素数定理的解析证明

数论基础 (双语) 课程过程性考核

Guoqing Cui

2024 年 10 月 11 日

对于 $x>0$，令 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数，记

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1.$$

则素数定理为

定理 1. *$\pi(x)$ 在 $x\to\infty$ 时，其渐近于 $\frac{x}{\log x}$，换言之，*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1. \tag{1}$$

本文将采用解析的办法来证明定理 1，不过在此之前，需引入一些必要的概念与定理.

定义 1. *对于 $x>0$，定义 Chebyshev ψ-函数为*

$$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n). \tag{2}$$

1 素数定理的等价形式

我们将通过证明素数定理的等价命题来证明素数定理，而本部分就是等价性的证明，事实上，要证明素数定理，等价于证明

$$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\sim x,\quad x\to\infty. \tag{3}$$

定义 2. *对于 $x>0$，定义 Chebyshev ϑ-函数为*

$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p. \tag{4}$$

引理 1. *对于 $x>0$，我们有*

$$0\le\frac{\psi(x)}{x}-\frac{\vartheta(x)}{x}\le\frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}. \tag{5}$$

证明. 由 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义，

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n=p^m\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{6}$$

有

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = \sum_{m=1,p^m\le x}^{\infty}\sum_{p}\Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p\le x^{1/m}}\log p$$
$$= \sum_{m\le \log_2 x}\sum_{p\le x^{1/m}}\log p = \sum_{m\le\log_2 x}\vartheta(x^{1/m}).$$

从而

$$0\le \psi(x)-\vartheta(x) = \sum_{2\le m\le \log_2 x}\vartheta(x^{1/m}).$$

由 $\vartheta(x)$ 的定义我们有如下不等式

$$\vartheta(x)\le\sum_{p\le x}\log x\le x\log x.$$

所以有

$$0\le\psi(x)-\vartheta(x)\le\sum_{2\le m\le\log_2 x}x^{1/m}\log x^{1/m}\le(\log_2 x)\sqrt{x}\log\sqrt{x}$$
$$=\frac{\log x}{\log 2}\sqrt{x}\frac{\log x}{2}=\frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2\log 2}.$$

于是有

$$0\le\frac{\psi(x)}{x}-\frac{\vartheta(x)}{x}\le\frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

□

注意到对于 (5) 式，令 $x\to\infty$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x}-\frac{\vartheta(x)}{x}\right)=0. \tag{7}$$

引理 2. 对于 $x\ge 2$，我们有

$$\vartheta(x)=\pi(x)\log x-\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt. \tag{8}$$
$$\pi(x)=\frac{\vartheta(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt. \tag{9}$$

证明. 令 $a(n)$ 为素数的特征函数，即

$$a(n)=\begin{cases}1 & n\text{为素数}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

于是我们有

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{1<n\le x}a(n)$$
$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p=\sum_{1<n\le x}a(n)\log n.$$

由 Abel 恒等式，取 $f(x)=\log x$, 可得

$$\vartheta(x)=\sum_{1<x\le x}a(n)\log n=\pi(x)\log x-\pi(1)\log 1-\int_1^x\pi(t)\frac{1}{t}dt$$
$$=\pi(x)\log x-\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt.$$

取 $b(n)=a(n)\log n$，则有

$$\pi(x)=\sum_{2-0\le n\le x} b(n)\frac{1}{\log n},\quad \vartheta(x)=\sum_{n\le x} b(n).$$

令 $f(x)=\frac{1}{\log x}$，由 Abel 公式可得

$$\begin{aligned}\pi(x)&=\vartheta(x)\frac{1}{\log x}-\frac{\vartheta(2-0)}{\log(2-0)}+\int_{2-0}^{x}\frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt\\&=\frac{\vartheta(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt.\end{aligned}$$

□

引理 3. 下列三个等式等价.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1. \tag{10}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1. \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1. \tag{12}$$

证明. 由 (7) 式可知 (11) 与 (12) 等价. 现只需证 (10) 与 (11) 等价即可.

