

**Curs - Probabilități și Statistică 2025/2026**  
**Secția Informatică**

Facultatea de Matematică și Informatică  
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca  
Conf. Dr. Habil. Hannelore Lisei



# Teoria Probabilităților

**Teoria probabilităților** este o disciplină a matematicii care se ocupă de **studiul fenomenelor aleatoare**.

- *aleator* = care depinde de o împrejurare viitoare și nesigură; supus întâmplării
- provine din latină: *aleatorius*; *alea* (lat.) = zar; joc cu zaruri; joc de noroc; șansă; risc

↪ se măsoară *șansele pentru succes* sau *riscul pentru insucces* al unor evenimente

Fenomene și procese aleatoare apar, de exemplu, în:

- pariuri, loto (6 din 49), jocuri de noroc / jocuri online
- previziuni meteo
- previziuni economice / financiare, investiții, cumpărături online (predicția comportamentului clienților)
- sondaje de opinie (analiza unor strategii politice), asigurări (evaluarea riscurilor / pierderilor)



[Sursa: [www.financialmarket.ro](http://www.financialmarket.ro)]

→ **în informatică:**

- ▷ sisteme de comunicare, prelucrarea informației, modelarea traficului în rețea, criptografie;
- ▷ analiza probabilistică a performanței unor algoritmi, fiabilitatea sistemelor, predicții în cazul unor sisteme complexe;
- ▷ algoritmi de simulare, machine learning, data mining, recunoașterea formelor / a vocii;
- ▷ generarea de numere aleatoare (pseudo-aleatoare), algoritmi aleatori
- ▷ se pot genera numere cu „adevărat aleatoare” (*true random numbers*), folosind ca surse fenomene fizice, ca de exemplu surse radioactive (momentele de timp în care particulele se dezintegrează sunt complet imprevizibile), sau variațiile de amplitudine din perturbările atmosferice (*atmospheric noise*, folosit de <https://www.random.org/randomness/>), sau comportamentul fotonilor (în mecanica cuantică, când un foton lovește un separator de fascicule -*beam splitter*-, fotonul are șansa de 50% de a fi reflectat și 50% de a trece); etc.

## Exemplu: Generarea de valori aleatoare (în Python)

```
# Exemplu 1
import numpy as np
n=4
r = np.random.rand(n)
print(n, "valori aleatoare din intervalul (0,1):", r)
N = np.random.randint(-1, 6, size=n+3)
print(n+3, "numere intregi aleatoare din intervalul [-1,5]:", N)
L = ["AB", "XY", "EF", "MN", "FG"]
print(n, "-extrageri aleatoare cu returnare:", np.random.choice(L, size=n, replace=True))
print(n, "-extrageri aleatoare fara returnare:", np.random.choice(L, size=n, replace=False))

# Exemplu 2
import numpy as np
n=30
R = np.random.randint(1, 7, size=n)
print(n, "valori aleatoare:\n", R)
x= sum(R==2)
print("Rezultat .....", x)
```

## Algoritmi aleatori

**Def. 1.** *Un algoritm pe cursul executării căruia se iau anumite decizii aleatoare este numit **algoritm aleator (randomizat)**.*

▷ durata de execuție, spațiul de stocare, rezultatul obținut sunt variabile aleatoare (chiar dacă se folosesc aceleași valori input)

▷ la anumite tipuri de algoritmi corectitudinea e garantată doar cu o anumită probabilitate.

- Algoritm de tip **Las Vegas** este un algoritm aleator, care returnează la fiecare execuție rezultatul corect (independent de alegerile aleatoare făcute); durata de execuție este o variabilă aleatoare.

Exemplu: Random QuickSort

- Un algoritm aleator pentru care rezultatele obținute sunt corecte *doar* cu o anumită probabilitate se numește algoritm **Monte Carlo**.

↔ se examinează probabilitatea cu care rezultatul este corect; probabilitatea de eroare poate fi scăzută semnificativ prin execuții repetate, independente.

Exemplu:

▷ testul Miller-Rabin, care verifică dacă un număr natural este prim sau este număr compus; testul returnează fie răspunsul „numărul este sigur un număr compus” sau răspunsul „numărul este probabil un număr prim”.

**Exercițiu:** Fie  $S$  un vector cu 60 de elemente, din mulțimea  $\{0, 1, 2\}$  (ordinea lor este necunoscută; se presupune că șirul conține cel puțin un 0).

→ De care tip este următorul algoritm?

```
import numpy as np
N=60
S = np.random.randint(0,3, size = N)
k=1
i= np.random.randint(low=0, high=N)
while S[i] != 0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[" ,i, "]= ",S[i])
    i= np.random.randint(low=0, high=N)
    k=k+1
if S[i]==0:
    print("iteratia:",k)
    print("S[" ,i, "]= ",S[i])
print("S-a gasit aleator un 0.")
```

**Răspuns:** Algoritm de tip Las Vegas, algoritmul se încheie întotdeauna cu găsirea unui 0.

Versiunea Monte Carlo a problemei formulate anterior: se dă  $M$  numărul maxim de iterații.

```
import numpy as np
print("a doua versiune")
N=50
S = np.random.randint(3,size=N)
print(S)
#un vector cu N elemente, din multimea {0,1,2}
M=3 #nr maxim de iteratii M>1
a=True
for k in range(M) :
    print("iteratia:",k+1)
    i= np.random.randint(low=0, high=N)
    print("S[" ,i, "]= ",S[i])
    if S[i] == 0:
        print("la iteratia",k+1,"s-a gasit aleator un 0.")
        a=False
        break
if a:
    print("In",k+1,"iteratii nu s-a gasit niciun 0.")
```

▷ dacă 0 este găsit, atunci algoritmul se încheie cu rezultatul corect, altfel algoritmul nu găsește niciun 0.

