Curs - Probabilităţi şi Statistică 2025/2026
Secţia Informatică

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca
Conf. Dr. Habil. Hannelore Lisei

Teoria Probabilităţilor

Teoria probabilităţilor este o disciplină a matematicii care se ocupă de studiul fenomenelor aleatoare.

- *aleator* = care depinde de o împrejurare viitoare şi nesigură; supus întâmplării
- provine din latină: *aleatorius*; *alea* (lat.) = zar; joc cu zaruri; joc de noroc; şansă; risc

$\hookrightarrow$ se măsoară *şansele pentru succes* sau *riscul pentru insucces* al unor evenimente

[Sursa: www.financialmarket.ro]

Fenomene şi procese aleatoare apar, de exemplu, în:

$\rightarrow$ pariuri, loto (6 din 49), jocuri de noroc / jocuri online
$\rightarrow$ previziuni meteo
$\rightarrow$ previziuni economice / financiare, investiţii, cumpărături online (predicţia comportamentului clienţilor)
$\rightarrow$ sondaje de opinie (analiza unor strategii politice), asigurări (evaluarea riscurilor / pierderilor)

$\rightarrow$ **în informatică**:
$\triangleright$ sisteme de comunicare, prelucrarea informaţiei, modelarea traficului în reţea, criptografie;
$\triangleright$ analiza probabilistică a performanţei unor algoritmi, fiabilitatea sistemelor, predicţii în cazul unor sisteme complexe;
$\triangleright$ algoritmi de simulare, machine learning, data mining, recunoaşterea formelor / a vocii;
$\triangleright$ generarea de numere aleatoare (pseudo-aleatoare), algoritmi aleatori
$\triangleright$ se pot genera numere cu „adevărat aleatoare” (*true random numbers*), folosind ca surse fenomene fizice, ca de exemplu surse radioactive (momentele de timp în care particulele se dezintegrează sunt complet imprevizibile), sau variaţiile de amplitudine din perturbările atmosferice (*atmospheric noise*, folosit de `https://www.random.org/randomness/`), sau comportamentul fotonilor (în mecanica cuantică, când un foton loveşte un separator de fascicule -*beam splitter*-, fotonul are şansa de 50% de a fi reflectat şi 50% de a trece); etc.

Exemplu: Generarea de valori aleatoare (în Python)

```
# Exemplu 1
import numpy as np
n=4
r = np.random.rand(n)
print(n,"valori aleatoare din intervalul (0,1):",r)
N = np.random.randint(-1,6,size=n+3)
print(n+3,"numere intregi aleatoare din intervalul [-1,5]:",N)
L = ["AB", "XY", "EF", "MN","FG"]
print(n,"-extrageri aleatoare cu returnare:",np.random.choice(L,size=n,replace=True))
print(n,"-extrageri aleatoare fara returnare:",np.random.choice(L,size=n,replace=False))

# Exemplu 2
import numpy as np
n=30
R = np.random.randint(1,7,size=n)
print(n,"valori aleatoare:\n",R)
x= sum(R==2)
print("Rezultat ......",x)
```

Algoritmi aleatori

Def. 1. *Un algoritm pe cursul executării căruia se iau anumite decizii aleatoare este numit **algoritm aleator (randomizat)**.*

▷ durata de execuţie, spaţiul de stocare, rezultatul obţinut sunt variabile aleatoare (chiar dacă se folosesc aceleaşi valori input)

▷ la anumite tipuri de algoritmi corectitudinea e garantată doar cu o anumită probabilitate.

• Algoritm de tip **Las Vegas** este un algoritm aleator, care returnează la fiecare execuţie rezultatul corect (independent de alegerile aleatoare făcute); durata de execuţie este o variabilă aleatoare.
Exemplu: Random QuickSort

• Un algoritm aleator pentru care rezultatele obţinute sunt corecte *doar* cu o anumită probabilitate se numeşte algoritm **Monte Carlo**.
↪ se examinează probabilitatea cu care rezultatul este corect; probabilitatea de eroare poate fi scăzută semnificativ prin execuţii repetate, independente.
Exemplu:
▷ testul Miller-Rabin, care verifică dacă un număr natural este prim sau este număr compus; testul returnează fie răspunsul „numărul este sigur un număr compus" sau răspunsul „numărul este probabil un număr prim".

