欢迎参加

数 理 逻 辑

Mathematical Logic

时间与地点

- 时间：
  - 星期三：　　　3、4节(10:10 — 12:00)
  - 星期五(单)：　1、2节(8:00 — 9:50)
- 地点：
  - 理教207

教员

- 主讲：　王捍贫

  whpxhy@pku.edu.cn

  62765818

- 助教：　潘小双，朱嘉其，易炜

  62752366

  理科楼1708

教材

1. 耿素云，屈婉玲，王捍贫，**离散数学教程**，北京大学出版社，2002年，2004年修订。
2. 王捍贫，**数理逻辑—离散数学第一分册**，北京大学出版社，1997。

讲义地址:

ftp://162.105.81.245:1021/incoming/courseware/Logic/

账号： guest

密码： guest

参考书

1. 陆钟万，**面向计算机科学的数理逻辑**，北京大学出版社，1989(第二版，科学出版社，1998）
2. 王元元，**计算机科学中的逻辑学**，科学出版社，1989
3. 莫绍揆，**数理逻辑教程**，华中工学院出版社，1981
4. 哈密尔顿，**数理逻辑**，朱水林译，华东师大出版社，1986

   (Hamilton，***Logic for Mathematicians***, Cambridge University, 1978)

计划与安排

- 共18-2-1=15周，22次课，44学时。
- 两次测验（和一次课堂讨论）。
- 课程进度：约1~0.5节/次课。
- 从第26章开始讲授。
- 具体安排

要求

- 认真听课。免听要事先申请。
- 不得旷课、迟到和早退。
- 按时做、交作业。不准抄袭，不要突击。
- 成绩评定：

  平时：约40%（包括作业、测验、出勤、课堂讨论等）

  期末：约60%

谢　谢

什么是数理逻辑

- 字面含义：**数学理论的逻辑**。逻辑是研究演绎（推理）规律的学科。
- 广义理解：用数学方法研究演绎规律的学科。
- 狭义理解：用数学方法研究数学中演绎规律和数学基础的学科。
- 研究对象：推理过程的正确性标准。

是数学的一个分支。又称符号逻辑等。

简单历史——三个阶段（一）

1. 初始阶段：1660年代 — 19世纪末

将数学应用于逻辑

- Aristotle：形式逻辑（主词和谓词逻辑）。
- Leibniz：建立直观而又精确的思维演算。遇有争论，双方可以拿起笔来说：让我们来算一下。
- George Boole: 逻辑代数。
- De Morgan: 关系逻辑。

[1] 王宪钧，数理逻辑引论，北京大学出版社，1982。

简单历史——三个阶段（二）

2. 过度阶段：19世纪末 — 1940前后

逻辑应用于数学

- 非欧几何与公理化方法。
- 微积分与实数理论，Piano算术。
- 集合论与数学基础(1900年世界数学家大会)
- 悖论与第三次数学危机，Hilbert计划。

（第一次：勾股定理，无理数的发现）

（第二次：穷小量是不是零？）

简单历史——三个阶段（三）

- 成熟阶段：1930s — 1970年

  成为数学的独立分支
  - Gödel完全性定理和不完全性定理。
  - 四个分支：
    - 公理集合论：大基数，连续统问题
    - 递归论（可计算性理论）：Turing机，不可解性
    - 模型论：实数的非标准模型
    - 证明论：超穷归纳法, Gentzen的数论和谐性证明

特点与方法

- 公理化与形式化方法.
- 特制的符号语言.

与计算机科学的联系

- 布尔电路：香龙Shanon是第一人。
- 计算理论：可计算性，**Turing**机，形式语言，自动机，计算复杂性。
- 程序语义与验证技术**.** Intel bug: 5亿美元。
- 程序的自动生成与转换。
- **SQL:** 本质上等价于一阶逻辑。
- **Prolog**语言——以逻辑演算为基础
- **LISP**语言——以λ演算为基础
- 人工智能：非单调推理，缺省推理。
- 信息安全等
- ……

Dijkstra的话

我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了，我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道要是我能年轻20岁的话我要回去学逻辑。

[1] 钱学森，关于思维科学的研究，思维科学，第3卷，1987。

[2] M. Y. Vardi, A Brief History of Logic, 2003.

谢　谢

可靠性、和谐性与完备性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

构造逻辑的过程：

- 命题演算推理形式系统P(和N) — 语法.
- 语法的核心是推理: $\vdash \alpha$?
- P是符号演算。
- 公式的含义: 真、假、永真等 — 语义.
- 语义的核心是公式的永真性.
- 逻辑 $=$ 语法 $+$ 语义.

可靠性、和谐性与完全性

可靠性： P的内定理都是重言式.

完全性： 所有重言式都是P的内定理.

和谐性： P无矛盾,即无α能使$\vdash \alpha$和$\vdash \neg\alpha$ 同时成立

可靠性

定理29 若$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$, 则$\alpha$是重言式.

证:

因$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$, 故存在$\alpha$在**P**中的证明序列$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 下对$i$ $(1 \le i \le n)$归纳证明每个α_i都是重言式.

(1) 若$i = 1$, α_1必为公理, 由定理17知α_1为重言式

(2) 假设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$都是重言式,下证$\alpha_i$也是.

(2.1) 若α_i是公理, 则α_i为重言式.

(2.2) 若α_i是由α_j, α_k $(1 \le j, k < i)$ 用分离规则(M)得到的. 不妨设α_k为$\alpha_j \to \alpha_i$. 由归纳假设知α_j, α_k是重言式. 由定理18知α_i也是重言式.

和谐性

定理30 对P的任何公式α, $\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$与 $\vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha$不能同时成立.

证:

若不然, 则α与$\neg\alpha$均为重言式.

从而对P的任一个指派σ, $\alpha^{\sigma} = (\neg\alpha)^{\sigma} = 1$.

但$(\neg\alpha)^{\sigma} = 1 - \alpha^{\sigma} = 0 \neq \alpha^{\sigma}$, 矛盾.

注意: P中可能存在某个公式α使得α与$\neg\alpha$ 均不是内定理.

推论10 P中至少有一个公式不是内定理.

一个记号

$\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n)$表示P中具有如下条件的公式:

(1) $v_1, v_2, \cdots, v_n$是互异的命题符号,

(2) β中出现的命题符号都在$v_1, v_2, \cdots, v_n$中.

一个引理

设$\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n)$为**P**中一个公式，$\sigma$为**P**的一个指派．若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是如下构造的公式序列:

$$\alpha_i = \begin{cases} v_i & \text{当 } \sigma(v_i) = 1\text{时} \\ \neg v_i & \text{当 } \sigma(v_i) = 0\text{时} \end{cases}$$

则 (1) 当$(\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n))^\sigma = 1$时，

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$$

(2) 当$(\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n))^\sigma = 0$时，

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$$

引理的证明(I)

证: 对β中所含的联结词$\neg, \rightarrow$的个数d进行归纳证明.

(1) 当$d = 0$时, β为某个命题符号v_i, $\beta^\sigma = \sigma(v_i)$.

(1.1) 当$\beta^\sigma = 1$时, $\sigma(v_i) = 1$, 从而α_i为v_i.
即α_i就是β, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(1.2) 当$\beta^\sigma = 0$时, α_i为$\neg v_i$.
即α_i为$\neg\beta$, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$.

引理的证明(II)

(2) 假设定理对满足$d \le k$的所有d都成立，下证定理在$d = k + 1$时也成立.

(2.1) 若β为$(\neg\beta_1)$，则β_1中的联结词个$d_1 = k$.

(2.1.1) 当$\beta^\sigma = 1$时，$\beta_1^\sigma = 0$.
由归纳假设知：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta_1$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(2.1.2) 当$\beta^\sigma = 0$时，$\beta_1^\sigma = 1$.
由归纳假设知：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1$,
由于$\beta_1 \vdash \neg\neg\beta_1$，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\neg\beta_1$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$.

引理的证明(III)

(2.2) 若β为$\beta_1 \rightarrow \beta_2$，则$\beta_1, \beta_2$ 中所含联结词的个数均$\leq k$.

(2.2.1) 当$\beta^\sigma = 0$时，$\beta_1^\sigma = 1$，且$\beta_2^\sigma = 0$.

由归纳假设知: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg \beta_2$

由例29知: $\vdash \beta_1 \rightarrow (\neg \beta_2 \rightarrow \neg (\beta_1 \rightarrow \beta_2))$,

故β_1, $\neg \beta_2 \vdash \neg (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$,

从而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$,

即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg \beta$.

引理的证明(IV)

(2.2.2) 当$\beta^\sigma = 1$时，$\beta_1^\sigma = 0$或$\beta_2^\sigma = 1$.

(i) 若$\beta_2^\sigma = 1$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_2$.
由于$\beta_2 \vdash \beta_1 \rightarrow \beta_2$，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1 \rightarrow \beta_2$，
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(ii) 若$\beta_1^\sigma = 0$则，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta_1$.
由于$\neg\beta_1 \vdash \beta_1 \rightarrow \beta_2$，
故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1 \rightarrow \beta_2$，
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

完全性

定理31 若β是P中重言式，则$\vdash_{\mathbf{P}} \beta$.

证:

设$v_1, v_2, \cdots, v_n$是β中出现的全部互异命题符号.

对P中任一组满足下列条件的公式$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$:

$$\text{每个}\alpha_i\text{为}v_i\text{或}\neg v_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

由于β永真，由引理知:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$$

因为α_n可为v_n，也可为$\neg v_n$，故

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \quad v_n \vdash \beta$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \neg v_n \vdash \beta$$

完全性(续)

由演绎定理知:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \quad v_n \to \beta$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \neg v_n \to \beta$$

但$\vdash (v_n \to \beta) \to ((\neg v_n \to \beta) \to \beta)$, 故

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \beta$$

仿上可得: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-2} \vdash \beta$

$$\vdots$$

$$\alpha_1, \ \alpha_2 \vdash \beta$$

$$\alpha_1 \vdash \beta$$

即$v_1 \vdash \beta$, $\neg v_1 \vdash \beta$, 故$\vdash v_1 \to \beta$, $\vdash \neg v_1 \to \beta$.

从而$\vdash \beta$.

注

- 命题演算内定理是可判定的，即问题:

  $$\text{P的公式}\alpha\text{是否为P的内定理?}$$

  可在有限步内作出回答。

- 定理的机器证明与辅助证明。

- 可靠性与完全性能否推广到带前提的情形？

作业

p.509(p.102). 26

27

28

谢　谢

第26章 命题逻辑

- 逻辑主要研究推理过程，而推理过程必须依靠命题来表达。
- 在命题逻辑中，“命题”被看作最小单位。
- 数理逻辑中最基本、最简单的部分。
- 直观(§1) —> 半数学化(§2—§5)

  —> 形式化(§6—§10)

§2 命题和联结词

1. 什么是命题?

- 命题是陈述客观外界发生事情的陈述句。
- 命题是或为真或为假的陈述句。
- 特征:
  - ✓ 陈述句
  - ✓ 真假必居其一, 且只居其一.
- 其它观点：直觉主义逻辑，多值逻辑等。

例1 下列句子都是命题

- 8小于10.
- 8大于10.
- 二十一世纪末, 人类将住在太空.
- 任一个>5的偶数可表成两个素数的和.
- $\sqrt{2}$的小数展开式中12345出现偶数多次。

例2 下列句子不是命题

- 8大于10吗?
- 请勿吸烟.
- X大于Y.
- 我正在撒谎. —— 悖论

命题的抽象

- 以p、q、r等表示命题。
- 以1表示真，0表示假。

则命题就抽象为：取值为0或1的p等符号。

- 若p取值1，则表示p为真命题；
- 若p取值0，则表示p为假命题；

注：开关电路（逻辑电路），布尔代数。

“复杂命题”

例3: 由简单命题能构造更加复杂命题

- 期中考试, 张三没有考及格.
- 期中考试, 张三和李四都考及格了.
- 期中考试, 张三和李四中有人考90分.
- 如果张三能考90分, 那么李四也能考90分.
- 张三能考90分当且仅当李四也能考90分.

联结词和复合命题

- 上述诸如“没有”、“如果 … 那么…”等连词称为联结词。
- 由联结词和命题连接而成的更加复杂命题称为复合命题；相对地，不能分解为更简单命题的命题称为简单命题。
- 复合命题的真假完全由构成它的简单命题的真假所决定。

注：简单命题和复合命题的划分是相对的。

否定联结词

- 定义1：设p为一个命题，复合命题“非p”称为p的否定式，记为¬p，“¬”称为否定联结词. “¬p”为真当且仅当p为假。

P	¬p
0	1
1	0

- 例3中，若p代表“期中考试张三考及格了”，则(1)可表示为¬p.

合取联结词

- 定义2 设p、q为两个命题，复合命题“p而且q”称为p、q的合取式，记为$p \wedge q$，“$\wedge$”称作合取联结词。 $p \wedge q$真当且仅当p与q同时真.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 例3的(2)可记为$p \wedge q$, 其中p代表“张三考及格”, q代表“李四考及格”.

析取联结词

- 定义3 设p、q为两个命题，复合命题“p或者q”称为p、q的析取式，记为$p \vee q$，“$\vee$”称作析取联结词。 $p \vee q$为真当且仅当p与q中至少有一个为真.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 例3的(3)可记为$p \vee q$, 其中p代表“张三考90分”, q代表“李四考90分”。

“相容或”与“相异或”

- 日常语言中“或”有两种标准用法, 例如:

  (1)　张三或者李四考了90分.

  (2)　第一节课上数学课或者上英语课.

- 差异在于:

  当构成它们的简单命题都真时，前者为真，后者却为假。

- 前者称为“相容或”，后者称为“相异或”。
- 前者可表示为$p \vee q$，后者却不能。
- 注意：不能见了或就表示为$p \vee q$。

蕴涵联结词

- 定义4 设p、q为命题，复合命题“如果p，则q”称为p对q的蕴涵式，记作$p \to q$，其中又称p为此蕴涵式的前件，称q为此蕴涵式的后件，“$\to$”称为蕴涵联结词。“$p \to q$” 假当且仅当p真而q假.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- $p \to q$这样的真值规定有其合理性，也有人为因素。

等价联结词

- 定义2.5 设p、q为命题，复合命题“p当且仅当q”称作p、q的等价式，记作p↔q，“↔”称作等价联结词。p↔q真当且仅当p、q同时为真或同时为假.

p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

注意

- 上述五个联结词来源于日常使用的相应词汇，但并不完全一致，在使用时要注意：
  - 以上联结词组成的复合命题的真假值一定要根据它们的定义去理解，而不能据日常语言的含义去理解。
  - 不能“对号入座”，如见到“或”就表示为“$\vee$”。
  - 有些词也可表示为这五个联结词，如“但是”也可表示为“$\wedge$”。
- 在今后我们主要关心的是命题间的真假值的关系，而不讨论命题的内容.

命题符号化

例4 将下列命题符号化:

(1) 铁和氧化合, 但铁和氮不化合.

(2) 如果我下班早, 就去商店看看, 除非我很累.

(3) 李四是计算机系的学生, 他住在312室或313室.

例4的解

（1） $p\wedge(\neg q)$，其中:

p代表“铁和氧化合”,

q代表“铁和氮化合”。

（2） $(\neg P)\rightarrow(q\rightarrow r)$，其中:

p代表“我很累”,

q代表“我下班早”,

r代表“我去商店看看”

还可表示为： $((\neg P)\wedge q))\rightarrow r$

例4的解（续）

（3）$p\wedge((q\vee r)\wedge(\neg(q\wedge r)))$，其中：

p代表“李四是计算机系学生”,

q代表“李四住312室”,

r代表“李四住313室”.

还可表示为：

$$p\wedge((q\wedge(\neg r))\vee((\neg q)\wedge r))$$

小结

- 命题及其符号p、q、r、…。
- 构成复合命题的联结词¬、∧、∨、→和↔，以及由联结词构成的复合命题及其真假值.

作业

- P.507, 1 (1)—(5)

  (p.98, 1 (1)—(5))
- 要求注明所出现命题符号代表的命题

谢 谢

§3 命题形式和真值表

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q\ \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？

  如下命题形式定义的符号串表示的才是命题。

命题形式的定义

定义6 命题形式是由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串:

(1) 任何命题变元都是命题形式---此时称为原子命题形式;

(2) 如果α是命题形式, 则$(\neg \alpha)$也是命题形式;

(3) 如果α、β是命题形式, 则$(\alpha \vee \beta)$、 $(\alpha \wedge \beta)$、$(\alpha \rightarrow \beta)$和$(\alpha \leftrightarrow \beta)$都是命题形式;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题形式.

下列符号串都是命题形式：

$(\neg p)$

$(p \wedge (\neg q))$

$(p \vee (\neg p))$

$(p \leftrightarrow (\neg p))$

$(p \wedge (\neg p))$

$((p \wedge p) \rightarrow (\neg (p \vee r)))$

下列符号串是否为命题形式？

（1）$pq \rightarrow$

（2）$(p\neg q)$

（3）$(p\wedge(\neg q))$

（4）$p\wedge(\neg q)$

（5）$((\neg q))$

（6）$\neg p$

一些注记

1. 定义6是归纳定义，而不是循环定义。

   (1)是奠基，(2)、(3)是归纳步骤。

2. 如果在(2)和(3)中将括号去掉，结果如何？

   $p\to q\to r$ 与 $\underline{P\to q}\to r$、 $P\to \underline{q\to r}$

3. 如仅去掉(2)和(3)中某类公式的括号呢？例如，仅去掉(2)中括号。

   $(p\wedge\neg q)$ —— $\neg$的优先级高于其它的。

4. 如果规定省略命题形式最外层括号，与2的差别。

约定

- ¬的优先级高于其它的
- 省略命题形式最外层括号

命题形式的简单性质

- 任一个命题形式必为下列形式之一：

  命题变元、$(\neg \alpha)$、 $(\alpha \vee \beta)$、 $(\alpha \wedge \beta)$、$(\alpha \rightarrow \beta)$或$(\alpha \leftrightarrow \beta)$

- 命题形式的BNF (Bacus Normal Form):

  $$\alpha ::= p \mid (\neg \alpha) \mid (\alpha \vee \beta) \mid (\alpha \wedge \beta) \mid (\alpha \rightarrow \beta) \mid (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

- 每个命题形式都是有限符号串。

指派

- 命题形式的真假由它中命题变元的值完全确定。
- **定义7** 设α为一个命题形式, α中出现的所有命题变元都在$p_1, p_2, \ldots, p_n$中, 对序列$p_1, p_2, \ldots, p_n$指定的的任一真假值序列$t_1, t_2, \ldots, t_n$称为α的关于$p_1, p_2, \ldots, p_n$的一个指派 (asignment)，其中$t_i = 0$或1, $i \in N$, $1 \le i \le n$.

即指派是从$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$到$\{0, 1\}$的一个函数。

成真指派

- 若p_1, p_2，…，p_n的一个指派使α为真，则称此指派为α的一个成真指派
- 若p_1, p_2，…，p_n的一个指派使α为假，则称此指派为α的一个成假指派。
- 由定义可知：
  - $\neg p$关于p的成真指派为0, 成假指派为1.
  - $p \wedge q$关于p、q的成真派为<1, 1>, 成假指派为<1,0>, <0,1>, <0, 0>.
  - $p \vee q$关于p、q的成真指派为<1,1>, <0,1>, <1,0>, 成假指派为<0,0>.
  - 不难给出$p\rightarrow q$、$p \leftrightarrow q$的成真和成假指派. (§2.1).

例5

求$(p\wedge q) \rightarrow (\neg(q\vee r))$的成真和成假指派。

解：令$(p\wedge q) \rightarrow (\neg(q\vee r))$为$\alpha$。

要使α为假，必须$p\wedge q$为真且$\neg(q\vee r)$为假。

从而$p\wedge q$必须为真，且$q\vee r$也必须为真。

故α的成假指派为(1，1，1)和(1，1，0).

α的成真指派为(0，0，0)、(1，0，0)、(0，1，0)、(0，0，1)、 (0，1，1)、(1，0，1)。

定义8 命题形式在所有可能的指派下所取值列成的表称为真值表.

$(p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r))$的真值表

P	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg(q \vee r)$	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

$p \wedge (\neg p)$、$p \vee (\neg p)$的真值表

解：

P	$p \wedge (\neg p)$	$p \vee (\neg p)$
0	0	1
1	0	1

$(\neg p) \vee q$、$p \rightarrow q$的真值表

解：

p	q	$(\neg p) \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$p\to(q\to r)$、$(p\to q)\to r$的真值表

p	q	r	$p\to(q\to r)$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

命题形式的类型

定义9

- 命题形式α称为重言式 (或永真式)，如果α关于其中出现的命题变元的所有指派均为成真指派.
- 命题形式α称为矛盾式 (永假式)，如果α对于其中出现的命题变元的所有指派均为成假指派.
- 一个命题形式α称为可满足式, 如果α对于其中出现的命题变元的某个指派为成真指派.