### Noțiuni introductive:

- **Experiența aleatoare** (experimentul aleator) este acea experiență al cărei rezultat nu poate fi cunoscut decât după încheierea ei.
- **Evenimentul** este rezultatul unei experiențe aleatoare.

### Exemple:

▷ experiența: aruncarea unei monede, eveniment: moneda indică pajură

- ▷ experiența: extragerea unei cărți de joc, eveniment: s-a extras un as
- ▷ experiența: extragerea unui număr la loto, eveniment: s-a extras numărul 27
- **evenimentul imposibil**, notat cu  $\emptyset$ , este evenimentul care nu se realizează niciodată la efectuarea experienței aleatoare
- **evenimentul sigur** este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței aleatoare
- **spațiul de selecție**, notat cu  $\Omega$ , este mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experienței considerate

◇ spațiul de selecție poate fi finit sau infinit

- dacă  $A$  este o submulțime a lui  $\Omega$  atunci  $A$  se numește **eveniment aleator**, iar dacă  $A$  are un singur element atunci  $A$  este un **eveniment elementar**.

▷ *O analogie între evenimente și mulțimi permite o scriere și o exprimare mai comode ale unor idei și rezultate legate de conceptul de eveniment aleator.*

**Exemplu:** Experimentul: aruncarea unui zar, spațiul de selecție:  $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ,

$e_i$ : s-a obținut numărul  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ );  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  sunt evenimente elementare

$A$ : s-a obținut un număr par  $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$

$\bar{A}$ : s-a obținut un număr impar  $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$



### Operații cu evenimente

- dacă  $A, B \subseteq \Omega$ , atunci **evenimentul reuniune**  $A \cup B$  este un eveniment care se produce dacă cel puțin unul din evenimentele  $A$  sau  $B$  se produce
- dacă  $A, B \subseteq \Omega$ , atunci **evenimentul intersecție**  $A \cap B$  este un eveniment care se produce dacă cele două evenimente  $A$  și  $B$  se produc în același timp
- dacă  $A \subseteq \Omega$  atunci **evenimentul contrar** sau **complementar**  $\bar{A}$  este un eveniment care se realizează atunci când evenimentul  $A$  nu se realizează
- $A, B \subseteq \Omega$  sunt **evenimente disjuncte (incompatibile)**, dacă  $A \cap B = \emptyset$
- dacă  $A, B \subseteq \Omega$ , atunci **evenimentul diferență**  $A \setminus B$  este un eveniment care se produce dacă  $A$  are loc și  $B$  nu are loc, adică  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .
- *Au loc relațiile:  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ,  $\bar{\bar{A}} = A$ .*

### Relații între evenimente

- dacă  $A, B \subseteq \Omega$ , atunci  $A$  **implică**  $B$ , dacă producerea evenimentului  $A$  conduce la producerea evenimentului  $B$ :  $A \subseteq B$
- dacă  $A$  implică  $B$  și  $B$  implică  $A$ , atunci evenimentele  $A$  și  $B$  sunt **egale**:  $A = B$

**Proprietăți ale operațiilor între evenimente**  $A, B, C \subseteq \Omega$

Operațiile de reuniune și intersecție sunt operații **comutative**:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$

**asociative**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

**și distributive**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

satisfac **legile lui De Morgan**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

### Frecvența relativă și frecvența absolută

**Def. 2.** Fie  $A$  un eveniment asociat unei experiențe, repetăm experiența de  $n$  ori (în aceleași condiții date) și notăm cu  $r_n(A)$  numărul de realizări ale evenimentului  $A$ ; **frecvența relativă** a evenimentului  $A$  este numărul

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$  este **frecvența absolută** a evenimentului  $A$ .

### Definiția clasică a probabilității

**Def. 3.** Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr și au aceleași șanse de a se realiza, **probabilitatea** unui eveniment  $A$  este numărul

$$P(A) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile apariției lui } A}{\text{numărul total de cazuri posibile}}.$$

► Prin repetarea de multe ori a unui experiment, în condiții practic identice, frecvența relativă  $f_n(A)$  de apariție a evenimentului  $A$  este aproximativ egală cu  $P(A)$ :  $f_n(A) \approx P(A)$  pentru valori mari ale lui  $n$ .

► Din punct de vedere probabilistic șirul  $(f_n(A))_n$  „converge aproape sigur” către  $P(A)$  când  $n \rightarrow \infty$ .

