中国科学院数学与系统科学研究院
2025级推荐免试研究生笔试试题

Guoqing Cui

考试时间：2024年4月28日15:00–18:00

摘要

因为一些原因未能成功参与此次笔试，故之后找来了题做了做，感觉题量有些大，估计即使考的话本人也做不太好.现利用五一假期将其整理了下，解答仅供参考.因笔者水平有限，错误难免，敬请指正.

1.(共15分，每小题5分)计算下列极限.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2^b+3^b+\cdots+n^b)^{a+1}}{[1+3^a+5^a+\cdots+(2n+1)^a]^{b+1}}, (a,b\neq -1).$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta\sin x-\int_{\gamma x^3}^{\beta x}e^{-s^\alpha}ds}{x-\sin x}, (\alpha\geq 2,\beta,\gamma\neq 0).$

1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2^b+3^b+\cdots+n^b)^{a+1}}{[1+3^a+5^a+\cdots+(2n+1)^a]^{b+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^b\right]^{a+1}n^{(b+1)(a+1)}}{\left[\frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^a\right]^{b+1}n^{(a+1)(b+1)}}\\
&= \frac{\left(\int_0^1 x^b dx\right)^{a+1}}{\left(\frac{1}{2}\int_0^2 x^a dx\right)^{b+1}}\\
&= \begin{cases}\frac{(a+1)^{b+1}}{2^{a(b+1)}(b+1)^{a+1}} & a>-1,b>-1\text{或}a<-1,b<-1\\ \infty & a>-1,b<-1\\ 0 & a<-1,b>-1\end{cases}
\end{aligned}$$

2) 记$x_n=a+\alpha_n, y_n=b+\beta_n$，则$\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0(n\to\infty)$.我们断言

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}=0$$

实际上，由$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$知，任给定$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbb{N}_+$使得当$n\geq N_1$时有

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取定N_1，则存在$N_2\in\mathbb{N}_+$使得

$$\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|}{N_2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记$N=\max\{N_1,N_2\}$，则在$n>N$时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}\right| &\leq \frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|}{n}=\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|}{n}+\frac{|\alpha_{N_1+1}|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\\ &\leq \frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|}{N_2}+\frac{|\alpha_{N_1+1}|+\cdots+|\alpha_n|}{n-N_1}\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}}{n-N_1}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是断言成立. 同时我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n} &= \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}\\ &= ab+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}b+\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}a+\frac{\alpha_1\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\end{aligned}$$

由于$\beta_n\to 0$知，存在$M>0$使得$|\beta_n|\leq M,\forall n\in\mathbb{N}_+$.于是由断言可知

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\leq\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|}{n}M\to 0\quad(n\to\infty).$$

同理，

$$\left|\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}b\right|\to 0,\quad\left|\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}a\right|\to 0\quad(n\to\infty).$$

最终我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab.$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\beta\sin x-\int_{\gamma x^3}^{\beta x}e^{-s^\alpha}ds}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\beta\cos x-[\beta e^{-(\beta x)^\alpha}-3\gamma x^2e^{-(\gamma x^3)^\alpha}]}{1-\cos x} \qquad \text{(L'Hospital)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\beta(\cos x-e^{-(\beta x)^\alpha})+3\gamma x^2e^{-(\gamma x^3)^\alpha}}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\\ &= 6\gamma+\lim_{x\to 0}\beta\frac{1-\frac{1}{2}x^2-1+(\beta x)^\alpha+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\\ &= 6\gamma-\beta+2\beta^{\alpha+1}\lim_{x\to 0}x^{\alpha-2}\\ &= \begin{cases}6\gamma-\beta+2\beta^{\alpha+1} & \alpha=2\\ 6\gamma-\beta & \alpha>2\end{cases}\end{aligned}$$

2.(共20分，每小题10分)计算下列积分.