例如：$p \wedge (\neg p)$为矛盾式，$p \vee (\neg p)$为重言式。

$(\neg p) \vee q$为可满足式。

例7 证明下列各式都是重言式

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow(p\wedge q))$

证明：

p	q	$p\wedge q$	$q\rightarrow(p\wedge q)$	$p\rightarrow(q\rightarrow(p\wedge q))$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

例7(续）

(2) $((p\leftrightarrow p_1)\wedge(q\leftrightarrow q_1))\rightarrow((p\wedge q)\leftrightarrow(p_1\wedge q_1))$

p	p_1	q	q_1	α
0	1	*	*	1
1	0	*	*	1
*	*	0	1	1
*	*	1	0	1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

与哑元的无关性

定理1 设命题形式α中出现的命题变元都在

$p_1, p_2, \ldots, p_n$中, $p_{n+1}, \ldots, p_{n+m}$是另外m个不在α中出现的命题变元. 对于$p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+m}$的任意两个指派:

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}\rangle \text{和}$$

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\rangle,$$

其中：$u_i, v_i = 0$或1 $(1 \le i, j \le n+m)$.

若$u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$, 则α在这两个指派下的值相同.

作业

- p508 (P100)

  2（1）、（4）

  3（2）、（3）、（6）、（8）、（9）

That’s All of Today

Thanks for Listening

§4 联结词的完全集

为什么只考虑五个联结词？即

这五个联结词能否表示所有联结词?

这五个联结词是否有多余的?

要回答这两个问题，必须回答：

什么是联结词?

什么是一些联结词表示了一个联结词?

什么是联结词的“多余”?

什么是联结词？

新联结词确定了新的复合命题构造方式。
新命题建立了新的真假值对应方式。

例如：

$\neg p$建立了如下对应：

$$0 \longrightarrow 1, \quad 1 \longrightarrow 0$$

$p \vee q$建立了如下对应:

$$(0, 0) \longrightarrow 0, \ (1, 0) \longrightarrow 1\ ,$$
$$(0, 1) \longrightarrow 1, \ (1, 1) \longrightarrow 1\ .$$

……

真值函数

定义10 {0, 1}上的n元函数

$$f: \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

就称为一个n元真值函数（布尔函数）。

每个联结词确定了一个真值函数。

每个真值函数也确定了一个联结词。

真值函数确定联结词

设f为如下二元真值函数:

$f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 0 , f(0, 1) = 0, f(1, 1) = 1.$

则f确定了联结词C_f， $p\, C_f\, q$的真假值为：

p	q	$p\, C_f\, q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

即C_f 为$\wedge$

即： $p\, C_f\, q$在指派$<t_1, t_2>$下的值为$f(t_1, t_2)$ 。

命题形式确定的联结词

- 设命题形式α所含的命题变元都在p_1, p_2 ,… p_n中。如下定义的n元真值函数称为α确定真值函数，记为f_α:

$f_\alpha(t_1, t_2, \ldots t_n) =$

α关于p_1，p_2, … p_n在指派t_1, t_2, … t_n下的值。

- 例如，若α 为$p\vee(\neg q)$，则f_α为：

  $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0, f(1,0) = 1, f(1,1) = 1$

联结词的表示

用$c_1, c_2, \ldots c_k$表示$c\ (f)$

↓

仅用$c_1, c_2, \ldots\ c_k$可以构造一个命题α与由$c\ (f_c)$构造的命题等价。

↓

存在α使α在任意指派$<t_1, t_2, \ldots t_n>$下的值即为$f_c(t_1, t_2, \ldots t_n)\ (f(t_1, t_2, \ldots t_n))$

联结词的完全集

直观地，说联结词集合A是完全的，指的是A中联结词能表示任意联结词。

定义2.11 设A一个联结词集合，称A为联结词的一个完全集，如果任一个真值函数f都可用A联结词来表示，即：对任真值函数f，都存在仅含A中联结词的命题α使得α在任意指派<t_1， t_2， …t_k>下的值即为f(t_1， t_2， …t_k)。

{¬, ∨, ∧, →}

定理2 {¬, ∨, ∧, →}是联结词的一个完全集。

证：只要证：

对任k元真值函数f，都存在仅含{¬, ∨, ∧, →}中联结词的k元命题形式α使得α在任意指派<t_1, t_2, …t_k>下的值即为f(t_1, t_2, …t_k)。对k归纳证明。

{¬， ∨， ∧， →}（续1）

k=1时，一元真值函数有四个f_1、f_2、f_3、f_4:

f_1: 0 ⟶ 0， 1 ⟶ 0

f_2: 0 ⟶ 1， 1 ⟶ 1

f_3: 0 ⟶ 0， 1 ⟶ 1

f_4: 0 ⟶ 1， 1 ⟶ 0

它们分别可以用$p\wedge(\neg p)$、 $p\vee(\neg p)$、p和$\neg p$表示。此时命题成立

$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$（续2）

设k<n时命题成立，要证k=n时命题也成立.

设f$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一个n元真值函数,

定义如下两个n-1元真值函数f'、f'':

$$f'(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$f''(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

由归纳假设，f'和f''都可由仅含$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$中联结词的n-1元命题形式$\alpha_1$、$\alpha_2$表示。设$\alpha_1$、$\alpha_2$中所含的命题变元设为$p_2$，$p_3$，…，$p_n$.

则f可由$(\neg p_1 \rightarrow \alpha_1) \wedge (p_1 \rightarrow \alpha_2)$表示。

对任意指派$< t_1, \ t_2, \ldots, t_n >$

当$t_1=0$时，

$(\neg p_1 \to \alpha_1) \land (p_1 \to \alpha_2)$在$< 0, t_2, \ldots, t_n >$下的值

$= \alpha_1$在$< 0, t_2, \ldots, t_n >$下的值

$= \alpha_1$在$< t_2, \ldots, t_n >$下的值

$= f'(t_2, t_3, \ldots, t_n)$

$= f(0, t_2, t_3, \ldots, t_n)$

$= f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$

命题成立。

同理可证，当$t_1=1$时命题也成立。

推论

1. 任一个n元真函数都可由一个仅含{¬，∨，∧，→} 中联结词的n元命题形式表示.
2. {¬，∨，∧，→，↔}是联结词的完全集。
3. ↔可由¬，∨，∧，→表示。

{¬，→}是联结词的完全集

证明：

$\alpha \vee \beta$可由（$\neg\alpha$）$\rightarrow\beta$表示。

$\alpha \wedge \beta$可由$\neg$（$\alpha\rightarrow$（$\neg\beta$））表示。

即这两对命题形式在任意指派下的值相同。

{¬，∨}是联结词的完全集

证明：

$\alpha \to \beta$可由（$\neg\alpha$）$\vee\beta$表示。

$\alpha \wedge \beta$可由$\neg$（（$\neg\alpha$）$\vee$（$\neg\beta$））表示。

{¬，∧}是联结词的完全集

证明：

$\alpha \to \beta$可由$\neg(\alpha \wedge (\neg \beta))$表示。

$\alpha \vee \beta$可由$\neg((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta))$表示。

{$\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$}不是联结词的完全集

证明：

总取0值的真值函数不能由只含此联结词集中的联结词的命题形式来表示。

因为这样的命题形式在其中的命题变元都取1时也取值1, 而不为0.

小结：{¬，∨，∧，→，↔}的子集

- {¬，∨，∧，→，↔}是联结词的完全集。
- 5个4元素子集中只有{∨，∧，→，↔}不是联结词的完全集。
- 3元素子集中，只要含¬就完全。

  10个3元素子集，4个不完全，6个完全。
- 2元素子集中，{¬，→}、{¬，∨}、{¬，∧}是完全的。
- {¬，↔}是否完全？
- {¬}是否完全？

作业与思考题

- 作业

  p508. 5、6、7 、8(p99--100)

- 思考题
  - {¬，　↔}是否完全?
  - {¬}是否完全?
  - 二元真值函数中，哪个是完全集?

§5 推理形式

- 前两节介绍了"命题"的形式。
- 本节介绍"推理"的形式。
- 推理是逻辑的研究对象。

什么是推理形式？

- 一组前提，一个结论
- 前提、结论都是命题。
- 若前提为α_1，α_2，…，α_n，结论为β，则将这样的推理形式称为

  α_1，α_2，…，α_n推出β。

什么是正确的推理形式？

- 直观上，正确的推理应该保证：如果前提正确，则结论也应该正确。
- **定义12** 设α_1，α_2，…，α_n, β都是命题形式,称推理“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，如果对α_1，α_2，…，α_n, β中出现的命题变元的任一指派, 若α_1，α_2，…，α_n都真, 则β亦真；否则，称“α_1，α_2，…，α_n推出β”是无效的或不合理的.

例8

- $\alpha \to \beta$、 α推出β是有效的。
- $\alpha \vee \beta$、 $\neg \alpha$推出β是有效的

注记

- 推理形式是否有效与前提中命题形式的排列次序无关。即：
- 若“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，则对1，2，…，n的任一个排列$i_1, i_2, \ldots, i_n$，“$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_n}$推出β”也是有效的。
- 所以前提是一个集合Γ，而不是一个序列。
- 若“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，则记为$\Gamma \models \beta$。

例9 下列推理形式是否有效？

$p \vee q$、$\neg q$、$(p \to q) \to r$推出r是无效的。

P	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \to q) \to r$	r	
0	0	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	0	←
0	1	1	0	1	1	
1	0	1	1	1	1	
1	1	1	0	0	0	
1	1	1	0	1	1	

例10 下列推理形式是否有效？

(1) $(\neg p_1) \vee p_2$，$p_1 \to (p_3 \wedge p_4)$，$p_4 \to p_2$，$p_3 \to p_4$推出$p_2 \vee p_4$ 。

解：目的是看能否找到使前提为真、且结论为假的指派。

使$p_2 \vee p_4$为假的指派有（*，0，*，0），

其中使（$\neg p_1$）$\vee$ p_2为真的指派有（0，0，*，0），

其中使$p_3 \to p_4$为真的指派有（0，0，0，0），

（0，0，0，0）使$p_1 \to (p_3 \wedge p_4)$和$p_4 \to p_2$都为真。

从而这个推理是无效的。

(2) $p_1 \to (p_2 \to p_3)$，p_2推出$p_1 \to p_3$

解：

使$p_1 \to p_3$ 为假的指派有（1，*，0），

其中使p_2为真的指派只有（1，1，0），

而（1，1，0）使$p_1 \to (p_2 \to p_3)$ 为假。

故没有使前提为真而结论为假的指派，从而此推理有效。

充要条件

定理4 推理形式“α_1，α_2，…，α_n推出β” 有效的充要条件是命题形式$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$是重言式。

意义：推理形式的有效性与命题形式的永真性可以互相化约。

今后将建立带前提的证明系统和重言式证明系统，并证明它们的等价性。

一些有效推理

- 若$\Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma$，且$\Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma$，则$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \models \gamma$
- 若$\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$，且$\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \neg \beta$，则$\Gamma \models \alpha$。
- …

Thanks

命题演算自然推理形式系统N

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

§6 命题演算的自然推理形式系统N

怎么在计算机上实现如下有效推理：

$$\{p \to q,\ q \to r\} \vdash p \to r$$

- 识别符号$p, q, r, \ldots$
- 识别公式$p \to q,\ q \to r, \ldots$
- 推理方法

计算机上实现有效推理需要建立：

- 字母表（符号库） —— 非空集合
- 公式集合 —— 字母表中符号的有限序列
- 公理集合 —— 公式集合的子集
- 规则集合 —— 公式集合的部分多元运算

形式系统

- 符号库（字母表）
- (形式)公式
- (形式)公理
- (形式)推理规则

推理

符号库和形式公式统称为形式语言。
形式公理和形式推理规则统称为形式推理。

命题演算的自然推理形式系统**N**

N的符号库

(1) p_1, p_2, $\ldots$ (可数个命题符号)

(2) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (5个联结词符号)

(3)), ((2个辅助符号)

N的公式

归纳定义如下：

(1) 命题符号都是公式;

(2) 若α是公式，则$(\neg\alpha)$也是公式;

(3) 若α，β是公式，则$(\alpha \vee \beta)$，$(\alpha \wedge \beta)$，$(\alpha \rightarrow \beta)$，$(\alpha \leftrightarrow \beta)$也都是公式;

(4) 每个公式都是有限次使用(1)、(2)或(3)得到的.

N的公理

公理集合为空集

N的推理规则

包含律：

若$\alpha \in \Gamma$，

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\quad (\in)$

$\neg$消去律：

若$\Gamma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash \beta$, $\Gamma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash (\neg\beta)$,

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\quad (\neg-)$

N的推理规则(续一)

$\to$消去律：

若$\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$，$\Gamma \vdash \alpha$，

则$\Gamma \vdash \beta$. $\quad (\to -)$

$\to$引入律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，

则$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. $\quad (\to +)$

N的推理规则(续二)

$\vee$消去律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$，$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \gamma$，

则$\Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \vdash \gamma$. $\quad (\vee -)$

$\vee$引入律：

若$\Gamma \vdash \alpha$，

则$\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta)$，$\Gamma \vdash (\beta \vee \alpha)$. $\quad (\vee +)$

N的推理规则(续三)

$\wedge$消去律：

若$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$,

则$\Gamma \vdash \alpha$， $\Gamma \vdash \beta$. $(\wedge-)$

$\wedge$引入律：

若$\Gamma \vdash \alpha$， $\Gamma \vdash \beta$,

则$\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$. $(\wedge+)$

N的推理规则(续四)

$\leftrightarrow$消去律：

(1) 若$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$，$\Gamma \vdash \alpha$

则$\Gamma \vdash \beta$. $\qquad (\leftrightarrow -)$

(2) 若$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$，$\Gamma \vdash \beta$

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\qquad (\leftrightarrow -)$

$\leftrightarrow$引入律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$,

则$\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$. $\qquad (\leftrightarrow +)$

用形式系统N可以做什么？

例2.12

$$(1)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash (\alpha \to \beta) \qquad (\in)$$

$$(2)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \alpha \qquad (\in)$$

$$(3)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \beta \qquad (\to -)(1)(2)$$

$$(4)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash (\beta \to \gamma) \qquad (\in)$$

$$(5)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \gamma \qquad (\to -)(3)(4)$$

$$(6)\quad \{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma) \qquad (\to +)(5)$$

N的证明序列

定义13 若有限序列

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1, \Gamma_2 \vdash \alpha_2, \cdots, \Gamma_n \vdash \alpha_n \qquad (*)$$

满足：

- Γ_1，Γ_2，$\cdots$，Γ_n为**N**中有限公式集；
- α_1，α_2，$\cdots$，α_n为**N**中公式；
- 每个$\Gamma_i \vdash \alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$都是对$(*)$中它之前的若干个$\Gamma_j \vdash \alpha_j$ $(1 \leq j < i \leq n)$应用**N**的某条推演规则得到的。

则称$(*)$为$\Gamma_n \vdash \alpha_n$在**N**的一个 (形式)证明序列。

此时，也称α_n在**N**中可由Γ_n(形式)证明或(形式)推出，记为$\Gamma_n \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_n$.

由例12知：$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash_{\mathrm{N}} (\alpha \to \gamma)$

注记

1. 命题形式与**N**公式在定义上虽然一样，本质上也一样，都是命题的抽象，但他们仍有差别：**N**公式仅由**N** 中符号构成。命题形式由命题符号构成，而命题符号要广泛得多

2. 形式语言与与元语言

   (a) **N**中的符号和公式称为**N**的形式语言。 它描写了**N**的组成部分。

   (b) 在叙述**N**的构成和性质时使用了非**N**中符号，如α, β等， 这些符号称为元语言符号。
   元语言一般为自然语言。

公式的简写

1. 省略命题形式最外层括号;

2. $\neg$的优先级高于其它的;

3. $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$代表$(\alpha_1 \vee (\alpha_2 \vee \alpha_3))$.

   即用同一联结词构造公式时，括号从右往左加。

   对$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$类似处理。

证明序列的简写

1. 将有限公式集合$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$简写为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$中元素没有顺序关系.
   (若有顺序关系,将记为$<\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$.)

3. $\Gamma \cup \{\alpha\}$也将记为Γ, α.

例12的简写

(1) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash (\alpha \to \beta)$ $\quad(\in)$

(2) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \alpha$ $\quad(\in)$

(3) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \beta$ $\quad(\to -)(1)(2)$

(4) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash (\beta \to \gamma)$ $\quad(\in)$

(5) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \gamma$ $\quad(\to -)(3)(4)$

(6) $(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \to \gamma)$ $\quad(\to +)(5)$

例13

给出下列各式的证明序列

1. $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$
2. $\alpha \vdash \beta \to \alpha$
3. $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$

例13(1)的证明

1. $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$

证：

(1) $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\in)$

(2) $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(3) $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$ $(\to -)(1)(2)$

例13(2)的证明

2. $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$

证:

(1) $\alpha, \ \beta \vdash \alpha$ $\qquad\qquad$ $(\in)$

(2) $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$ $\ (\rightarrow +)(1)$

例13(3)的证明

3. $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$

证：

(1) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\in)$

(3) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$ $(\to -)(1)(2)$

(4) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ $(\in)$

(5) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta \to \gamma$ $(\to -)(1)(4)$

(6) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \gamma$ $(\to -)(3)(5)$

(7) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$ $(\to +)(6)$

证明序列的简单性质

1. 若$\Gamma \vdash_N \alpha$, 则Γ一定是一个有限公式集。

2. 若 $\Gamma_1 \vdash \alpha_1$, $\Gamma_2 \vdash \alpha_2$, $\cdots$, $\Gamma_n \vdash \alpha_n$ 是**N**中的一个证明序列, 则对任意自然数i $(1 \le i \le n)$,

   (a) 子序列 $\Gamma_1 \vdash \alpha_1$, $\Gamma_2 \vdash \alpha_2$, $\cdots$, $\Gamma_i \vdash \alpha_i$ 也是**N**中的一个证明序列.

   (b) $\Gamma_i \vdash_N \alpha_i$.

形式系统N的中心问题

对**N**的任意有限公式集Γ和公式α, $\Gamma \vdash_N \alpha$?

约定

在形式系统**N**确定前提下，为简便起见，我们常省去“在**N**中”一词.

增加前提律

定理5: 令Γ为有限公式集, α, β为公式.
若$\Gamma \vdash \alpha$, 则$\Gamma, \beta \vdash \alpha$.

证明思路: 既然$\Gamma, \beta \vdash \alpha$的前提比$\Gamma \vdash \alpha$ 的前提还要多, $\Gamma \vdash \alpha$的证明序列应该可以转化为 $\Gamma, \beta \vdash \alpha$的证明序列。怎么转化呢?

证: 因$\Gamma \vdash \alpha$, 则存在证明序列

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1,\ \Gamma_2 \vdash \alpha_2,\ \cdots,\ \Gamma_n \vdash \alpha_n \qquad (*)$$

满足$\Gamma_n = \Gamma$, $\alpha_n = \alpha$.

增加前提律的归纳证明 —— 奠基步骤

只要证:

对任意k：$(1 \le k \le n)$，$\Gamma_k, \ \beta \vdash \alpha_k$成立 （$**$）

下对k归纳证之.

(1) 奠基步骤:

当$k = 1$时，$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$是$(*)$的第一项，故$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$必然是应用$(\in)$得到的，从而$\alpha_1 \in \Gamma_1$.

故$\alpha_1 \in \Gamma_1 \cup \{\beta\}$，再由$(\in)$知：$\Gamma_1, \ \beta \vdash \alpha_1$.

增加前提律的归纳证明 —— 归纳步骤

(2) 归纳步骤: 归纳假设(**)对$< m$的所有k成立, 下面考察(**)在$k = m$时的情形.

(2.1) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由($\in$)导出的, 类似(1)可证.

(2.2) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由($\neg -$)导出, 则存在自然数i, $j < k$使得$\Gamma_i \vdash \alpha_i$、 $\Gamma_j \vdash \alpha_j$分别为$\Gamma_m, \neg\alpha_m \vdash \gamma$、 $\Gamma_m, \neg\alpha_m \vdash \neg\gamma$.
由归纳假设得: $\Gamma_i, \beta \vdash \alpha_i$, $\Gamma_j, \beta \vdash \alpha_j$,
即$\Gamma_m, \beta, \neg\alpha_m \vdash \gamma$, $\Gamma_m, \beta, \neg\alpha_m \vdash \neg\gamma$.
再由($\neg -$)知: $\Gamma_m, \beta \vdash \alpha_m$.

(2.3) 对于($\to -$), 类似(2.2)可证.

(2.4) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由$(\to +)$导出，则α_m必为形如$\gamma_1 \to \gamma_2$的公式，且有自然数$i < m$使得:$\Gamma_i \vdash \alpha_i$为Γ_m，$\gamma_1 \vdash \gamma_2$. 由归纳假设知：Γ_m，β，$\gamma_1 \vdash \gamma_2$，再由$(\to +)$知：Γ_m，$\beta \vdash \gamma_1 \to \gamma_2$，即$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.5) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由$(\wedge -)$导出的，则存在自然数$i < k$使得：$\Gamma_i \vdash \alpha_i$为

$$\Gamma_m \vdash \alpha_m \wedge \gamma \text{或 } \Gamma_m \vdash \gamma \wedge \alpha_m.$$

由归纳假设得：Γ_m，$\beta \vdash \alpha_m \wedge \gamma$或 Γ_m，$\beta \vdash \gamma \wedge \alpha_m$. 不管哪种情形，都有$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.6) 对于$(\wedge +)$类似可证.