**Exemplu:** Experiment: Se aruncă 4 monede. Evenimentul  $A$ : (exact) 3 din cele 4 monede indică pajură; experimentul s-a repetat de  $n = 100$  de ori și evenimentul  $A$  a apărut de 22 de ori.

$$f_n(A) = ?, \quad P(A) = ?$$

R.:  $f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$  este frecvența relativă a evenimentului  $A$ ;

$P(A) = \frac{4}{24} = 0.25$  probabilitatea (teoretică) a evenimentului  $A$ . ♠

**Exercițiu: (1)** Se alege aleator un număr din mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . Care este probabilitatea ca acesta să nu fie divizibil nici cu 4, nici cu 6?

**(2)** Un centru de calcul dispune de 24 de servere:

- ▷ 10 servere sunt rezervate pentru baze de date,
- ▷ 8 servere sunt pentru aplicații web,
- ▷ 6 servere sunt dedicate sarcinilor de învățare automată.

Un nou proces este atribuit aleator unuia dintre servere.

- ▷ Care este probabilitatea ca procesul să nu ruleze pe un server de baze de date?
- ▷ Care este probabilitatea ca procesul să ruleze pe un server web sau de învățare automată? ◇

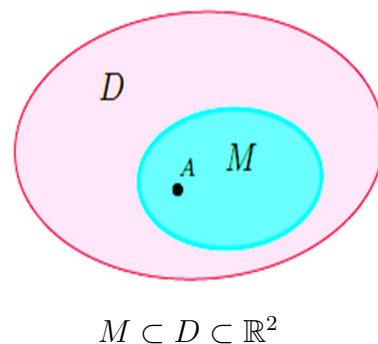
### Definiția axiomatică a probabilității

Definiția clasică a probabilității poate fi utilizată numai în cazul în care numărul cazurilor posibile este finit. Dacă numărul evenimentelor elementare este infinit, atunci există evenimente pentru care probabilitatea în sensul clasic nu are nici un înțeles.

**Probabilitatea geometrică:** Măsura unei mulțimi corespunde **lungimii** în  $\mathbb{R}$ , **ariei** în  $\mathbb{R}^2$ , **volumului** în  $\mathbb{R}^3$ . Fie  $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ , mulțimi cu măsură finită.

Alegem aleator un punct  $A \in D$  (în acest caz spațiul de selecție este  $D$ ). Probabilitatea geometrică a evenimentului “ $A \in M$ ” este

$$P(A \in M) := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$



O teorie formală a probabilității a fost creată în anii '30 ai secolului XX de către matematicianul **Andrei Nikolaevici Kolmogorov**, care, în anul **1933**, a dezvoltat teoria axiomatică a probabilității în lucrarea sa *Conceptele de bază ale Calculului Probabilității*.

→  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție astfel încât oricărui eveniment aleator  $A \in \mathcal{K}$  i se asociază valoarea  $P(A)$ , **probabilitatea de apariție a evenimentului  $A$**

↔  $\mathcal{K}$  este o mulțime de evenimente și are structura unei  $\sigma$ -algebre (vezi Def. 4)

↔  $P$  satisface anumite axiome (vezi Def. 5)

**Def. 4.** O familie  $\mathcal{K}$  de evenimente din spațiul de selecție  $\Omega$  se numește  **$\sigma$ -algebră** dacă sunt satisfăcute condițiile:

- (1)  $\mathcal{K}$  este nevidă;

(2) dacă  $A \in \mathcal{K}$ , atunci  $\bar{A} \in \mathcal{K}$ ;

(3) dacă  $A_n \in \mathcal{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$ .

**Exemple: 1)** Dacă  $\emptyset \neq A \subset \Omega$  atunci  $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$  este o  $\sigma$ -algebră.

**2)**  $\mathcal{P}(\Omega)$  := mulțimea tuturor submulțimilor lui  $\Omega$  este o  $\sigma$ -algebră.

**3)** Dacă  $\mathcal{K}$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $\Omega$  și  $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$ , atunci

$$B \cap \mathcal{K} = \{B \cap A : A \in \mathcal{K}\}$$

este o  $\sigma$ -algebră pe mulțimea  $B$ . ◇

**P. 1. Proprietăți ale unei  $\sigma$ -algebre:** Dacă  $\mathcal{K}$  este o  $\sigma$ -algebră în  $\Omega$ , atunci au loc proprietățile:

(1)  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$ ;

(2)  $A, B \in \mathcal{K} \implies A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{K}$ ;

(3)  $A_n \in \mathcal{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$ .

**Def. 5.** Fie  $\mathcal{K}$  o  $\sigma$ -algebră pe  $\Omega$ . O funcție  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **probabilitate** dacă satisface axiomele:

(1)  $P(\Omega) = 1$ ;

(2)  $P(A) \geq 0$  pentru orice  $A \in \mathcal{K}$ ;

(3) pentru orice șir  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de evenimente două câte două disjuncte (adică  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pentru orice  $i \neq j$ ) din  $\mathcal{K}$  are loc

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Tripletul  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  se numește **spațiu de probabilitate**.

**Exemplu:** 1) Cea mai simplă (funcție de) probabilitate se obține pentru cazul unui *spațiu de selecție finit*  $\Omega$ : fie  $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$  (mulțimea tuturor submulțimilor lui  $\Omega$ ) și  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  definită astfel

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \text{ unde } \#A \text{ reprezintă numărul elementelor lui } A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

$P$  astfel definită verifică Def. 5 și corespunde *definiției clasice a probabilității unui eveniment* (a se vedea Def. 3).



