

Sémantique élémentaire des langages: Introduction, règles d'inférence et preuves par induction

Didier Buchs

Université de Genève

26 février 2018

1/49



Plan

- Pourquoi une sémantique ? Concepts de base.
- Notions de syntaxe abstraite
- Induction mathématique et induction structurelle
- Termes, Types, Termes typés
- Systèmes de transitions
- Différentes sémantiques d'expression arithmétique
 - Sémantique d'évaluation (dénotationnelle)
 - Sémantique computationnelle
 - Sémantique opérationnelle concrète
- Sémantique d'évaluation d'un langage impératif
- Evaluation paresseuse
- Aperçu de sémantique de la concurrence
- Interprétation de programme
- Sémantique de la programmation logique (résolution)

2/49

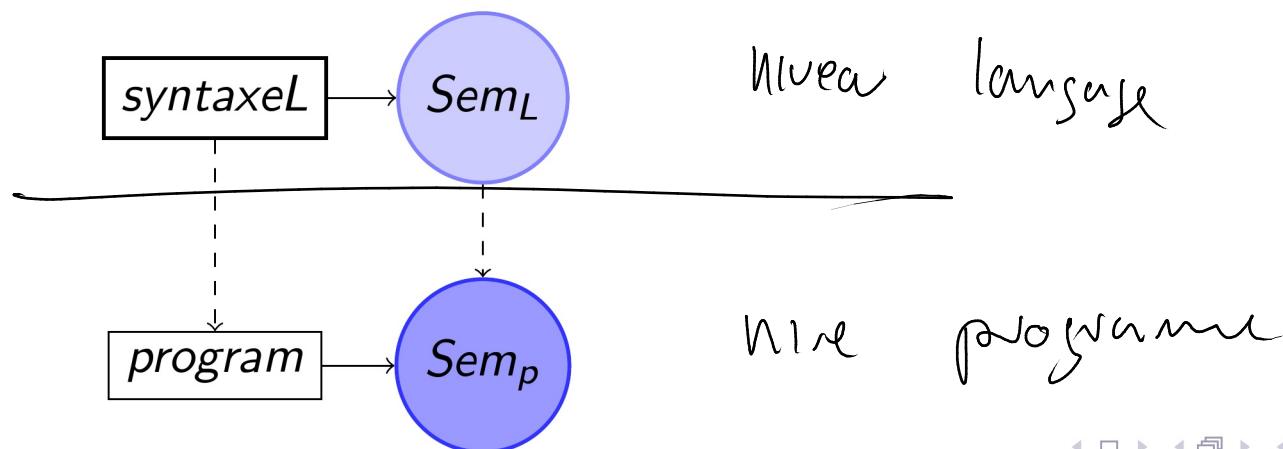


Qu'est ce qu'est une sémantique ?

Sémantique : Relatif au sens (grec *sēmantikos* : qui signifie)

Objectif : Donner un sens à une description textuelle (fournir un modèle de certains aspects de ce que représente cette description)

- syntaxe = définition des expressions valides
 - sémantique = effets de l'évaluation des expressions correctes
 - sur l'état (domaine sémantique)
 - observé par l'occurrence d'un événement ou de l'expression



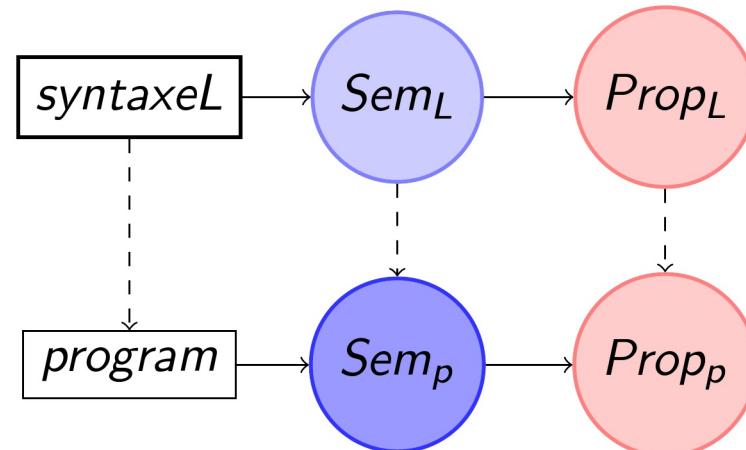
Pourquoi étudier une sémantique ?