(2.7) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由$(\vee-)$导出的，则$\Gamma_m = \Gamma' \cup \{\gamma_1 \vee \gamma_2\}$，且$\Gamma'$，$\gamma_1 \vdash \alpha_m$ 与Γ'，$\gamma_2 \vdash \alpha_m$ 在$(*)$中出现，且出现在$\Gamma_m \vdash \alpha_m$之前. 其中：Γ'为一个有限公式集，γ_1，γ_2都是公式. 由归纳假设知：Γ'，β，$\gamma_1 \vdash \alpha_m$且 Γ'，β，$\gamma_2 \vdash \alpha_m$. 从而Γ'，$\beta, \gamma_1 \vee \gamma_2 \vdash \alpha_m$，即$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.8) 对于$(\vee+)$，类似(2.5)可证.

(2.9) 对于$(\leftrightarrow -)$和$(\leftrightarrow +)$，类似(2.2)可证.

归纳证毕，$(**)$成立，故$\Gamma_n, \beta \vdash \alpha_n$，即：$\Gamma, \beta \vdash \alpha$.

增加前提律的推论

推论3: 设Γ, Γ'是有限公式集, α是公式.
若$\Gamma \vdash \alpha$, 则$\Gamma, \Gamma' \vdash \alpha$.

常把增加前提律记作$(+)$.

传递律

定理6: 若$\Gamma \vdash \alpha_1$, $\Gamma \vdash \alpha_2$, ..., $\Gamma \vdash \alpha_n$,
且$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \alpha$,
则$\Gamma \vdash \alpha$.

传递律常记为(Tr).

传递律的证明

证:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha & (\text{假设}) \\
(2) & \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \rightarrow \alpha & (\rightarrow +)(1) \\
(3) & \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-2} \vdash \alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \alpha) & (\rightarrow +)(2) \\
 & \vdots & \\
(n+1) & \emptyset \vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha & (\rightarrow +)(n) \\
(n+2) & \Gamma \vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha & (+) \\
(n+3) & \Gamma \vdash \alpha_1 & (\text{假设}) \\
(n+4) & \Gamma \vdash \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha & (\rightarrow -) \\
(n+5) & \Gamma \vdash \alpha_2 & (\text{假设}) \\
(n+6) & \Gamma \vdash \alpha_3 \rightarrow \alpha_4 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha & (\rightarrow -) \\
 & \vdots & \\
 & \Gamma \vdash \alpha_n \rightarrow \alpha & (\rightarrow -) \\
 & \Gamma \vdash \alpha_n & (\text{假设}) \\
 & \Gamma \vdash \alpha & (\rightarrow -)
\end{array}
$$

两个记号

(1) 以$\Gamma \vdash \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 记$\Gamma \vdash \alpha_1$且$\cdots$且$\Gamma \vdash \alpha_n$.

(2) 设Γ，Γ'都是有限公式集，以$\Gamma \vdash\dashv \Gamma'$记 $\Gamma \vdash \Gamma'$且 $\Gamma' \vdash \Gamma$.

则

(1) 若$\Gamma \vdash \alpha_1, \cdots, \alpha_n$，且$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha$，则$\Gamma \vdash \alpha$

(2) 设Γ_1，Γ_2，$\cdots$，Γ_n，Γ 都是有限公式集，
若$\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$，$\cdots$，$\Gamma_{n-1} \vdash \Gamma_n$，$\Gamma_n \vdash \Gamma$，
则$\Gamma_1 \vdash \Gamma$.

定理7

若$\alpha_1 \to \alpha_2 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$，且$\alpha_1 \vdash \alpha_2$，则$\alpha_3 \vdash \alpha_4$.

证:

(1)	$\alpha_1 \vdash \alpha_2$	(假设)
(2)	$\emptyset \vdash \alpha_1 \to \alpha_2$	$(\to +)(1)$
(3)	$\alpha_1 \to \alpha_2 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	(假设)
(4)	$\emptyset \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	$(Tr)(2)(3)$
(5)	$\alpha_3 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	$(+)(4)$
(6)	$\alpha_3 \vdash \alpha_3$	$(\in)$
(7)	$\alpha_3 \vdash \alpha_4$	$(\to -)(5)(6)$

例14 给出下列各式的形式证明

1. $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

2. 如果Γ, $\alpha \vdash \beta$, 且Γ, $\alpha \vdash \neg\beta$, 则$\Gamma \vdash \neg\alpha$.

3. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

4. α, $\neg\alpha \vdash \beta$.

其中(2)称为归缪律, 记为($\neg+$).

例14(1)的形式证明

1. $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

证:

(1)	$\neg\neg\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(2)	$\neg\neg\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	$(\in)$
(3)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(\neg -)(1)(2)$

例14(2)的形式证明

2. 如果$\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$, 且$\Gamma,\ \alpha \vdash \neg\beta$, 则$\Gamma \vdash \neg\alpha$.

证:

(1)	$\Gamma,\ \neg\neg\alpha \vdash \Gamma$	$(\in)$(注意约定记号)
(2)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(1)
(3)	$\Gamma,\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(+)$(2)
(4)	$\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$	(假设)
(5)	$\Gamma,\ \neg\neg\alpha \vdash \beta$	(Tr)(1)(3)(4)
(6)	$\Gamma,\ \alpha \vdash \neg\beta$	(假设)
(7)	$\Gamma,\ \neg\neg\alpha \vdash \neg\beta$	(Tr)(1)(3)(6)
(8)	$\Gamma \vdash \neg\alpha$	$(\neg -)$(5)(7)

例14(3)的形式证明

3. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

证:

(1)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(3)	$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	本例之(2.)

例14(4)的形式证明

4. $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$.

证:

(1) $\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ $(\in)$

(3) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ $(\neg-)(1)(2)$

例15 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

2. $\alpha \to \neg\beta \vdash \beta \to \neg\alpha$

3. $\neg\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \alpha$

4. $\neg\alpha \to \neg\beta \vdash \beta \to \alpha$

只证2. 和4.

例15(2)的证明

2. $\alpha \to \neg\beta \vdash \beta \to \neg\alpha$.

证:

(1) $\alpha \to \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \to \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to \neg\beta$ $(\in)$

(3) $\alpha \to \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \neg\beta$ $(\to -)(1)(2)$

(4) $\alpha \to \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(5) $\alpha \to \neg\beta,\ \beta \vdash \neg\alpha$ $(\neg +)(3)(4)$

(6) $\alpha \to \neg\beta \vdash \beta \to \neg\alpha$ $(\to +)(5)$

例15(4)的证明

4. $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta \vdash \beta\rightarrow\alpha$.

证:

(1) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$ $(\in)$

(2) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha\rightarrow\neg\beta$ $(\in)$

(3) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\beta$ $(\rightarrow -)(1)(2)$

(4) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(5) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta \vdash \alpha$ $(\neg -)(3)(4)$

(6) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta \vdash \beta\rightarrow\alpha$ $(\rightarrow +)(5)$

例16 给出下列各式的形式证明

1. $\neg\alpha\to\alpha\vdash\alpha$.

2. $\alpha\to\neg\alpha\vdash\neg\alpha$.

3. $\alpha\to\beta,\ \alpha\to\neg\beta\vdash\neg\alpha$.

4. $\alpha\to\beta,\ \neg\alpha\to\beta\vdash\beta$.

5. $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\alpha$.

6. $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\neg\beta$.

证：只证1．4．5．

例16(1)的证明

1. $\neg\alpha\rightarrow\alpha\vdash\alpha$.

证:

(1) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\neg\alpha$ $(\in)$

(2) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\neg\alpha\rightarrow\alpha$ $(\in)$

(3) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\alpha$ $(\rightarrow-)$

(4) $\neg\alpha\rightarrow\alpha\vdash\alpha$ $(\neg-)(1)(3)$

例16(4)的证明

4. $\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta \vdash \beta.$

证:

$(1)\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (例15之1)

$(2)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ $(+)(1)$

$(3)\neg\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \alpha$ (例15之3)

$(4)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\beta \to \alpha$ $(+)(3)$

$(5)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\beta$ $(\in)$

$(6)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\alpha$ $(\to -)(2)(5)$

$(7)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \alpha$ $(\to -)(4)(5)$

$(8)\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \beta\ \vdash \beta$ $(\neg -)(6)(7)$

例16(5)的证明

5. $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha$.

证:

(1) $\neg(\alpha \to \beta),\ \neg\alpha \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ $\quad(\in)$

(2) $\neg\alpha,\ \alpha \vdash \beta$ $\quad$(例14之4.)

(3) $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ $\quad(\to +)(2)$

(4) $\neg(\alpha \to \beta),\ \neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ $\quad(+)(3)$

(5) $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha$ $\quad(\neg -)(1)(4)$

作业

p.508(p.101). 13(1)(3)(5)

9

10

谢　谢

例17 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha,\ \beta.$

2. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \beta \wedge \alpha.$

3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash\dashv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$

4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \neg\beta.$

5. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg\beta.$

6. $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha).$

例17(1)的证明

1. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha,\ \beta.$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\in)$
(2)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha,\ \beta$	$(\wedge -)$

$(\dashv)$

(1)	$\alpha, \beta \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha, \beta \vdash \beta$	$(\in)$
(3)	$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\wedge +)$

例17(2)的证明

2. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \beta \wedge \alpha$.

证:

($\vdash$)

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta, \alpha$	(本例之1.)
(2)	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$	($\wedge-$)

($\dashv$) 同理可证。

例17(3)的证明

3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \dashv\vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

证:

$(\vdash)$

(1)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \gamma$	(1.)
(2)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha \wedge \beta$	(1.)
(3)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha$	$(\wedge -)(2)$
(4)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \beta$	$(\wedge -)(2)$
(5)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash (\beta \wedge \gamma)$	$(\wedge +)(4)(1)$
(6)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$(\wedge +)(3)(5)$

例17(3)的证明(续)

3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \dashv\vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

证:

$(\dashv)$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \vdash (\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha & (2.) \\
(2) & (\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha \vdash \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) & (\vdash) \\
(3) & \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) \vdash (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta & (2.) \\
(4) & (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) & (\vdash) \\
(5) & \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & (2.) \\
(6) & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & (Tr)
\end{array}
$$

当然$(\dashv)$也可仿$(\vdash)$证得.

例17(4)的证明

4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \neg\beta$.

证:

$(\vdash)$

(1)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha,\ \beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	(1.)
(3)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha,\ \beta \vdash (\alpha \wedge \beta)$	$(+)(2)$
(4)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha \vdash \neg\beta$	$(\neg+)(1)(3)$
(5)	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$	$(\rightarrow+)(4)$

例17(4)的证明(续)

4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \to \neg\beta$.

证:

($\dashv$)

(1)	$\alpha \to \neg\beta, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\in)$
(2)	$\alpha \to \neg\beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	$(\wedge)(1)$
(3)	$\alpha \to \neg\beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \beta$	$(\wedge)(1)$
(4)	$\alpha \to \neg\beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \to \neg\beta$	$(\in)$
(5)	$\alpha \to \neg\beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \neg\beta$	$(\to -)(2)(4)$
(6)	$\alpha \to \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	$(\neg +)(3)(5)$

例17(5)的证明

5. $\neg(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg\beta$.

证:

($\vdash$)

(1) $\beta,\ \alpha \vdash \beta$ ($\in$)

(2) $\beta \vdash \alpha \to \beta$ ($\to +$)(1)

(3) $\beta \to (\alpha \to \beta) \vdash \neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ (例15之1.)

(4) $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta$ (定理7)(2)(3)

(5) $\neg\alpha,\ \alpha \vdash \beta$ (例14之4.)

(6) $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ ($\to +$)(5)

(7) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$ (例15之3.)

(8) $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha$ (定理7)(6)(7)

(9) $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha \wedge \neg\beta$ ($\wedge +$)

例17(5)的证明(续)

5. $\neg(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg\beta$.

证:

$(\dashv)$

(1)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha \to \beta \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta$	$(\in)$
(3)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha \to \beta \vdash \beta$	$(\to -)$
(4)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha \to \beta \vdash \neg\beta$	$(\in)$
(5)	$\alpha,\ \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$	$(\neg +)$
(6)	$\alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha,\ \neg\beta$	(1.)
(7)	$\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$	(Tr)

思考题：怎么用$\alpha \wedge \neg\beta$, $\neg(\alpha \to \beta)$ 作为前提直接证明。

例17(6)的证明

6. $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

证:

(1) $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \alpha$ (1.)

(2) $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\alpha$ (1.)

(3) $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ $(\neg+)$

例18 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \vdash \alpha \vee \beta,\ \beta \vee \alpha$
2. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \beta \vee \alpha$
3. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \dashv\vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
4. $\neg(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$
5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
6. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$
7. $\alpha \rightarrow \beta \dashv\vdash \neg\alpha \vee \beta$
8. $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg\alpha.$

例18(1)的证明

1. $\alpha \vdash \alpha \vee \beta, \ \beta \vee \alpha$

证:

(1) $\alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ $(\vee+)$

(3) $\alpha \vdash \beta \vee \alpha$ $(\vee+)$

例18(2)的证明

2. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \beta \vee \alpha$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\alpha \vdash \beta \vee \alpha$	(本例之1.)
(2)	$\beta \vdash \beta \vee \alpha$	(本例之1.)
(3)	$\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$	$(\vee -)(1)(2)$

$(\dashv)$ 同理可证。

例18(3)的证明

3. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash\dashv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\gamma \vdash \beta \vee \gamma$	(1.)
(2)	$\gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	(1.)
(3)	$\alpha \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	(1.)
(4)	$\beta \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	与(2)类似
(5)	$\alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$(\vee -)(3)(4)$
(6)	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$(\vee -)(2)(5)$

$(\dashv)$ 同理可证。也可用$(\vdash)$结合本例之2证得。

例18(4)的证明

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

证($\vdash$):

(1)	$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$	(1.)
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha$	(定理7及例15)
(3)	$\beta \vdash \alpha \vee \beta$	(1.)
(4)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	(同(2))
(5)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$	($\wedge$+)(2)(4)

例18(4)的证明(续一)

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

另证($\vdash$):

(1)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \alpha \vee \beta$	$(\vee+)(1)$
(3)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$	$(\in)$
(4)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha$	$(\neg+)(2)(3)$
(5)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	(同(4))
(6)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$	$(\wedge+)(4)(5)$

例18(4)的证明(续二)

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\alpha$	(例17)
(2)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \neg\alpha$	$(+)(1)$
(3)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(4)	$\neg\alpha,\ \alpha \vdash \beta$	(例14)
(5)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \beta$	$(Tr)(2)(3)(4)$
(6)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \beta \vdash \beta$	$(\in)$
(7)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vee \beta \vdash \beta$	$(\vee-)(5)(6)$
(8)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\beta$	(例17)
(9)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vee \beta \vdash \neg\beta$	$(+)(8)$
(10)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$	$(\neg+)(7)(9)$

例18(5)的证明

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$

证($\vdash$):

(1)	$\neg\alpha \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$	(1)
(2)	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha$	(定理7及例15)
(3)	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \beta$	类似(2)
(4)	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\wedge+)$(2)(3)
(5)	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$	(定理7)

例18(5)的证明(续一)

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$

另证($\vdash$):

(1) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$	(本例之4)
(2) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha$	($\wedge -$)(1)
(3) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14之1)
(4) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha$	(Tr)(2)(3)
(5) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \beta$	同理
(6) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$	($\wedge +$)(4)(5)
(7) $\neg(\alpha \wedge \beta), \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$	($+$)(6)
(8) $\neg(\alpha \wedge \beta), \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	($\in$)
(9) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$	($\neg -$)(7)(8)

例18(5)的证明(续二)

5. $\neg(\alpha\wedge\beta) \vdash\dashv \neg\alpha\vee\neg\beta$

证($\dashv$):

(1)	$\alpha\wedge\beta\vdash\alpha$	(例17)
(2)	$\neg\alpha\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)$	(定理7)
(3)	$\neg\beta\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)$	类似(2)
(4)	$\neg\alpha\vee\neg\beta\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)$	($\vee-$)

例18(6)的证明

6. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$

证($\vdash$):

(1)	$\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$	(例14之4)
(2)	$\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	($\rightarrow +$)(1)
(3)	$\beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	(例13之2)
(4)	$\alpha \vee \beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	($\vee -$)(2)(3)

例18(6)的证明(续)

6. $\alpha \vee \beta \vdash\dashv \neg \alpha \rightarrow \beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \wedge \neg \beta$	(本例之4.)
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha$	$(\wedge -)$
(3)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \beta$	$(\wedge -)$
(4)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha$	$(+)(3)$
(5)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \rightarrow \beta$	$(\in)$
(6)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \beta$	$(\rightarrow -)(4)(5)$
(7)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \beta$	$(+)(3)$
(8)	$\neg \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \vee \beta$	$(\neg -)(6)(7)$

例18(7)的证明

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg \alpha \vee \beta$

证($\vdash$):

(1)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha \wedge \beta$	(本例之4)
(2)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha$	$(\wedge -)$
(3)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	$(\wedge -)$
(4)	$\alpha \to \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha$	$(+)(2)$
(5)	$\alpha \to \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	$(+)(3)$
(6)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14之1)
(7)	$\alpha \to \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \alpha$	$(Tr)(4)(6)$
(8)	$\alpha \to \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \alpha \to \beta$	$(\in)$
(9)	$\alpha \to \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \beta$	$(\to -)(7)(8)$
(10)	$\alpha \to \beta \vdash \neg \alpha \vee \beta$	$(\neg -)(5)(9)$

例18(7)的证明(续一)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

另证($\vdash$):

(1)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14)
(2)	$\alpha\to\beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(+)(1)$
(3)	$\alpha\to\beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha\to\beta$	$(\in)$
(4)	$\alpha\to\beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \beta$	$(\to -)(2)(3)$
(5)	$\alpha\to\beta \vdash \neg\neg\alpha\to\beta$	$(\to +)(4)$
(6)	$\neg\neg\alpha\to\beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$	(本例之6)
(7)	$\alpha\to\beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$	$(Tr)(5)(6)$

例18(7)的证明(续二)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg\alpha \vee \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$	(本例之6)
(2)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$	(+)(1)
(3)	$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	(例14之3)
(4)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \neg\neg\alpha$	(+)(3)
(5)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \beta$	($\to -$)(2)(4)
(6)	$\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$	($\to +$)(5)

例18(7)的证明(续三)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

另证($\dashv$):

(1) $\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$ (例14之4)

(2) $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\to +)(1)$

(3) $\beta, \alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(4) $\beta \vdash \alpha \to \beta$ $(\to +)(3)$

(5) $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$ $(\vee -)(2)(4)$

例18(8)的证明

8. $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg \alpha$

证:

(1) $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \vdash \neg \alpha \wedge \neg\neg \alpha$ (本例之4)

(2) $\neg \alpha \wedge \neg\neg \alpha \vdash \neg \alpha, \ \neg\neg \alpha$ (例17之1)

(3) $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \vdash \neg \alpha, \ \neg\neg \alpha$ (Tr)

(4) $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg \alpha$ $(\neg -)(3)$

例19

证明: $\alpha \leftrightarrow \beta \dashv\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

证($\vdash$):

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \alpha \leftrightarrow \beta,\ \alpha \vdash \alpha & (\in) \\
(2) & \alpha \leftrightarrow \beta,\ \alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \beta & (\in) \\
(3) & \alpha \leftrightarrow \beta,\ \alpha \vdash \beta & (\leftrightarrow -) \\
(4) & \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta & (\rightarrow +)(3) \\
(5) & \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta \rightarrow \alpha & (\text{类似}(4)) \\
(6) & \alpha \leftrightarrow \beta \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) & (\wedge +)(4)(5)
\end{array}
$$

例19(续)

证明: $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash\dashv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

证($\dashv$):

(1) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha$ (例17)

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $(+)(1)$

(3) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(4) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \beta \vdash \alpha$ (类似(4))

(6) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ $(\leftrightarrow +)(4)(5)$

定理8

对于任意公式α, α_1, α_2, $\cdots$, α_n.

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha \Longleftrightarrow$
   $\emptyset \vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha \Longleftrightarrow$
   $\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$

证1($\Rightarrow$): 多次使用($\rightarrow +$)易证.

定理8的证明

证1($\Leftarrow$):

$$\emptyset \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_1$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_2 \to (\alpha_3 \to \cdots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$\vdots$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_n \to \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha$$

定理8的证明(续一)

证2($\Rightarrow$):

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_1$

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_2$

$\vdots$

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_n$

$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n \vdash \alpha$

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha$

$\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$

定理8的证明(续二)

证2($\Leftarrow$):

$$\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_1$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_2$$

$\vdots$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha$$

定理8的意义

定义2.14(可证公式): 若$\emptyset \vdash_N \alpha$, 则称$\alpha$为**N**的一个可证公式或内定理，记为$\vdash_N \alpha$，在不引起混淆情况下，也简记为$\vdash \alpha$.

定理2.8说明: 任何一个有前提的形式推演关系都可转化为与之等价的没有前提的形式推演关系。
即：任何一个形式推演关系都可化为一个与之等价的可证式.