(10) $\Rightarrow$ (11) : 由 (8) 式知, 只需证: 由 (10) 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt=0.$$

由 (10) 知 $\frac{\pi(t)}{t}=O\left(\frac{1}{\log t}\right),\forall t\ge 2$，于是有

$$\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt=O\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{dt}{\log t}\right).$$

注意到

$$\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\log t}+\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dt}{\log t}\le\frac{\sqrt{x}}{\log 2}+\frac{x-\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}}.$$

于是

$$\frac{1}{x}\int_2^x\frac{dt}{\log t}\le\frac{1}{\sqrt{x}\log 2}+\frac{x-\sqrt{x}}{x\log\sqrt{x}}\to 0,\quad x\to\infty$$

所以有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt=0.$$

(11) $\Rightarrow$ (10) : 由 (9) 式可知，只需证: 由 (11) 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\int_2^x\frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t}=0.$$

由 (11) 知 $\vartheta(t)=O(t)$，故

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x\frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t}=O\left(\frac{\log x}{x}\int_2^x\frac{dt}{\log^2 t}\right)$$

注意到

$$\int_2^x\frac{dt}{\log^2 t}=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\log^2 t}+\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dt}{\log^2 t}\le\frac{\sqrt{x}}{\log^2 2}+\frac{x-\sqrt{x}}{\log^2\sqrt{x}}$$

于是

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \le \frac{\log x}{\sqrt{x}\log^2 2} + \frac{4(x-\sqrt{x})}{x\log x} \to 0, \quad x\to\infty$$

所以有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t} = 0.$$

$\square$

引理 3 表明，素数定理等价于 (12)，即等价于 (3).

2 素数定理的充分条件

我们在第一部分得到素数定理等价于 (3)，本部分将给出 (3) 的充分条件，即证如果

$$\psi_1(t) = \int_1^x \psi(t)dt \sim \frac{x^2}{2}, \quad x\to\infty,$$

则

$$\psi(x)\sim x, \quad x\to\infty.$$

引理 4. 对于任意数论函数 $a(n)$，记

$$A(x) = \sum_{n\le x} a(n), \quad 其中 A(x) = 0, x<1.$$

则有

$$\sum_{n\le x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt. \tag{13}$$

证明. 应用 Abel 恒等式，令 $f(t)=t$，则有

$$\sum_{n\le x} a(n)n = A(x)x - \int_1^x A(t)dt$$

代入 $A(x)$，即有

$$\sum_{n\le x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt.$$

$\square$

引理 5. 记 $A(x) = \sum\limits_{n\le x} a(n)$，$A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$，设 $a(n)\ge 0, \forall n$，如果存在常数 $c>0, L>0$，使得

$$A_1(x)\sim Lx^c, \quad x\to\infty \tag{14}$$

则有

$$A(x)\sim cLx^{c-1}, \quad x\to\infty. \tag{15}$$

证明. 由 $a(n)$ 恒非负知，$A(x)$ 是递增的，可取 $\beta > 1$，我们有

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u)du \geq \int_x^{\beta x} A(x)du = A(x)(\beta x - x) = x(\beta - 1)A(x).$$

两边同时除以 $(\beta - 1)x^c$，有

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}\left\{\frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c}\beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c}\right\}$$

固定 β，令 $x \to \infty$，我们有

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}(L\beta^c - L) = L\frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}$$

令 $\beta \to 1^+$，则有

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \tag{16}$$

现取 $\alpha \in (0, 1)$，则

$$A_1(x) - A_1(\alpha x) = \int_{\alpha x}^{x} A(u)du \leq \int_{\alpha x}^{x} A(\alpha x)du = A(x)(x - \alpha x) = x(1 - \alpha)A(x)$$

两边同时除以 $(10\alpha)x^c$，则有

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq \frac{1}{1 - \alpha}\left\{\frac{A_1(x)}{x^c} - \frac{A_1(\alpha x)}{(\alpha x)^c}\alpha^c\right\}$$

固定 α，令 $x \to \infty$，我们有

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq \frac{1}{1 - \alpha}(L - L\alpha^c) = L\frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha}.$$

令 $\alpha \to 1^-$，则有

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq cL \tag{17}$$

结合 (16)(17) 式，可得

$$A(x) \sim cLx^{c-1}, \quad x \to \infty.$$

□

现在令 $a(n) = \Lambda(n)$，则 $A(x) = \psi(x)$，$A_1(x) = \psi_1(x)$,$a(n) \geq 0$，应用引理 4，即得

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x}(x - n)\Lambda(n) \tag{18}$$

应用引理 5，可知

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \psi(x) \sim x, x \to \infty.$$

于是接下来的主要任务便是证明

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x}(x - n)\Lambda(n) \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to \infty$$

于是我们要了解 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$. 下一部分便是这方面的工作.

