

素数定理的解析证明

数论基础 (双语) 课程过程性考核

Guoqing Cui

2024 年 6 月 15 日

对于 $x > 0$, 令 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数, 记

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

则素数定理为

定理 1. $\pi(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时, 其渐近于 $\frac{x}{\log x}$, 换言之,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1. \quad (1)$$

本文将采用解析的办法来证明定理 1, 不过在此之前, 需引入一些必要的概念与定理.

定义 1. 对于 $x > 0$, 定义 Chebyshev ψ -函数为

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \quad (2)$$

1 素数定理的等价形式

我们将通过证明素数定理的等价命题来证明素数定理, 而本部分就是等价性的证明, 事实上, 要证明素数定理, 等价于证明

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

定义 2. 对于 $x > 0$, 定义 Chebyshev ϑ -函数为

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p. \quad (4)$$

引理 1. 对于 $x > 0$, 我们有

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x} \log 2}. \quad (5)$$

证明. 由 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{m=1, p^m \leq x}^{\infty} \sum_p \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p \\ &= \sum_{m \leq \log_2 x} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).\end{aligned}$$

从而

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

由 $\vartheta(x)$ 的定义我们有如下不等式

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log p \leq x \log x.$$

所以有

$$\begin{aligned}0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) &\leq \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \log x^{1/m} \leq (\log_2 x) \sqrt{x} \log \sqrt{x} \\ &= \frac{\log x}{\log 2} \sqrt{x} \frac{\log x}{2} = \frac{\sqrt{x} (\log x)^2}{2 \log 2}.\end{aligned}$$

于是有

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x} \log 2}.$$

□

注意到对于 (5) 式, 令 $x \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0. \quad (7)$$

引理 2. 对于 $x \geq 2$, 我们有

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \quad (8)$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt. \quad (9)$$

证明. 令 $a(n)$ 为素数的特征函数, 即

$$a(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ 为素数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1 < n \leq x} a(n) \\ \vartheta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{1 < n \leq x} a(n) \log n.\end{aligned}$$

由 Abel 恒等式, 取 $f(x) = \log x$, 可得

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= \sum_{1 < n \leq x} a(n) \log n = \pi(x) \log x - \pi(1) \log 1 - \int_1^x \pi(t) \frac{1}{t} dt \\ &= \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.\end{aligned}$$

取 $b(n) = a(n) \log n$, 则有

$$\pi(x) = \sum_{2-0 \leq n \leq x} b(n) \frac{1}{\log n}, \quad \vartheta(x) = \sum_{n \leq x} b(n).$$

令 $f(x) = \frac{1}{\log x}$, 由 Abel 公式可得

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \vartheta(x) \frac{1}{\log x} - \frac{\vartheta(2-0)}{\log(2-0)} + \int_{2-0}^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt. \end{aligned}$$

□

引理 3. 下列三个等式等价.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1. \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \quad (12)$$

证明. 由 (7) 式可知 (11) 与 (12) 等价. 现只需证 (10) 与 (11) 等价即可.

(10) \Rightarrow (11): 由 (8) 式知, 只需证: 由 (10) 可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = 0.$$

由 (10) 知 $\frac{\pi(t)}{t} = O\left(\frac{1}{\log t}\right), \forall t \geq 2$, 于是有

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = O\left(\frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t}\right).$$

注意到

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log \sqrt{x}}.$$

于是

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{1}{\sqrt{x} \log 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{x \log \sqrt{x}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = 0.$$

(11) \Rightarrow (10): 由 (9) 式可知, 只需证: 由 (11) 可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t) dt}{t \log^2 t} = 0.$$

由 (11) 知 $\vartheta(t) = O(t)$, 故

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t) dt}{t \log^2 t} = O\left(\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right)$$

注意到

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}}$$

于是

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\log x}{\sqrt{x} \log^2 2} + \frac{4(x - \sqrt{x})}{x \log x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t) dt}{t \log^2 t} = 0.$$

□

引理 3 表明, 素数定理等价于 (12), 即等价于 (3).