作业

p.508(p.101). 11(3), (6)

11(1), (2), (5)

12(4), (6), (8)

13(2), (7), (10), (12),(14)

谢　谢

命题演算推理形式系统P

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习——命题演算推理形式系统N

- N中推理的每个式子都由前提和结论组成，接近于实际推理，又称为自然推理形式系统。
- 第一个给出自然推理形式系统的是德国数学家甘岑(G. Gentzen, 1909–1945)，所以又 称N为甘岑系统.*
- N由符号库、公式、公理和规则四部分组成。
- N中形式推理：$\Gamma \vdash \alpha$.
- 形式化思想和方法正是计算机科学所需要的

——计算机逻辑时代。

*甘岑的另一个主要贡献是他用Hilbert的超限归纳法证明了 数论的一致性，使形式主义避免了彻底的失败。

§7 命题演算推理形式系统P

命题演算形式系统N的“缺点”：

- 符号太多：$\{\neg, \rightarrow\}$就已经是联结词的完全集.
- 公式复杂.
- 公理和规则太多：10条
- 推理麻烦：又是前提又是结论.

命题演算推理系统P是一个“简洁”的形式系统。

P的符号库

(1) $p_1,\ p_2,\ \cdots$ (可数个命题符号)

(2) $\neg,\ \rightarrow$ (2个联结词符号)

(3)), ((2个辅助符号)

P的公式

归纳定义如下：

(1) 命题符号都是公式;

(2) 若α是公式，则$(\neg\alpha)$也是公式;

(3) 若α、β是公式，则$(\alpha \to \beta)$也都是公式;

(4) 每个公式都是有限次使用(1)、(2)或(3)得到的.

P的公理

(A1) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

(A2) $\Big((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))\Big)$

(A3) $(((\neg\,\alpha) \rightarrow (\neg\,\beta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

P的推理规则

分离规则：由α、$(\alpha \rightarrow \beta)$可得到$\beta$. (M).

分离规则(Modus Ponens)又记为(MP).

注记

- 形式系统P又称为希尔伯特型(D.Hilbert)系统 *
- 分清P的定义中的元语言与对象语言。
- P的形式语言是N的形式语言子语言。
- 关于N的注记同样适用于P，如括号省略规则。

*关于形式系统的多样性请参见:

1. 王宪钧，数理逻辑引论，北大出版社，1982
2. 沈百英，数理逻辑，国防工业出版社，1991

P的公理的简写

(A1) $\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha)$

(A2) $(\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)) \longrightarrow ((\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \gamma))$

(A3) $((\neg\,\alpha) \longrightarrow (\neg\,\beta)) \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha)$

在形式系统P中可以做什么?

例20

$$(1)\quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \qquad (A1)$$

$$(2)\quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow$$

$$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \qquad (A2)$$

$$(3)\quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \qquad (M)(1)(2)$$

P的证明序列

定义15 由P中公式组成的一个序列:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \qquad (*)$$

若对每个i $(1 \le i \le n)$,下列两条件之一成立:

(1) α_i是公理;

(2) α_i是由序列$(*)$中α_i之前的某两个公式$\alpha_j,\alpha_k(1 \le j,k < i)$应用分离规则(M)得到的.

则α_n称为P的一个**内定理**, 记作$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$ 或$\vdash \alpha_n$, 称$(*)$为α_n的一个**证明序列**.

由例20知: $\vdash_{\mathbf{P}} (\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\alpha)$

两个简单性质

(1) $\mathbf{P}$的每个公理α都是$\mathbf{P}$的一个内定理.

(2) 若α_1, α_2, $\cdots$, α_n 是$\mathbf{P}$中的一个证明序列，则对每个α_i $(1 \leq i \leq n)$都有$\vdash \alpha_i$.

例21

证明：$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ $(A1)$

(2) $\vdash (\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow$

$((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ $(A2)$

(3) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ $M(1)(2)$

(4) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ $(A1)$

(5) $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ $(M)(3)(4)$

问：为什么可以在每个式的前面都可以加$\vdash$?

补充例

证明: $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$

证:

(1) $(\alpha \to \beta) \to \Big((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\Big)$

(2) $\Bigg(\Big((\alpha \to \beta) \to \Big((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\Big)\Big) \to$
$\Bigg(\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big)\Bigg)$

(3) $\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big)$

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))$

(5) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$

补充例(续)

(6) $$\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big) \to \Big(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)\Big)$$

(7) $$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

(8) $$\Big(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)\Big) \to \Big(\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big)$$

(9) $$\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$$

(10) $$\Big(\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big)$$

(11) $$(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$$

(12) $$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)$$

(13) $$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

怎样简化推理？？？

- N的公理和规则多，推理当然方便；
  P的公理和规则相对少，所以造成推理复杂。
- N的公理和规则直观，所以使用方便；
  P的公理和规则直观性差，证明思路不好发现。
- 将来会证明，N和P是等价的。
- 程序设计语言也有类似现象：
  若语言复杂，则描述性好，但可靠性验证困难；
  若语言简单，则描述性差，但可靠性验证方便；
- 怎么发现和简化P中形式推理？

  —增加元定理

  —模仿N

定理9

1. 若$\vdash \alpha$, $\vdash \alpha \rightarrow \beta$，则$\vdash \beta$

证:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \alpha \end{array}\right\} \alpha\text{的一个证明序列}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \alpha \rightarrow \beta \end{array}\right\} \alpha \rightarrow \beta\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \beta \qquad (M)$$

仍记为(M)，但要注意与分离规则(M)的区别。

定理9(续)

2. 若$\vdash \alpha\rightarrow\beta$，且$\vdash \beta\rightarrow\gamma$，则$\vdash \alpha\rightarrow\gamma$.

证:

$$\vdash (\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \qquad (A1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \beta\rightarrow\gamma \end{array}\right\} \quad \beta\rightarrow\gamma\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma) \qquad (M)$$

$$\vdash ((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)) \qquad (A2)$$

$$\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma) \qquad (M)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \alpha\rightarrow\beta \end{array}\right\} \quad \alpha\rightarrow\beta\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \alpha\rightarrow\gamma \qquad (M)$$

记为(*Tr*).

例22

证明：$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

证:

(1) $\vdash \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ $(A1)$

(2) $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ $(A3)$

(3) $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (Tr)

例23

证明: 1. $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ 2. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

证1:

(1) $\vdash \neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$ (上例)

(2) $\vdash (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(A3)$

(3) $\vdash \neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(Tr)(1)(2)$

(4) $\vdash (\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)) \to$

$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(A2)$

(5) $\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(M)(3)(4)$

(6) $\vdash \neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ (例21)

(7) $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ $(M)(5)(6)$

例23(续)

证明: 1. $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ 2. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

证2:

(1) $\vdash \neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ (1.)

(2) $\vdash (\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)$ $(A3)$

(3) $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ (M)

进一步简化？？？

1. 能否象在N中一样进行推理？

2. 在P中怎么定义$\Gamma \vdash \alpha$？

P中有前提的推演

定义16 设Σ是**P**中的一个公式集，称**P**中公式序列

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n \qquad (*)$$

为在前提Σ下推出α_n的证明序列，如果对每个α_i $(1 \leq i \leq n)$，

(1) $\alpha_i \in \Sigma$，或者

(2) α_i是**P**中一个公理，或者

(3) α_i是由$(*)$中它前面的两个公式应用(M)得到.

此时，记为$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$ 或 $\Sigma \vdash \alpha$.

注记

- P中在前提Σ下的证明序列实际上是把Σ中的公式看作“临时公理”进行的一个证明。
- 在定义16中，Σ中公式不一定是**P**中公理，也不一定是内定理。
- 在定义16中，Σ也不一定是有限集合。

$\Sigma \vdash_P \alpha$的简单性质

(1) 若$\alpha \in \Sigma$，则$\Sigma \vdash \alpha$.

(2) 若$\Sigma' \subseteq \Sigma$，$\Sigma' \vdash \beta$, 则$\Sigma \vdash \beta$.

(3) 当$\Sigma = \emptyset$时，$\emptyset \vdash \beta$当且仅当$\vdash \beta$.

例25

证明： $\{\alpha,\ \beta\to(\alpha\to\gamma)\ \}\vdash\beta\to\gamma$

证:

(1)	α	前提
(2)	$\alpha\to(\beta\to\alpha)$	$(A1)$
(3)	$\beta\to\alpha$	(M)(1)(2)
(4)	$\beta\to(\alpha\to\gamma)$	前提
(5)	$(\beta\to(\alpha\to\gamma))\to((\beta\to\alpha)\to(\beta\to\gamma))$	$(A2)$
(6)	$(\beta\to\alpha)\to(\beta\to\gamma)$	(M)(4)(5)
(7)	$\beta\to\gamma$	(M)(6)(3)

问：本例中，能否在每个公式前加上$\vdash$?

作业

p.508(p.101). 14(1), (3), (4)

15(1), (2)

谢　谢

复习

- 命题演算推理形式系统P　　简洁
- 2个联结词。
- 3个公理。
- 1个规则。
- P中形式推理：$\vdash \alpha$?
- 问题：推理复杂，寻找证明思路困难。

  —增加元定理

  —模仿N：P中带前提的推演

演绎定理

定理10 若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 则$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

证:

设
$$\beta_1, \ \beta_2, \ \cdots, \ \beta_n(=\beta)$$
是在前提 $\Gamma \cup \{\alpha\}$下推出β的一个证明序列. 考虑以下公式序列:

$$\alpha \rightarrow \beta_1, \ \alpha \rightarrow \beta_2, \ \cdots, \ \alpha \rightarrow \beta_n(=\alpha \rightarrow \beta)$$

下证: 可对此公式序列进行适当填补, 使得在填补过后的序列中, 每个$\alpha \rightarrow \beta_i$ $(1 \leq i \leq n)$及其之前的公式组成的子序列能成为在前提Γ下推出$\alpha \rightarrow \beta_i$ 的一个证明序列.

演绎定理的归纳证明——奠基部分1

对i用数学归纳法.

(1) 当$i = 1$时，β_1或者是一个公理，或者$\beta_1 \in \Gamma \cup \{\alpha\}$.

(1.1) 当β_1是一个公理时，在$\alpha \to \beta_1$之前 填补如下公式:

$$\begin{array}{ll}
\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) & (A1) \\
\beta_1 & (\text{公理}) \\
\alpha \to \beta_1 & (M)
\end{array}$$

演绎定理的归纳证明——奠基部分2

(1.2) 当$\beta_1 \in \Gamma$时，可仿(1.1)填补.

(1.3) 当β_1为α时，则$\alpha \to \beta_1$为 $\alpha \to \alpha$.
因$\vdash \alpha \to \alpha$，故$\alpha \to \alpha$在**P**中有一个证明序列，
将此证明序列填补在$\alpha \to \beta_1$之前，则此序列
也是在前提Γ下推出$\alpha \to \beta_1$的一个证明序列.

演绎定理的归纳证明——归纳部分1

(2) 设在$\alpha \to \beta_{i-1}$之前已适当填补，现在$\alpha \to \beta_{i-1}$与$\alpha\to\beta_i$ 之间进行如下填补:

$$\left.\begin{array}{l}(2.1)\ (\text{当}\beta_i\text{为某公理时})\\ (2.2)\ (\text{当}\beta_i \in \Gamma\text{时})\\ (2.3)\ (\text{当}\beta_i\text{为}\alpha\text{时})\end{array}\right\}\quad \text{可仿(1)填补.}$$

(2.4) 当β_i是由β_j和 $\beta_k(1 \le j,\ k < i)$经(M)得到时，不妨设β_k为$\beta_j\to\beta_i$.

$\alpha\to\beta_j$和$\alpha\to\beta_k$ $\big($即$\alpha\to(\beta_j\to\beta_i)\big)$ 在$\alpha\to\beta_i$之前出现.

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha\to\beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\ \alpha\to\beta_{i-1}\end{array}\right\}\quad \alpha\to\beta_{i-1}\text{ 之前公式组成的序列}$$

$\alpha\to\beta_i$

归纳证毕

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha \to \beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha \to \beta_j \\ \left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha \to \beta_{i-1} \end{array}\right\} \quad \alpha \to \beta_{i-1} \text{ 之前公式组成的序列} \\ \alpha \to (\beta_j \to \beta_i) \end{array}$$

$\alpha \to \beta_i$

归纳证毕

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha \to \beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \\
\alpha \to \beta_j & \\
\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \alpha \to \beta_{i-1}\end{array}\right\} & \alpha \to \beta_{i-1} \text{ 之前公式组成的序列} \\
\alpha \to (\beta_j \to \beta_i) & \\
(\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i)) & \text{(A2)} \\
(\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i) & \text{(M)} \\
\alpha \to \beta_i & \text{(M)}
\end{array}$$

归纳证毕.

演绎定理的逆

定理11 若$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$，则$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

证:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha \to \beta \end{array}\right\} \text{由}\Gamma\text{推出}\alpha \to \beta\text{的一个证明}$$

α (前提)

β (M)

例26

证明： $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$

证: 只要证$\{\alpha, \ \alpha \to \beta\} \vdash \beta$

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \to \beta$	前提
(3)	β	(M)

2次由应用演绎定理得：$\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$。

例27

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

证：只要证$\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \alpha\} \vdash \gamma$

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \to \beta$	前提
(3)	β	(M)(1)(2)
(4)	$\beta \to \gamma$	前提
(5)	γ	(M)(3)(4)

例28

证明： $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

证：先证 $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \neg\neg\alpha\} \vdash \neg\neg\beta$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \end{array}\right\} & \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \\
(2) & \neg\neg\alpha & \text{前提} \\
(3) & \alpha & (M)(1)(2) \\
(4) & \alpha \rightarrow \beta & \text{前提} \\
(5) & \beta & (M)(3)(4) \\
(6) & \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \beta \rightarrow \neg\neg\beta \end{array}\right\} & \vdash \beta \rightarrow \neg\neg\beta \\
(7) & \neg\neg\beta & (M)(5)(6)
\end{array}
$$

例28(续)

证明： $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$

续证:

由于$\{\alpha\to\beta,\ \neg\neg\alpha\}\vdash\neg\neg\beta$

故$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)$

由于$\vdash(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$

故$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$

例29

证明： $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$

证:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$ (例26)

(2) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

$\rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$ (例28)

(3) $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$ (Tr)

例30

证明: $\{\alpha \to \neg\beta,\ \alpha \to \beta,\ \alpha\} \vdash \gamma$

证:

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \to \beta$	前提
(3)	β	(M)(1)(2)
(4)	$\alpha \to \neg\beta$	前提
(5)	$\neg\beta$	(M)(1)(2)
	$\vdots$	
(6)	$\neg\beta \to (\beta \to \gamma)$	例22
(7)	$\beta \to \gamma$	(M)(5)(6)
(8)	γ	(M)(7)(3)

由此可得: $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \gamma)).$

$\vdash (\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)).$

例31

证明： $\{\alpha\to\beta,\ \neg\alpha\to\beta\}\vdash\beta$

证:

(1) $(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$ (例28)

(2) $\alpha\to\beta$ 前提

(3) $\neg\beta\to\neg\alpha$ $(M)(1)(2)$

(4) $(\neg\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\neg\alpha)$ (例28)

(5) $\neg\alpha\to\beta$ 前提

(6) $\neg\beta\to\neg\neg\alpha$ $(M)(4)(5)$

例31(续)

证明: $\{\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta\}\vdash\beta$

(7) $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\Big((\neg\beta\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\rightarrow\beta))\Big)$ (例30)

(8) $(\neg\beta\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\rightarrow\beta))$ $(M)(3)(7)$

(9) $\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ $(M)(6)(8)$

(10) $(\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$ $(A3)$

(11) $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta$ $(M)(9)(10)$

(12) β $(M)(2)(11)$

故: $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$

例32

证明： $\vdash (\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$

证： 只要证$\{\neg\alpha\to\alpha\}\vdash\neg\alpha$

(1) $\neg\alpha\to(\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))$ (例20)

(2) $(\neg\alpha\to(\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)))\to$
$((\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)))$ $(A2)$

(3) $((\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)))$ $(M)(1)(2)$

(4) $\neg\alpha\to\alpha$ (前提)

(5) $\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ $(M)(3)(4)$

(6) $(\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))\to((\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha)$ $(A3)$

(7) $(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$ $(M)(5)(6)$

(8) α $(M)(4)(7)$

例32(另证)

证明： $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$

证:

(1) $\vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (例31)

(2) $\vdash \alpha \to \alpha$ (例21)

(3) $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (M)

例33

证明： $\{\neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta\}\vdash\alpha$

证:

(1) $(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\alpha))$ (例30)

(2) $\neg\alpha\rightarrow\beta$ (前提)

(3) $(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ (M)(1)(2)

(4) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$ (前提)

(5) $\neg\alpha\rightarrow\alpha$ (M)(3)(4)

(6) $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ (例32)

(7) α (M)(5)(6)

例34(补)

证明：$\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

证:

由例22知：$\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

由定理11知：$\{\neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$.

由演绎定理知：$\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$.

再由演绎定理知：$\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$.

定理12

若$\Sigma \vdash \alpha_1$，$\Sigma \vdash \alpha_2$，$\cdots$，$\Sigma \vdash \alpha_n$，
且 α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n \vdash \alpha$，
则$\Sigma \vdash \alpha$.

证:

由于α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n \vdash \alpha$，由演泽定理得:

$\vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$.

如下构造$\Sigma \vdash \alpha$的证明序列:

定理12(续)

$\vdots$

$\vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha_1 \end{array}\right\} \Sigma \vdash \alpha_1$$

$\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$

$\vdots$

$\alpha_n \to \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha_n \end{array}\right\} \Sigma \vdash \alpha_n$$

α

故$\Sigma \vdash \alpha$.

作业

p.508(p.101). 14(2)

15(3), (4)

16(2), (3)

[补充] 在P中证明：

(1) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$.

(2) $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

谢　谢

N与P的等价性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

- 命题演算推理形式系统N和P
- 相同之处：
  - 都由四个组成部分
  - 公式的构成方式相同
  - 都是为了推理
  - ...
- 不同之处：
  - 符号库不同
  - 公理与规则不同
  - 推理形式不同：$\Gamma \vdash \alpha$与$\vdash \alpha$
  - ...

§8 N与P的等价性

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha \text{当且仅当} \Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha$$

$$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha}$$

问题：　当Γ为无限公式集时，

$\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha$有可能成立(如当$\alpha \in \Gamma$时).

但$\Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha$不可能成立。

定理13

设Σ, α分别为P中公式集与公式, 若$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$, 则存在$\Sigma$的有限子集$\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, 使得 $\Sigma_0 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$.

证明思路: *尽管前提Σ可能有无限多个, 但由于证明过程是有限的, 故在证明过程中用到的前提必定是有限的.*

证: 设α_1, α_2, $\cdots$, $\alpha_n(=\alpha)$ 是在前提Σ下推出α的一个证明.

$$令\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\},$$

则α_1, α_2, $\cdots$, α_n也是在前提Σ_0下 推出α的一个证明, 故$\Sigma_0 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$. 从而$\Sigma_0$即为所求。

引理1

若α是**P**中公理，则对**P**中任何有限公式集Σ都有
$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha$

证:

$$\alpha \vdash_N \beta \to \alpha \qquad \text{例13}$$
$$\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash_N \alpha \to \gamma \qquad \text{例13}$$
$$\emptyset \vdash_N \alpha \to (\beta \to \alpha) \qquad \to +$$
$$\emptyset \vdash_N (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \qquad \to +$$
$$\Sigma \vdash_N \alpha \to (\beta \to \alpha) \qquad +$$
$$\Sigma \vdash_N (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \qquad +$$

$$\neg \alpha \to \neg \beta \vdash_N \beta \to \alpha \qquad \text{例15}$$
$$\Sigma \vdash_N (\neg \alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \alpha)$$

定理14

设Σ, α分别为**P**中有限公式集和公式.
若$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$, 则$\Sigma \vdash_{N} \alpha$.

证: 设

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n$$

是**P**中在前提Σ下推出α的一个证明序列, (其中: $\alpha_n = \alpha$).

只要证:

$$\text{对每个} i \ (1 \leq i \leq n), \ \ \Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_i$$

下对i归纳证之.

定理14的归纳证明——奠基步骤

(1) 当$i = 1$时，α_1是**P**的一个公理，或$\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若α_1是**P**的一个公理，由引理1知$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_1$.

(1.2) 若$\alpha_1 \in \Sigma$，由**N**的规则$(\in)$知 $\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_1$.

定理14的归纳证明——归纳步骤

(2) 假设对满足$j < i$的每个自然数j都有$\Sigma \vdash_N \alpha_j$，
下证$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_i$.

(2.1) 当$\alpha_i \in \Sigma$或者α_i是**P**的公理时，类似(1)可证$\Sigma \vdash_N \alpha_i$.

(2.2) 若α_i是由α_k, α_l经(M)得到的 $(1 \leq k, l < i)$，
不妨设$\alpha_k = \beta$， $\alpha_l = \beta \to \alpha_i$.
由于k，$l < i$，由归纳假设知：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_k$， $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_l$，
即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \beta$， $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \beta \to \alpha_i$，
应用$(\to -)$规则得$\Sigma \vdash \alpha_i$.
归纳证毕。

$\Gamma \vdash_N \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash_P \alpha$

问题:

N的公式不一定是P的公式(如带联结词∨的公式)。

约定:

$\alpha \vee \beta$ 代表 $(\neg\alpha) \to \beta$

$\alpha \wedge \beta$ 代表 $\neg(\alpha \to \neg\beta)$

$\alpha \leftrightarrow \beta$ 代表 $\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))$

定理15

设Σ和α分别为**N**中的有限公式集和公式,
若$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha$, 则$\Sigma \vdash_{\mathrm{P}} \alpha$.