2) Fie  $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  și  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

$$P(\{n_1, \dots, n_k, \dots\}) = \frac{1}{2^{n_1+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k+1}} + \dots, \text{ unde } \{n_1, \dots, n_k, \dots\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Are loc  $P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ , iar axiomele din Def. 5 sunt îndeplinite.  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$  este un spațiu de probabilitate; Def. 5-(3) este îndeplinită, datorită teoremei din analiză, care afirmă că pentru o serie cu termeni pozitivi, schimbarea ordinii termenilor seriei nu schimbă natura seriei și nici suma ei. ♣

**P. 2.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate. Au loc proprietățile:

$$(1) P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ și } 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$(2) P(\emptyset) = 0;$$

$$(3) P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B);$$

$$(4) A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B), \text{ adică } P \text{ este monotonă};$$

$$(5) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Exercițiu:** Să se arate că pentru  $\forall A, B, C \in \mathcal{K}$  are loc:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

**Exemplu:** Dintr-un pachet de 52 de cărți de joc se extrage o carte aleator. Care este probabilitatea  $p$  de a extrage a) un as sau o damă de pică? b) o carte cu inimă sau un as?

R.: a)  $A$ : s-a extras un as;  $D$ : s-a extras damă de pică;  $A$  și  $D$  sunt două evenimente disjuncte (incompatibile)

$$p = P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{4 + 1}{52};$$

b)  $I$ : s-a extras o carte cu inimă;  $I$  și  $A$  nu sunt evenimente incompatibile

$$p = P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{13 + 4 - 1}{52} = \frac{4}{13}.$$



## Evenimente independente

**Def. 6.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate. Evenimentele  $A, B \in \mathcal{K}$  sunt **evenimente independente**, dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Observație:** Fie evenimentele  $A, B \in \mathcal{K}$ . Evenimentele  $A$  și  $B$  sunt **independente**, dacă **apariția evenimentului  $A$ , nu influențează apariția evenimentului  $B$  și invers**. Două evenimente se numesc **dependente** dacă probabilitatea realizării unuia dintre ele depinde de faptul că celălalt eveniment s-a produs sau nu.

**Exercițiu:** Se aruncă un zar de două ori.

A: primul număr este 6;      B: al doilea număr este 5;      C: primul număr este 1.

Sunt A și B evenimente independente? Sunt A și B evenimente disjuncte?

Sunt A și C evenimente independente? Sunt A și C evenimente disjuncte?



**P. 3.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate și fie  $A, B \in \mathcal{K}$ . Sunt echivalente afirmațiile:

(1)  $A$  și  $B$  sunt independente.

(2)  $\bar{A}$  și  $B$  sunt independente.

(3)  $A$  și  $\bar{B}$  sunt independente.

(4)  $\bar{A}$  și  $\bar{B}$  sunt independente.

**Def. 7.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate.  $B_1, \dots, B_n$  sunt  **$n$  evenimente independente (în totalitate)** din  $\mathcal{K}$  dacă

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_m}) = P(B_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(B_{i_m})$$

pentru orice submulțime finită  $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , unde  $m \geq 2$ .

**Observație;** Din Def. 7 avem  $A, B, C \in \mathcal{K}$  sunt trei evenimente independente (în totalitate), dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

**Exemplu: 1)** Din Def. 6 și Def. 7 deducem că, independența (în totalitate) implică și independența a două câte două evenimente. Afirmația inversă, însă, nu are loc. Drept (contra)exemplu putem lua experimentul aleator ce constă în aruncarea unui tetraedru regulat, ale cărui patru fețe sunt vopsite astfel: una este roșie, una este albastră, una este verde și una este

colorată având cele trei culori. Se aruncă tetraedrul și se consideră evenimentele:

$R$ : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea roșie;

$A$ : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea albastră;

$V$ : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea verde.

Sunt cele 3 evenimente *independente în totalitate*?

2) Pentru a verifica dacă  $n$  evenimente distincte  $B_1, \dots, B_n$  sunt independente în totalitate câte relații trebuie verificate?

3) O firmă utilizează două sisteme de securitate independente pentru a detecta activitatea suspectă a rețelei: un firewall care detectează o astfel de activitate cu o probabilitate de 0.7 și un antivirus care o detectează cu o probabilitate de 0.8.

Presupunând că firewall-ul și antivirusul funcționează independent, care este probabilitatea ca:

(a) Ambele sisteme detectează activitatea suspectă?