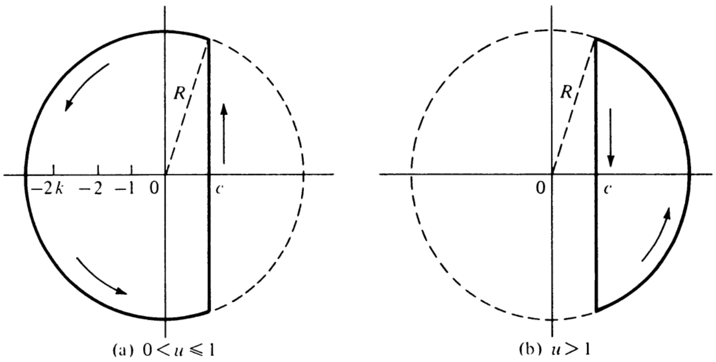
3 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ 的围道积分表示

首先给出一个关于围道积分的一个引理，这将在证明 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ 的围道积分表示时起到关键的作用.

引理 6. 如果 $c>0, u>0$，则对于每个整数 $k\geq 1$，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz=\begin{cases}\frac{1}{k!}(1-u)^k & 0<u\leq 1\\ 0 & u>1\end{cases} \tag{19}$$

且此积分绝对收敛.



证明. 首先注意到被积项可以用 Gamma 函数表示，考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)}\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz$$

其中围道 $C(R)$ 如图所示 (当 $0<u\leq 1$ 时为 (a), 当 $u>1$ 时为 (b)), 其中圆的半径 R 大于 $2k+c$, 所以在圆内的所有极点为 $z=0,-1,\cdots,-k$.

现在证明圆弧部分的积分在 $R\to\infty$ 时趋于 0. 现记 $z=x+iy$，满足 $|z|=R$，则

$$\left|\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right|=\frac{u^{-x}}{|z|\,|z+1|\cdots|z+k|}\leq\frac{u^{-c}}{R\,|z+1|\cdots|z+k|}.$$

对于 $1\leq n\leq k$，注意到 $R>2k$，我们有

$$|z+n|\geq|z|-n=R-n\geq R-k\geq\frac{R}{2}$$

于是沿圆弧的积分

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,R)}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz\right|\leq\frac{Ru^{-c}}{\left(\frac{R}{2}\right)^k R}=\left(\frac{2}{R}\right)^k u^{-c}\to 0, R\to\infty.$$

如果 $u>1$，被积函数在所围区域解析，由 Cauchy 定理知 $\int_{C(R)}=0$. 令 $R\to\infty$，即得所需结果.

如果 $0 < u \le 1$，由留数定理可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz &= \sum_{n=0}^{k} \underset{z=-n}{Res}\, \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} \underset{z=-n}{Res}\, \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n(-1)^n}{(k-n)!n!} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}(-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}.\end{aligned}$$

令 $R \to \infty$ 即得结果. □

引理 7. 对于 $c > 1$，$x \ge 1$，我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds. \tag{20}$$

证明. 由 (18) 式可知，

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n\le x}\left(1-\frac{n}{x}\right)\Lambda(n).$$

应用引理 6，令 $k = 1, u = \frac{n}{x}$，对于 $n \le x$，我们有

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)}ds$$

两边同时乘 $\Lambda(n)$ 并对 $n \le x$ 求和，有

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n\le x}\left(1-\frac{n}{x}\right)\Lambda(n) = \sum_{n\le x}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}ds =: \sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(x)ds\end{aligned}$$

其中

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}.$$

为了能交换求和与积分的次序，我们要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(x)|\, ds$$

收敛. 事实上，我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s|\,|s+1|}ds = \sum_{n=1}^{N}\frac{\Lambda(n)}{n^c}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{|s|\,|s+1|}ds \le A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}.$$

故而收敛，从而可以交换次序，即有

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds\end{aligned} \tag{21}$$

最后一个等号是因为

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -(\log\zeta(s))' = -\left(\log\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)' = -\left(\log\prod_p(1-p^{-s})^{-1}\right)' \\
&= \sum_p \left(\log(1-p^{-s})\right)' = \sum_p \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} \\
&= \sum_p p^{-s}\left(\log p\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots\right) \\
&= \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}
\end{aligned}
$$