证: 只要证:

对**N**的任何有限公式集Σ及公式α, 若存在**N**中形式证明序列

$$\Sigma_1 \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_1,\ \Sigma_2 \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_2,\ \cdots,\ \Sigma_n \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_n \qquad (*)$$

使得: $\Sigma_n = \Sigma$, $\alpha_n = \alpha$, 则: $\Sigma_n \vdash_{\mathrm{P}} \alpha_n$.

对n用归纳法证之.

定理15的归纳证明(奠基步骤)

(1) 当$n = 1$时，$\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_1$必是应用$(\in)$得到的，从而$\alpha_1 \in \Sigma_1$．故$\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_1$.

(2) 设$(*)$对满足$k < n$的每个自然数k成立，下证$(*)$对n也成立.

(2.1) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用$(\in)$得到的，仿(1)可证.

定理15的归纳证明($\neg-$)

(2.2) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\neg -$)得到的，

即存在i，j： $1 \leq i$，$j < n$，使得

$$\Sigma_i \vdash \alpha_i, \quad \Sigma_j \vdash \alpha_j$$

分别为

$$\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash \beta, \quad \Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash \neg\beta$$

其中: β为**N**中某公式.

由归纳假设: $\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$, $\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\beta$.

由演绎定理: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \rightarrow \beta$, $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \rightarrow \neg\beta$.

由例33得: $\neg\alpha_n \rightarrow \beta$, $\neg\alpha_n \rightarrow \neg\beta \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$,

由定理12得: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

(2.3) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\rightarrow -$),($\rightarrow +$) 得到的，

仿(2.2)可证.

定理15的归纳证明($\neg-$)

(2.4) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\vee-$)得到的,
即存在i, j: $1 \le i$, $j < n$, 使

$$\Sigma_i \vdash \alpha_i, \ \Sigma_j \vdash \alpha_j.$$

分别为

$$\Sigma', \ \beta \vdash \alpha_n, \ \Sigma', \ \gamma \vdash \alpha_n.$$

其中: Σ'为**N**中有限公式集,β, γ为**N**中公式,

$$\Sigma_n = \Sigma' \cup \{\beta \vee \gamma\}.$$

注意: $\beta \vee \gamma$在**P**中代表$\neg \beta \to \gamma$.

由归纳假设: $\Sigma', \beta \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n, \quad \Sigma', \gamma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n.$

由演绎定理: $\Sigma' \vdash_{\mathbf{P}} \beta \to \alpha_n, \quad \Sigma' \vdash_{\mathbf{P}} \gamma \to \alpha_n.$

定理15的归纳证明(¬–)(续)

由于$\Sigma' \subseteq \Sigma_n$，故 $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta \to \alpha_n$， $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma \to \alpha_n$.

又由于$\beta \vee \gamma \in \Sigma_n$，故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \to \gamma$.

由例27：$\{\neg \beta \to \gamma,\ \gamma \to \alpha_n\} \vdash_{\mathbf{P}} (\neg \beta \to \alpha_n)$,

由定理12: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \to \alpha_n$.

又由例31知: $\{\beta \to \alpha_n,\ \neg \beta \to \alpha_n\} \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

由定理12得:$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

定理15的归纳证明($\vee+$)

(2.5) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\vee+$)得到的,

则α_n为$\beta \vee \gamma$ (其中: β, γ为**N**中公式),

即α_n代表**P**中公式$\neg\beta \to \gamma$.

由归纳假设: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$和$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma$ 至少有一个成立.

定理15的归纳证明($\vee+$)

(2.5.1) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$成立。

由例34知：$\vdash_{\mathbf{P}} \beta \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \gamma)$.

由定理11得：$\beta \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \rightarrow \gamma$.

由定理12得：$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \rightarrow \gamma$.

即$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

(2.5.2) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma$.

由于$\vdash_{\mathbf{P}} \gamma \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \gamma)$

故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

定理15的归纳证明(∧−)

(2.6) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用(∧−)得到的,

由归纳假设: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n \wedge \beta$或者 $\Sigma_n \vdash \beta \wedge \alpha_n$.

其中: β为**N**中某个公式.

注意: $\alpha_n \wedge \beta$代表$\neg(\alpha_n \rightarrow \neg\beta)$,

$\beta \wedge \alpha_n$代表$\neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$.

故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\alpha_n \rightarrow \neg\beta)$或者 $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$

定理15的归纳证明$(\wedge -)$(续1)

(2.6.1) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta)$.

由例22知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg\alpha_n \to (\alpha_n \to \neg\beta)$,

由例28知:

$\vdash_{\mathbf{p}} (\neg\alpha_n \to (\alpha_n \to \neg\beta)) \to (\neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha_n)$.

由定理9知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha_n$.

由例23知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg\neg\alpha \to \alpha$.

再由定理9知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \alpha_n$.

从而$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$

定理15的归纳证明($\wedge-$)(续2)

(2.6.2) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$.

由于$\vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$.

类似可得： $\vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n) \rightarrow \alpha_n$.

从而也有$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$

(2.7) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\wedge+$),($\leftrightarrow +$)或($\leftrightarrow -$)得到的，类似可证$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

归纳证毕.

请自行补足其余情形的证明.

推论

对**P**(或**N**)中公式α，$\vdash_{\mathbf{N}} \alpha$当且仅当$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$.

作业

p.508(p.101). 17(1), (2), (3)

谢　谢

赋值

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

- 命题演算推理形式系统N和P.
- N和P的核心是推理。
- 但在N或P中，符号、公式本身是没有含义的。

— 在推理过程中并不看公式的真假，而只看是否为公理或规则。

- 形式系统是否具有预计的性质?

— 内定理是否一定是正确的?

- 什么叫“公式是正确的”？

§9 赋值

- 对形式系统**P**(等价地，**N**)进行赋值，就是对**P**的每个公式分配一个值.
- 首先要对每个命题符号分配一个值.

指派

定义17: 形式系统**P**的一个指派是指如下的映射σ:

$$\sigma: \{p_0, p_1, p_2, \cdots\} \to \{0,\ 1\}$$

$\sigma(p_i)$ $(i \in \mathbb{N})$称为命题符号p_i在指派σ下的值.

赋值

定义18: 设σ是形式系统**P**的一个指派，如下归纳定义**P**中公式α 在指派σ下的值α^σ:

- 若α是命题变元p_i，则$\alpha^\sigma = \sigma(p_i)$.
- 若α是$(\neg\beta)$，则$\alpha^\sigma = 1 - \beta^\sigma$.
- 若α是$(\beta\rightarrow\gamma)$，则$\alpha^\sigma = \max\{1-\beta^\sigma,\ \gamma^\sigma\}$.

简单性质

(1) 对任意公式α和指派σ，$\alpha^\sigma \in \{0,1\}$.

(2) $(\neg\beta)^\sigma$和$(\beta\to\gamma)^\sigma$的值如下表:

α^σ	$(\neg\alpha)^\sigma$
0	1
1	0

α^σ	β^σ	$(\alpha\to\beta)^\sigma$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

与$\neg$、$\to$的真值表相同。

$\alpha \vee \beta$的值

(1) $\alpha \vee \beta$是$(\neg\alpha)\rightarrow\beta$的简写.

(2)

$$(\alpha \vee \beta)^\sigma$$
$$= ((\neg\alpha)\rightarrow\beta)^\sigma$$
$$= \max\{1-(\neg\alpha)^\sigma,\ \beta^\sigma\}$$
$$= \max\{1-(1-\ \alpha^\sigma),\ \beta^\sigma\}$$
$$= \max\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}$$

α^σ	β^σ	$(\alpha \vee \beta)^\sigma$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\alpha \wedge \beta$的值

(1) $\alpha \wedge \beta$是$\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$的简写.

(2)

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta)^\sigma \\
&= 1 - (\alpha \rightarrow \neg \beta)^\sigma \\
&= 1 - \max\{1 - \alpha^\sigma,\ (\neg\beta)^\sigma\} \\
&= 1 - \max\{1 - \alpha^\sigma,\ 1 - \beta^\sigma\} \\
&= 1 - (1 + \max\{-\alpha^\sigma,\ -\beta^\sigma\} \\
&= -(-\min\{\alpha^\sigma,\ \beta^\sigma\}) \\
&= \min\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}
\end{aligned}
$$

α^σ	β^σ	$(\alpha \wedge \beta)^\sigma$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\alpha \leftrightarrow \beta$的值

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$是$\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))$的简写.

(2) $(\alpha \leftrightarrow \beta)^\sigma$

$$\begin{aligned}
&= 1 - ((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))^\sigma \\
&= 1 - \max\{1 - (\alpha \to \beta)^\sigma, 1 - (\beta \to \alpha))^\sigma\} \\
&= \min\{(\alpha \to \beta)^\sigma, (\beta \to \alpha)^\sigma\} \\
&= \min\{\max\{1 - \alpha^\sigma, \beta^\sigma\}, \max\{1 - \beta^\sigma \alpha^\sigma\}\} \\
&= \min\{\max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \alpha^\sigma, \\
&\qquad\qquad \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \beta^\sigma\} \\
&= \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} + \min\{-\alpha^\sigma, -\beta^\sigma\} \\
&= \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \max\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}
\end{aligned}$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$的值表

α^σ	β^σ	$(\alpha \leftrightarrow \beta)^\sigma$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

结论

α在指派σ下的值α^σ

$=$

将α作为命题形式时，α关于p_0，p_1，$p_2, \cdots$的指派$< \sigma(p_0)$，$\sigma(p_1)$，$\sigma(p_2)$，$\cdots >$的值.

例34

求**P**中下列公式在指派σ下的值:

(1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$, σ定义为:

$$\sigma(p_i) = \begin{cases} 0 & i = 2k+1 \\ 1 & i = 2k \end{cases} \qquad (k\text{为任意自然数}).$$

(2) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$, σ是任意的指派.

例34(1)的解

(1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$

解:
$$
\begin{aligned}
& (p_1 \vee p_2)^\sigma \\
= \ & \max\{1 - (\neg p_1)^\sigma, p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{1 - (1 - p_1^\sigma), p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{p_1^\sigma, p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{\sigma(p_1), \sigma(p_2)\} \\
= \ & \max\{0, 1\} \\
= \ & 1
\end{aligned}
$$

例34(1)的解(续)

(1) $(p_1 \vee p_2) \to p_3$

解:

$$
\begin{aligned}
& ((p_1 \vee p_2) \to p_3)^\sigma \\
= \ & \max\{1 - (p_1 \vee p_2)^\sigma, p_3^\sigma\} \\
= \ & \max\{1 - 1, \sigma(p_3)\} \\
= \ & \max\{0, 0\} \\
= \ & 0
\end{aligned}
$$

例34(2)的解

(2) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$, σ是任意的指派.

解: (2) 直接根据联结词的真值表来确定公式的值.

$\sigma(p_1)$	$\sigma(p_2)$	$(p_1 \wedge p_2)^\sigma$	$(p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))^\sigma$	α^σ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

哑元无关性

定理16 设在**P**的公式α中出现的命题符号都在p_{i_1}, p_{i_2}, $\cdots$, p_{i_n}中, 若**P**的两个指派σ_1, σ_2满足: $\sigma_1(p_{i_k}) = \sigma_2(p_{i_k})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则$\alpha^{\sigma_1} = \alpha^{\sigma_2}$.

公式的分类

定义20

- 若对P的任一指派σ，$\alpha^{\sigma}=1$，则称α为一个重言式(或永真式).
- 若对P的任一指派σ，$\alpha^{\sigma}=0$，则称α为一个矛盾式(或永假式).
- 若存在P的指派σ，使$\alpha^{\sigma}=1$，则称α为一个可满足式.

永真式的例子

定理17　P的公理都是永真式

证:　下证(A3)是永真式。

$\sigma(\alpha)$	$\sigma(\beta)$	$(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)^\sigma$	$(\beta\rightarrow\alpha)^\sigma$	$(A3)^\sigma$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

(M)的保真性

定理18 P的分离规则保持永真性,
即:若α和$\alpha \to \beta$都是永真式, 则β也是永真式.

证:
若不然, 则存在**P**的指派σ使$\beta^\sigma = 0$.
由于α为重言式, 故$\alpha^\sigma = 1$, 从而$(\alpha \to \beta)^\sigma = 0$,
与$\alpha \to \beta$为重言式矛盾.

替换定理

定理19　设α是**P**中公式，q_1，q_2，$\cdots$，q_n是**P**中命题变元符号，β_1，β_2，$\cdots$，β_n是**P**中另外n个公式，将α中每个q_i(若有)换为β_i $(1 \le i \le n)$所得的公式为β. 若α为重言式，则β也为重言式..

说明:

$$\begin{array}{lcccccccc} \alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\ \beta: & \cdots & \beta_1 & \cdots & \beta_2 & \cdots & \cdots & \beta_n & \cdots \end{array}$$

替换定理的证明

证:

若对**P**的任一个指派σ, 令$\beta_i^\sigma = t_i \ (1 \le i \le n)$.
作**P**的另一个指派τ如下:

$$\tau(p) = \begin{cases} t_i & \text{若} p = q_i (1 \le i \le n) \\ \sigma(p) & \text{若} p \notin \{q_1, q_2, \cdots, q_n\} \end{cases}$$

任意$p \in \{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$

则$\beta^\sigma = \alpha^\tau$ (可对α归纳证之).

由于α为重言式, 故$\beta^\sigma = \alpha^\tau = 1$, 即$\beta$为重言式.

使用替换定理要注意的问题

作替换时要注意两个问题，否则不能保证永真性：

- 若将q_i替换为β_i，须将q_i的所有出现都换为β_i.
  反例：$p_1 \rightarrow p_1 \rightsquigarrow p_2 \rightarrow p_1$，
  前者是重言式，后者不是.

- 替换时只能替换命题变元，不能替换公式.
  反例：$p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1) \rightsquigarrow p_1 \rightarrow p_2$，
  前者是重言式，后者不是.

作业

p.509(p.102).   21

谢 谢

复习

- 赋值就是(在给定的指派下)赋给每个公式一个真假值。
- 赋值的方式与命题形式相同。
- 公式可以分为三类：
  - 永真式
  - 永假式
  - 可满足式
- 永真式的性质，替换定理。

下面考虑一类特殊的永真式。

公式的等值

定义21

(1) 若$(\alpha \leftrightarrow \beta)$是一个重言式，则称$\alpha$等值于$\beta$，记为$\alpha \Leftrightarrow \beta$.

(2) 若$(\alpha \rightarrow \beta)$是一个重言式，则称$\alpha$逻辑蕴含$\beta$，记为$\alpha \Rightarrow \beta$.

注意$\leftrightarrow$和$\Leftrightarrow$、$\rightarrow$和$\Rightarrow$的不同用法。

常用等值公式(I)

交换律

$$(\alpha \vee \beta) \Longleftrightarrow (\beta \vee \alpha)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha).$$

常用等值公式(II)

结合律

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$$

常用等值公式(III)

分配律

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma).$$

常用等值公式(IV)

否定律

$\alpha \Longleftrightarrow \neg\neg\alpha$ 双重否定率

$\neg(\alpha \vee \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$ 德·摩根率

$\neg(\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha) \vee (\neg\beta).$ 德·摩根率

常用等值公式(V)

幂等律

$$\alpha \vee \alpha \iff \alpha$$

$$\alpha \wedge \alpha \iff \alpha.$$

吸收率

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$$

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha.$$

常用等值公式(VI)

蕴含等值式

$$\alpha \rightarrow \beta \Longleftrightarrow (\neg \alpha) \vee \beta$$

假言易位

$$\alpha \rightarrow \beta \Longleftrightarrow (\neg \beta) \rightarrow (\neg \alpha)$$

归谬律

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg \beta) \Longleftrightarrow \neg \alpha$$

常用等值公式(VII)

等价等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \iff (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).$$

等价否定等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \iff \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta.$$

常用等值公式(VIII)

零律

$\alpha \vee 1 \Longleftrightarrow 1, \qquad \alpha \wedge 0 \Longleftrightarrow 0.$

同一律

$\alpha \vee 0 \Longleftrightarrow \alpha, \qquad \alpha \wedge 1 \Longleftrightarrow \alpha.$

排中律

$\alpha \vee (\neg \alpha) \Longleftrightarrow 1.$

矛盾律

$\alpha \wedge (\neg \alpha) \Longleftrightarrow 0.$

注1：这里"0"、"1"都不是公式，分别代表了任意的矛盾式和重言式

注2：Bool代数。

第一替换定理

定理20 将α,β中命题符号q_1, q_2, $\cdots$, q_n(若有)全都分别换为公式γ_1, γ_2, $\cdots$, γ_n后分别得公式α',β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明:
$$\begin{array}{llllllllll}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & q_2 & \cdots & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots
\end{array}$$

第一替换定理

定理20 将α, β中命题符号q_1，q_2，$\cdots$，q_n(若有)全都分别换为公式γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_n后分别得公式α', β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明:

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & q_2 & \cdots & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\alpha': & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots \\
\beta': & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \gamma_3 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots
\end{array}$$

第一替换定理

定理20 将α, β中命题符号q_1，q_2，$\cdots$，q_n(若有)全都分别换为公式γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_n后分别得公式α', β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$，则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明:
$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & q_2 & \cdots & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\alpha': & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots \\
\beta': & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \gamma_3 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots
\end{array}$$

证: 由于$\alpha \Longleftrightarrow \beta$，故$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式。
由定理19知：$\alpha' \leftrightarrow \beta'$也为重言式，故$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

第二替换定理

定理21 设α, β, γ, δ为**P**中公式, 且δ是用β替换γ中的某些α得到的公式, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\gamma \Longleftrightarrow \delta$.

说明:
$$\begin{array}{lllllllll} \gamma: & \cdots & \alpha & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots \\ \delta: & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \beta & \cdots \end{array}$$

证: 对**P**的任一指派σ, 因$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 故$\alpha^\sigma = \beta^\sigma$, 从而$\gamma^\sigma = \delta^\sigma$, 故$\gamma \Longleftrightarrow \delta$.

注意:这两个定理的使用条件.

第二替换定理的应用

设$\alpha_1 \iff \beta_1$， $\alpha_2 \iff \beta_2$, 则:

(1) $(\neg\,\alpha_1) \iff (\neg\,\beta_1)$.

(2) $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \iff (\beta_1 \vee \beta_2)$.

(3) $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \iff (\beta_1 \wedge \beta_2)$.

(4) $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \iff (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$.

(5) $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2) \iff (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$.

简单性质

等值关系定义了P的公式集F_P上的一个等价关系，即:

(1) 任意$\alpha \in F_P$, $\alpha \Longleftrightarrow \alpha$.

(2) 任意$\alpha, \beta \in F_P$, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\beta \Longleftrightarrow \alpha$.

(3) 任意$\alpha, \beta, \gamma \in F_P$, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, $\beta \Longleftrightarrow \gamma$, 则$\alpha \Longleftrightarrow \gamma$.

等值演算

例35 证明: $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \Longleftrightarrow (p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$.

证: 因$p_0 \rightarrow p_1 \Longleftrightarrow (\neg p_0) \vee p_1$, 故:

$$
\begin{aligned}
& p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2) & \\
\Longleftrightarrow & (\neg p_0) \vee (p_1 \rightarrow p_2) & \text{(定理20)} \\
\Longleftrightarrow & (\neg p_0) \vee ((\neg p_1) \vee p_2) & \text{(定理21)} \\
\Longleftrightarrow & (\neg p_0 \vee \neg p_1) \vee p_2 & \text{(结合律)} \\
\Longleftrightarrow & \neg (p_0 \wedge p_1) \vee p_2 & \text{(否定律)} \\
\Longleftrightarrow & (p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2 & \text{(定理20)}
\end{aligned}
$$

范式

公式在等值意义下的一种标准形式。

定义23 —— 简单合取式和简单析取式:

- 由命题符号或命题符号的否定利用合取词$\wedge$组成的公式称为简单合取式.
- 由命题符号或命题符号的否定利用析取词$\vee$组成的公式称为简单析取式.

单个命题符号或它们的否定 ——简单析(合)取式.

$p, \neg\, q, p \wedge (\neg\, q), (p \wedge (\neg\, q) \wedge (\neg\, p))$ ——简单合取式.

$\neg\neg p,\ \neg(p \wedge (\neg\, q))$ ——不是简单析(合)取式.

析取范式和合取范式

- 由简单合取式的析取构成的公式称为析取范式.
- 由简单析取式的合取构成的公式称为合取范式.

单个简单析(合)取式既是合取范式也是析取范式.

$p \vee (\neg q) \vee (p \wedge (\neg q))$是析取范式但不是合取范式.

$\neg\neg p$既不是析取范式也不是合取范式

简单析(合)取式的性质

定理24 (重言式(矛盾式)情形)

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时包含一个命题符号及其否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时包含一个命题符号及其否定式.