(b) Cel puțin un sistem detectează activitatea suspectă? ◆

**Exemplu istoric - Joc de zaruri (sec. XVII):** Un pasionat jucător de zaruri, cavalerul de Méré, susținea în discuțiile sale cu B. Pascal că a arunca un zar de 4 ori pentru a obține cel puțin o dată fața șase, este același lucru cu a arunca de 24 ori câte două zaruri pentru a obține cel puțin o dublă de șase. Cu toate acestea, cavalerul de Méré a observat că jucând în modul al doilea (cu două zaruri aruncate de 24 ori), pierdea față de adversarul său, dacă acesta alegea primul mod (aruncarea unui singur zar de 4 ori). Pascal și Fermat au arătat că probabilitatea de câștig la jocul cu un singur zar aruncat de 4 ori este  $p_1 \approx 0.5177$ , iar probabilitatea  $p_2 \approx 0.4914$  la jocul cu două zaruri aruncate de 24 de ori. Deși diferența dintre cele două probabilități este mică, totuși, la un număr mare de partide, jucătorul cu probabilitatea de câștig  $p_1$  câștigă în fața jucătorului cu probabilitatea de câștig  $p_2$ . Practica jocului confirmă astfel justetea raționamentului matematic, contrar credinței lui de Méré.

*Estimăm prin simulări Python probabilitățile următoarelor evenimente:*

$A$ : se obține cel puțin un 6 în 4 aruncări ale unui zar;

$B$ : se obține cel puțin o pereche (6,6) în 24 de aruncări a două zaruri;

$C$ : se obține cel puțin o pereche (6,6) în 25 de aruncări a două zaruri.

*Calculăm probabilitățile teoretice pentru evenimentele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :  $\bar{A}$  este evenimentul că niciun 6 nu apare în 4 aruncări ale unui zar*

$$\implies P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \implies P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177.$$

$\bar{B}$  este evenimentul că nicio pereche (6, 6) nu apare în 24 de aruncări a două zaruri

$$\implies P(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \implies P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914.$$

Analog  $P(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.5055$ . Comparăm probabilitățile teoretice ale celor trei evenimente

$$P(B) < \frac{1}{2} < P(C) < P(A).$$

**Concluzie:** Evenimentul  $A$  are șansele cele mai mari de câștig. ◇

```
import random
import numpy
a=0
N=10000
for _ in range(N):
    x=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=4) # alegere aleatoare cu returnare
    a+= (x.count(6)>0)
print("din simulari P(A) este:",a/N)
b=0
for _ in range(N):
    x1=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=24)
    x2=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=24)
    s=numpy.add(x1,x2)
    b+= (sum(s==12)>0)
print("din simulari P(B) este:",b/N)
c=0
for _ in range(N):
    y1=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=25)
    y2=random.choices([1,2,3,4,5,6],k=25)
    s=numpy.add(y1,y2)
    c+= (sum(s==12)>0)
print("din simulari P(C) este:",c/N)
X=[a,b,c]
str="ABC"
z=sorted([a,b,c])
i0= X.index(z[0]) # index din X pt care este probabilitatea cea mai mica
i1= X.index(z[1])
i2= X.index(z[2]) # index din X pt care este probabilitatea cea mai mare
print("P(",str[i0],")< P(",str[i1],")< P(",str[i2],")")
# probabilitatile evenimentelor afisate in ordine crescatoare
```

## Probabilitate condiționată

În anumite situații este necesar să cunoaștem probabilitatea unui eveniment particular, care urmează să aibă loc, știind deja că alt eveniment a avut loc.

▷ Experiment: Se aruncă simultan două zaruri. Notăm cu  $S$  suma numerelor rezultate din aruncarea celor două zaruri.

a)  $P(S = 11) = ?$

b) Dacă se știe că  $S$  este un număr prim, care este probabilitatea ca  $S = 11$ ?

**Def. 8.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate și fie  $A, B \in \mathcal{K}$ . **Probabilitatea condiționată a evenimentului  $A$  de către evenimentul  $B$**  este  $P(\cdot|B) : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$  definită prin

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

dacă  $P(B) > 0$ .  $P(A|B)$  este **probabilitatea apariției evenimentului  $A$ , știind că evenimentul  $B$  s-a produs**.

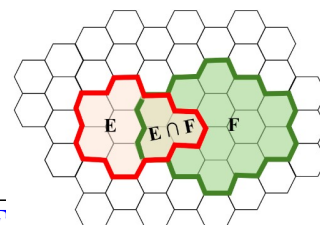
►  $P(A|B)$ : probabilitatea condiționată a lui  $A$  de către  $B$ , este **probabilitatea de a se realiza evenimentul  $A$  dacă în prealabil s-a realizat evenimentul  $B$** .

► Fie evenimentele  $A, B \in \mathcal{K}$  astfel încât  $P(A) > 0$  și  $P(B) > 0$ . Evenimentele  $A$  și  $B$  sunt **independente** (a se vedea Def. 6), dacă apariția evenimentului  $A$ , nu influențează apariția evenimentului  $B$  și invers, adică

$$P(A|B) = P(A) \text{ și } P(B|A) = P(B).$$

► Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr și au aceleași șanse de a se realiza, atunci se poate folosi

$$P(E|F) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile apariției lui } E \cap F}{\text{numărul de cazuri favorabile pentru apariția lui } F}$$



$$P(E) = \frac{8}{50} \approx 0.16$$

$$P(E|F) = \frac{3}{14} \approx 0.21$$

**Exemplu:** Se extrag succesiv fără returnare două bile dintr-o urnă cu 4 bile albe și 5 bile roșii.

a) Știind că prima bilă este roșie, care este probabilitatea (condiționată) ca a doua bilă să fie albă?

b) Care este probabilitatea ca ambele bile să fie roșii?