Exerciţiu: Fie S un vector cu 60 de elemente, din mulţimea $\{0, 1, 2\}$ (ordinea lor este necunoscută; se presupune că şirul conţine cel puţin un 0).
$\longrightarrow$ De care tip este următorul algoritm?

```
import numpy as np
N=60
S = np.random.randint(0,3, size = N)
k=1
i= np.random.randint(low=0, high=N)
while S[i] != 0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[",i,"]=",S[i])
    i= np.random.randint(low=0, high=N)
    k=k+1
if S[i]==0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[",i,"]=",S[i])
print("S-a gasit aleator un 0.")
```

Răspuns: Algoritm de tip Las Vegas, algoritmul se încheie întotdeauna cu găsirea unui 0.

Versiunea Monte Carlo a problemei formulate anterior: se dă M numărul maxim de iteraţii.

```
import numpy as np
print("a doua versiune")
N=50
S = np.random.randint(3,size=N)
print(S)
#un vector cu N  elemente, din multimea {0,1,2}
M=3  #nr maxim de iteratii  M>1
a=True
for k in range(M) :
    print("iteratia:",k+1)
    i= np.random.randint(low=0, high=N)
    print("S[",i,"]=",S[i])
    if S[i] == 0:
        print("la iteratia",k+1,"s-a gasit aleator un 0.")
        a=False
        break
if a:
    print("In",k+1,"iteratii nu s-a gasit niciun 0.")
```

$\triangleright$ dacă 0 este găsit, atunci algoritmul se încheie cu rezultatul corect, altfel algoritmul nu găseşte niciun 0.

Noţiuni introductive:

• Experienţa aleatoare (experimentul aleator) este acea experienţă al cărei rezultat nu poate fi cunoscut decât după încheierea ei.
• Evenimentul este rezultatul unei experienţe aleatoare.

Exemple:

$\triangleright$ experienţa: aruncarea unei monede, eveniment: moneda indică pajură

▷ experienţa: extragerea unei cărţi de joc, eveniment: s-a extras un as
▷ experienţa: extragerea unui număr la loto, eveniment: s-a extras numărul 27
• evenimentul imposibil, notat cu $\emptyset$, este evenimentul care nu se realizează niciodată la efectuarea experienţei aleatoare
• evenimentul sigur este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienţei aleatoare
• spaţiul de selecţie, notat cu Ω, este mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experienţei considerate
    ◇ spaţiul de selecţie poate fi finit sau infinit
• dacă A este o submulţime a lui Ω atunci A se numeşte eveniment aleator, iar dacă A are un singur element atunci A este un eveniment elementar.
▷ O *analogie între evenimente şi mulţimi* permite o scriere şi o exprimare mai comode ale unor idei şi rezultate legate de conceptul de eveniment aleator.

Exemplu: Experimentul: aruncarea unui zar, spaţiul de selecţie: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, e_i: s-a obţinut numărul i $(i = 1, \ldots, 6)$; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ sunt evenimente elementare
A: s-a obţinut un număr par $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$
$\bar{A}$: s-a obţinut un număr impar $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$ ♣

Operaţii cu evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul reuniune $A \cup B$ este un eveniment care se produce dacă cel puţin unul din evenimentele A sau B se produce

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul intersecţie $A \cap B$ este un eveniment care se produce dacă cele două evenimente A şi B se produc în acelaşi timp

• dacă $A \subseteq \Omega$ atunci evenimentul contrar sau complemetar $\bar{A}$ este un eveniment care se realizează atunci când evenimentul A nu se realizează

• $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente **disjuncte** (incompatibile), dacă $A \cap B = \emptyset$

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul diferenţă $A \setminus B$ este un eveniment care se produce dacă A are loc şi B nu are loc, adică $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

• Au loc relaţiile: $A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad \bar{\bar{A}} = A.$

Relaţii între evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci A implică B, dacă producerea evenimentului A conduce la producerea evenimentului B: $A \subseteq B$

• dacă A implică B şi B implică A, atunci evenimentele A şi B sunt egale: $A = B$

Proprietăţi ale operaţiilor între evenimente $A, B, C \subseteq \Omega$

Operaţiile de reuniune şi intersecţie sunt operaţii **comutative**:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A\,,$$

asociative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,$$

şi **distributive**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

satisfac **legile lui De Morgan**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Frecvenţa relativă şi frecvenţa absolută

Def. 2. *Fie A un eveniment asociat unei experienţe, repetăm experienţa de n ori (în aceleaşi condiţii date) şi notăm cu $r_n(A)$ numărul de realizări ale evenimentului A; frecvenţa relativă a evenimentului A este numărul*

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este frecvenţa absolută a evenimentului A.