最后对 (21) 式两边同时除以 x 即得所证结果. □

引理 8. 对于 $c>1$，$x\geq 1$，我们有

$$
\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds \tag{22}
$$

其中

$$
h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right). \tag{23}
$$

证明. 应用引理 6，令 $k=2,u=\frac{1}{x}$，则对于 $x\geq 1$，有 $u\leq 1$，由 (19) 式可得

$$
\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^s}{s(s+1)(s+2)}ds.
$$

其中 $c>0$，现用 $s-1$ 代替 s，则 $c>1$，有

$$
\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)(s-1)}ds.
$$

现用引理 7 所得 (20) 式与上式相减，可得所证.

$$
\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)ds
$$

□

若记 $s=c+it$，则 (22) 式可写作

$$
\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(c+it)e^{it\log x}dt. \tag{24}
$$

我们目的是要证明

$$
\psi_1(x)\sim\frac{x^2}{2},\quad x\to\infty.
$$

由 (24) 式知，只需证明 (24) 等号右边在 $x\to\infty$ 时趋于 0 即可，然而这并不显然，需要对 $\zeta(s)$ 进行详细的刻画，这在下一部分讨论.

4 与 $\zeta(s)$ 相关的估计

首先我们给出两个关于 $\zeta(s)$ 的积分表示 [1]，这是欧拉求和公式的结果，在此直接引用. 对于 $\sigma>0$，有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}-s\int_N^\infty\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx+\frac{N^{1-s}}{s-1}$$

$$\zeta'(s)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^s}+s\int_N^\infty\frac{(x-[x])\log x}{x^{s+1}}dx-\int_N^\infty\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx-\frac{N^{1-s}\log N}{s-1}-\frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}.$$

引理 9. 对任意 $A>0$，存在常数 $M=M(A)$ 使得

$$|\zeta(s)|\le M\log t\qquad |\zeta'(s)|\le M\log^2 t \tag{25}$$

对于 $\sigma\ge\frac{1}{2}$ 的 s 且满足

$$\sigma>1-\frac{A}{\log t}\qquad t\ge e \tag{26}$$

成立.

证明. 对于 $\sigma\ge 2$，结果是平凡的，这是因为此时 $|\zeta(s)|\le\zeta(2)$，$|\zeta'(s)|\le|\zeta'(2)|$. 因此我们以下考虑 $\sigma<2$，$t\ge e$. 则

$$|s|\le\sigma+t\le 2+t<2t\qquad |s-1|\ge t$$

于是 $\frac{1}{|s-1|}\le\frac{1}{t}$. 应用本部分开始所列的 $\zeta(s)$ 的积分表示公式，我们有估计

$$|\zeta(s)|\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}+2t\int_N^\infty\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx+\frac{N^{1-\sigma}}{t}.$$

现取 $N=[t]$，则对于 $N\le t<N+1$，若 $n\le N$，则 $\log n\le\log t$. 由 (26) 式可知 $1-\sigma<\frac{A}{\log t}$，故

$$\frac{1}{n^\sigma}=\frac{n^{1-\sigma}}{n}=\frac{1}{n}e^{(1-\sigma)\log n}<\frac{1}{n}e^{A\log n/\log t}\le\frac{1}{n}e^A=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此有

$$\frac{2t}{\sigma N^\sigma}=O\left(\frac{N+1}{N}\right)=O(1)\qquad\frac{N^{1-\sigma}}{t}=\frac{N}{t}\frac{1}{N^\sigma}=O\left(\frac{1}{N}\right)=O(1).$$

所以

$$|\zeta(s)|=O\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)+O(1)=O(\log N)+O(1)=O(\log t).$$

这样就得到了 $|\zeta(s)|\le M\log t$. 对于 $\zeta'(s)$，类似地，应用 $\zeta'(s)$ 的积分表示，唯一的不同便是多一个 $\log N$ 的因子，由 $\log N=O(\log t)$，故 $|\zeta'(s)|=O(\log^2 t)$，即 $|\zeta'(s)|\le M\log^2 t$. □