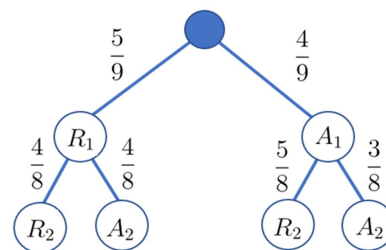
**R.:** pentru  $i \in \{1, 2\}$  fie evenimentele

$R_i$ : la a  $i$ -a extragere s-a obținut o bilă roșie;

$A_i = \bar{R}_i$ : la a  $i$ -a extragere s-a obținut o bilă albă;

a)  $P(A_2|R_1) = \frac{4}{8}$ .

b)  $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \clubsuit$

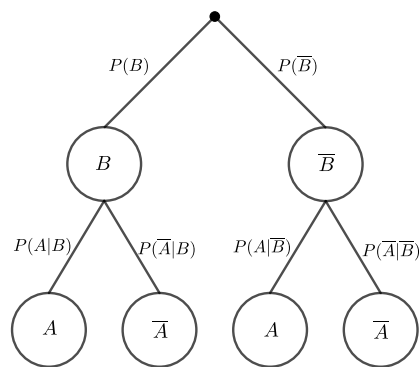


Extragere fără reținere

**P. 4.** Pentru  $A, B \in \mathcal{K}$ ,  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$  au loc:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A),$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B).$$



Probabilități condiționate

**Def. 9.** O familie  $\{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathcal{K}$  de evenimente din  $\Omega$  se numește **partiție** sau **sistem complet de evenimente** a lui  $\Omega$ , dacă  $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$  și pentru fiecare  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , evenimentele  $H_i$  și  $H_j$  sunt disjuncte, adică  $H_i \cap H_j = \emptyset$ .

**Exemplu:** Dacă  $B \subset \Omega$  atunci  $\{B, \bar{B}\}$  formează o partiție a lui  $\Omega$ .



**P. 5. (Formula probabilității totale)** Într-un spațiu de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  considerăm partiția  $\{H_1, \dots, H_n\}$  a lui  $\Omega$  cu  $H_i \in \mathcal{K}$  și  $P(H_i) > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , și fie  $A \in \mathcal{K}$ . Atunci are loc

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n).$$

**Exemplu:** Într-o urnă sunt 7 bile albe, notate cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, și 6 bile roșii notate cu 8, 9, 10, 11, 12, 13. Se extrag succesiv fără returnare două bile. **a)** Știind că prima bilă extrasă este roșie, care este probabilitatea  $p_1$ , ca numărul de pe bilă să fie divizibil cu 4? **b)** Știind că prima bilă este roșie, care este probabilitatea  $p_2$ , ca o a doua bilă extrasă să indice un număr impar?

R.: 7 bile albe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 6 bile roșii: 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Se consideră evenimentele:

$D_1$ : prima bilă extrasă are înscris un număr divizibil cu 4;

$R_1$ : prima bilă extrasă este roșie;

$I_1$ : prima bilă extrasă are înscris un număr impar;

$I_2$ : a doua bilă extrasă are înscris un număr impar.

**a)**  $p_1 = P(D_1|R_1) = \frac{2}{6}$ .

**b)**  $p_2 = P(I_2|R_1) = ?$  Folosim Def.8 și P.4, scriem succesiv

$$\begin{aligned} p_2 &= P(I_2|R_1) = \frac{P(I_2 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(I_2 \cap R_1 \cap I_1) + P(I_2 \cap R_1 \cap \bar{I}_1)}{P(R_1)} \\ &= \frac{P(I_2|R_1 \cap I_1)P(R_1 \cap I_1) + P(I_2|R_1 \cap \bar{I}_1)P(R_1 \cap \bar{I}_1)}{P(R_1)} = \frac{\frac{6}{12} \cdot \frac{3}{13} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{6}{13}} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$



**Exemplu:** Ce probabilități calculează programul de mai jos?

🔗 Care sunt valorile teoretice pentru  $p_1, p_2, p_3$ , din acest exemplu?

```
import random; import numpy
c1,c2,a1,a2=0,0,0,0
N=10000
A= list(range(1,21))
for _ in range(N):
    i=numpy.random.randint(len(A))
    v=A[i]
    c1=c1+(v%2)
    c2=c2+((v%2)==0)
    a1=a1+(v%2)*((v%3)==0);
    a2=a2+((v%2)==0)*(6<=v and v<=10)
p1=a1/c1
p2=a2/c2
p3=c1/N
print(f"p1={p1:.6f}")
print(f"p2={p2:.6f}")
print(f"p3={p3:.6f}")
```

**P. 6. (Formula înmulțirii probabilităților)**

Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu de probabilitate și fie  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$  astfel încât  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Atunci,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**Observație:** 1) Formula înmulțirii probabilităților a două evenimente ( $n = 2$ ) este

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

2) În cazul, în care evenimentele aleatoare  $A_1, \dots, A_n$  sunt *independente în totalitate*, atunci formula înmulțirii probabilităților are forma

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

**Exemplu:** Într-o urnă sunt 2 bile verzi și 3 bile albastre. Se extrag 2 bile succesiv, fără returnare. Care este probabilitatea ca

a) prima bilă să fie verde, iar cea de-a doua albastră?

b) cele 2 bile să aibă aceeași culoare?

c) a doua bilă să fie albastră?

d) prima bilă să fie verde, *știind* că a doua este albastră?

e) se mai extrage o a treia bilă; se cere probabilitatea ca prima bilă să fie verde, cea de-a doua albastră și a treia tot albastră.