Definiţia clasică a probabilităţii

Def. 3. *Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr şi au aceleaşi şanse de a se realiza,* ***probabilitatea*** *unui eveniment A este numărul*

$$P(A) = \frac{\textit{numărul de cazuri favorabile apariţiei lui } A}{\textit{numărul total de cazuri posibile}}.$$

► Prin repetarea de multe ori a unui experiment, în condiţii practic identice, frecvenţa relativă $f_n(A)$ de apariţie a evenimentului A este aproximativ egală cu $P(A)$: $f_n(A) \approx P(A)$ pentru valori mari ale lui n.
► Din punct de vedere probabilistic şirul $\big(f_n(A)\big)_n$ „converge aproape sigur" către $P(A)$ când $n \to \infty$.

Exemplu: Experiment: Se aruncă 4 monede. Evenimentul A: *(exact) 3 din cele 4 monede indică pajură*; experimentul s-a repetat de $n = 100$ de ori şi evenimentul A a apărut de 22 de ori.

$$f_n(A) = ?, \qquad P(A) = ?$$

R.: $f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$ este frecvenţa relativă a evenimentului A;

$P(A) = \frac{4}{2^4} = 0.25$ probabilitatea (teoretică) a evenimentului A. ♠

Exerciţiu: **(1)** Se alege aleator un număr din mulţimea $\{1, 2, 3, ...99\}$. Care este probabilitatea ca acesta să nu fie divizibil nici cu 4, nici cu 6?

(2) Un centru de calcul dispune de 24 de servere:

▷ 10 servere sunt rezervate pentru baze de date,

▷ 8 servere sunt pentru aplicaţii web,

▷ 6 servere sunt dedicate sarcinilor de învăţare automată.

Un nou proces este atribuit aleator unuia dintre servere.

▷ Care este probabilitatea ca procesul să nu ruleze pe un server de baze de date?

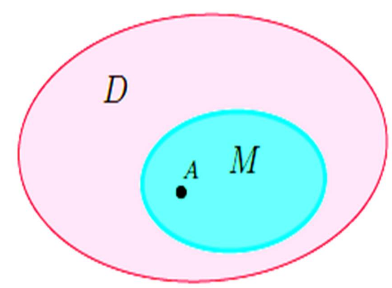
▷ Care este probabilitatea ca procesul să ruleze pe un server web sau de învăţare automată? ♢

Definiţia axiomatică a probabilităţii

Definiţia clasică a probabilităţii poate fi utilizată numai în cazul în care numărul cazurilor posibile este finit. Dacă numărul evenimentelor elementare este infinit, atunci există evenimente pentru care probabilitatea în sensul clasic nu are nici un înţeles.

Probabilitatea geometrică: Măsura unei mulţimi corespunde lungimii în $\mathbb{R}$, ariei în $\mathbb{R}^2$, volumului în $\mathbb{R}^3$. Fie $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mulţimi cu măsură finită.
Alegem aleator un punct $A \in D$ (în acest caz spaţiul de selecţie este D). Probabilitatea geometrică a evenimentului "$A \in M$" este

$$P(A \in M) := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$



$M \subset D \subset \mathbb{R}^2$

O teorie formală a probabilităţii a fost creată în anii '30 ai secolului XX de către matematicianul **Andrei Nikolaevici Kolmogorov**, care, în anul **1933**, a dezvoltat teoria axiomatică a probabilităţii în lucrarea sa *Conceptele de bază ale Calculului Probabilităţii*.