证: 只证(1)

简单析(合)取式的性质的证明

$(\Leftarrow)$

设α为一个简单析取式，且α中包含命题符号p及其否定式$\neg p$。

由交换律和结合律知：可假设α中含有$p \vee (\neg p)$。

把α中除$p \vee (\neg p)$之外的部分记为α'，则由交换律和结合律知：$\alpha \Longleftrightarrow \alpha' \vee (p \vee (\neg p))$.

由排中律知：$(p \vee (\neg p)) \Longleftrightarrow 1$。

故α是一个重言式.

简单析(合)取式的性质的证明(续)

$(\Rightarrow)$

设α为永真的简单析取式.

若它不同时包含一个命题符号和它的否定，考虑α中命题变元符号的如下指派:

给α中不带$\neg$号的命题变元符号p指派值0.
给α中带$\neg$号的命题变元符号q指派值1.

则α在此指派下取值0，与α为重言式矛盾.
故α中同时包含一个命题变元符号及其否定.

非重言(矛盾)的简单析(合)取式

定理25 对于命题符号组q_1，q_2，$\cdots$，q_n，

(1) 所含命题符号仅为q_1，q_2，$\cdots$，q_n的任意非矛盾的简单合取式有且仅有一个关于它们的成真指派.

(2) 所含命题符号仅为q_1，q_2，$\cdots$，q_n的任意非永真的简单析取式有且仅有一个关于它们的成假指派.

例如:

$\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3$关于$(q_1, q_2, q_3)$的唯一成真指派是$(0, 1, 1)$.

$\neg q_1 \vee q_2 \vee q_3$关于$(q_1, q_2, q_3)$的唯一成假指派是$(1, 0, 0)$.

非重言(矛盾)的简单析(合)取式(续)

定理26 对于命题变元符号组q_1, q_2, $\cdots$, q_n的任意指派σ,

(1) 一定有一个非永真的简单析取式α以σ为成假指派, 且α中所含的命题符号有且仅有q_1, q_2, $\cdots$, q_n.

(2) 也一定有一个非矛盾的简单合取式β以σ为成真指派. 且α中所含的命题符号有且仅有q_1, q_2, $\cdots$, q_n.

例如:

以$(1, 0, 1)$为唯一成假指派的简单析取式为

$\neg q_1 \vee q_2 \vee \neg q_3$,

以$(1, 0, 1)$为唯一成真指派的简单合取式为

$q_1 \wedge \neg q_2 \vee q_3$.

析(合)取式的性质

定理27 对P中公式α_1，α_2，$\cdots$，α_n，

(1) 合取式$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 的成真指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成真指派集的交集，合取式$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 的成假指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成假指派集的并集.

(2) 析取式$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 的成假指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成假指派集的交集，析取式$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 的成真指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成真指派集的并集.

析取范式定理

定理28　P的任一个公式α都等值于一个析取范式β.

证：设α中的命题符号为q_1，q_2，$\cdots$，q_n.

若α为矛盾式，则$\alpha \Longleftrightarrow q_1 \wedge \neg q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n$

若α不为矛盾式，设α关于q_1，q_2，$\cdots$，q_n的所有成真指派为 σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m　$(0 < m \leq 2^n)$.

对于每个σ_i，存在命题符含且仅含q_1，q_2，$\cdots$，q_n的一个简单合取式α_i,使α_i以σ_i为成真指派(定理26)

由定理25知:α_i关于q_1，q_2，$\cdots$，q_n的成真指派仅为σ_i一个$(i = 1,\ 2,\ \cdots m)$.

析取范式定理(续)

令$\beta = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$.

由定理27知: β的成真指派为所有$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的成真指派的并集, 即为$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$.
从而$\alpha \Longleftrightarrow \beta$.

合取范式定理

定理28　P的任一个公式α都等值于一个合取范式β.

证:

由定理28知: $\neg\alpha$与某个析取范式等值, 即

$$\neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$$

其中α_1, α_2, $\cdots$, α_m都是简单合取式.

所以$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$.

因$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$, 故$\alpha \Leftrightarrow \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$.

合取范式定理

$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m) \Leftrightarrow (\neg\alpha_1) \wedge (\neg\alpha_2) \wedge \cdots \wedge (\neg\alpha_m)$.

由于每个$\neg\alpha_i$等值一个简单析取式,

故$(\neg\alpha_1) \wedge (\neg\alpha_2) \wedge \cdots \wedge (\neg\alpha_m)$ 等值于一些简单析取式的合取。

即: α等值于一些简单析取式的合取.

注: 当然也可仿定理2.28证明.

例36

求$((\neg p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3$的合取范式和析取范式.

解:范式定理的证明还指出了求范式的步骤:

(1) 列求真值表，找出所有成真指派

p_1	p_2	p_3	$(\neg p_1)\vee p_2$	α	$\neg\alpha$
0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0

例36(续1)

(2) 先求析取范式.

$((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$关于$p_1, p_2, p_3$的成真指派为

$< 1, 0, 0 >$, $< 0, 0, 1 >$, $< 1, 0, 1 >$, $< 0, 1, 1 >$,
$< 1, 1, 1 >$,

相应的简单析取式分别为:

$p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)$, $(\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge p_3$,
$p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge p_3$, $(\neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3$, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$.

故: $((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$的一个析取范式为:

$$(p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)) \vee ((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge p_3) \vee$$
$$(p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge p_3) \vee ((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

例36(续2)

(3) 再求合取范式.

为求$((\neg p_1) \vee p_2) \to p_3$的合取范式，要先求它的否定式的析取范式.

$\neg(((\neg p_1) \vee p_2) \to p_3)$ 的成真指派为

$< 0, 0, 0 >$，$< 0, 1, 0 >$和$< 1, 1, 0 >$

(正好为$((\neg p_1) \vee p_2) \to p_3$的成假指派)

故$\neg(((\neg p_1) \vee p_2) \to p_3)$的析取范式为:

$((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)) \vee ((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3))$

例36(续3)

故 $\quad ((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \neg \Big(\big(((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)\big) \vee \\
&\qquad \big(((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \vee \big(p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big)\Big) \\
&\Longleftrightarrow \neg \big(((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)\big) \wedge \\
&\qquad \neg \big(((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \wedge \neg \big(p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \\
&\Longleftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge \big(p_1 \vee (\neg p_2) \vee p_3\big) \wedge \\
&\qquad \big((\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee p_3\big)
\end{aligned}$$

此即为$((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$的一个合取范式.

据此得到如下求范式的过程。

复习

(1) 公式的等值

(2) 等值演算：
- 基本等值式.
- 等值替换.

(3) 等值意义下的标准形：范式.
- 从范式可以很容易看出其成真和成假指派。
- 每个公式都等价一个析取(合取)范式。

求范式的过程

(1) 求α的析取范式的过程

- 求出α的所有成真指派σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m。
- 对于每个σ_i，写出以σ_i为成真指派的简单合取式α_i $(1 \leq i \leq m)$。
- 则$\beta = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$即为所求。

(2) 求α的合取范式的过程 (对比(1)和例36)

- 求出α的所有成假指派σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m。
- 对于每个σ_i，写出以σ_i为成假指派的简单析取式α_i $(1 \leq i \leq m)$。
- 则$\beta = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$即为所求。

用等值演算求范式

例36 求$((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$的合取范式和析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& ((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \neg \big((\neg p_1) \vee p_2\big) \vee p_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \big((\neg\neg p_1) \wedge (\neg p_2)\big) \vee p_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \big(p_1 \wedge (\neg p_2)\big) \vee p_3 && \text{析取范式} \\
\Longleftrightarrow\ & (p_1 \vee p_3) \wedge \big((\neg p_2) \vee p_3\big) && \text{合取范式}
\end{aligned}
$$

用等值演算求范式的步骤

(1) 去掉→;

(2) 内移¬;

(3) 去掉¬¬;

(4) 用分配律整理成析取范式(合取范式)

例37

求$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的合取范式和析取范式.

解: $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \neg\left((p \vee q) \rightarrow r\right) \vee p \\
&\Longleftrightarrow \neg\left(\neg(p \vee q) \vee r\right) \vee p \\
&\Longleftrightarrow \left(\neg\neg(p \vee q) \wedge (\neg r)\right) \vee p \\
&\Longleftrightarrow \left((p \vee q) \wedge (\neg r)\right) \vee p \\
&\Longleftrightarrow \left((p \vee q) \vee p\right) \wedge \left((\neg r) \vee p\right) && \text{(合取范式)} \\
&\Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \left((\neg r) \vee p\right) && \text{(合取范式)} \\
&\Longleftrightarrow \left(p \wedge (\neg r)\right) \vee \left(q \wedge (\neg r)\right) \vee p \vee (q \wedge p) && \text{(析取范式)} \\
&\Longleftrightarrow \left(p \wedge (\neg r)\right) \vee \left(q \wedge (\neg r)\right) \vee p && \text{(析取范式)}
\end{aligned}
$$

注

(1) 范式不是唯一的。

(2) "主范式"的唯一性*。

(3) 卡诺图。

(4) $\vee$与$\wedge$的对偶。

*参见：耿素云,屈婉玲，**离散数学**,高等教育出版社，1998，p35

联结词完全集的另外证明

P中只含联结词$\neg, \vee, \wedge$ 的公式称为限制性公式.

每个n元真值函数都可由n元限制性命题表示.

证:

设f是一个n元真值函数,即$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
p_1, p_2, $\cdots$, p_n是n个命题变元.

(1) 若f是恒为0的函数, 则f可由

$$p_1 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

表示.

联结词完全集的另外证明(续)

(2) 若f不恒为0, 在f的定义域的2^n个元素中, 列出所有使f 取值为1的那些元素:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_m,\quad (1 \le i \le m)$$

对每个$\alpha_i(1 \le i \le m)$, 令α_i是由p_1, p_2, $\cdots$, p_n组成的一个简单合取式, 使得α_i 关于p_1, p_2, $\cdots$, p_n以σ_i为唯一的成真指派. 则f由限定性命题公式

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$$

表示.

作业

p.509(p.102). 23 (1)(5)(7)

25 (1)(2)(3)

26

谢 谢

一阶谓词演算

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习——命题演算

命题演算形式系统:

- 语法: 命题公式、形式公理、形式规则、形式推理
- 语义: 指派、公式的值、永真式

可靠性: 凡是推出来的都是正确的.

完全性: 凡是正确的都可以推出来.

问题的提出

命题演算不能表达所有正确的推理. 例:

所有实数的平方都是非负的.

π是一个实数.

π的平方是非负的.

如用命题演算推理形式来表示: 由p, q推出r.

— 非有效推理形式

§1 一阶谓词演算的符号化

- 需要进一步分析推理结构.

  上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间.

- 需要进一步分解简单命题.
- 简单命题的符号化.

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

个体词，谓词

例1

分析下列各命题中的个体和谓词

(1) π是无理数.

(2) 张三与李四同在计算机系.

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数).

(4) π的平方是非负的.

(5) 所有实数的平方都是非负的.

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

例1(1)

(1) π是无理数.

解:

个体: π(代表园周率)

谓词: $\cdots$是无理数, 表示“π”的性质.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: ⋯与⋯同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: …与…同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

个体: 张三

谓词: …与李四同在计算机系,

表示"张三"的性质.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: …与…同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

个体: 张三

谓词: …与李四同在计算机系,

表示"张三"的性质.

个体: 李四

谓词: 张三与…同在计算机系,

表示"李四"的性质.

例1(3)

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数）.

解:

个体: x、y、z

谓词: …与…和等于…

个体: x、z

谓词: …与y和等于…， 等

个体: y

谓词: x与…和等于z， 等

谓词可以单个个体的性质，也可以表示二个个体词之间的关系或性质，分别称为一元谓词和二元谓词.

表示n个个体间的关系或性质的谓词称为n元谓词.

例1(4)

(4) π的平方是非负的.

解:

个体: π

谓词: $\cdots$的平方是非负的

个体: π的平方

谓词: $\cdots$是非负的

"π的平方"是一个"复合"个体，需要再分解。

个体: π

函词: $\cdots$的平方 一元函词

谓词: $\cdots$是非负的

例1(5)

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解:

个体: 每一个实数

函词: $\cdots$的平方

谓词: $\cdots$是非负的

"所有"是什么?

量词: 所有

例1(6)

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解:

个体: 一个素数

谓词: $\cdots$比2^{1000}大

“有一个”是什么?

量词: 有一个

表示简单命题的新符号

- 个体: x, y, z, a, b, c, $\ldots$
- 谓词: F^n, G^n, H^n, $\ldots$ n表示元数
- 函词: f^n, g^n, h^n, $\ldots$ n表示元数
- 量词:
  - 所有: $\forall$ 全称量词
  - 有一个: $\exists$ 存在量词

例1(1)的符号化

(1) π是无理数.

解:

个体: π (代表园周率)

谓词: $\cdots$是无理数, 以F表示

则此命题可表示为$F(\pi)$.

例1(2)的符号化

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四: 分别以a, b表示

谓词: $\cdots$与$\cdots$同在计算机系: 以G表示

则此命题可表示为: $G(a,\ b)$

个体: 张三: 以a表示

谓词: $\cdots$与李四同在计算机系: 以G'表示

此命题可表示为: $G'(a)$

个体: 李四: 以b表示

谓词: 张三与$\cdots$同在计算机系: 以G''表示

此命题可表示为: $G''(b)$

例1(3)的符号化

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数）.

解:

个体: x、y、z

谓词: $\cdots$与$\cdots$和等于$\cdots$: 以R表示

符号化: $R(x,y,z)$

个体: x、z

谓词: $\cdots$与y和等于$\cdots$: 以R'表示

符号化: $R'(x,z)$

$\cdots$

个体: x、y、z

函词: $\cdots$与$\cdots$的和: 以f^2表示

谓词: $\cdots$等于$\cdots$: 以R''表示

符号化: $R''(f^2(x,y),z)$

例1(4)的符号化

(4) π的平方是非负的.

解:

个体: π的平方：以a表示

谓词: $\cdots$是非负的：以R表示

符号化: $R(a)$

个体: π

函词: $\cdots$的平方: 以f表示

谓词: $\cdots$是非负的: 以R表示

符号化: $R(f(\pi))$

例1(5)的符号化

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解:

个体:　每一个实数: 以x代表

函词:　$\cdots$的平方: 以f表示

谓词:　$\cdots$是非负的: 以R表示

量词：所有: 以$\forall$表示

符号化：$\forall x R(f(x))$

x可以代表不同的个体, 称为个体变元

相对地π等称为个体常元

例1(5)的符号化(续)

(5) 所有实数的平方都是非负的.

另解:

个体: 每一个数: 以z代表

谓词: $\cdots$是一个实数, 以R'表示

函词: $\cdots$的平方: 以f表示

谓词: $\cdots$是非负的: 以R表示

量词: 所有: 以$\forall$表示

符号化: $(\forall z)\big(R'(z) \to R(f(z))\big)$. 最清晰

个体变元x和z的取值范围不同。

个体边元的取值范围称为它的论域

例1(6)的符号化

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解:

个体:　一个素数：以y代表

谓词:　$\cdots$比2^{1000}大：以P_1表示

量词：有一个: 以$\exists$表示

符号化：$(\exists y)P_1(y)$

还可以表示为：$(\exists x)\big(P_2(x) \wedge P_1(x)\big)$，其中:

x代表某个数,

P_2表示“$\cdots$是一个素数”,

P_1同上.

表示命题的符号

- 个体变元: x, y, z, $\ldots$
- 个体常元: a, b, c, $\ldots$
- 谓词: F^n, G^n, H^n, $\ldots$
- 函数: f^n, g^n, h^n, $\ldots$
- 量词: 全称量词$\forall$, 存在量词$\exists$
- 联结词: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$

例2

将下列命题符号化.

(1) 凡是有理数皆可写成分数.

(2) 教室里有同学在说话.

(3) 对于任意x，y，都存在唯一的z，使$x+y=z$.

(4) 在我们班中，并非所有同学都能取得优秀成绩.

(5) 有一个整数大于其它每个整数.

(6) 任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，如果$|x-a| < \delta$，则$|F(x)-b| < \varepsilon$.

(7) 恰有三个互不相同的素数小于7.

例2(1)的符号化

(1) 凡是有理数皆可写成分数.

解:

$(\forall x)(Q^1(x) \to F^1(x))$

x: 数

Q^1: $\cdots$是有理数

F^1: $\cdots$可写成分数

注: 不能写成$(\forall x)(Q_1(x) \wedge F_1(x))$
也不能写成$(\forall x \in Q)F^1(x)$.

例2(2)的符号化

(2) 教室里有同学在说话.

解:

$(\exists x)(C^1(x) \wedge T^1(x))$

x: 同学

C^1: $\cdots$在教室里

T^1: $\cdots$在说话

注: 不能写成$(\exists x)(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$
也不能写成$(\exists x \in C)T^1(x)$.

例2(3)的符号化

(3) 对于任意x, y, 都存在唯一的z, 使$x+y=z$.

解:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big((x+y=z)\land (\forall u)(u=x+y\rightarrow u=z)\big).$$

注: 量词的嵌套

"存在唯一"的表示.

例2(4)的符号化

(4) 在我们班中，并非所有同学都能取得优秀成绩.

解:

$\neg(\forall x)\big(C(x) \to E(x)\big)$

x: 同学

C: $\cdots$在班级里

E: $\cdots$能取得优秀成绩

注: $C(x) \to E(x) \Longleftrightarrow \neg C(x) \vee E(x) \Longleftrightarrow \neg\big(C(x) \wedge \neg E(x)\big)$,

从而此命题可表示为: $\neg(\forall x)\neg\big(C(x) \wedge \neg E(x)\big)$.

另一方面，此命题也可表为$(\exists x)\big(C(x) \wedge \neg E(x)\big)$,

即: “$\neg(\forall x)\neg$” 与 “$\exists x$” 有相同的意义

例2(5)的符号化

(5) 有一个整数大于其它每个整数.

解:

$$(\exists x)\big(Z(x) \wedge (\forall y)(((Z(y) \wedge \neg(y = x)) \rightarrow x > y)\big)$$

x,y: 数

Z: ⋯是整数

注: 此符号串中, "$=$" 和 "$>$" 是什么类型的符号?

例2(6)的符号化

(6) 任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，如果$|x - a| < \delta$，则$|F(x) - b| < \varepsilon$.

解:

$$\forall\varepsilon\Big(\varepsilon > 0 \to (\exists\delta)\big(\delta > 0 \wedge (|x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)\big)\Big)$$

注： 此符号串中有哪些谓词符号?

例2(7)的符号化

(7) 恰有三个互不相同的素数小于7.

解:

$$
\begin{aligned}
&(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\Big(\\
&\quad (x_1 < 7 \wedge x_2 < 7 \wedge x_3 < 7) \wedge \\
&\quad (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3)) \wedge \\
&\quad (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3)) \wedge \\
&\quad (\forall y)\Big((y < 7 \wedge P(y)) \rightarrow \\
&\qquad\qquad (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

注: 两个量词可以表示任意确定个数的个体。

应注意的问题

- 谓词(函数)的元数是固定的.
- 谓词(函数)中的变元是有顺序性的.
  例如: $F(x,\ y)$与$F(y,\ x)$不具有相同的含义.
- 量词也有顺序性.
  例如: $(\forall x)(\exists y)(x < y)$与$(\exists y)(\forall x)(x < y)$
  并不表示同一含义.
- 谓词公式真假值判别的困难性,

本章开头推理的正确表示

$$
\begin{array}{ll}
\text{因为} & (\forall x)(G_2^1(x) \rightarrow G_1^1(f(x))) \\
 & G_2^1(\pi) \\
\hline
\text{所以} & G_1^1(f(\pi))
\end{array}
$$

其中:

x代表 “数” .

f代表” $\cdots$ 的平方” .

G_1^1代表 “$\cdots$ 是非负实数” .

G_2^1代表 “$\cdots$ 是实数” .

作业

p.558(p.183)

1 (1), (2), (4), (6)–(9)

谢　谢

一阶语言

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

一阶谓词演算的符号化:

- 个体变元: x, y, z, $\ldots$
- 个体常元: a, b, c, $\ldots$
- 谓词: F^n, G^n, H^n, $\ldots$
- 函数: f^n, g^n, h^n, $\ldots$
- 量词: 全称量词$\forall$, 存在量词$\exists$
- 联结词: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$

用这些符号可以更深入描述命题的结构。

怎么对这些符号进行推理?

下面直接建立推理的形式系统。

§2 一阶语言

一阶语言是将要介绍的谓词演算系统形式语言。

- 符号库 $\begin{cases} \text{非逻辑符号} \\ \text{逻辑符号} \end{cases}$

- 谓词公式 $\begin{cases} \text{项} \\ \text{公式} \end{cases}$

非逻辑符号

可能包括下列符号:

- 个体常元符号:

  $c,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n, \ldots$

- 谓词符号:

  $F^n,\ G^n,\ P^n,\ Q^n,\ R^n$ 等

  — $n(n \in \mathbb{N}, n > 0)$表示此谓词符号的元数

- 函数符号:

  $f^m,\ g^m,\ h^m$ 等

  — $m(m \in \mathbb{N}, n > 0)$表示此函数符号的元数

由一些非逻辑符号作为元素组成的集合常记为$\mathfrak{L}$.