- La syntaxe est un domaine bien compris et formalisé, mais qui ne s'intéresse qu'aux propriétés structurelles et grammaticales du langage
- Il n'y a pas de large consensus sur la meilleure méthode pour décrire la sémantique d'un langage, mais il y a un ensemble de méthodes adaptées à chaque types d'objectifs.
- Sémantique statique (typage) et sémantique dynamique (effets de l'exécution)

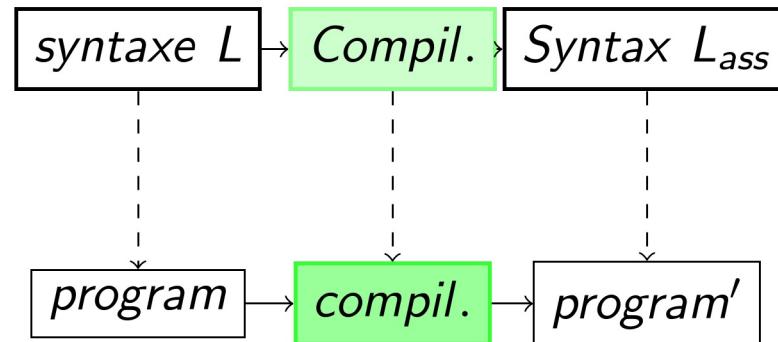
Pourquoi étudier une sémantique ?

- Définir une sémantique pour un langage montre que son utilité est indéniable :
 - pour comprendre comment utiliser le langage
 - pour vérifier qu'un programme répond aux attentes
 - pour compiler correctement les programmes
 - pour transformer (optimiser, paralléliser) les applications

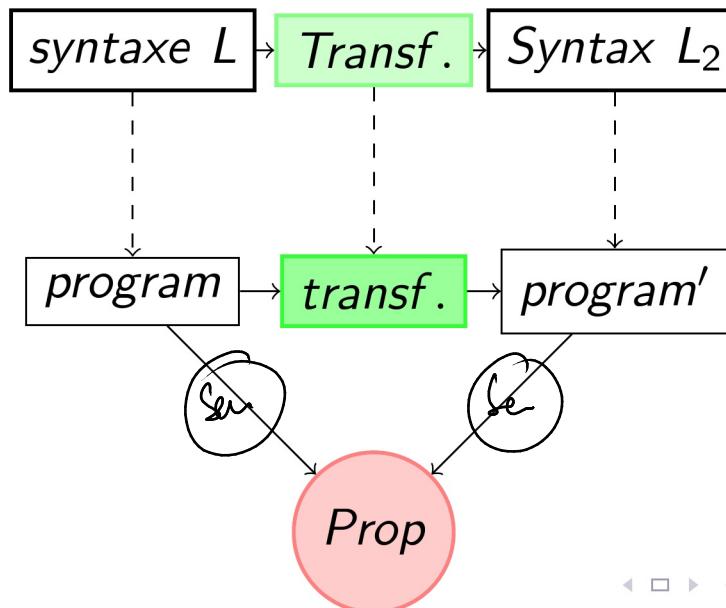
Verifier :



Compiler :



Transformer :



Quels types de sémantique ?

Niveau d'abstraction des sémantiques :