1) $\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}dt.$

2) $\iint_\Omega \sqrt{|x^2-y|}dxdy,\quad \Omega=\{(x,y):|x|\le 1, 0\le y\le c, c>1\}.$

1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}dt &\overset{t=\tan x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan x)}{1+\tan^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx \\ &\overset{u=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)d(-u) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan u}du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du \\ &\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 \quad \text{即} \quad \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{8}\ln 2\end{aligned}$$

2) 记$\Omega_1=\Omega\cap\{y\ge x^2\}$，$\Omega_2=\Omega\cap\{y\le x^2\}$，于是有

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \sqrt{|x^2-y|}dxdy &= \iint_{\Omega_1}+\iint_{\Omega_2}\sqrt{|x^2-y|}dxdy = \iint_{\Omega_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint_{\Omega_2}\sqrt{x^2-y}dxdy \\ &= \int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^c \sqrt{y-x^2}dy + \int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3}(c-x^2)^{\frac{3}{2}}dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{3}x^3dx = \frac{4}{3}\int_0^1 (c-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \\ &\overset{x=\sqrt{c}\sin\theta}{=} \frac{4}{3}\int_0^{\arcsin c^{-\frac{1}{2}}} c^{\frac{3}{2}}\cos^3\theta\sqrt{c}\cos\theta d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{\arcsin c^{-\frac{1}{2}}} c^2\cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{4}{3}c^2\int_0^{\arcsin c^{-\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{4}{3}c^2\int_0^{\arcsin c^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{3}c^2\int_0^{\arcsin c^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta \\ &= \frac{1}{3}c^2\left(\frac{3}{2}\arcsin c^{-\frac{1}{2}}+\sin(2\arcsin c^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{8}\sin(4\arcsin c^{-\frac{1}{2}})\right).\end{aligned}$$

3.(10分)已知$f(x)=(\arcsin x)^2$，求$f^{(n)}(0)$的值，其中$n\in\mathbb{N}$.

注意到

$$f'(x)=2\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

平方可得

$$(1-x^2)(f'(x))^2=4f(x)$$

再次求导，有

$$(1-x^2)2f'(x)f''(x)-2x(f'(x))^2=4f'(x)$$

即

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$$

应用Leibniz公式，两边对x求n阶导，可得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0$$

令$x=0$，可得$f'(0)=0$，$f''(0)=2$且

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$$

从而可知

$$f^{(2k+1)}(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0)&=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots 2^2\cdot 2\\ &=2^{2(k-1)}\cdot 2\prod_{i=1}^{k-1}(k-i)^2=2^{2k-1}((k-1)!!)^2. \quad (k=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

4.(15分)证明实轴上满足方程$f(x+y)=f(x)f(y)$且$f(1)=a\neq 0$的唯一的连续函数是$f(x)=a^x$.

证明：注意到对任意$x\in\mathbb{R}$，有$0\neq f(1)=f(1-x+x)=f(1-x)f(x)$可知$f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.同时应该注意到

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$$

所以$f(x)$恒为正值.于是可以定义$F(x)=\log_a f(x)$，其中$a=f(1)\neq 0$，易知$F(x)$连续，满足

$$F(x+y)=F(x)+F(y), \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

我们只需证明$F(x)=x$即可.注意到

$$F(2x)=F(x+x)=F(x)+F(x)=2F(x).$$

若$F[(n-1)x]=(n-1)F(x)$，则

$$F(nx)=F[(n-1)x+x]=F[(n-1)x]+F(x)=(n-1)F(x)+F(x)=nF(x)$$

由以上归纳可知

$$F(nx)=nF(x) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

现以$\frac{x}{n}$代替x，可得$F(x)=nF\left(\frac{x}{n}\right)$，则

$$F\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}F(x)\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

于是可以得到

$$F\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}F(x)\qquad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

注意到$F(x)=F(0+x)=F(0)+F(x)$，有$F(0)=0$.于是

$$F(x)+F(-x)=F(x-x)=F(0)=0.$$

即

$$F(-x)=-F(x).$$

将$\frac{m}{n}x$代入，有

$$F\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}F(x)\qquad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

以上表明，对于任意$c\in\mathbb{Q}$，$F(cx)=cF(x)$.而对于任意无理数c，存在有理数列$\{c_n\}$以c为极限，于是

$$F(cx)-c_nF(x)=F(cx)-F(c_nx)=F(cx-c_nx)=F[(c-c_n)x].$$

令$n\to\infty$，由$F(x)$连续知，$F[(c-c_n)x]\to F(0)=0$.于是有

$$F(cx)=cF(x)\qquad \forall c\in\mathbb{R}$$

注意到对于任意$x\in\mathbb{R}$，有$F(x)=F(x\cdot 1)=F(1)F(x)$，由$F(1)=\log_a f(1)=1$，故$F(x)=x$，从而$f(x)=a^x$.

