce dacă cel puţin unul din evenimentele A sau B se produce

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul intersecţie $A \cap B$ este un eveniment care se produce dacă cele două evenimente A şi B se produc în acelaşi timp

• dacă $A \subseteq \Omega$ atunci evenimentul contrar sau complemetar $\bar{A}$ este un eveniment care se realizează atunci când evenimentul A nu se realizează

• $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente **disjuncte** (incompatibile), dacă $A \cap B = \emptyset$

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul diferenţă $A \setminus B$ este un eveniment care se produce dacă A are loc şi B nu are loc, adică $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

• Au loc relaţiile: $A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad \bar{\bar{A}} = A.$

Relaţii între evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci A implică B, dacă producerea evenimentului A conduce la producerea evenimentului B: $A \subseteq B$

• dacă A implică B şi B implică A, atunci evenimentele A şi B sunt egale: $A = B$

Proprietăţi ale operaţiilor între evenimente $A, B, C \subseteq \Omega$

Operaţiile de reuniune şi intersecţie sunt operaţii **comutative**:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A\,,$$

asociative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,$$

şi **distributive**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

satisfac **legile lui De Morgan**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Frecvenţa relativă şi frecvenţa absolută

Def. 2. *Fie A un eveniment asociat unei experienţe, repetăm experienţa de n ori (în aceleaşi condiţii date) şi notăm cu $r_n(A)$ numărul de realizări ale evenimentului A; frecvenţa relativă a evenimentului A este numărul*

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este frecvenţa absolută a evenimentului A.

Definiţia clasică a probabilităţii

Def. 3. *Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr şi au aceleaşi şanse de a se realiza,* ***probabilitatea*** *unui eveniment A este numărul*

$$P(A) = \frac{\textit{numărul de cazuri favorabile apariţiei lui } A}{\textit{numărul total de cazuri posibile}}.$$

► Prin repetarea de multe ori a unui experiment, în condiţii practic identice, frecvenţa relativă $f_n(A)$ de apariţie a evenimentului A este aproximativ egală cu $P(A)$: $f_n(A) \approx P(A)$ pentru valori mari ale lui n.
► Din punct de vedere probabilistic şirul $\big(f_n(A)\big)_n$ "‘converge aproape sigur"’ către $P(A)$ când $n \to \infty$.

Exemplu: Experiment: Se aruncă 4 monede. Evenimentul A: *(exact) 3 din cele 4 monede indică pajură*; experimentul s-a repetat de $n = 100$ de ori şi evenimentul A a apărut de 22 de ori.

$$f_n(A) = ?, \qquad P(A) = ?$$

R.: $f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$ este frecvenţa relativă a evenimentului A;

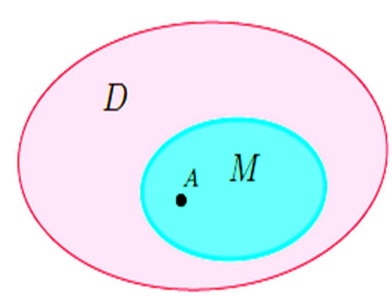
$P(A) = \frac{4}{2^4} = 0.25$ probabilitatea (teoretică) a evenimentului A. ♠

Exerciţiu: (1) Se alege aleator un număr din mulţimea $\{1, 2, 3, ...99\}$. Care este probabilitatea ca acesta să nu fie divizibil nici cu 4, nici cu 6?
(2) Un centru de calcul dispune de 24 de servere:
▷ 10 servere sunt rezervate pentru baze de date,
▷ 8 servere sunt pentru aplicaţii web,
▷ 6 servere sunt dedicate sarcinilor de învăţare automată.
Un nou proces este atribuit aleator unuia dintre servere.
▷ Care este probabilitatea ca procesul să nu ruleze pe un server de baze de date?
▷ Care este probabilitatea ca procesul să ruleze pe un server web sau de învăţare automată? ♢

Definiţia axiomatică a probabilităţii

Definiţia clasică a probabilităţii poate fi utilizată numai în cazul în care numărul cazurilor posibile este finit. Dacă numărul evenimentelor elementare este infinit, atunci există evenimente pentru care probabilitatea în sensul clasic nu are nici un înţeles.