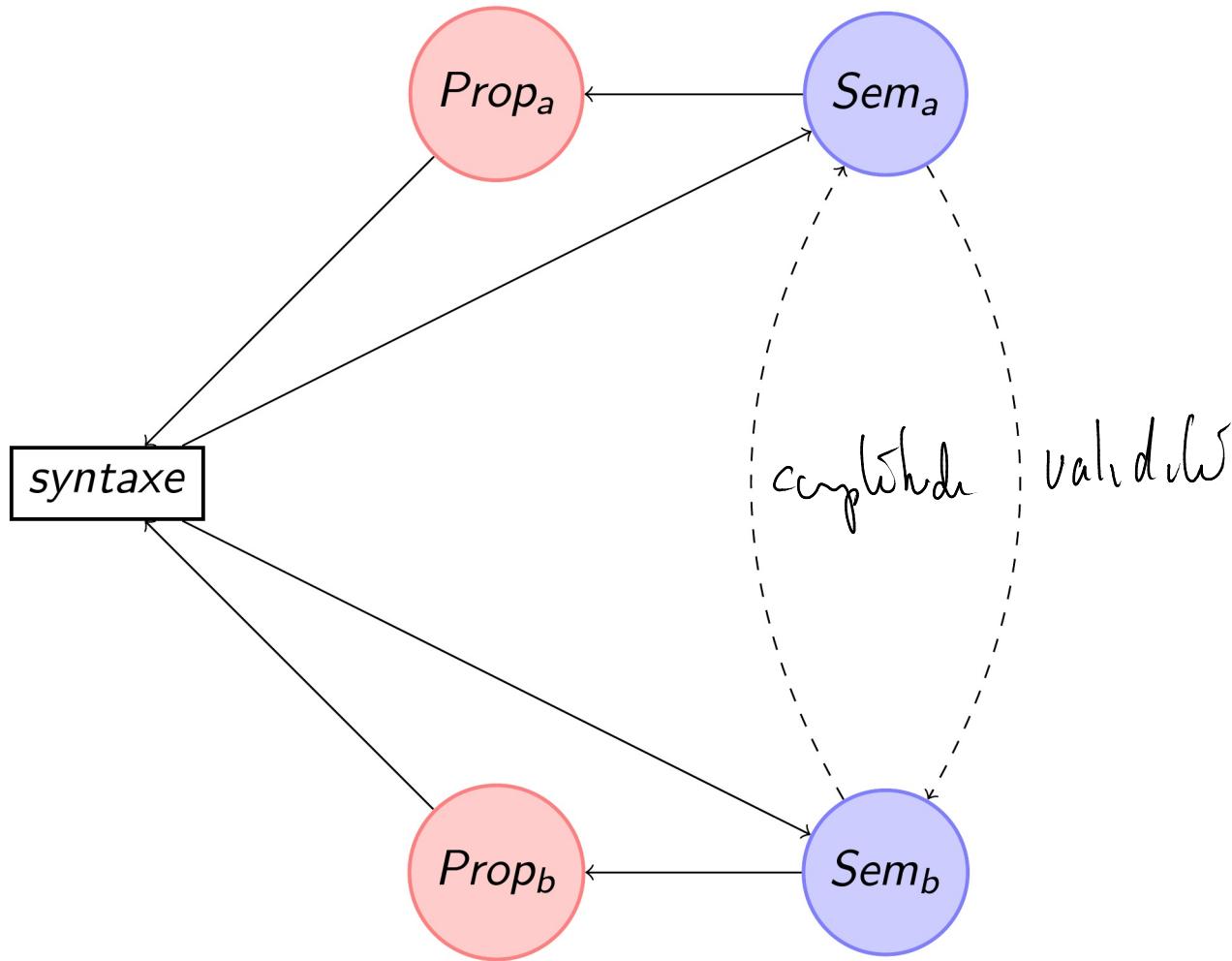
dénotationnelle >axiomatique>opérationnelle

Pourquoi différents types de sémantiques :

- Référence pour la validité des compilateurs (dénotationnelle)
- Aide à concevoir un langage (\Rightarrow concept simples)(dénotationnelle)
- Référence pour l'apprentissage (dénotationnelle)
- Référence pour les traitements à appliquer sur les programmes (axiomatique)
- Permet la définition d'un compilateur (opérationnelle)

Prend en compte la remarque suivante (Loi de la programmation de Strachey) : *Decide what you want to say before you worry about how you are going to say it*

Relations entre sémantique ?



Qualité de la relations entre sémantique ?

- **complétude** (par rapport à)

Exemple : Toutes les preuves en logique des clauses de Horn peuvent être prouvées en Prolog

$$a \Rightarrow \text{cnd}$$

- **validité** (par rapport à)

Exemple : Toutes les preuves en Prolog sont des preuves valides en logique du 1er ordre

Dans de nombreux cas on se contente de la validité¹.

1. (pour Prolog la sémantique opérationnelle est valide par rapport à la sémantique de la logique des clauses de Horn mais pas complète). !! Avec la négation ce n'est pas le cas !

Histoire de la sémantique des langages de programmation

- Dénotationnelle : Scott, Strachey, Milne, Stoy 70's pour la sémantique des langages de programmation
- Sémantique du λ -calcul : 1941 Alonzo Church, 1975 langage Scheme, 1990 langage Haskell
- Opérationnelle (SOS) : Plotkin 1960, large utilisation actuellement dans Réseaux de Petri, logiques temporelles, CCS, ...

Structural Operational Semantics

Syntaxe abstraite

La syntaxe abstraite identifie les composantes significatives des constructions du langage ; elle est liée aux symboles non terminaux de la grammaire.