引理 10. 对于 $\sigma>1$，我们有

$$\zeta^3(\sigma)\,|\zeta(\sigma+it)|^4\,|\zeta(\sigma+2it)|\ge 1. \tag{27}$$

证明. 由 $\zeta(s)$ 的定义和性质 [1]，可记 $\zeta(s)=e^{G(s)}$，其中

$$G(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s}=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}},\qquad(\sigma>1).$$

于是

$$\zeta(s)=\exp\left(\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}\right)=\exp\left(\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-imt\log p}}{mp^{m\sigma}}\right).$$

则

$$|\zeta(s)|=\exp\left(\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right).$$

于是有

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4\left|\zeta(\sigma+2it)\right|=\exp\left(\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right).$$

注意到对任意 θ，有

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geq 0$$

故

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4\left|\zeta(\sigma+2it)\right|\geq 1.$$

□

引理 11. *存在常数 $M>0$ 使得对于 $\sigma\geq 1, t\geq e$ 的 s 均成立*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|<M\log^7 t\qquad\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|<M\log^9 t.\tag{28}$$

证明. 对于 $\sigma\geq 2$，我们有

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq\zeta(2)$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}.$$

所以所证不等式在 $\sigma\geq 2$ 时平凡. 实际上，证明地关键在于 $1\leq\sigma\leq 2, t\geq e$ 的情况. 由引理 10 的 (27) 式，我们有

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}\leq\zeta(\sigma)^{3/4}\left|\zeta(\sigma+2it)\right|^{1/4}.$$

由于 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处的留数为 1，即当 $\sigma\to 1$ 时，有 $(\sigma-1)\zeta(\sigma)\to 1$，于是对于 $1\leq\sigma\leq 2$，有 $(\sigma-1)\zeta(\sigma)\leq M$，则

$$\zeta(\sigma)\leq\frac{M}{\sigma-1},\quad\forall 1<\sigma\leq 2.$$

由引理 9 可知，$\zeta(\sigma+2it)=O(\log t),\forall 1\leq\sigma\leq 2$，故对于 $1<\sigma\leq 2$，有

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}\leq C\frac{M^{3/4}(\log t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}}=\frac{A(\log t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}}.$$

则存在常数 $B>0$ 使得

$$|\zeta(\sigma+it)|>\frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}},\quad\forall 1<\sigma\leq 2, t\geq e.\tag{29}$$

上式对于 $\sigma=1$ 也是成立的 (平凡). 现取 $\alpha\in(1,2)$，如果 $1\leq\sigma\leq\alpha, t\geq e$，再次应用引理 9，有

$$|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)|\leq\int_\sigma^\alpha|\zeta'(u+it)|\,du\leq(\alpha-\sigma)M\log^2 t\leq(\alpha-1)M\log^2 t$$

于是由三角不等式可得

$$
\begin{aligned}
|\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\alpha+it)| - |\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)| \\
&\geq |\zeta(\alpha+it)| - (\alpha-1)M\log^2 t \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha-1)M\log^2 t.
\end{aligned}
$$

上式对于 $1 \leq \sigma \leq \alpha$ 成立，注意到对于 $\alpha \leq \sigma \leq 2$，$(\sigma-1)^{3/4} \geq (\alpha-1)^{3/4}$，由 (29) 式知

$$
|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha-1)M\log^2 t.
$$

故此时也成立. 换言之，对于 $1 \leq \sigma \leq 2$，$t \geq e$，有

$$
|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha-1)M\log^2 t. \quad \forall 1 < \alpha < 2
$$

现在我们要取合适的 α 使得

$$
\frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq 2(\alpha-1)M\log^2 t.
$$

则可取

$$
\alpha = 1 + \left(\frac{B}{2M}\right)^4 \frac{1}{(\log t)^9}.
$$

显然此时 $\alpha > 1$，且对于充分的的 t_0 使得 $t \geq t_0$ 时有 $\alpha < 2$. 因此，对于 $t \geq t_0$，$1 \leq \sigma \leq 2$，有

$$
|\zeta(\sigma+it)| \geq (\alpha-1)M\log^t = \frac{C}{(\log t)^7}.
$$

于是存在 M 使得

$$
\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M\log^7 t, \quad \forall \sigma \geq 1, t \geq e.
$$

应用引理 9 的结果 $|\zeta'(s)| \leq M\log^2 t$，并结合上式对于 $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ 的估计，我们可以得到

$$
\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq M\log^9 t.
$$

□

5 素数定理的最终证明

引理 12. 如果 $s=\alpha$ 为 $f(s)$ 一个 k 阶极点，则 $s=\alpha$ 为 $\frac{f'(s)}{f(s)}$ 的一个 1 阶极点，且在此处的留数为 $-k$.