Probabilitatea geometrică: Măsura unei mulţimi corespunde lungimii în $\mathbb{R}$, ariei în $\mathbb{R}^2$, volumului în $\mathbb{R}^3$. Fie $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mulţimi cu măsură finită.
Alegem aleator un punct $A \in D$ (în acest caz spaţiul de selecţie



$M \subset D \subset \mathbb{R}^2$

este D). Probabilitatea geometrică a evenimentului "$A \in M$" este

$$P(A \in M) := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$

O teorie formală a probabilităţii a fost creată în anii '30 ai secolului XX de către matematicianul **Andrei Nikolaevici Kolmogorov**, care, în anul **1933**, a dezvoltat teoria axiomatică a probabilităţii în lucrarea sa *Conceptele de bază ale Calculului Probabilităţii*.

$\twoheadrightarrow$ $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ este o funcţie astfel încât oricărui eveniment aleator $A \in \mathcal{K}$ i se asociază valoarea $P(A)$, ***probabilitatea de apariţie a evenimentului*** A

$\hookrightarrow$ $\mathcal{K}$ este o mulţime de evenimente şi are structura unei σ-algebre (vezi Def. 4)
$\hookrightarrow$ P satisface anumite axiome (vezi Def. 5)

Def. 4. *O familie $\mathcal{K}$ de evenimente din spaţiul de selecţie Ω se numeşte* ***σ-algebră*** *dacă sunt satisfăcute condiţiile:*

(1) *$\mathcal{K}$ este nevidă;*

(2) *dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci $\bar{A} \in \mathcal{K}$;*

(3) *dacă $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.*

Exemple: 1) Dacă $\emptyset \neq A \subset \Omega$ atunci $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ este o σ-algebră.
2) $\mathcal{P}(\Omega)$:= mulţimea tuturor submulţimilor lui Ω este o σ-algebră.
3) Dacă $\mathcal{K}$ este o σ-algebră pe Ω şi $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$, atunci

$$B \cap \mathcal{K} = \{B \cap A : A \in \mathcal{K}\}$$

este o σ-algebră pe mulţimea B. $\diamondsuit$

P. 1. *Proprietăţi ale unei σ-algebre: Dacă $\mathcal{K}$ este o σ-algebră în Ω, atunci au loc proprietăţile:*

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$;

(2) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{K}$;

(3) $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Def. 5. *Fie $\mathcal{K}$ o σ-algebră pe Ω. O funcţie $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***probabilitate*** *dacă satisface axiomele:*

(1) $P(\Omega) = 1$;

(2) $P(A) \geq 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{K}$;

(3) *pentru orice şir* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de evenimente două câte două disjuncte (adică* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pentru orice* $i \neq j$*) din* $\mathcal{K}$ *are loc*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *se numeşte* ***spaţiu de probabilitate***.

Exemplu: 1) Cea mai simplă (funcţie de) probabilitate se obţine pentru cazul unui *spaţiu de selecţie finit* Ω: fie $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$ (mulţimea tuturor submulţimilor lui Ω) şi $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \text{ unde } \#A \text{ reprezintă numărul elementelor lui } A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

P astfel definită verifică Def. 5 şi corespunde *definiţiei clasice a probabilităţii unui eveniment* (a se vedea Def. 3).

2) Fie $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ şi $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definită prin $P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Are loc $P(\mathbb{N}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, iar axiomele din Def. 5 sunt îndeplinite . $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ este un spaţiu de probabilitate; Def. 5-(3) este îndeplinită, datorită teoremei din analiză, care afirmă că pentru o serie cu termeni pozitivi, schimbarea ordinii termenilor seriei nu schimbă natura seriei şi nici suma ei. ♣