La syntaxe concrète décrit complètement la représentation écrite (placement des parenthèses, ponctuation, etc)

La même syntaxe abstraite sous-tend ces exemples en Modula-2 et en C :

WHILE $x <> A[i]$ *DO* $i := i - 1$ *END*

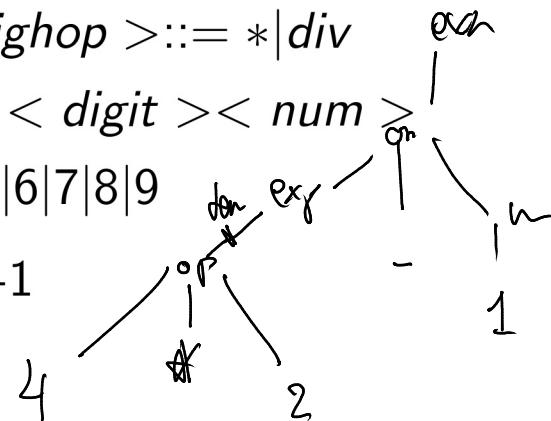
while($x \neq A[i]$) $i = i - 1;$

\Leftrightarrow **while(cond,prog)**

Syntaxe abstraite vs. syntaxe concrète : opérations arithmétiques

- ① $< \text{exp} > ::= < \text{term} > | < \text{exp} > < \text{lowop} > < \text{term} >$
- ② $< \text{term} > ::= < \text{num} > | < \text{term} > < \text{highop} > < \text{num} >$
- ③ $< \text{lowop} > ::= + | - | < \text{highop} > ::= * | /$
- ④ $< \text{num} > ::= < \text{digit} > | < \text{digit} > < \text{num} >$
- ⑤ $< \text{digit} > ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

arbre d'analyse pour : $4 * 2 - 1$



Syntaxe abstraite vs. syntaxe concrète

- ① $< \text{exp} > ::= < \text{num} > | < \text{exp} > < \text{op} > < \text{exp} >$
- ② $< \text{op} > ::= + | - | * | \text{div}$
- ③ $< \text{num} > ::= < \text{digit} > | < \text{digit} > < \text{num} >$
- ④ $< \text{digit} > ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

Deux arbres d'analyse pour : $4 * 2 - 1$

$$(4 * 2) - 1 \approx -(*(4, 2), 1)$$

Induction mathématique et induction structurelle

- Preuves par récurrence : propriété $P(x)$, pour tout $x \in \mathbb{N}$
- Technique de Preuve :
 - Prouver $P(x)$ est vrai pour $x = 0$ c'est à dire $P(0)$ (cas de base)
 - Supposant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est vrai on prouve que $P(k + 1)$ est vrai (cas inductif)
 - Alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Remarque : La validité de la preuve par induction est liée à l'existence d'un ordre bien fondé sur les entiers.

plus sur \mathbb{N}
mais sur toutes
structures

Mais pas sur \mathbb{R} , $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}^2$

Example

$$P(x) = (0 + 1 + 2 + 3\dots + .. + x - 1 + x = x * (x + 1) \text{div} 2)$$

Définitions inductives et minimalité

Definition (Nombres Naturels)

- $0 \in \mathbb{N}$
- $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$

Mais il existe d'autres ensembles satisfaisant cette propriété : \mathbb{Q} , \mathbb{R} , ...

Dans sa définition des entiers Peano ajoute une condition d'injectivité à la fonction $+1$, cela élimine également les \mathbb{Z}^k

Définitions inductives et minimalité

soit S cet ensemble $S = \{X \mid 0 \in X \wedge \forall x, x \in X \Rightarrow x + 1 \in X\}$

Theorem

\mathbb{N} est le plus petit ensemble satisfaisant ces propriétés,
 $\forall X \in S, \mathbb{N} \subseteq X$

Démonstration.

On utilise pour tout $X \in S$: $P_X(n) = (n \in X)$

- $P_X(0)$
- Hyp. $P_X(n)$ vrai, il faut prouver $P_X(n + 1)$



Définitions inductives d'ensembles

Exemple :

- $0 \in EP$
- $x \in EP \Rightarrow x + 2 \in EP$

Les entiers pairs sont l'ensemble minimum satisfaisant ces propriétés. Il y a d'autres ensembles satisfaisants ces propriétés à l'image des entiers.

Remarques :

- La propriété $P(k) = 2k \in EP$ est valable pour tous les EP sans être minimal.
Récurrence $2 * 0 = 0 \in EP$ et $2k \in EP$ implique
 $2 * (k + 1) \in EP$
- La propriété $P(k) = \forall m \in EP, k + m \in EP$ nécessite l'hypothèse de minimalité.

Jugements

Un jugement peut représenter un théorème :

$$\vdash \text{theoreme}$$

Les règles de déduction ont la forme classique :

$$\frac{\vdash \text{con}_1 \wedge \vdash \text{con}_2 \dots \wedge \vdash \text{con}_n}{\vdash \text{conclusion}}$$

Les jugements sur les prédictats sont construits sur le même modèle que les jugements en logique.