证明. 由条件易知存在在 α 处解析的函数 $g(s)$ 且 $g(\alpha) \neq 0$ 使得 $f(s) = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}$. 于是在 α 的邻域内求导，有

$$
f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}\left\{\frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}\right\}.
$$

因此有

$$
\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}.
$$

由 $\frac{g'(s)}{g(s)}$ 在 α 处解析，从而得证. □

引理 13. 函数

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

在 $s=1$ 处是解析的.

证明. 我们知道对于 $\zeta(s)$，$s=1$ 为其一阶极点，且在此处留数为 1，由引理 12 便知 $s=1$ 为 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ 的 1 阶极点，且其在 $s=1$ 处的留数为 1，与 $\frac{1}{s-1}$ 一致，所以其差 $F(s)$ 在 $s=1$ 处解析. □

经过之前一系列的不懈努力，我们终于做好了证明最终定理的准备.

定理 2. 对于 $x \geq 1$，我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}dt \tag{30}$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\, dt$ 收敛. 于是由 *Riemann-Lebesgue* 引理可知

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad x \to \infty \tag{31}$$

从而由引理 5 便得

$$\psi(x) \sim x, \qquad x \to \infty.$$

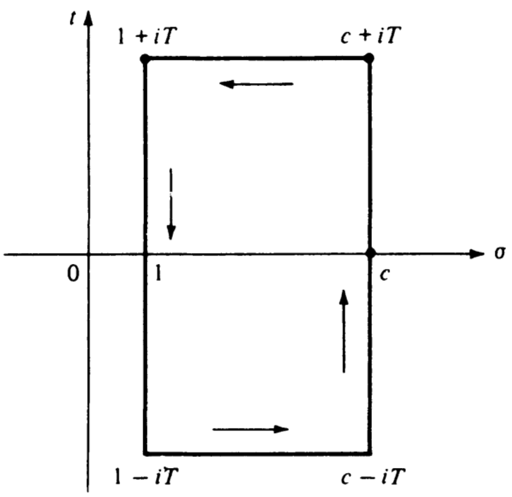
证明. 回顾引理 8 所得到的结果，对于 $c>1$，$x \geq 1$，我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds$$

其中

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

观察可知，我们只需证明两式的右边相等即可. 现在我们取围道如下图，



由引理 13 我们知道被积函数 $x^{s-1}h(s)$ 在所围区域解析，于是由 Cauchy 积分定理便知

$$\int_{\partial R} x^{s-1}h(s)ds = 0.$$

于是我们只需要证明在 $T \to \infty$ 时，被积函数在水平方向的积分趋于 0 即可. 由共轭对称性，我们只需证明在 $t = T$ 的那段上的积分趋于 0 即可. 在这段上，我们作出估计

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{T^2} \qquad \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

由引理 11 知存在 $M > 0$ 使得 $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq M \log^9 t$ 对于所有 $\sigma > 1, t \geq e$ 成立. 因此对于 $T \geq e$，有

$$|h(s)| \leq \frac{M \log^9 T}{T^2}$$

于是

$$\left|\int_{1+iT}^{c+iT} x^{s-1} h(s) ds\right| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M \log^9 T}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2}(c-1) \to 0, \quad T \to \infty$$

于是我们得到了

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it\log x} dt.$$

结合引理 8，便得 (30).

为应用 Riemann-Lebesgue 引理，我们还需证明 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\, dt$ 收敛. 注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\, dt = \int_{-e}^{e} + \int_{e}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-e}.$$

对于 $t \geq e$，我们有

$$h\,|(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2}.$$

故 $\int_e^\infty |h(1+it)|\, dt$ 收敛，类似地 $\int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)|\, dt$ 收敛，而 $\int_{-e}^{e} |h(1+it)|\, dt$ 为定积分，故 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\, dt$ 收敛. 于是证毕.

□

参考文献

[1] Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.