逻辑符号

包括下列符号:

- 个体变元符号:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots$$

- 联结词符号:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 量词符号:

$$\forall,\ \exists$$

- 辅助符号:

$$),\ \ ',\ \ ,\ \ ($$

逻辑符号与非逻辑符号

- 非逻辑符号更象是所描述的特定对象中的符号.
  而逻辑符号是逻辑系统中的符号.
  故此得名
- 在描述特定对象时，并不需要所有非逻辑符号.
  但可能用到所有逻辑符号.
  一阶语言与符号库指定的非逻辑符号集$\mathfrak{L}$有关,
  称为$\mathfrak{L}$生成的一阶语言

项

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言的" 项" 归纳定义如下:

1. 个体变元符号和$\mathfrak{L}$中的个体常元符号都是项;
2. 若f^m是$\mathfrak{L}$中一个m元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_m$是$\mathfrak{L}$中项，则$f^m(t_1, t_2, \cdots, t_m)$是$\mathfrak{L}$中项;
3. 每个项都是有限次应用(1)和(2)得到的.

" 项" 相当于" 复合个体" .

公式

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言的"公式"归纳定义如下:

(1) 如果F^n是$\mathfrak{L}$中的一个n元谓词符号, $t_1, t_2, \cdots, t_n$是$\mathfrak{L}$中项, 则$F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是$\mathfrak{L}$中公式,

— 称为原子公式

(2) 若α是公式, 则$(\neg\alpha)$是公式;

(3) 若α, β是公式, 则$(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\to\beta)$, $(\alpha\leftrightarrow\beta)$是$\mathfrak{L}$中公式;

(4) 若α是公式, x是个体变元符号, 则$(\forall x)\alpha$, $(\exists x)\alpha$也是公式;

(5) 每个公式都是有限次使用(1)–(4)得到的.

一些注记

注1: 与命题演算的形式语言相比，一阶语言中没有命题符号，代之的是原子公式.

注2: 所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号，但所含的非逻辑符号不一定相同.

注3: 在定义中没有要求个体变元x一定要在α中出现：$(\forall x_1)F^2(x_1, x_2)$和$(\forall x_3)F^2(x_1, x_2)$都是公式.

注4: 总假设：$\mathfrak{L}$中至少有一个谓词符号.
否则$\mathfrak{L}$生成的一阶语言中没有公式。

括号省略规则

(i) 省略公式最外层的括号;

(ii) 联结词符号"$\neg$"的优先级高于其它的四个联结词,
可以去掉$(\neg\alpha)$中的外层括号;

(iii) $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_{n-1} \to \alpha_n$表示
$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_{n-1} \to \alpha_n) \cdots))$;
对$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$也类似规定.

(iv) $\forall x$, $\exists x$的优先级高于所有联结词.
将$(\forall x)\alpha$、$(\exists x)\alpha$分别记为 $\forall x\alpha$、$\exists x\alpha$.

(v) $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\alpha$简记为$\forall x_1 \cdots x_n\alpha$;
$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)\alpha$简记为$\exists x_1 \cdots x_n\alpha$.

其它约定

(i) 常将" $\mathfrak{L}$生成的一阶语言中的" 等字省略。

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言中的公式、项、符号等分别称为 $\mathfrak{L}$的一阶公式、项、符号等.

(ii) 常省略函数符号和谓词符号右上角的元数标记。

项和公式

- 项的作用是描述"复合"个体,
  公式的作用是描述命题。

- "项"相当于"词组",它们不表达完整的判断;
  "公式"代表完整的句子,表达判断。

  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示f作用到个体$x_1, \ldots, x_n$得到的个体

  $F^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示$x_1, x_2, \cdots, x_n$是否具有关系$F^n$(或性质$F^n$).

例3

用一阶语言描述群的定义

解:

令$\mathfrak{L} = \{f^2,\ E^2,\ c\}$, 其中:

f^2代表群的乘法运算,是一个二元函数符号;

E^2描述元素的相等关系, 是一个二元谓词符号;

c代表群的单位元, 是一个常元符号.

则群公理可表示为由$\mathfrak{L}$中的如下三个公式:

(1) $\forall x_1 x_2 x_3 E\Big(f(f(x_1,\ x_2),\ x_3),\ f(x_1,\ f(x_2,\ x_3))\Big)$

(2) $\forall x_0 (E(f(x_0,\ c),\ x_0) \wedge E(f(c,\ x_0),\ x_0))$

(3) $\forall x_1 \exists x_2 (E(f(x_1,\ x_2),\ c) \wedge E(f(x_2,\ x_1),\ c))$

用一阶语言描述等价关系的定义

解:

令$\mathfrak{L} = \{E^2\}$, 其中:

E^2描述元素的等价关系, 是一个二元谓词符号;

则等价关系的定义可表示为由$\mathfrak{L}$中的如下三个公式:

(1) $(\forall x)E(x, x)$;

(2) $(\forall xy)\big(E(x,\ y) \to E(y,\ x)\big)$;

(3) $(\forall xyz)\big((E(x,\ y) \wedge E(y,\ z)) \to E(x,\ z)\big)$.

辖域

定义3:

称公式$(\forall x)\alpha$中的α为量词$(\forall x)$的辖域;

称公式$(\exists x)\alpha$中的α为量词$(\exists x)$的辖域.

例:

在$\forall x_1 \forall x_2(\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$中,

$(\forall x_1)$的辖域为$\forall x_2(\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$,

$(\forall x_2)$的辖域为$(\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$.

$(\forall x_3)$的辖域为$F(x_1, x_2)$.

约束出现与自由出现

定义4:

变元符号x在公式α中的某处出现称为是约束出现,
如果

- 此处出现是在$(\forall x)$或$(\exists x)$的辖域内，或者
- 是$(\forall x)$中的x，或者
- 是$(\exists x)$中的x.

若x在α中的某处出现不是约束出现，则称x的此处出现为自由出现.

例4

在下列公式中，指出变元的各处出现是自由出现还是约束出现.

(1) $\forall x_1 \forall x_2 (F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_3))$

(2) $\forall x_1 F(x_1) \rightarrow F(x_1)$

(3) $\forall x_1 F(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 F(x_2)$

例4的解

解:

(1) $$\forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1}\ \forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_2}\ (F(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_2}) \to F(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{自由}}}{x_3}))$$

(2) $$\forall x_1\ F(x_1) \to F(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{自由}}}{x_1})$$

约束

(3) $$\forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1}\ (F(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{自由}}}{x_2})) \to \forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{约束}}}{x_1}\ F(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{自由}}}{x_2})$$

注: 同一个变元在同一个公式中可能既有自由出现, 又有约束出现.

约束变元与自由变元

定义5:

设个体变元符号x在公式α中出现.

- 如果x在α中的所有出现都是约束出现，称x为α的约束变元;
- 如果x不是α的约束变元，则称x为α的自由变元。

易知:

x是α的自由变元$\Leftrightarrow$$x$在$\alpha$中有某处出现是自由出现.

约束变元与自由变元的例

例4中:

(1)中的x_1, x_2为约束变元，x_3是自由变元;

(2)中的x_1是自由变元;

(3)中的x_1是约束变元，x_2是自由变元.

约定:

以$\alpha(x_1, \ldots, x_n)$表示公式α的自由变元都在$x_1, \ldots, x_n$中.

约束变元与自由变元的差别

约束变元与自由变元的差别很大.

令$\mathfrak{L} = \{E^2, c\}$, 其中:

E代表二元谓词"$\cdots = \cdots$", c代表一个常量.

考虑$\mathfrak{L}$的公式: $\forall x_1 E(x_1, c)$与$\forall x_2 E(x_1, c)$.

$\forall x_1 E(x_1, c)$为真$\Leftrightarrow$个体域中只能有一个元素c.

故$\forall x_1 E(x_1, c)$的真假与x_1取值无关.

但$\forall x_2 E(x_1, c)$的真假与x_1取值有关.

约束变元与自由变元的关系类似于程序设计语言的局部变量与全局变量间的关系: *由内到外*。

t对x在α中可代入

考察将公式$\exists y(y > x)$中的x换为项y前后的真假值.

- 公式$\exists y(y > x)$是可为真的.
- 但将$\exists y(y > x)$中的x换为y后就不能为真了.
  即$\exists y(y > y)$不能为真.

问: 将x换为什么样的项t,α的真假值不会改变?

$$\exists y(y > x) \leadsto \exists y(y > t)$$

t对x在α中可代入的定义

定义6:

设α是$\mathfrak{L}$的公式，t是$\mathfrak{L}$的项，x是$\mathfrak{L}$的变元符号，如果对t中出现的每个变元符号y_i，α中每处自由出现的x不在$(\forall y_i)$或$(\exists y_i)$的辖域内，则称t对x在α中可代入,或称t对x在α中自由.

y对x在$\exists y(y > x)$中不可代入.

z对x在$\exists y(y > x)$中不可代入.

检查t对x在α中是否自由的步骤

1. 找出t中包含的所有变元$y_1, y_2, \cdots, y_n$;
2. 找出α中所有自由出现的x;
3. 对x在α中的每处自由出现,

   for $i = 1$ to n step 1 do
     检查x是否出现在$(\forall y_i)$或$(\exists y_i)$的辖域中,
     若是, 则t对x在α中不自由.
   endfor

4. t对x在α中自由

例5

设一阶公式α为 $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F_2^2(x_3, x_1)$,

问:

(1) x_2及$f_1^2(x_4, x_5)$对x_1在α中是否自由?

(2) $f_2^2(x_1, x_4)$及$f_3^2(x_2, x_3)$对x_2在α中是否自由?

例5的解

α为 $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F_2^2(x_3, x_1)$

答:

(1) x_2对x_1在α中不自由,

在α中，有自由出现的x_2出现在x_1的辖域内.

$f_1^2(x_4, x_5)$对x_1在α中自由.

(2) $f_2^2(x_1, x_4)$对x_2在α中不自由;

$f_3^2(x_2, x_3)$对x_2在α中自由.

$\boxed{\alpha(x/t)}$

$\alpha(x/t)$是将α中每个**自由出现**的x都换为项t后得到的公式（不论t对x在α中是否自由）.

$\alpha(x/t)$称为α的一个例式.

例5中:

$$\alpha(x_2/x_1) = \forall x_1 F_1^2(x_1,\ x_1) \to \forall x_2 F_2^2(x_3,\ x_1).$$

$$\alpha(x_1/f_1^2(x_4,\ x_5))$$
$$= \forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F_2^2(x_3, f_1^2(x_4,\ x_5)).$$

用$\alpha(x/t)$判断t对x在α中是否自由

要看t对x在公式α中是否自由，只要在$\alpha(x/t)$中看:

在新代入t的地方，t中的每个变元的各个出现是否有约束出现，

若有，则t的对x在α中不自由，否则自由.

这也是"t对x在α中可代入"这个名称的由来.

简单性质

(1) x对x在α中自由.

(2) 若x不在α中自由出现，则t对x在α中自由.

闭公式

定义7

(1) 若$\mathfrak{L}$的项t中不含任何个体变元符号，则称t为$\mathfrak{L}$的一个闭项;

(2) 若$\mathfrak{L}$的公式α中不含任何自由变元符号，则称α为$\mathfrak{L}$的一个闭公式.

作业

p.558(p.183)

2

3 (2), (3)

4 (2), (4)

谢　谢

一阶谓词演算自然推演系统$N_{\mathfrak{L}}$

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言：

- 符号库：
  - 个体变元
  - 个体常元
  - 谓词
  - 函数
  - 量词
  - 联结词
  - 辅助符号
- 公式：
  - 项
  - 公式
  - 自由与约束

推演系统$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的构成

给定非逻辑符号集$\mathfrak{L}$, $\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的构成如下:

- 形式语言:
  - $\mathfrak{L}$生成的一阶语言
- 形式推理:
  - 形式公理: $\varnothing$
  - 形式规则: 15条

    (1)–(10) 如N

增加前提律

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \alpha}{\text{则}\Gamma,\ \beta \vdash \alpha} \qquad (+)$$

思考题:

为什么把(+)作为规则，而不是象在命题演算那样作为原定理?

$\forall$消去律

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \forall x\alpha,\quad \text{且}t\text{对}x\text{在}\alpha\text{中自由，}}{\text{则}\Gamma \vdash \alpha(x/t)} \qquad (\forall-)$$

直观含义：

若Γ能保证对任意的x，$\alpha(x)$都成立，

则Γ也能保证当α中的x"取值"为t的时候也成立。

注意:条件"t对x在α中自由"不可少。

$\forall$引入律

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \alpha,\quad \text{且}x\text{不在}\Gamma\text{的任何公式中自由出现}}{\text{则}\Gamma \vdash \forall x\alpha} \qquad (\forall+)$$

直观含义:

若$\Gamma(x)$能保证$\alpha(x)$成立，但Γ没有对x作任何限制，

则Γ也能保证对任意的x，$\alpha(x)$都成立。

注意:条件" x不在Γ的任何公式中自由出现" 不可少.

∃消去律

$$\frac{\text{若}\Gamma, \alpha \vdash \beta,\quad \text{且}x\text{不在}\Gamma \cup \{\beta\}\text{的任何公式中自由出现}}{\text{则}\Gamma,\ \exists x\alpha \vdash \beta} \qquad (\exists-)$$

直观含义:

若Γ和$\alpha(x)$一起才能保证$\beta(x)$成立,

但Γ和β的性质与x无关

则Γ和$\exists x\alpha(x)$也能保证$\beta(x)$也成立。

思考题: 条件"α成立"和"$\exists x\alpha$成立"哪个更强?

注意:条件"x不在$\Gamma \cup \{\beta\}$的任何公式中自由出现"不可少.

$\boxed{\exists\text{引入律}}$

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \alpha(x/t),\quad \text{且}t\text{对}x\text{在}\alpha\text{中自由},}{\text{则}\Gamma \vdash \exists x\alpha} \qquad (\exists+)$$

直观含义:

若Γ能保证当α中的x"取值"为t的时候成立,

则Γ一定能保证有一个x使α成立.

(t是使得$\exists x\alpha$成立的"证据".)

注意:条件"t对x在α中自由"不可少。

两个特例

注意到：$\alpha(x/x) = \alpha$，且x对x在α中自由.

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \forall x\alpha,}{\text{则}\Gamma \vdash \alpha} \qquad ((\forall-)\text{中取}t\text{为}x)$$

$$\frac{\text{若}\Gamma \vdash \alpha,}{\text{则}\Gamma \vdash (\exists x)\alpha} \qquad ((\exists+)\text{中取}t\text{为}x)$$

$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的形式证明序列

若有限序列

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1,\ \Gamma_2 \vdash \alpha_2,\ \cdots,\ \Gamma_n \vdash \alpha_n$$

满足:

(1) 每个$\Gamma_i (i : 1 \leq i \leq n)$都是$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的有限公式集。

(2) 每个$\Gamma_i \vdash \alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 都是对此序列中它之前的若干个$\Gamma_j \vdash \alpha_j$ $(1 \leq j < i)$ 应用$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的形式规则得到的.

则称此序列为$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$中的一个(形式)证明序列.

此时也称 α_n可由Γ_n在$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$中形式推出,

记为$\Gamma_n \vdash_{\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_n$, 或$\Gamma_n \vdash \alpha_n$.

注：和**N**中证明序列的定义几乎一样。

N的定理也是$N_{\mathfrak{L}}$的的定理

定理1

设Σ与α分别为**N**中有限公式集与公式，在$\Sigma \cup \{\alpha\}$的公式中出现的命题变元符号都在p_0，p_1，$\cdots$，p_n中，α_0，α_1，$\cdots$，α_n为$\mathfrak{L}$的公式，以α_0，α_1，$\cdots$，α_n同时分别替换$\Sigma \cup \{\alpha\}$的公式中的p_0，p_1，$\cdots$，p_n，得到$\mathfrak{L}$中的公式集Σ'与公式α'.

若$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha$，则$\Sigma' \vdash_{\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha'$.

定理1的证明

证：因$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha$，故存在**N**中证明序列：

$$\Sigma_1 \vdash \beta_1,\ \Sigma_2 \vdash \beta_2,\ \cdots,\ \Sigma_k \vdash \beta_k \quad (= \Sigma \vdash \alpha)$$

设$\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_k \cup \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$的公式中出现的命题变元符号都在$p_0, \cdots, p_n, p_{n+1}, \cdots, p_{n+m}$中.

任选定$\mathfrak{L}$中的m个公式$\alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{n+m}$，将

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_k,\ \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$$

的公式中出现的 $p_0, \cdots, p_n, p_{n+1}, \cdots, p_{n+m}$同时分别替换为 $\alpha_0, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{n+m}$ 得到 $\Sigma_1', \Sigma_2', \cdots, \Sigma_k',\ \beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_k'$.

定理1的证明(续)

则

$$\Sigma_1' \vdash \beta_1',\ \Sigma_2' \vdash \beta_2',\ \cdots,\ \Sigma_k' \vdash \beta_K'$$

为$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$中的一个证明.
(因为**N**的形式规则在写法上同$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的形式规则相同.
也可归纳法进行严格证明.)

又$\Sigma_k' = \Sigma'$, $\beta_k' = \alpha'$, 故$\Sigma' \vdash_{\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha'$.

一个推论

定理2 对于$\mathfrak{L}$的有限公式集Γ与公式$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

1. 若$\Gamma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,
   且$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$,
   则$\Gamma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$.

2. 若$\alpha_1 \to \alpha_2 \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_3 \to \alpha_4$,
   且$\alpha_1 \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_2$,
   则$\alpha_3 \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_4$.

其证明和命题情形一样。

例6

在$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$中写出下列公式的证明序列:

1. $\forall x(\alpha\to\beta) \vdash\dashv \alpha\to\forall x\beta$, 若$x$不在$\alpha$中自由出现.
2. $\forall x(\alpha\to\beta) \vdash\dashv \exists x\alpha\to\beta$, 若$x$不在$\beta$中自由出现.
3. $\forall x(\alpha\to\beta) \vdash \exists x\alpha\to\exists x\beta$,
4. $\forall x(\alpha\to\beta) \vdash \forall x\alpha\to\forall x\beta$,

例6(1)($\vdash$)的证明

1. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \forall x\beta$, 若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证: ($\vdash$)

(1) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ $\quad(\in)$

(2) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ $\quad(\forall -)$

(3) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha$ $\quad(\in)$

(4) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \beta$ $\quad(\to -)$

(5) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \forall x\beta$

(x不在前提中自由出现) $\quad(\forall +)$

(6) $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \forall x\beta$ $\quad(\to +)$

例6(1)($\dashv$)的证明

1. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \forall x\beta$, 若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证: ($\dashv$)

(1) $\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha \vdash \alpha \to \forall x\beta$ ($\in$)

(2) $\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha \vdash \alpha$ ($\in$)

(3) $\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha \vdash \forall x\beta$ ($\to -$)

(4) $\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha \vdash \beta$ ($\forall -$)

(5) $\alpha \to \forall x\beta \vdash \alpha \to \beta$ ($\to +$)

(6) $\alpha \to \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$

(x不在前提中自由出现) ($\forall +$)

例6(2)($\vdash$)的证明

2. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x\alpha \to \beta$, 若$x$不在$\beta$中自由出现.

证: ($\dashv$)

(1) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ ($\in$)

(2) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ ($\forall -$)

(3) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha$ ($\in$)

(4) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \beta$ ($\to -$)

(5) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \exists x\alpha \vdash \beta$

(x不在$\forall x(\alpha \to \beta)$及$\beta$中自由出现) ($\exists -$)

(6) $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\alpha \to \beta$ ($\to +$)

例6(1)($\dashv$)的证明

2. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x\alpha \to \beta$,　若$x$不在$\beta$中自由出现.

证:　($\dashv$)

(1)　$\exists x\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha$　　($\in$)

(2)　$\exists x\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \exists x\alpha$　　($\exists +$)

(3)　$\exists x\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \exists x\alpha \to \beta$　　($\in$)

(4)　$\exists x\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$　　($\to -$)

(5)　$\exists x\alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta$　　($\to +$)

(6)　$\exists x\alpha \to \beta \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$

(x不在前提中自由出现)　　($\forall +$)

例6(3)的证明

3. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$

证: (1) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ $(\in)$

(2) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\forall -)$

(3) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(4) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \beta$ $(\to -)$

(5) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \exists x\beta$ $(\exists +)$

(6) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \exists x\alpha \vdash \exists x\beta$ $(\exists -)$

(7) $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$ $(\to +)$

例6(4)的证明

4. $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\alpha \to \forall x\beta$

证: (1) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ $(\in)$

(2) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\forall -)$

(3) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \forall\alpha$ $(\in)$

(4) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \alpha$ $(\forall -)$

(5) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \beta$ $(\to -)$

(6) $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha \vdash \forall x\beta$ $(\forall +)$

(7) $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\alpha \to \forall x\beta$ $(\to +)$

作业

p.559(p.184)

14. (2),(4),(5)

谢　谢

复习

$N_{\mathfrak{L}}$与N的比较:

- 符号库: $N_{\mathfrak{L}}$比N多 $\begin{cases} \text{非逻辑符号} \\ \text{个体变元} + \text{量词} \end{cases}$
- 公式: $N_{\mathfrak{L}}$比N多 $\begin{cases} \text{项(不是公式)} \\ \text{原子公式(相当于N的命题变元)} \\ \text{量词公式(自由与约束)} \end{cases}$
- 推理规则: $N_{\mathfrak{L}}$比N多 $(\forall+)$, $(\forall-)$, $(\exists+)$, $(\exists-)$
- 证明序列: 字面上两者的定义几乎一样

N的证明序列"也是"$N_{\mathfrak{L}}$的证明序列 (关于联结词的推理是一样的.)

