郭隆邦 2023-04-24

# 1. 数学基础(平移、旋转、缩放矩阵)

本下节课给大家介绍下矩阵的概念，以及用于几何变换的矩阵，比如平移矩阵、缩放矩阵、旋转矩阵。

如果你对这些几何变换的矩阵概念比较熟悉，可以跳过本节课。

## 线性代数、图形学

如果你有《线性代数》、《计算机图形学》基础，更有利于WebGPU的学习。当然了，你没有这些基础，也没关系，咱们课程的特色就是尽量弱化对数学和图形学基础的要求，尽量带你从零入门。

如果你时间比较充足，也有兴趣，可以去翻翻《线性代数》、《计算机图形学》相关的书籍，当然你不去翻，咱们的课程你也能学习。

如果你数学基础不好，工作也不用封装3D引擎或数学库，可以不用学习《线性代数》，直接用下节课介绍的一个数学库即可。

## 本节课针对学员

- 大学学过线性代数的矩阵，但是并不了解用于平移、旋转、缩放的矩阵
- 没学过线性代数，数学停留在高中水平

## 矩阵、矩阵运算规则

矩阵 是图形学中一个比较重要的数学工具。

m×n矩阵表示m行n列的矩阵。

2x2 矩阵： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 2x3 矩阵： $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 2x1 矩阵： $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

[矩阵乘法运算规则]

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ax}+\mathrm{by} \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{a}+4b & 3a+5b \\ 2c+4d & 3c+5d \end{bmatrix}$$

## 平移矩阵

下面咱们不会严格逻辑推导数学公式，用不严谨的小白方式，给大家介绍下平移矩阵。

一个点的坐标是(x,y,z),假设沿着X、Y、Z轴分别平移Tx、Ty、Tz，毫无疑问平移后的坐标是(x+Tx,y+Ty,z+Tz)。

坐标是(x,y,z)转化为齐次坐标坐标是(x,y,z,1),可以用4x1矩阵表示，这种特殊形式，也可以称为列向量，在webgpu顶点着色器代码中也可以用四维向量 `vec4` 表示。

请用矩阵的乘法运算法则验证下面矩阵的等式是否成立?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{Tx} \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{Ty} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{Tz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{平移矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{xyz齐次坐标}} \text{是否等于?} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{x}+\mathrm{Tx} \\ \mathrm{y}+\mathrm{Ty} \\ \mathrm{z}+\mathrm{Tz} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{平移后齐次坐标}}$$

## 缩放矩阵

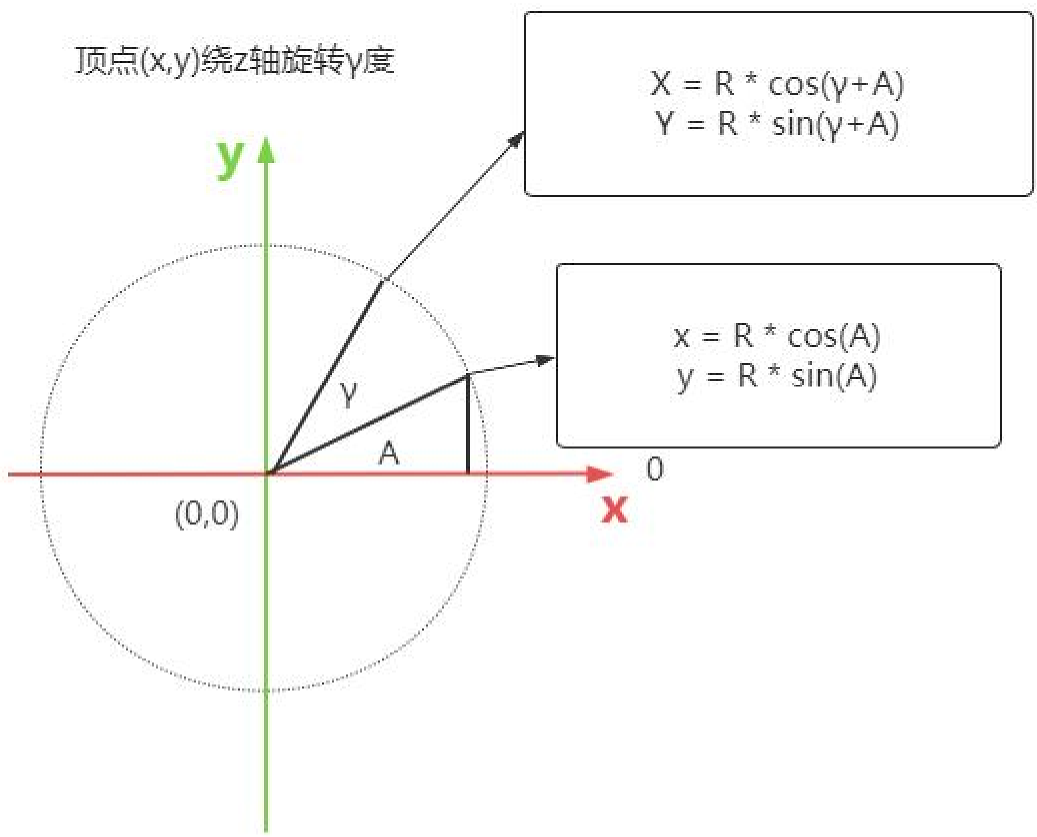
通过缩放矩阵可以对顶点的齐次坐标进行缩放。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{缩放矩阵}} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{坐标缩放结果}}$$

## 旋转矩阵

假设一个点的坐标是(x,y,z),经过旋转变换后的坐标为(X,Y,Z)

**绕Z轴旋转γ角度**,z的坐标不变不变，x、y的坐标发生变化，如果你有兴趣，可以用你高中的三角函数知识推理，可以知道旋转后的坐标：$X=x\cos\gamma-y\sin\gamma, Y=x\sin\gamma+y\cos\gamma$



三角函数计算推理过程

```js
// 假设旋转前角度A，对应x和y的值
x = R * cos(A)
y = R * sin(A)

// 假设旋转了γ度，对应X和Y的值
X = R * cos(γ+A)
  = R * (cos(γ)cos(A)-sin(γ)sin(A))
  = R*cos(A)cos(γ) - R*sin(A)sin(γ)
  = xcosγ-ysinγ

Y = R * sin(γ+A)
  = R * (sin(γ)cos(A)+cos(γ)sin(A))
  = R*cos(A)sin(γ) + R*sin(A)cos(γ)
  = xsinγ+ycosγ
```

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{是否等于？} \begin{bmatrix} x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ x\sin\gamma + y\cos\gamma \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转后的坐标：X=xcosγ-ysinγ,Y=xsinγ+ycosγ

**绕X轴旋转α角度**

x的坐标不变，y、z的坐标发生变化，Y=ycosα-zsinα,Z=ysinα+zcosα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{是否等于？} \begin{bmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

**绕Y轴旋转β角度**

y的坐标不变，z、x的坐标发生变化，Z=zsinβ+xcosβ,X=zcosβ-xsinβ

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{是否等于？} \begin{bmatrix} z\sin\beta + x\cos\beta \\ y \\ z\cos\beta - x\sin\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

← 9. 三角形拼接矩形

2. 模型矩阵→