R.: Notăm pentru  $i \in \{1, 2, 3\}$  evenimentele:

$A_i$ : la a  $i$ -a extragere s-a obținut bilă albastră;  $V_i$ : la a  $i$ -a extragere s-a obținut bilă verde;

a) folosim P.4:  $P(V_1 \cap A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$

b)  $P((V_1 \cap V_2) \cup (A_1 \cap A_2)) = P(V_1 \cap V_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(V_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$

c) folosim formula probabilității totale P.7:

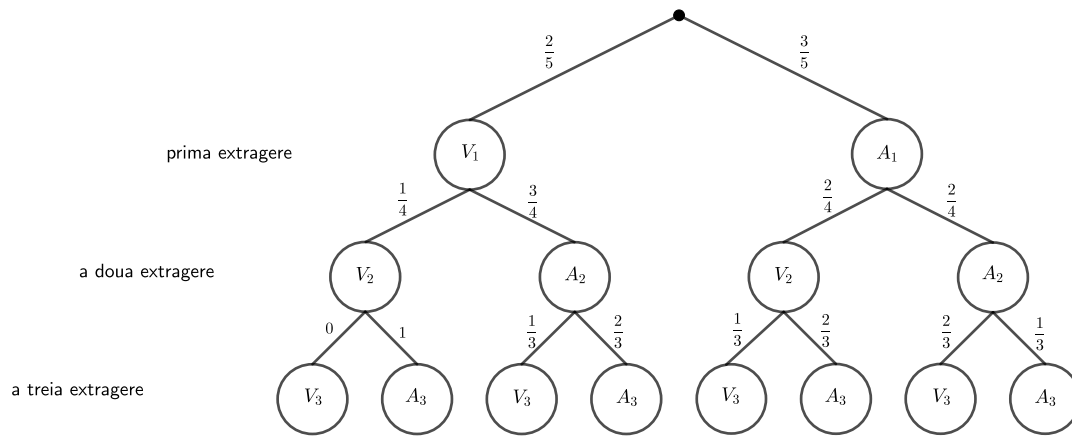
$$P(A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$$

d) folosim P.4:  $P(V_1|A_2) = \frac{P(V_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|V_1)P(V_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}}$

e) formula de înmulțire a probabilităților P.6:

$$P(V_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(V_1) \cdot P(A_2|V_1) \cdot P(A_3|V_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$





**Fig. 3. Extragere fără returnare**

## Formula lui Bayes

Formula lui Bayes este o metodă de a „corecta” (a revizui, a îmbunătăți) pe baza unor noi date (informații) disponibile o probabilitate determinată apriori.

► Se pornește cu o estimare pentru probabilitatea unei anumite ipoteze  $H$  (engl. *hypothesis*).

↪  $P(H)$  probabilitatea ca ipoteza  $H$  să fie adevărată, numită și **probabilitatea apriori**

► Dacă avem noi date (date de antrenare, dovezi, informații, evidențe - engl. *evidence*)  $E$ , ce privesc ipoteza  $H$ , se poate calcula o probabilitate „corectată” pentru ipoteza  $H$ , numită probabilitate posterioară (a-posteriori)

↪ probabilitatea condiționată  $P(H|E)$  este **probabilitatea posterioară** (corectată de cunoașterea noilor date / informații / evidențe);

► Se cunosc:

↪  $P(E|H)$  probabilitatea ca să apară datele, știind că ipoteza  $H$  este adevărată;

↪  $P(E|\bar{H})$  probabilitatea ca să apară datele, știind că ipoteza  $H$  este falsă

acestea reprezintă verosimilitatea (engl. *likelihood*) datelor observate (a informațiilor / evidențelor).

**Exemplu:** Un clasificator de emailuri este conceput pentru a detecta mesajele spam. Fiecare email este clasificat într-una dintre cele două categorii:

- $S$ : un email este spam

- $\bar{S}$ : un email nu este spam

$C$ : un email conține cuvântul *succes*.

Se cunosc probabilitățile

$$P(S) = 0.2, \text{ deci } P(\bar{S}) = 0.8 \text{ (probabilitățile apriori),}$$

$$P(C|S) = 0.7, P(C|\bar{S}) = 0.1.$$

Care este probabilitatea ca un email să fie spam, știind că emailul conține cuvântul *succes*?



R: Scriem succesiv

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C)} = \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C|S) \cdot P(S) + P(C|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}.$$

Calculăm (folosim P.5 cu partiția  $\{S, \bar{S}\}$ )

$$P(C) = P(C|S) \cdot P(S) + P(C|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.22$$

$$\Rightarrow P(S|C) = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.22} = \frac{0.14}{0.22} \approx 0.636 \text{ (probabilitatea posterioară).}$$

▷ Probabilitatea ca un email să fie clasificat spam, știind că emailul conține cuvântul *succes* este 0.636.