↠ $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ este o funcţie astfel încât oricărui eveniment aleator $A \in \mathcal{K}$ i se asociază valoarea $P(A)$, ***probabilitatea de apariţie a evenimentului*** A

↪ $\mathcal{K}$ este o mulţime de evenimente şi are structura unei σ-algebre (vezi Def. 4)

↪ P satisface anumite axiome (vezi Def. 5)

Def. 4. *O familie $\mathcal{K}$ de evenimente din spaţiul de selecţie Ω se numeşte **σ-algebră** dacă sunt satisfăcute condiţiile:*

(1) *$\mathcal{K}$ este nevidă;*

(2) *dacă* $A \in \mathcal{K}$, *atunci* $\bar{A} \in \mathcal{K}$;

(3) *dacă* $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Exemple: 1) Dacă $\emptyset \neq A \subset \Omega$ atunci $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ este o σ-algebră.
2) $\mathcal{P}(\Omega)$:= mulţimea tuturor submulţimilor lui Ω este o σ-algebră.
3) Dacă $\mathcal{K}$ este o σ-algebră pe Ω şi $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$, atunci

$$B \cap \mathcal{K} = \{B \cap A : A \in \mathcal{K}\}$$

este o σ-algebră pe mulţimea B. $\diamondsuit$

P. 1. *Proprietăţi ale unei σ-algebre: Dacă $\mathcal{K}$ este o σ-algebră în Ω, atunci au loc proprietăţile:*

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$;

(2) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{K}$;

(3) $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Def. 5. *Fie $\mathcal{K}$ o σ-algebră pe Ω. O funcţie $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***probabilitate*** *dacă satisface axiomele:*

(1) $P(\Omega) = 1$;

(2) $P(A) \geq 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{K}$;

(3) *pentru orice şir $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de evenimente două câte două disjuncte (adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$) din $\mathcal{K}$ are loc*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numeşte ***spaţiu de probabilitate****.*

Exemplu: 1) Cea mai simplă (funcţie de) probabilitate se obţine pentru cazul unui *spaţiu de selecţie finit* Ω: fie $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$ (mulţimea tuturor submulţimilor lui Ω) şi $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \text{ unde } \#A \text{ reprezintă numărul elementelor lui } A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

P astfel definită verifică Def. 5 şi corespunde *definiţiei clasice a probabilităţii unui eveniment* (a se vedea Def. 3).

2) Fie $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ şi $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definită prin
$P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$
$P(\{n_1, ..., n_k, ...\}) = \frac{1}{2^{n_1+1}} + ... + \frac{1}{2^{n_k+1}} + ...$, unde $\{n_1, ..., n_k, ...\} \subseteq \mathbb{N}$.

Are loc $P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, iar axiomele din Def. 5 sunt îndeplinite . $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ este un spaţiu de probabilitate; Def. 5-(3) este îndeplinită, datorită teoremei din analiză, care afirmă că pentru o serie cu termeni pozitivi, schimbarea ordinii termenilor seriei nu schimbă natura seriei şi nici suma ei. ♣

P. 2. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un spaţiu de probabilitate. Au loc proprietăţile:*

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ *şi* $0 \le P(A) \le 1$*;*

(2) $P(\emptyset) = 0$*;*

(3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$*;*

(4) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \le P(B)$*, adică* P *este monotonă;*

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*.*

Exerciţiu: Să se arate că pentru $\forall\ A, B, C \in \mathcal{K}$ are loc:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Exemplu: Dintr-un pachet de 52 de cărţi de joc se extrage o carte aleator. Care este probabilitatea p de a extrage a) un as sau o damă de pică? b) o carte cu inimă sau un as?
R.: a) A: s-a extras un as; D: s-a extras damă de pică; A şi D sunt două evenimente disjuncte (incompatibile)

$$p = P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{4+1}{52};$$

b) I: s-a extras o carte cu inimă; I şi A *nu* sunt evenimente incompatibile

$$p = P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{13+4-1}{52} = \frac{4}{13}.$$

♡

Evenimente independente

Def. 6. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate. Evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ sunt* ***evenimente independente****, dacă*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observaţie: Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$. Evenimentele A şi B sunt **independente**, dacă **apariţia evenimentului A, nu influenţează apariţia evenimentului B şi invers**. Două evenimente se numesc **dependente** dacă probabilitatea realizării unuia dintre ele depinde de faptul că celălalt eveniment s-a produs sau nu.