Définitions d'ensembles :

$$\vdash 0 \in EP \quad \forall k, \frac{\vdash k \in EP}{\vdash k + 2 \in EP}$$

$$\forall k, \forall n, \frac{\vdash n \in \mathbb{N}}{\vdash n \in DIV_0} \quad \forall k, \forall n, \frac{\vdash k \in \mathbb{N} \wedge \vdash n \in DIV_k}{\vdash n \in DIV_{n+k}}$$

Notations pour les définitions inductives

Si le jugement n'a pas de partie gauche, la forme
premisses \Rightarrow *conclusion* est notée :

$$\frac{\text{premisses}}{\text{conclusion}}$$

- les prémisses sont des conjonction de prédicats
- Les prédicats seront construits sur des termes avec ou sans variables
- la conclusion est un prédicat
- Les variables apparaissant dans les prédicats sont implicitement quantifiées universellement.

Exemples

Définitions d'ensembles :

$$\frac{k \in EP}{0 \in EP} \quad \frac{k \in EP}{k + 2 \in EP}$$

$$\frac{n \in \mathbb{N}}{n \in DIV_0} \quad \frac{k \in \mathbb{N}, n \in DIV_k}{n \in DIV_{n+k}}$$

En notation relationnelle

$$\frac{n \in \mathbb{N}}{n \text{ DIV } 0} \quad \frac{k \in \mathbb{N}, n \text{ DIV } k}{n \text{ DIV } n+k}$$

$$\equiv \frac{n \in \mathbb{N}}{n \text{ DIV } 0}$$

21/49

Déductions

- Une déduction est une série d'application de règles de définition inductives
- Les règles se composent 'verticalement' ou une prémissse doit être la conclusion d'une autre règle.
- Les règles des plus haut niveaux sont les règles de bases sans prémisses
- Les variables peuvent être instanciées dans leurs domaines de définitions.

Exemple : prouver que $4 \in EP$

$$\frac{\overline{0 \in EP}}{0 + 2 \in EP}$$
$$2 + 2 \in EP$$

Programmation logique en Swift/prolog

Prolog est difficile à combiner avec des langages "classiques"

Solution :

- Interface de type librairie , avec structures de données différentes
- Micro-Kanren, adaptation fonctionnelle a la programmation logique
- LogicKit une adaptation a Swift de Prolog

Et Prolog ?

Règles inductives = clauses de Horn, mais aspect opérationnel occulté. Conduit à des problèmes si le prédicat n'est pas réversible.
Exemple avec les entiers de prolog : Génération des entiers pairs

Example

```
pair(0).  
pair(N) :- pair(M), N is M + 2.
```

test de la parité

Example

```
pairbis(0).  
pairbis(N) :- M is N - 2, pairbis(M).
```

Induction structurelle

Les principes d'inductions peuvent s'appliquer à n'importe quelles structures définies inductivement.

Exemple : liste d'entiers naturels : $n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}$

Definition

$$\frac{}{[] \in \text{Liste}} \quad \frac{n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}}{n :: j \in \text{Liste}}$$

C'est ce que nous définissons comme les termes : $T_{\{[], ::\}}(\mathbb{N})$

Induction structurelle (2)

Exercice : donner une déduction pour la liste : $(3 :: (4 :: (1 :: []))) \in Liste$

$$1 \in \mathbb{N}, \quad [] \in Liste$$

$$4 \in \mathbb{N} \quad 1 :: [] \in Liste$$

$$3 \in \mathbb{N}, \quad 4 :: 1 :: [] \in Liste$$

$$3 :: 4 :: 1 :: [] \in Liste$$

Termes

Definition

Une signature est un ensemble d'opérations avec leurs arités :

- OP les noms d'opérations
- $\mu : OP \rightarrow \mathbb{N}$ l'arité des opérateurs

$$\begin{aligned} \mu &([]) = 0 \\ \mu &([:]) = 2 \end{aligned}$$

Definition (Termes (non typés))

L'ensemble des termes construit sur un domaine D avec l'ensemble des opérateurs OP (muni d'une arité μ) seront notés $T_{OP}(D)$. Les termes sont définis inductivement par :

- $D \subseteq T_{OP}(D)$
- $\forall op \in OP, \mu(op) = n$ l'arité de op et $t_1, \dots, t_n \in T_{OP}(D)$
 $\Rightarrow op(t_1, \dots, t_n) \in T_{OP}(D)$

Termes

Definition (alternative)

$$\frac{t_1 \in T_{OP}(D), \dots, t_{\mu(op)} \in T_{OP}(D), op \in OP}{op(t_1, \dots, t_{\mu(op)}) \in T_{OP}(D)}$$

Induction structurelle : preuves

Definition

$P(x)$ pour toute liste \Leftrightarrow on peut prouver :

- $P([])$
- $P(l)$ vrai alors $P(n :: l)$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

Induction structurelle : exemple

Soit les opérations avec les propriétés usuelles :

- soit $\max(l)$ plus grand élément de l
- soit $\text{somme}(l)$ somme des éléments de l
- soit $\text{long}(l)$ longueur de l

Theorem

$$\forall l \in \text{Liste}, \text{somme}(l) \leq \max(l) * \text{long}(l)$$

Démonstration.