2 素数定理的充分条件

我们在第一部分得到素数定理等价于 (3), 本部分将给出 (3) 的充分条件, 即证如果

$$\psi_1(t) = \int_1^x \psi(t) dt \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

则

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

引理 4. 对于任意数论函数 $a(n)$, 记

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n), \quad \text{其中 } A(x) = 0, x < 1.$$

则有

$$\sum_{n \leq x} (x - n) a(n) = \int_1^x A(t) dt. \quad (13)$$

证明. 应用 Abel 恒等式, 令 $f(t) = t$, 则有

$$\sum_{n \leq x} a(n) n = A(x) x - \int_1^x A(t) dt$$

代入 $A(x)$, 即有

$$\sum_{n \leq x} (x - n) a(n) = \int_1^x A(t) dt.$$

□

引理 5. 记 $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, $A_1(x) = \int_1^x A(t) dt$, 设 $a(n) \geq 0, \forall n$, 如果存在常数 $c > 0, L > 0$, 使得

$$A_1(x) \sim Lx^c, \quad x \rightarrow \infty \quad (14)$$

则有

$$A(x) \sim cLx^{c-1}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

证明. 由 $a(n)$ 恒非负知, $A(x)$ 是递增的, 可取 $\beta > 1$, 我们有

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u) du \geq \int_x^{\beta x} A(x) du = A(x)(\beta x - x) = x(\beta - 1)A(x).$$

两边同时除以 $(\beta - 1)x^c$, 有

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} \left\{ \frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c} \beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c} \right\}$$

固定 β , 令 $x \rightarrow \infty$, 我们有

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} (L\beta^c - L) = L \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}$$

令 $\beta \rightarrow 1^+$, 则有

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \quad (16)$$

现取 $\alpha \in (0, 1)$, 则

$$A_1(x) - A_1(\alpha x) = \int_{\alpha x}^x A(u) du \leq \int_{\alpha x}^x A(\alpha x) du = A(x)(x - \alpha x) = x(1 - \alpha)A(x)$$

两边同时除以 $(1 - \alpha)x^c$, 则有

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ \frac{A_1(x)}{x^c} - \frac{A_1(\alpha x)}{(\alpha x)^c} \alpha^c \right\}$$

固定 α , 令 $x \rightarrow \infty$, 我们有

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq \frac{1}{1 - \alpha} (L - L\alpha^c) = L \frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha}.$$

令 $\alpha \rightarrow 1^-$, 则有

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq cL \quad (17)$$

结合 (16)(17) 式, 可得

$$A(x) \sim cLx^{c-1}, \quad x \rightarrow \infty.$$

□

现在令 $a(n) = \Lambda(n)$, 则 $A(x) = \psi(x)$, $A_1(x) = \psi_1(x)$, $a(n) \geq 0$, 应用引理 4, 即得

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) \quad (18)$$

应用引理 5, 可知

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \psi(x) \sim x, x \rightarrow \infty.$$

于是接下来的主要任务便是证明

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow \infty$$

于是我们要了解 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$. 下一部分便是这方面的工作.

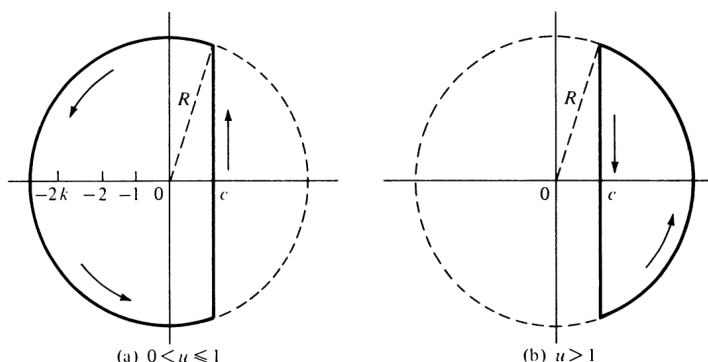
3 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ 的围道积分表示

首先给出一个关于围道积分的一个引理, 这将在证明 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ 的围道积分表示时起到关键的作用.

引理 6. 如果 $c > 0, u > 0$, 则对于每个整数 $k \geq 1$, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & 0 < u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases} \quad (19)$$

且此积分绝对收敛.



证明. 首先注意到被积项可以用 Gamma 函数表示, 考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-z} \Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} dz$$

其中围道 $C(R)$ 如图所示 (当 $0 < u \leq 1$ 时为 (a), 当 $u > 1$ 时为 (b)), 其中圆的半径 R 大于 $2k+c$, 所以在圆内的所有极点为 $z = 0, -1, \dots, -k$.

现在证明圆弧部分的积分在 $R \rightarrow \infty$ 时趋于 0. 现记 $z = x + iy$, 满足 $|z| = R$, 则

$$\left| \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} \right| = \frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}.$$

对于 $1 \leq n \leq k$, 注意到 $R > 2k$, 我们有

$$|z+n| \geq |z| - n = R - n \geq R - k \geq \frac{R}{2}$$

于是沿圆弧的积分

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,R)} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz \right| \leq \frac{Ru^{-c}}{\left(\frac{R}{2}\right)^k R} = \left(\frac{2}{R}\right)^k u^{-c} \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$$

如果 $u > 1$, 被积函数在所围区域解析, 由 Cauchy 定理知 $\int_{C(R)} = 0$. 令 $R \rightarrow \infty$, 即得所需结果.