▷ Dacă un email conține cuvântul *succes*, atunci există aproximativ 63.6% șanse să fie clasificat spam. ♣

### P. 7. (Formula lui Bayes)

Într-un spațiu de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  considerăm partiția  $\{H_1, \dots, H_n\}$  a lui  $\Omega$  cu  $H_i \in \mathcal{K}$  și  $P(H_i) > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , și fie  $E \in \mathcal{K}$  astfel încât  $P(E) > 0$ . Atunci,

$$P(H_j|E) = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{P(E)} = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{P(E|H_1)P(H_1) + \dots + P(E|H_n)P(H_n)} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

▷ pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $P(H_i)$  sunt **probabilități apriori** pentru  $H_i$ , numite și ipoteze (asertiuni; engl. *hypothesis*)

▷  $E$  se numește **evidență** (dovadă, premisă, informație; engl. *evidence*);

▷ cu formula lui Bayes se calculează probabilitățile pentru ipoteze, cunoscând evidența:  $P(H_j|E)$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , care se numesc **probabilități posterioare** (ulterioare);

▷  $P(E|H_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , reprezintă verosimilitatea (engl. *likelihood*) datelor observate.

▷ Se pot calcula probabilitățile *cauzelor*, date fiind (cunoscând / știind) *efectele*; formula lui Bayes ne ajută să diagnosticăm o anumită situație sau să testăm o ipoteză.

### Exemplu (problemă de clasificare): Cât de bun este filtrul de spam?

- $H$ : un email este spam (în realitate)
- $\bar{H}$ : un email este non-spam (în realitate)

Un filtru de spam trebuie să clasifice emailurile în

spam (evenimentul  $E$ ) sau non-spam (evenimentul  $\bar{E}$ ).

Se pune problema de a face o predicție / prognoză asupra unui email ales aleator, dacă acesta este spam sau non-spam cu ajutorul filtrului de spam.

Au fost colectate următoarele date statistice:

▷  $AP = 400$  (adevărat pozitiv) Numărul de emailuri care sunt de fapt spam și care au fost clasificate ca spam de către filtrul de spam ;  $\#(H \cap E)$ <sup>1</sup>

▷  $FP = 210$  (fals pozitiv) Numărul de emailuri care sunt de fapt non-spam și care au fost clasificate ca fiind spam de filtrul de spam ;  $\#(\bar{H} \cap E)$

▷  $FN = 310$  (fals negativ) Numărul de emailuri care sunt de fapt spam și care au fost clasificate ca non-spam de filtrul de spam ;  $\#(H \cap \bar{E})$

▷  $AN = 1200$  (adevărat negativ) Numărul de emailuri care sunt de fapt non-spam și care au fost clasificate ca non-spam de filtrul de spam;  $\#(\bar{H} \cap \bar{E})$ .

Matricea de confuzie este utilizată pentru a vizualiza performanța unui clasificator (de exemplu, a filtrului de spam).

		starea actuală (realitatea)		
		$H$ (email este spam)	$\bar{H}$ (email este non-spam)	total
predicția	$E$ (email este clasificat spam)	AP	FP	AP+FP
	$\bar{E}$ (email este clasificat non-spam)	FN	AN	FN+AN
	total	AP+FN	FP+AN	AP+FP+FN+AN

Matricea de confuzie (engl. *confusion matrix*)

		starea actuală (realitatea)		
		$H$ : email este spam	$\bar{H}$ : email este non-spam	total
predicția	$E$ : email este clasificat spam	400 (adevărat pozitiv AP)	210 (fals pozitiv FP)	610
	$\bar{E}$ : email este clasificat non-spam	310 (fals negativ FN)	1200 (adevărat negativ AN)	1510
	total	710	1410	2120

Matricea de confuzie construită cu datele statistice din acest exemplu

<sup>1</sup> $\#(H \cap E)$  = numărul de elemente din  $H \cap E$ .

Pe baza datelor statistice: a) probabilitatea ca un email, despre care se știe că fost clasificat spam, să fie în realitate spam, este

$$P(H|E) = \frac{400}{610} \approx 0.65 \text{ (valoarea predictivă pozitivă);}$$

b) probabilitatea ca un email, despre care se știe că fost clasificat non-spam, să fie în realitate non-spam este

$$P(\bar{H}|\bar{E}) = \frac{1200}{1510} \approx 0.79 \text{ (valoarea predictivă negativă).}$$



diagnosticare	<i>machine learning (ML)</i>
măsurile de performanță	<i>measuring the performance of a binary classification model</i>
valoarea predictivă pozitivă = $\frac{AP}{AP+FP}$	<i>positive predictive value; precision</i>
valoarea predictivă negativă = $\frac{AN}{AN+FN}$	<i>negative predictive value</i>
sensibilitatea = $\frac{AP}{AP+FN}$	<i>recall; probability of detection; true positive rate</i>
specificitatea = $\frac{AN}{AN+FP}$	<i>true negative rate</i>
acuratețea = $\frac{AP+AN}{AP+FP+AN+FN}$	<i>accuracy</i>

★ Probabilitățile condiționate sunt folosite în probleme de clasificare, în teoria deciziilor, în predicție, în diagnosticare, etc.