Preuve : $P(x) = \text{somme}(x) \leq \max(x) * \text{long}(x)$

Base : $P([])$ Induction : $P(n :: l)$ sachant que $P(l)$ est vrai

□

Définitions des opérations

$\max(l)$ $\text{somme}(l)$ $\text{long}(l)$ * \leq

$$\frac{\text{somme}(\emptyset) = 0}{}$$

$$\frac{\text{somme}(n; l) = n + \text{somme}(l)}{}$$

$$\frac{\text{somme}(l) = m}{\text{somme}(n; l) = m+n}$$

$$\frac{\text{long}(\emptyset) = 0}{}$$

$$0 \leq n$$

$$\frac{y \leq x}{y+1 \leq x+1}$$

$$\frac{\text{long}(l) = m}{\text{long}(n;l) = m+l}$$

$$\frac{0 \leq 2}{1 \leq 3}$$

Preuves

32/49



Définitions des opérations et relations

$0, \text{succ} \equiv s$

- $\overline{0 \in \mathbb{N}}$
- $\frac{x \in \mathbb{N}}{s(x) \in \mathbb{N}}$

Définitions des opérations et relations

* \leq définis sur 0, s et $+$

- $$\frac{x \in \mathbb{N}}{x + 0 = x}$$
- $$\frac{x, y, k \in \mathbb{N}, x + y = k}{x + s(y) = s(k)}$$
- $$\frac{x \in \mathbb{N}}{x * 0 = 0}$$
- $$\frac{x, y, k, l \in \mathbb{N}, x * y = l, l + \cancel{k} = k}{x * s(y) = k}$$
- $$\overline{0 \leq 0}$$
- $$\frac{x \in \mathbb{N}}{0 \leq s(x)}$$
- $$\frac{x, y \in \mathbb{N}, x \leq y}{s(x) \leq s(y)}$$
- $$\frac{x, y \in \mathbb{N}, x = y}{y = x} \quad \frac{x \in \mathbb{N}}{x = x}, \quad \frac{x, y, z \in \mathbb{N}, x = y, y = z}{x = z}$$

Définitions des opérations

$\max(l) \text{somme}(l) \text{long}(l)$

- $\overline{\text{long}([])=0}$
- $\frac{n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}, \text{long}(l)=k}{\text{long}(n::l)=k+1}$
- $\overline{\text{somme}([])=0}$
- $\frac{n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}, \text{somme}(l)=k}{\text{somme}(n::l)=k+n}$
- $\overline{\max([])=0}$
- $\frac{n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}, \max(l)=k, k \leq n}{\max(n::l)=n}$
- $\frac{n \in \mathbb{N}, j \in \text{Liste}, \max(l)=k, k \not\leq n}{\max(n::l)=k}$

Définitions des principes généraux des fonctions

f est une fonction,

$$\bullet \frac{f:D*D*...*D \rightarrow D, t_1=t_1', t_2=t_2', \dots, t_n=t_n'}{f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1', t_2', \dots, t_n')}$$

En utilisant la transitivité

$$\bullet \frac{f:D*D*...*D \rightarrow D, t_1=t_1', t_2=t_2', \dots, t_n=t_n', f(t_1, t_2, \dots, t_n) = e}{f(t_1', t_2', \dots, t_n') = e}$$

p est un prédictat, (Δ) prédictat déterminé

$$\bullet \frac{P:D*D*...*D, t_1=t_1', t_2=t_2', \dots, t_n=t_n', P(t_1, t_2, \dots, t_n)}{P(t_1', t_2', \dots, t_n')}$$

⚠️ subchuk

Preuves

Démonstration.

Preuve : $P(x) = \text{somme}(x) \leq \max(x) * \text{long}(x)$

Base : $P([])$ Induction : $P(n :: l)$ sachant que $P(l)$ est vrai \square

$$P([]) = \text{somme}([]) \leq \max([]) * \text{long}([])$$

$$\frac{\overline{0 \leq 0, 0 * 0 = 0} \quad \overline{0 \in \mathbb{N}}}{\overline{0 \leq 0 * 0}} \\ \frac{\overline{\text{somme}([]) \leq \max([]) * \text{long}([])}}{P([])}$$

Preuves

Démonstration.