如果 $0 < u \leq 1$, 由留数定理可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-z} \Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} dz &= \sum_{n=0}^k \operatorname{Res}_{z=-n} \frac{u^{-z} \Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} \operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \sum_{n=0}^k \frac{u^n (-1)^n}{(k-n)! n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}. \end{aligned}$$

令 $R \rightarrow \infty$ 即得结果. □

引理 7. 对于 $c > 1$, $x \geq 1$, 我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \quad (20)$$

证明. 由 (18) 式可知,

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x} \right) \Lambda(n).$$

应用引理 6, 令 $k=1, u = \frac{n}{x}$, 对于 $n \leq x$, 我们有

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds$$

两边同时乘 $\Lambda(n)$ 并对 $n \leq x$ 求和, 有

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x} \right) \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds =: \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(x) ds \end{aligned}$$

其中

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}.$$

为了能交换求和与积分的次序, 我们要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(x)| ds$$

收敛. 事实上, 我们有

$$\sum_{n=1}^N \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s| |s+1|} ds = \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{|s| |s+1|} ds \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c}.$$

故而收敛, 从而可以交换次序, 即有

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds \end{aligned} \quad (21)$$

最后一个等号是因为

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -(\log \zeta(s))' = -\left(\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)' = -\left(\log \prod_p (1-p^{-s})^{-1}\right)' \\
&= \sum_p (\log(1-p^{-s}))' = \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{1-p^{-s}} \\
&= \sum_p p^{-s} (\log p) (1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots) \\
&= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

最后对 (21) 式两边同时除以 x 即得所证结果. \square

引理 8. 对于 $c > 1$, $x \geq 1$, 我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds \quad (22)$$

其中

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right). \quad (23)$$

证明. 应用引理 6, 令 $k=2, u=\frac{1}{x}$, 则对于 $x \geq 1$, 有 $u \leq 1$, 由 (19) 式可得

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds.$$

其中 $c > 0$, 现用 $s-1$ 代替 s , 则 $c > 1$, 有

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)(s-1)} ds.$$

现用引理 7 所得 (20) 式与上式相减, 可得所证.

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right) ds$$

\square

若记 $s = c + it$, 则 (22) 式可写作

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{it \log x} dt. \quad (24)$$

我们目的是要证明

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

由 (24) 式知, 只需证明 (24) 等号右边在 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 0 即可, 然而这并不显然, 需要对 $\zeta(s)$ 进行详细的刻画, 这在下一部分讨论.

4 与 $\zeta(s)$ 相关的估计

首先我们给出两个关于 $\zeta(s)$ 的积分表示 [1], 这是欧拉求和公式的结果, 在此直接引用. 对于 $\sigma > 0$, 有

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - s \int_N^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx + \frac{N^{1-s}}{s-1}$$

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\log n}{n^s} + s \int_N^\infty \frac{(x - [x]) \log x}{x^{s+1}} dx - \int_N^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx - \frac{N^{1-s} \log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}.$$

引理 9. 对任意 $A > 0$, 存在常数 $M = M(A)$ 使得

$$|\zeta(s)| \leq M \log t \quad |\zeta'(s)| \leq M \log^2 t \quad (25)$$

对于 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 的 s 且满足

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\log t} \quad t \geq e \quad (26)$$

成立.

证明. 对于 $\sigma \geq 2$, 结果是平凡的, 这是因为此时 $|\zeta(s)| \leq \zeta(2)$, $|\zeta'(s)| \leq |\zeta'(2)|$. 因此我们以下考虑 $\sigma < 2$, $t \geq e$. 则

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t \quad |s-1| \geq t$$

于是 $\frac{1}{|s-1|} \leq \frac{1}{t}$. 应用本部分开始所列的 $\zeta(s)$ 的积分表示公式, 我们有估计

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\sigma} + 2t \int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \frac{N^{1-\sigma}}{t}.$$

现取 $N = [t]$, 则对于 $N \leq t < N+1$, 若 $n \leq N$, 则 $\log n \leq \log t$. 由 (26) 式可知 $1-\sigma < \frac{A}{\log t}$, 故

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma) \log n} < \frac{1}{n} e^{A \log n / \log t} \leq \frac{1}{n} e^A = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此有

$$\frac{2t}{\sigma N^\sigma} = O\left(\frac{N+1}{N}\right) = O(1) \quad \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \frac{N}{t} \frac{1}{N^\sigma} = O\left(\frac{1}{N}\right) = O(1).$$