5.(15分)对于给定实数x，不断将余弦函数作用在之前的数上，得到序列$\{a_n\}$如下：$a_0=x, a_1=\cos(x), a_2=\cos(\cos(x)),\cdots$，请问当$n\to\infty$，这一序列会有怎样的趋势？请证明它.

$\{a_n\}$收敛，证明如下.

证明：定义函数$f(x)=\cos x-x\quad \forall x\in[0,\pi]$，则$f'(x)=-\sin x-1<0$，于是$f(x)$在$[0,\pi]$上严格单调递减，注意到

$$f(0)=1>0,\quad f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}<0$$

于是存在$a\in(0,\frac{\pi}{3})$使得$f(a)=\cos a-a=0$,即$\cos a=a$. 下面我们将证明序列$\{a_n\}$收敛于a.注意到，对于$n>1$，$0\le a_n\le 1<\frac{\pi}{3}$，则

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a|&=|\cos a_n-a|=2\left|\sin\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}\right|\\&\le 2\sin\frac{\pi}{3}\left|\frac{a_n-a}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}|a_n-a|\qquad\left(0<a_n,a<\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0<\frac{a_n+a}{2}<\frac{\pi}{3}\right)\\&\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2|a_{n-1}-a|\le\cdots\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|a_1-a|\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，即$\{a_n\}$收敛.

6.(10分)求$\begin{pmatrix} e^{-ix} & 2i\sin x \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}^n$，其中$i=\sqrt{-1}, x\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}$.

注意到

$$\begin{pmatrix} e^{-ix} & 2i\sin x \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ix} & e^{ix}-e^{-ix} \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}$$

作列变换，第一列加到第二列上，等价于右乘初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,再作行变换，将第二行乘以$-1$加到第一行上，等价于左乘矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，于是有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-ix} & e^{ix}-e^{-ix} \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ix} & 0 \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}$$

同时我们注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即两个矩阵互为逆矩阵，所以我们易得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} e^{-ix} & 2i\sin x \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-inx} & 0 \\ 0 & e^{inx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-inx} & e^{inx}-e^{-inx} \\ 0 & e^{inx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-inx} & 2i\sin nx \\ 0 & e^{inx} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

7.(10分)设A,B是m阶实矩阵，且$A^2+B^2=AB$，若$AB-BA$是可逆矩阵，则m是3的倍数.

证明：记$w_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}, w_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$为方程$x^2+x+1=0$的两个解，则易知

$$w_1+w_2=-1 \quad w_1w_2=1$$

考虑

$$\begin{aligned}(A+w_1B)(A+w_2B) &= A^2+w_1BA+w_2AB+w_1w_2B^2 \\ &= A^2+w_1w_2B^2-AB+AB+w_1BA+w_2AB \\ &= A^2+w_1w_2B^2-AB-(w_1+w_2)AB+w_1BA+w_2AB \\ &= A^2+B^2-AB+w_1(BA-AB) = w_1(BA-AB)\end{aligned}$$

类似地，有

$$
\begin{aligned}
(A+w_2B)(A+w_1B) &= A^2+w_1AB+w_2BA+w_1w_2B^2 \\
&= A^2+w_1w_2B^2-AB+AB+w_1AB+w_2BA \\
&= A^2+w_1w_2B^2-AB-(w_1+w_2)AB+w_1AB+w_2BA \\
&= A^2+B^2-AB+w_2(BA-AB)=w_2(BA-AB)
\end{aligned}
$$

取行列式，可得

$$
w_1^m\,|BA-AB| = w_2^m\,|BA-AB|
$$

因$AB-BA$可逆，自然$BA-AB$可逆，于是$|BA-AB|\neq 0$，故有

$$
w_1^m = w_2^m.
$$

注意到$w_2=w_1^2$，有$w_1^{2m}=w_1^m$，即有$w_1^m=1$，即$3\mid m$，m为3的倍数.

8.(10分)若$n(n>1)$阶方阵A满足$A^2=0$且$A\neq 0$，求$I+\alpha A$的行列式和逆矩阵，其中$\alpha\in\mathbb{R}$，I为n阶单位阵.