Induction : $P(I) \vdash P(n :: I)$



Cas 1 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I), n \leq \max(I)} \vdash \text{somme}(I) + n \leq \max(I)*\text{long}(I) + \max(I)}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I), n \leq \max(I)} \vdash \text{somme}(I) + n \leq \max(I)*(\text{long}(I)+1)}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I) \vdash \text{somme}(I) + n \leq \max(n::I)*(\text{long}(I)+1)}}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I) \vdash \text{somme}(n::I) \leq \max(n::I)*\text{long}(n::I)}$$

$P(I) \vdash P(n::I)$

~~**1~~ est vrai à cause du lemme :

$$\frac{a \leq b \vdash c \leq d}{a \leq b \vdash c + a \leq d + b}$$

Cas 2 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I), \max(I) \leq n} \vdash \text{somme}(I) \leq n*\text{long}(I)}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I), \max(I) \leq n} \vdash \text{somme}(I) + n \leq n*\text{long}(I) + n}}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I), \max(I) \leq n} \vdash \text{somme}(I) + n \leq n*(\text{long}(I)+1)}}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I) \vdash \text{somme}(I) + n \leq \max(n::I)*(\text{long}(I)+1)}}{\text{somme}(I) \leq \max(I)*\text{long}(I) \vdash \text{somme}(n::I) \leq \max(n::I)*\text{long}(n::I)}$$

$P(I) \vdash P(n::I)$

~~**2~~ est vrai à cause des lemmes :

$$\frac{a \leq b \vdash c \leq d \quad \vdash c \leq d, \vdash d \leq e}{a \leq b \vdash c * a \leq d * b \quad \text{et} \quad \vdash c \leq e}$$

38/49

Preuves annexes

Démonstration.

$$P(a, b) = \frac{a \leq b \vdash c \leq d}{a \leq b \vdash c + a \leq d + b} \text{ Cas de base } P(0,0) \text{ Induction :}$$
$$P(a, b) \vdash P(a, s(b)) \text{ Induction : } P(a, b) \vdash P(s(a), b)$$



$$\text{Cas de base : } \frac{P(0,0) = \frac{0 \leq 0 \vdash c \leq d}{0 \leq 0 \vdash c + 0 \leq d + 0}}{P(0,0)}$$

Cas 1 :

Cas 2 :

Définition de termes

- Les états d'un système peuvent être complexes et construits comme des termes.
- Nous pouvons typer l'ensemble des termes, l'arité sera alors définie sur des noms de types S .
- Un terme libre est construit sur des opérateurs fonctionnels, soit OP l'ensemble de ces opérateurs.
- L'arité (le profil) d'un type est une fonction $\mu : OP \rightarrow S^* \times S$

Exemple :

$$S = \{nat, bool\}$$

$$OP = \{+, -, *, 0, true, false, not\}$$

$$\mu(+) = (nat \ nat, nat)$$

$$\mu(*) = (nat \ nat, nat)$$

$$\mu(0) = (\epsilon, nat)$$

$$\mu(not) = (bool, bool)$$

$$\mu(true) = (\epsilon, bool)$$

40/49

Domaines des états, Définition de termes

Definition (Termes)

L'ensemble des termes construit sur un domaine D de type $s \in S$ avec l'ensemble des opérateurs OP (muni d'une arité) seront notés $T_{OP}(D)$. Les termes sont définis inductivement par :

- $D \subseteq T_{OP}(D)$
- $\forall op \in OP, \mu(op) = (s_1 s_2 \dots s_n, s)$ et $t_1, \dots, t_n \in T_{OP}(D)$
 $\forall i, 1 \leq i \leq n, \mu(t_i) = s_i \Rightarrow op(t_1, \dots, t_n) \in T_{OP}(D)$

Domaines des états, Définition de termes

Naturellement nous pouvons typer l'ensemble des termes,

Definition (type d'un Terme)

Pour un domaine D de type $s \in S$ et l'ensemble des opérateurs OP la fonction de typage μ des opérations est étendue en

$\mu : T_{OP}(D) \rightarrow S$ par :

- $\forall d \in D, \mu(d) = s$
- $\forall op \in OP, \mu(op) = (s_1 s_2 \dots s_n, s)$ l'arité de op et
 $t_1, \dots, t_n \in T_{OP}(D)$ tel que $\mu(t_1) = s_1, \dots, \mu(t_n) = s_n$
 $\Rightarrow \mu(op(t_1, \dots, t_n)) = s$

Exemple : Soit les nombres naturels \mathbb{N} les termes pour les opérateurs $+$ et $*$ sont par exemple :