所以

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right) + O(1) = O(\log N) + O(1) = O(\log t).$$

这样就得到了 $|\zeta(s)| \leq M \log t$. 对于 $\zeta'(s)$, 类似地, 应用 $\zeta'(s)$ 的积分表示, 唯一的不同便是多一个 $\log N$ 的因子, 由 $\log N = O(\log t)$, 故 $|\zeta'(s)| = O(\log^2 t)$, 即 $|\zeta'(s)| \leq M \log^2 t$. \square

引理 10. 对于 $\sigma > 1$, 我们有

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \quad (27)$$

证明. 由 $\zeta(s)$ 的定义和性质 [1], 可记 $\zeta(s) = e^{G(s)}$, 其中

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}, \quad (\sigma > 1).$$

于是

$$\zeta(s) = \exp \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} \right) = \exp \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-imt \log p}}{mp^{m\sigma}} \right).$$

则

$$|\zeta(s)| = \exp \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{m\sigma}} \right).$$

于是有

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = \exp \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)}{mp^{m\sigma}} \right).$$

注意到对任意 θ , 有

$$3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$$

故

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

□

引理 11. 存在常数 $M > 0$ 使得对于 $\sigma \geq 1, t \geq e$ 的 s 均成立

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < M \log^7 t \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < M \log^9 t. \quad (28)$$

证明. 对于 $\sigma \geq 2$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \zeta(2) \\ \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2}. \end{aligned}$$

所以所证不等式在 $\sigma \geq 2$ 时平凡. 实际上, 证明地关键在于 $1 \leq \sigma \leq 2, t \geq e$ 的情况. 由引理 10 的 (27) 式, 我们有

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4} |\zeta(\sigma + 2it)|^{1/4}.$$

由于 $\zeta(s)$ 在 $s = 1$ 处的留数为 1, 即当 $\sigma \rightarrow 1$ 时, 有 $(\sigma - 1)\zeta(\sigma) \rightarrow 1$, 于是对于 $1 \leq \sigma \leq 2$, 有 $(\sigma - 1)\zeta(\sigma) \leq M$, 则

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma - 1}, \quad \forall 1 < \sigma \leq 2.$$

由引理 9 可知, $\zeta(\sigma + 2it) = O(\log t), \forall 1 \leq \sigma \leq 2$, 故对于 $1 < \sigma \leq 2$, 有

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq C \frac{M^{3/4} (\log t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}} = \frac{A (\log t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}}.$$

则存在常数 $B > 0$ 使得

$$|\zeta(\sigma + it)| > \frac{B(\sigma - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}, \quad \forall 1 < \sigma \leq 2, t \geq e. \quad (29)$$

上式对于 $\sigma = 1$ 也是成立的 (平凡). 现取 $\alpha \in (1, 2)$, 如果 $1 \leq \sigma \leq \alpha, t \geq e$, 再次应用引理 9, 有

$$|\zeta(\sigma + it) - \zeta(\alpha + it)| \leq \int_{\sigma}^{\alpha} |\zeta'(u + it)| du \leq (\alpha - \sigma) M \log^2 t \leq (\alpha - 1) M \log^2 t$$

于是由三角不等式可得

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\geq |\zeta(\alpha + it)| - |\zeta(\sigma + it) - \zeta(\alpha + it)| \\ &\geq |\zeta(\alpha + it)| - (\alpha - 1)M \log^2 t \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha - 1)M \log^2 t. \end{aligned}$$

上式对于 $1 \leq \sigma \leq \alpha$ 成立, 注意到对于 $\alpha \leq \sigma \leq 2$, $(\sigma - 1)^{3/4} \geq (\alpha - 1)^{3/4}$, 由 (29) 式知

$$|\zeta(\sigma + it)| > \frac{B(\sigma - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha - 1)M \log^2 t.$$

故此时也成立. 换言之, 对于 $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq e$, 有

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha - 1)M \log^2 t. \quad \forall 1 < \alpha < 2$$

现在我们要取合适的 α 使得

$$\frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} \geq 2(\alpha - 1)M \log^2 t.$$

则可取

$$\alpha = 1 + \left(\frac{B}{2M} \right)^4 \frac{1}{(\log t)^9}.$$

显然此时 $\alpha > 1$, 且对于充分的 t_0 使得 $t \geq t_0$ 时有 $\alpha < 2$. 因此, 对于 $t \geq t_0$, $1 \leq \sigma \leq 2$, 有

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq (\alpha - 1)M \log^t = \frac{C}{(\log t)^7}.$$

于是存在 M 使得

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < M \log^7 t, \quad \forall \sigma \geq 1, t \geq e.$$

应用引理 9 的结果 $|\zeta'(s)| \leq M \log^2 t$, 并结合上式对于 $\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right|$ 的估计, 我们可以得到

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq M \log^9 t.$$

□

5 素数定理的最终证明

引理 12. 如果 $s = \alpha$ 为 $f(s)$ 一个 k 阶极点, 则 $s = \alpha$ 为 $\frac{f'(s)}{f(s)}$ 的一个 1 阶极点, 且在此处的留数为 $-k$.