任取A的特征值λ，ξ为对应特征向量，则$A\xi=\lambda\xi$，于是

$$
A^2\xi=\lambda^2\xi=0\Rightarrow\lambda=0
$$

即A的特征值全部为0.可设A的Jordan标准型为J，存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=J$.其中J为主对角线全部为0的上三角矩阵，则$I+\alpha J$为主对角线全为1的上三角矩阵，其行列式为1.于是

$$
\begin{aligned}
|I+\alpha A| &= \left|I+\alpha PJP^{-1}\right| = \left|P(I+\alpha J)P^{-1}\right| \\
&= |P|\,|I+\alpha J|\,\left|P^{-1}\right| = 1
\end{aligned}
$$

注意到

$$
(\alpha A+I)(\alpha A-I)=\alpha^2A^2-I=-I
$$

于是

$$
(I+\alpha A)^{-1}=-(\alpha A-I)=-\alpha A+I.
$$

9.(15分)设$f(x)$是首项系数为1的实系数三次多项式，且其全部复根都在单位圆上，证明多项式$g(x)=2xf'(x)-3f(x)$的全部复根也在单位圆上.

证明：设$f(x)=(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)=x^3+px^2+qx+r$，注意到复根都是成对存在的，而落在单位圆上的$f(x)$的三个根至多有两个复根，结合$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,我们可以设$z_1=e^{-i\theta},z_2=e^{-i\theta},z_3=1$或$-1$，同时注意到$r=-z_1z_2z_3=-z_3$，即$r=1$或$-1$.可以得到$z_1+z_2+z_3=2\cos\theta-r=-p,z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=1-2r\cos\theta=q$，消去$\cos\theta$，利用$r^2=1$,可得关系式

$$
q-rp=0 \tag{1}
$$

据题意知

$$\begin{aligned} g(x) &= 2xf'(x) - 3f(x) = 2x(3x^2 + 2px + q) - 3(x^3 + px^2 + qx + r) \\ &= 3x^3 + px^2 - qx - 3r = 3(x^3 + \frac{p}{3}x^2 - \frac{q}{3}x - r) \\ &=: 3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

类似地，由复根的共轭性可设$x_1 = Re^{i\alpha}$，$x_2 = Re^{-i\alpha}$,$x_3 \in \mathbb{R}$.其中$R \geq 0, \alpha \in [0, 2\pi)$. 可以得到

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3 = R^2x_3 = r \Longrightarrow x_3 = \frac{r}{R^2} \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 2R\cos\alpha + \frac{r}{R^2} = -\frac{p}{3} \Longrightarrow p = -3\left(2R\cos\alpha + \frac{r}{R^2}\right) \\ &x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = R^2 + \frac{2r\cos\alpha}{R} = -\frac{q}{3} \Longrightarrow q = -3\left(R^2 + \frac{2r\cos\alpha}{R}\right) \end{aligned}$$

代入关系式(1)可得

$$2Rr\cos\alpha + \frac{r^2}{R^2} = R^2 + \frac{2r\cos\alpha}{R}$$

注意到$r^2 = 1$，可以得到

$$\left(R - \frac{1}{R}\right)\left(R + \frac{1}{R} - 2r\cos\alpha\right) = 0.$$

由于$R + \frac{1}{R} \geq 2 \geq |2r\cos\alpha|$等号成立当且仅当$R = 1, r = 1, \alpha = 0$，或$R = 1, r = -1, \alpha = \pi$，此时因$R = 1, x_3 = r = 1$或$-1$，证毕.若$R + \frac{1}{R} - 2r\cos\alpha \neq 0$，则$R - \frac{1}{R} = 0$，即$R = 1$，同理，$g(x)$的根全部落在单位圆上.

10.(15分)设A与B是两个n阶实幂等矩阵(即$A^2 = A, B^2 = B$),且$AB = BA$，证明：

1) 若$A^T = A$且$V = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = x\}$，求$V$的正交补集.

2) 是否存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中$r$为矩阵$A$的秩，$I_r$为$r$阶单位阵.

3) 是否存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$与$Q^{-1}BQ$同时为对角矩阵.

1)V的正交补集为$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.证明如下.