- $1 + 3 \in T_{\{-+,-*\}}(\mathbb{N})$
- $2 \in T_{\{-+,-*\}}(\mathbb{N})$
- $2 * 3 \in T_{\{-+,-*\}}(\mathbb{N})$
- $(2 * 3) + 4 \in T_{\{-+,-*\}}(\mathbb{N})$

Exemple : Soit des états représentés par des termes sur les naturels : $State = T_{\{-+,-*\}}(\mathbb{N})$

- $1 + 2 \rightarrow 3$
- $1 + (2 * 2) \rightarrow 1 + 4$
- $1 + 4 \rightarrow 5$
- de manière composée $1 + (2 * 2) \rightarrow 1 + 4 \rightarrow 5$

Syntaxe abstraite EBNF vs. termes

- ① $< \text{exp} > ::= < \text{num} > | < \text{exp} > < \text{op} > < \text{exp} >$
- ② $< \text{op} > ::= + | - | * | \text{div}$
- ③ $< \text{num} > ::= < \text{digit} > | < \text{digit} > < \text{num} >$
- ④ $< \text{digit} > ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

Comment passer à des termes ?

Chaque domaine syntaxique correspond à des termes différents,

- ① $\text{exp} = T_{\{-+,--,--,-*,-,-\text{div},-\}}(\text{num}),$
- ② $\text{op} = T_{\{+, -, *, \text{div}\}}(),$
- ③ $\text{num} = T_{\{'}}(\text{digit}) = T_{\{'}}(T_{\{0,1,\dots,9\}}()),$
- ④ $\text{digit} = T_{\{0,1,\dots,9\}}(),$

Systèmes de transitions

- Les changements d'états d'un système vont être décrit par des systèmes de transitions.
- Il s'agit d'une relation sur les états.
- Les états sont décrit par un ensemble, $\text{State} = \text{exp}$ par exemple

Definition

Un système de transition est donc une relation sur $\text{State} \times \text{State}$ notée \rightarrow avec $\rightarrow \subseteq \text{State} \times \text{State}$

Notation : une transition : $x \in \text{State}$ et $y \in \text{State}$ et $(x, y) \in \text{State} \times \text{State}$ sera alors notée $x \rightarrow y$

Exemple : Soit des états représentés par des nombres naturels :

$\text{State} = \mathbb{N}$

- $1 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

45/49

Systèmes de transitions avec contexte

- Les changements d'états d'un système peuvent dépendre d'un contexte.
- Le contexte est un ensemble contenant la définition des propriétés globales attendues pour la déduction.
- Les états sont décrit par un ensemble, $State = exp$ par exemple
- Un système de transition avec contexte est donc une relation sur : $Context \times State \times State$
- Une transition : $c \in Context$, $x \in State$ et $y \in State$
 $(c, x, y) \in Context \times State \times State$ sera alors notée $c \vdash x \rightarrow y$

Exemple : Soit des états représentés par des termes sur les naturels : $State = T_{\{+,*\}}(\mathbb{N})$ et un contexte c :

- $c \vdash 1 + 2 \rightarrow 3$
- $c \vdash 1 + (2 * 2) \rightarrow 1 + 4$
- $c \vdash 1 + 4 \rightarrow 5$

Exemple : Si nous étendons le domaine sur des variables $X = \{A, B\}$: $State = T_{\{+,*\}}(\mathbb{N} \cup X)$ et un contexte $c \in \wp(X \rightarrow \mathbb{N})$ attribuant des valeurs aux variables² :

- $\{A \rightarrow 2\} \vdash 1 + A \rightarrow 3$
- $\{A \rightarrow 2, B \rightarrow 2\} \vdash 1 + (A * B) \rightarrow 1 + 4$
- $\{A \rightarrow 2, B \rightarrow 2\} \vdash 1 + 4 \rightarrow 5$

Systèmes de transitions avec labels

- Les changements d'états d'un système peuvent dépendre d'une action ou d'un événement.
- Les états sont décrit par un ensemble, $State = \exp$ par exemple
- Un système de transition avec labels est donc une relation sur : $State \times Label \times State$
- Une transition : $e \in Label$, $x \in State$ et $y \in State$
 $(x, e, y) \in State \times Label \times State$ sera alors notée $x \xrightarrow{e} y$

Exemple : Un système producteur consommateur

- Les événements sont : $T_{\{put, get\}}(\mathbb{N})$.
- Les états sont décrit par un ensemble, $State \subseteq \wp(\mathbb{N})$ par exemple.
- Un système de transition pour un producteur consommateur sera :
 - $\{\} \xrightarrow{put(2)} \{2\}$
 - $\{2\} \xrightarrow{put(3)} \{2, 3\}$
 - $\{2, 3\} \xrightarrow{get(2)} \{3\}$