证明. 由条件易知存在在 α 处解析的函数 $g(s)$ 且 $g(\alpha) \neq 0$ 使得 $f(s) = \frac{g(s)}{(s - \alpha)^k}$. 于是在 α 的邻域内求导, 有

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s - \alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s - \alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s - \alpha)^k} \left\{ \frac{-k}{s - \alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)} \right\}.$$

因此有

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s - \alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}.$$

由 $\frac{g'(s)}{g(s)}$ 在 α 处解析, 从而得证. □

引理 13. 函数

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

在 $s = 1$ 处是解析的.

证明. 我们知道对于 $\zeta(s)$, $s = 1$ 为其一阶极点, 且在此处留数为 1, 由引理 12 便知 $s = 1$ 为 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ 的 1 阶极点, 且其在 $s = 1$ 处的留数为 1, 与 $\frac{1}{s-1}$ 一致, 所以其差 $F(s)$ 在 $s = 1$ 处解析. \square

经过之前一系列的不懈努力, 我们终于做好了证明最终定理的准备.

定理 2. 对于 $x \geq 1$, 我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt \quad (30)$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ 收敛. 于是由 *Riemann-Lebesgue* 引理可知

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow \infty \quad (31)$$

从而由引理 5 便得

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

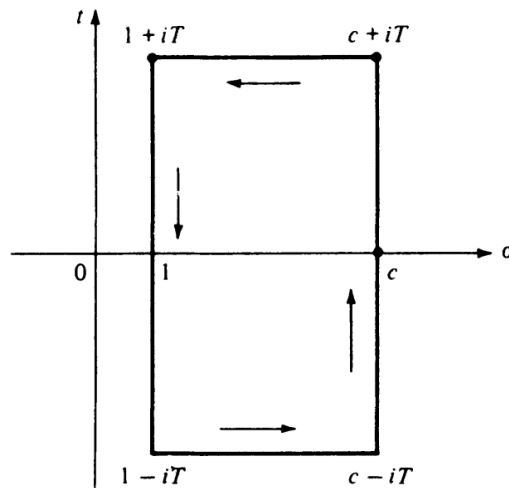
证明. 回顾引理 8 所得到的结果, 对于 $c > 1$, $x \geq 1$, 我们有

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds$$

其中

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right).$$

观察可知, 我们只需证明两式的右边相等即可. 现在我们取围道如下图,



由引理 13 我们知道被积函数 $x^{s-1}h(s)$ 在所围区域解析, 于是由 Cauchy 积分定理便知

$$\int_{\partial R} x^{s-1} h(s) ds = 0.$$

于是我们只需要证明在 $T \rightarrow \infty$ 时, 被积函数在水平方向的积分趋于 0 即可. 由共轭对称性, 我们只需证明在 $t = T$ 的那段上的积分趋于 0 即可. 在这段上, 我们作出估计

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \leq \frac{1}{T^2} \quad \left| \frac{1}{s(s+1)(s-1)} \right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

由引理 11 知存在 $M > 0$ 使得 $\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq M \log^9 t$ 对于所有 $\sigma > 1, t \geq e$ 成立. 因此对于 $T \geq e$, 有

$$|h(s)| \leq \frac{M \log^9 T}{T^2}$$

于是

$$\left| \int_{1+iT}^{c+iT} x^{s-1} h(s) ds \right| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M \log^9 T}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2} (c-1) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty$$

于是我们得到了

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt.$$

结合引理 8, 便得 (30).

为应用 Riemann-Lebesgue 引理, 我们还需证明 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ 收敛. 注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt = \int_{-e}^e + \int_e^{\infty} + \int_{-\infty}^{-e}.$$

对于 $t \geq e$, 我们有

$$|h(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2}.$$

故 $\int_e^{\infty} |h(1+it)| dt$ 收敛, 类似地 $\int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt$ 收敛, 而 $\int_{-e}^e |h(1+it)| dt$ 为定积分, 故 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ 收敛. 于是证毕.

□

参考文献

- [1] Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.