Exerciţiu: Se aruncă un zar de două ori.

A: primul număr este 6; B: al doilea număr este 5; C: primul număr este 1.

Sunt A şi B evenimente independente? Sunt A şi B evenimente disjuncte?

Sunt A şi C evenimente independente? Sunt A şi C evenimente disjuncte? ♣

P. 3. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi fie $A, B \in \mathcal{K}$. Sunt echivalente afirmaţiile:*

(1) *A şi B sunt independente.*

(2) *$\bar{A}$ şi B sunt independente.*

(3) *A şi $\bar{B}$ sunt independente.*

(4) *$\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt independente.*

Def. 7. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate. $B_1, \ldots, B_n$ sunt* ***n evenimente independente (în totalitate)*** *din $\mathcal{K}$ dacă*

$$P(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_m}) = P(B_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_m})$$

pentru orice submulţime finită $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, unde $m \geq 2$.

Observaţie; Din Def. 7 avem $A, B, C \in \mathcal{K}$ sunt trei evenimente independente (în totalitate), dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Exemplu: 1) Din Def. 6 şi Def. 7 deducem că, independenţa (în totalitate) implică şi independenţa a două câte două evenimente. Afirmaţia inversă, însă, nu are loc. Drept (contra)exemplu putem lua experimentul aleator ce constă în aruncarea unui tetraedru regulat, ale cărui patru feţe sunt vopsite astfel: una este roşie, una este albastră, una este verde şi una este

colorată având cele trei culori. Se aruncă tetraedrul şi se consideră evenimentele:
R: tetraedrul cade pe o parte ce conţine culoarea roşie;
A: tetraedrul cade pe o parte ce conţine culoarea albastră;
V: tetraedrul cade pe o partea ce conţine culoarea verde.
Sunt cele 3 evenimente *independente în totalitate*?
2) Pentru a verifica dacă n evenimente distincte $B_1, \ldots, B_n$ sunt independente în totalitate câte relaţii trebuie verificate?
3) O firmă utilizează două sisteme de securitate independente pentru a detecta activitatea suspectă a reţelei: un firewall care detectează o astfel de activitate cu o probabilitate de 0.7 şi un antivirus care o detectează cu o probabilitate de 0.8.
Presupunând că firewall-ul i antivirusul funcţionează independent, care este probabilitatea ca:
(a) Ambele sisteme detectează activitatea suspectă?
(b) Cel puţin un sistem detectează activitatea suspectă? ♦

Exemplu istoric - Joc de zaruri (sec. XVII): Un pasionat jucător de zaruri, cavalerul de Méré, susţinea în discuţiile sale cu B. Pascal că a arunca un zar de 4 ori pentru a obţine cel puţin o dată faţa şase, este acelaşi lucru cu a arunca de 24 ori câte două zaruri pentru a obţine cel puţin o dublă de şase. Cu toate acestea, cavalerul de Méré a observat că jucând în modul al doilea (cu două zaruri aruncate de 24 ori), pierdea faţă de adversarul său, dacă acesta alegea primul mod (aruncarea unui singur zar de 4 ori). Pascal şi Fermat au arătat că probabilitatea de câştig la jocul cu un singur zar aruncat de 4 ori este $p_1 \approx 0.5177$, iar probabilitatea $p_2 \approx 0.4914$ la jocul cu două zaruri aruncate de 24 de ori. Deşi diferenţa dintre cele două probabilităţi este mică, totuşi, la un număr mare de partide, jucătorul cu probabilitatea de câştig p_1 câştigă în faţa jucătorului cu probabilitatea de câştig p_2. Practica jocului confirmă astfel justeţea raţionamentului matematic, contrar credinţei lui de Méré.
Estimăm prin simulări Python probabilităţile următoarelor evenimente:
A: se obţine cel puţin un 6 în 4 aruncări ale unui zar;
B: se obţine cel puţin o pereche (6,6) în 24 de aruncări a două zaruri;
C: se obţine cel puţin o pereche (6,6) în 25 de aruncări a două zaruri.