证明：不妨设$\mathbb{R}^n$上的线性变换φ在某基下的表示矩阵为A，首先注意到

$$r(A) + r(A - I) = n$$

这是因为下面的初等变换：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I - A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ O & I - A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

于是$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) = r(A - A^2) + n = n$.于是就有

$$\dim Ker\varphi + \dim Ker(\varphi - I) = n - r(A) + n - r(A - I) = n$$

任取$x \in Ker\varphi \cap Ker(\varphi - I)$，有

$$x = Ax = 0$$

故$Ker\varphi\cap Ker(\varphi-I)=0$，故$\mathbb{R}^n=Ker\varphi\oplus Ker(\varphi-I)$.于是

$$V^{\perp}=Ker(\varphi-I)^{\perp}=Ker\varphi=\{x\in\mathbb{R}^n:Ax=0\}.$$

2)是.证明：与1)类似，设$\mathbb{R}^n$上的线性变换φ在某一基下的表示矩阵为A，我们只需证明存在另一组基使得φ在该基下的表示矩阵为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$即可.首先取像空间$Im\varphi$的一组基$\boldsymbol{\eta_1},\cdots,\boldsymbol{\eta_r}$，由幂等性质可知，

$$\varphi\boldsymbol{\eta_1}=\boldsymbol{\eta_1},\cdots,\varphi\boldsymbol{\eta_r}=\boldsymbol{\eta_r}.$$

所以其原像也为

$$\boldsymbol{\eta_1},\cdots,\boldsymbol{\eta_r}.$$

再取核空间$Ker\varphi$的基$\boldsymbol{\eta_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{\eta_n}$，这样就得到一组基

$$\boldsymbol{\eta_1},\cdots,\boldsymbol{\eta_r},\boldsymbol{\eta_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{\eta_n}$$

在该基下φ的表示矩阵为对角阵$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3)由2)可知，A,B均可对角化，于是存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=diag\left\{\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_sI_s\right\}$$

其中λ_i为A的所有互异特征值，I_i为r_i阶单位阵，$r_1+\cdots+r_s=n$.再由$AB=BA$可知，

$$P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$$

于是可设$P^{-1}BP=diag\left\{B_1,\cdots,B_s\right\}$其中$B_i$为$r_i$阶方阵.因$B$可对角化，自然$B_i$也可以对角化，于是存在$r_i$阶可逆矩阵$T_i$使得$T_i^{-1}B_iT_i$为对角矩阵，现令$T=diag\left\{T_1,\cdots,T_s\right\}$，则有

$$T^{-1}P^{-1}BPT=diag\left\{T_1^{-1}B_1T_1,\cdots,T_s^{-1}B_sT_s\right\}$$

为对角阵.注意到于此同时，

$$T^{-1}P^{-1}APT=diag\left\{\lambda_1T_1^{-1}T_1,\cdots,\lambda_sT_s^{-1}T_s\right\}=diag\left\{\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_sI_s\right\}$$

仍为对角阵，于是取$Q=PT$即满足$Q^{-1}AQ$与$Q^{-1}BQ$同时为对角矩阵.

11.(15分)证明三角函数$\sin x,(x\in\mathbb{R})$是超越函数.

【注】函数$f(x)$为超越函数，若不存在有限个非零的数$a_{ij},(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n)$，使得$\forall x\in\mathbb{R},\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n}a_{ij}x^if^j(x)=0$.

证明：假设$\sin x$不是超越函数，根据定义可知，存在有限个数a_{ij}(不全为0)使得

$$\sum_{i,j}a_{ij}x^i(\sin x)^j=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

现记

$$f_i(y)=\sum_j a_{ij}y^j$$

为关于y的非零多项式，则有

$$\sum_i x^i f_i(\sin x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

于是$f_i(y)$在$[-1,1]$上最多只有有限个零点，从而存在θ使得$\sin\theta\in[-1,1]$且$f_i(\sin\theta)\neq 0$.现令$x=\theta+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$，有

$$\sum_i(\theta+2k\pi)^i f_i(\sin\theta)=0.$$

定义$g(x)=\sum_i f_i(\sin\theta)^i x^i$，则$g(x)$有无穷个零点$\theta+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$，从而$g(x)$为零多项式，即系数全部为0，即$f_i(\sin\theta)=0$，这与$\theta$的选取矛盾，故原假设不成立，于是$\sin x$为超越函数.