Calculăm probabilităţile teoretice pentru evenimentele $A,\ B,\ C$: $\bar{A}$ este evenimentul că niciun 6 nu apare în 4 aruncări ale unui zar

$$\Longrightarrow P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \Longrightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177.$$

$\bar{B}$ este evenimentul că nicio pereche $(6,6)$ nu apare în 24 de aruncări a două zaruri

$$\Longrightarrow P(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \Longrightarrow P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914\,.$$

Analog $P(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.5055$. Comparăm probabilităţile teoretice ale celor trei evenimente

$$P(B) < \frac{1}{2} < P(C) < P(A).$$

Concluzie: Evenimentul A are şansele cele mai mari de câştig. $\diamondsuit$

```
import random
import numpy
a=0
N=10000
for _ in range(N):
    x=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=4) # alegere aleatoare cu returnare
    a=a+(x.count(6)>0)
print("din simulari P(A) este:",a/N)
b=0
for _ in range(N):
    x1=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=24)
    x2=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=24)
    s=numpy.add(x1,x2)
    b=b+(sum(s==12)>0)
print("din simulari P(B) este:",b/N)
c=0
for _ in range(N):
    y1=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=25)
    y2=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=25)
    s=numpy.add(y1,y2)
    c=c+(sum(s==12)>0)
print("din simulari P(C) este:",c/N)
X=[a,b,c]
str="ABC"
z=sorted([a,b,c])
i0= X.index(z[0]) # index din X pt care este probabilitatea cea mai mica
i1= X.index(z[1])
i2= X.index(z[2]) # index din X pt care este probabilitatea cea mai mare
print("P(",str[i0],")< P(",str[i1],")< P(",str[i2],")")
# probabilitatile evenimentelor afisate in ordine crescatoare
```

Probabilitate condiţionată

În anumite situaţii este necesar să cunoaştem probabilitatea unui eveniment particular, care urmează să aibă loc, ştiind deja că alt eveniment a avut loc.

▷ Experiment: Se aruncă simultan două zaruri. Notăm cu S suma numerelor rezultate din aruncarea celor două zaruri.

a) $P(S = 11) =?$

b) Dacă se ştie că S este un număr prim, care este probabilitatea ca $S = 11$?

Def. 8. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi fie $A, B \in \mathcal{K}$.* ***Probabilitatea condiţionată a evenimentului A de către evenimentul B*** *este $P(\cdot|B) : \mathcal{K} \to [0,1]$ definită prin*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

dacă $P(B) > 0$. $P(A|B)$ *este* ***probabilitatea apariţiei evenimentului A, ştiind că evenimentul B s-a produs***.

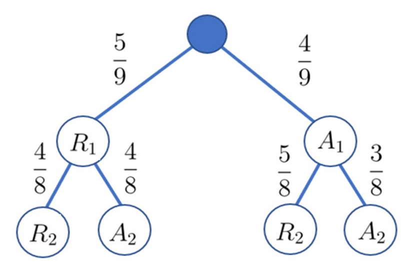
Observaţie: 1) $P(A|B)$: probabilitatea condiţionată a lui A de către B, este **probabilitatea de a se realiza evenimentul *A* dacă în prealabil s-a realizat evenimentul *B***.
2) Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr şi au aceleaşi şanse de a se realiza, atunci se poate folosi

$$P(A|B) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile apariţiei lui } A \cap B}{\text{numărul de cazuri favorabile pentru apariţia lui } B}.$$

3) Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A) > 0$ şi $P(B) > 0$. Evenimentele A şi B sunt **independente** (a se vedea Def. 6), dacă apariţia evenimentului A, nu influenţează apariţia evenimentului B şi invers, adică

$$P(A|B) = P(A) \text{ şi } P(B|A) = P(B)\,.$$

Exemplu: Se extrag succesiv fără returnare două bile dintr-o urnă cu 4 bile albe şi 5 bile roşii.
a) Ştiind că prima bilă este roşie, care este probabilitatea (condiţionată) ca a doua bilă să fie albă?
b) Care este probabilitatea ca ambele bile să fie roşii?
R.: pentru $i \in \{1, 2\}$ fie evenimentele
R_i: la a i-a extragere s-a obţinut o bilă roşie;
$A_i = \bar{R}_i$: la a i-a extragere s-a obţinut o bilă albă;
a) $P(A_2|R_1) = \frac{4}{8}$.
b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9}$. ♣



Extragere fără retrunare