$N_{\mathfrak{L}}$侧重于关于量词的推理.

思考题: N的元定理都在$N_{\mathfrak{L}}$中成立吗?

例7

若y对x在α中自由，且y不在α中自由出现，则

1.$\exists x\alpha \vdash\dashv \exists y\alpha(x/y)$.　　　2.$\forall x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y)$.

分析:

y对x在α中自由，且y不在α中自由出现，

则$\alpha(x/y)(y/x) = \alpha$.

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & \text{自由} & & \text{约束} & & \text{约束} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\alpha: & (\cdots & x & \cdots & x & \cdots & y & \cdots) \\
\alpha(x/y): & (\cdots & y & \cdots & x & \cdots & y & \cdots) \\
\alpha(x/y)(y/x): & (\cdots & x & \cdots & x & \cdots & y & \cdots)
\end{array}
$$

例7的证明

若y对x在α中自由，且y不在α中自由出现，则

1.$\exists x\alpha \vdash\dashv \exists y\alpha(x/y)$. 2.$\forall x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y)$.

证:只证1.

($\vdash$)

(1) $\alpha \vdash \alpha$ ($\in$)

(2) $\alpha \vdash \alpha(x/y)(y/x)$

(3) $\alpha \vdash \exists y\alpha(x/y)$

(x对y在$\alpha(x/y)$中自由) ($\exists+$)

(4) $\exists x\alpha \vdash \exists y\alpha(x/y)$

(x在$\exists y\alpha(x/y)$中无自由出现) ($\exists-$)

例7的证明(续)

若y对x在α中自由，且y不在α中自由出现，则

1.$\exists x\alpha \vdash\dashv \exists y\alpha(x/y)$. 2.$\forall x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y)$.

证：只证1.

($\dashv$)

(1) $\exists y\alpha(x/y) \vdash \exists x(\alpha(x/y)(y/x))$ ($\vdash$)

(2) $\exists y\alpha(x/y) \vdash \exists x\alpha$

思考题：如果该例中的任何一个条件不成立，结论会如何？

例8

证明: $\forall xy\alpha \vdash \forall yx\alpha$

证:

(1)	$\forall xy\alpha \vdash \forall xy\alpha$	$(\in)$
(2)	$\forall xy\alpha \vdash \forall y\alpha$	$(\forall -)$
(3)	$\forall y\alpha \vdash \alpha$	$(\forall -)$
(4)	$\forall xy\alpha \vdash \alpha$	(Tr)
(5)	$\forall xy\alpha \vdash \forall x\alpha$	$(\forall +)$
(6)	$\forall xy\alpha \vdash \forall y\forall x\alpha$	$(\forall +)$

例9

证明: 1. $\forall x\alpha \vdash\dashv \neg\exists x\neg\alpha$　　　　2. $\exists x\alpha \vdash\dashv \neg\forall x\neg\alpha$

证: 只证1.

$(\dashv)$

(1) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$　　$(\in)$

(2) $\neg\alpha \vdash \exists x\neg\alpha$　　$(\exists+)$

(3) $\neg\alpha \rightarrow \exists x\neg\alpha \vdash \neg\exists x\neg\alpha \rightarrow \alpha$　　(定理1)

(4) $\neg\exists x\neg\alpha \vdash \alpha$　　(定理2(2))

(5) $\neg\exists x\neg\alpha \vdash \forall x\alpha$　　$(\forall+)$

例9(续)

证明：1. $\forall x\alpha \vdash\dashv \neg\exists x\neg\alpha$ 　　2. $\exists x\alpha \vdash\dashv \neg\forall x\neg\alpha$

证：再证1($\vdash$).

($\vdash$)

(1) $\forall x\alpha \vdash \forall x\alpha$ 　　($\in$)

(2) $\forall x\alpha \vdash \alpha$ 　　($\forall -$)

(3) $\neg\alpha \vdash \neg\forall x\alpha$ 　　(定理2(2))

(4) $\exists x\neg\alpha \vdash \neg\forall x\alpha$ 　　($\exists -$)

(5) $\forall x\alpha \vdash \neg\exists x\neg\alpha$ 　　(定理2(2))

例10

证明:

1. $\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x \beta$ 若x不在α中自由出现.
2. $\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x \alpha \to \beta$ 若x不在β中自由出现.

例10(1)($\vdash$)的证明

1.$\exists x(\alpha\to\beta) \vdash\dashv \alpha\to\exists x\beta$　若x不在α中自由出现.

证: ($\vdash$)

(1) $\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\alpha$ ($\in$)

(2) $\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\alpha\to\beta$ ($\in$)

(3) $\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\beta$ ($\to -$)

(4) $\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\exists x\beta$ ($\exists+$)

(5) $\alpha\to\beta\vdash\alpha\to\exists x\beta$ ($\to +$)

(6) $\exists x(\alpha\to\beta)\vdash\alpha\to\exists x\beta$

(x不在$\alpha\to\exists x\beta$中自由出现) ($\exists-$)

例10(1)($\dashv$)的证明

1.$\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x\beta$　若x不在α中自由出现.

证：($\dashv$)

(1)	$\neg \forall x \neg (\alpha \to \beta) \vdash \exists x(\alpha \to \beta)$	(例9)
(2)	$\neg \exists x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x \neg (\alpha \to \beta)$	(定理2)
(3)	$\neg \exists x(\alpha \to \beta) \vdash \neg (\alpha \to \beta)$	$(\forall -)(2)$
(4)	$\beta \vdash \alpha \to \beta$	(定理1)
(5)	$\neg (\alpha \to \beta) \vdash \neg \beta$	(定理2)
(6)	$\neg \alpha \vdash \alpha \to \beta$	(定理1)
(7)	$\neg (\alpha \to \beta) \vdash \alpha$	(定理2)
(8)	$\neg \exists x(\alpha \to \beta) \vdash \neg \beta,\ \alpha$	$(Tr)(3,5,7)$
(9)	$\neg \exists x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x \neg \beta$	$(\forall +)(8)$

例10(1)($\dashv$)的证明(续1)

1.$\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x\beta$ 若x不在α中自由出现.

续证:

$(10)\ \alpha \to \exists x\beta, \neg\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \alpha$ $(+)(8)$

$(11)\ \alpha \to \exists x\beta, \neg\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \exists x\beta$ $(\in)$

$(12)\ \alpha \to \exists x\beta, \neg\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\beta$ $(\to -)(10,11)$

$(13)\ \alpha \to \exists x\beta, \neg\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\neg\beta$ $(+)(9)$

$(14)\ \exists x\beta \vdash \neg\forall x\neg\beta$ (例9)

$(15)\ \forall x\neg\beta \vdash \neg\exists x\beta$ (定理2)

$(16)\ \alpha \to \exists x\beta, \neg\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \neg\exists x\beta$ (Tr)(13,15)

$(17)\ \alpha \to \exists x\beta \vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ $(\neg -)(12,16)$

例10(1)($\dashv$)的证明(续2)

1.$\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x\beta$　若x不在α中自由出现.

另续证:

(10) $\exists x\beta \vdash \neg\forall x\neg\beta$ (例9)

(11) $\forall x\neg\beta \vdash \neg\exists x\beta$ (定理2)

(12) $\neg\exists x(\alpha\to\beta) \vdash \neg\exists x\beta$ $(Tr)(9,11)$

(13) $\neg\exists x(\alpha\to\beta) \vdash \alpha\wedge\neg\exists x\beta$ $(\wedge+)(8,12)$

(14) $\alpha\wedge\neg\exists x\beta \vdash \neg(\alpha\to\exists x\beta)$ (定理1)

(15) $\neg\exists x(\alpha\to\beta) \vdash \neg(\alpha\to\exists x\beta)$ $(Tr)(13,14)$

(16) $\alpha\to\exists x\beta \vdash \exists x(\alpha\to\beta)$ (定理2)

注：该方向没用到条件"x不在α中自由出现"

例10(2)($\vdash$)的证明

2. $\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x\alpha \to \beta$ 若x不在β中自由出现.

证: ($\vdash$)

(1) $\alpha \to \beta,\ \forall x\alpha \vdash \forall x\alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \to \beta,\ \forall x\alpha \vdash \alpha$ $(\forall -)$

(3) $\alpha \to \beta,\ \forall x\alpha \vdash \alpha \to \beta$ $(\in)$

(4) $\alpha \to \beta,\ \forall x\alpha \vdash \beta$ $(\to -)$

(5) $\alpha \to \beta \vdash \forall x\alpha \to \beta$ $(\to +)$

(6) $\exists x(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\alpha \to \beta$

(x不在$\forall x\alpha \to \beta$中自由出现) $(\exists -)$

例10(2)($\dashv$)的证明

2. $\exists x(\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x\alpha \to \beta$ 若x不在β中自由出现.

证: ($\dashv$)

(1) $\forall x\neg(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\neg(\alpha \to \beta)$ ($\in$)

(2) $\forall x\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ ($\forall -$)(1)

(3) $\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha \wedge \neg\beta$ (定理1)

(4) $\alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha, \ \neg\beta$ (定理1)

(5) $\forall x\neg(\alpha \to \beta) \vdash \alpha, \ \neg\beta$ (Tr)(2, 3, 4)

(6) $\forall x\neg(\alpha \to \beta) \vdash \forall x\alpha$ ($\forall +$)(5)

(7) $\forall x\alpha, \ \neg\beta \vdash \forall x\alpha \wedge \neg\beta$ (定理1)

例10(2)($\dashv$)的证明(续)

1.$\exists x(\alpha \rightarrow \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \exists x\beta$　　若x不在α中自由出现.

续证:

(8) $\forall x\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\forall x\alpha \rightarrow \beta)$　　(定理1)

(9) $\forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg(\forall x\alpha \rightarrow \beta)$　　(Tr)(5,6,7,8)

(10) $\forall x\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta)$　　(定理2)

(11) $\neg\forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$　　(例9)

(12) $\forall x\alpha \rightarrow \beta \vdash \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$　　$(Tr)(10, 11)$

注：该方向也没用到条件"x不在α中自由出现"

例11

证明:

1. $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$

2. $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$

例11(1)的证明

1. $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta)\vdash\forall x\alpha\leftrightarrow\forall x\beta$

证:

(1) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta)$	$(\in)$
(2) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$	$(\forall-)(1)$
(3) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\forall x\alpha$	$(\in)$
(4) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\alpha$	$(\forall-)(3)$
(5) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\beta$	$(\leftrightarrow -)(2,4)$
(6) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\alpha\vdash\forall x\beta$	$(\forall+)(5)$
(7) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \forall x\beta\vdash\forall x\alpha$	(同(6))
(8) $\forall x(\alpha\leftrightarrow\beta)\vdash\forall x\alpha\leftrightarrow\forall x\beta$	$(\leftrightarrow +)(6,7)$

例11(1)的证明

2. $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$

证:

$(1)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \alpha \vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta)$ $(\in)$

$(2)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ $(\forall -)(1)$

$(3)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

$(4)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \alpha \vdash \beta$ $(\leftrightarrow -)(2,3)$

$(5)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \alpha \vdash \exists x\beta$ $(\exists +)(4)$

$(6)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \exists x\alpha \vdash \exists x\beta$ $(\exists -)(5)$

$(7)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta),\ \exists x\beta \vdash \exists x\alpha$ (同(6))

$(8)\ \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$ $(\leftrightarrow +)(6,7)$

例12

证明：若x不在α中自由出现，则

1. $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \wedge \beta)$

2. $\alpha \wedge \exists x\beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \wedge \beta)$

3. $\alpha \vee \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \vee \beta)$

4. $\alpha \vee \exists x\beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \vee \beta)$

只证明1和3.

例12(1)($\vdash$)的证明

1. $\alpha \wedge \forall x\beta \dashv\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta)$，若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证：($\vdash$)

(1) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \alpha \wedge \forall x\beta$　　($\in$)

(2) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \alpha$　　($\wedge-$)(1)

(3) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \forall x\beta$　　($\wedge-$)(1)

(4) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \beta$　　($\forall-$)(3)

(5) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \alpha \wedge \beta$　　($\wedge+$)(2, 4)

(6) $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \wedge \beta)$

(x不在$\alpha \wedge \forall x\beta$中自由出现)　　($\forall+$)(5)

例12(1)($\dashv$)的证明

1. $\alpha \wedge \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \wedge \beta)$, 若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证: ($\dashv$)

(1) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \forall x(\alpha \wedge \beta)$ $(\in)$

(2) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \beta$ $(\forall -)(1)$

(3) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$ $(\wedge -)(2)$

(4) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$ $(\wedge -)(2)$

(5) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \forall x\beta$ $(\forall +)(4)$

(6) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \forall x\beta$ $(\wedge +)(3,5)$

注: 没有用到条件"x不在α中自由出现".

例12(3)($\vdash$)的证明

3. $\alpha \vee \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \vee \beta)$， 若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证：($\vdash$)

(1) $\alpha \vdash \alpha$ ($\in$)

(2) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ ($\vee+$)(1)

(3) $\alpha \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$

(x不在α中自由出现) ($\forall+$)(2)

(4) $\forall x\beta \vdash \forall x\beta$ ($\in$)

(5) $\forall x\beta \vdash \beta$ ($\forall-$)(4)

(6) $\forall x\beta \vdash \alpha \vee \beta$ ($\vee+$)(5)

(7) $\forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$ ($\forall+$)(6)

(8) $\alpha \vee \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$ ($\vee-$)(3,6)

例12(3)($\dashv$)的证明

3. $\alpha \vee \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \vee \beta)$，若$x$不在$\alpha$中自由出现.

证：($\dashv$)

(1)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$	$(\in)$
(2)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \alpha \vee \beta$	$(\forall -)(1)$
(3)	$\alpha \vee \beta \vdash \neg\alpha \to \beta$	(命题内定理)
(4)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \neg\alpha \to \beta$	$(Tr)(2,3)$
(5)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(6)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \beta$	$(\to -)(4,5)$
(7)	$\forall x(\alpha \vee \beta), \neg\alpha \vdash \forall x\beta$	$(\forall +)(6)$
(8)	$\forall x(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \to \forall x\beta$	$(\to +)(7)$
(9)	$\neg\alpha \to \forall x\beta \vdash \alpha \vee \forall x\beta$	(命题内定理)
(10)	$\forall x(\alpha \vee \beta) \vdash \alpha \vee \forall x\beta$	$(Tr)(8,9)$

作业

p.559(p.184)

6. 若y对x在α中自由，且y不在α中自由出现，则 $\forall x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y)$.

7.

9. 证明例12的(2),(4)

12. 证明：若$\Gamma, \alpha \vdash_{N_{\mathfrak{L}}} \beta$，且$x$不在$\Gamma$的任何公式中自由出现，则$\Gamma, \exists x\alpha \vdash_{N_{\mathfrak{L}}} \exists x\beta$.

13. 证明：若$\Gamma, \alpha \vdash_{N_{\mathfrak{L}}} \beta$，且$x$不在$\Gamma \cup \{\beta\}$的任何公式中自由出现，则$\Gamma, \exists x\alpha \vdash_{N_{\mathfrak{L}}} \forall x\beta$.

14. (2),(4),(5)

谢　谢

复习

$N_{\mathfrak{L}}$中的一些可证式子:

$$\begin{cases} \alpha \to \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta) \\ \alpha \to \exists x\beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta) \end{cases}$$ 若x不在α中自由出现

$$\begin{cases} \forall x\alpha \to \beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta) \\ \exists x\alpha \to \beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta) \end{cases}$$ 若x不在β中自由出现

$$\begin{cases} \alpha \wedge \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \wedge \beta) \\ \alpha \wedge \exists x\beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \wedge \beta) \\ \alpha \vee \forall x\beta \vdash\dashv \forall x(\alpha \vee \beta) \\ \alpha \vee \exists x\beta \vdash\dashv \exists x(\alpha \vee \beta) \end{cases}$$ 若x不在α中自由出现

复习(续)

$N_{\mathfrak{L}}$中的一些可证式子:

$$\begin{cases} \neg\forall x\alpha \vdash\dashv \exists x\neg\alpha \\ \neg\exists x\alpha \vdash\dashv \forall x\neg\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y) \\ \exists x\alpha \vdash\dashv \forall y\alpha(x/y) \end{cases} \quad \text{若}y\text{不在}\alpha\text{中出现}$$

思考题: $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$?

$\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$?

$\exists x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$?

$\exists x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$?

替换定理

定理3 设α, β, γ是$\mathfrak{L}$的公式，满足$\beta \vdash\dashv \gamma$.

α'为将α中某些β换为γ得到的公式.

则$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

示意图:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\alpha: & \cdots & \beta & \cdots & \beta & \cdots & \beta & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\alpha': & \cdots & \gamma & \cdots & \beta & \cdots & \gamma & \cdots
\end{array}
$$

引理1

若$\mathfrak{L}$中的公式$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$满足 $\alpha \vdash\dashv \alpha'$, $\beta \vdash\dashv \beta'$, 则:

1. $\neg\,\alpha \vdash\dashv \neg\,\alpha'$
2. $\alpha \vee \beta \vdash\dashv \alpha' \vee \beta'$
3. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha' \wedge \beta'$
4. $\alpha \rightarrow \beta \vdash\dashv \alpha' \rightarrow \beta'$
5. $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash\dashv \alpha' \leftrightarrow \beta'$
6. $\forall x\alpha \vdash\dashv \forall x\alpha'$
7. $\exists x\alpha \vdash\dashv \exists x\alpha'$

只证(7).

引理1(7)的证明

若$\mathfrak{L}$中的公式$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$满足 $\alpha \vdash\dashv \alpha'$, $\beta \vdash\dashv \beta'$, 则:

7. $\exists x\alpha \vdash\dashv\ \exists x\alpha'$

证: (1) $\alpha \vdash\dashv \alpha'$

(2) $\emptyset \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$

(3) $\emptyset \vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \alpha')$

(4) $\forall x(\alpha \leftrightarrow \alpha') \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\alpha'$ (例11)

(5) $\emptyset \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\alpha'$ (Tr)

(6) $\exists x\alpha \vdash \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\alpha'$ $(+)$

(7) $\exists x\alpha \vdash \exists x\alpha$

(8) $\exists x\alpha \vdash \exists x\alpha'$

(9) $\exists x\alpha' \vdash \exists x\alpha$ (同理(8))

(10) $\exists x\alpha \vdash\dashv\ \exists x\alpha'$

引理1(7)的证明(续)

若$\mathfrak{L}$中的公式$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$满足 $\alpha \vdash\dashv \alpha'$, $\beta \vdash\dashv \beta'$, 则:

7. $\exists x\alpha \vdash\dashv \exists x\alpha'$

另证:	(1) $\alpha \vdash \alpha'$	(已知)
	(2) $\alpha \vdash \exists x\alpha'$	$(\exists+)(1)$
	(3) $\exists x\alpha \vdash \exists x\alpha'$	$(\exists-)(2)$
	(4) $\exists x\alpha' \vdash \exists x\alpha$	(同理(3))
	(5) $\exists x\alpha \vdash\dashv \exists x\alpha'$	

替换定理的证明

定理3 设α, β, γ是$\mathfrak{L}$的公式，满足$\beta \vdash\dashv \gamma$.

α'为将α中某些β换为γ得到的公式．则$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

证：对α中出现的量词与联结词的个数d归纳证明.

(1) 当$d = 0$时，α为原子公式，
则：$\alpha = \alpha'$，或$\alpha = \beta$且$\alpha' = \gamma$，从而$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

(2) 设$d \le n$时命题成立．考察$d = n + 1$时情形.
α必为下列形式之一：$\neg\alpha_1$，$\alpha_1 \vee \alpha_2$，$\alpha_1 \wedge \alpha_2$，
$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$，$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$，$\exists x \alpha_1$，$\forall x \alpha_1$.
无论哪种形式,α_1及α_2中量词和联结词的个数都$\le n$

替换定理的证明(续)

设对α_1与α_2中出现的某些β换为γ得到的公式分别为 α'_1与α'_2.

由归纳假设得: $\alpha_1 \vdash\dashv \alpha'_2$, $\alpha_2 \vdash\dashv \exists\alpha'_2$.

且α'分别为: $\neg\alpha'_1$, $\alpha'_1 \vee \alpha'_2$, $\alpha'_1 \wedge \alpha'_2$, $\alpha'_1 \rightarrow \alpha'_2$, $\alpha'_1 \leftrightarrow \alpha'_2$, $\exists x\alpha'_1$, $\forall x\alpha'_1$.

对它们分别应用引理1可得$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

归纳证毕.

替换定理的一个应用

例12(1) 证明：若x不在α中自由出现，则：

$$\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \forall x \beta$$

证：

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \neg(\alpha \to \neg \beta)$	(命题内定理)
(2)	$\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \forall x \neg(\alpha \to \neg \beta)$	替换定理
(3)	$\neg \forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg \forall x \neg(\alpha \to \neg \beta)$	(定理2)
(4)	$\neg \forall x \neg(\alpha \to \neg \beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \neg \beta)$	(例9)
(5)	$\exists x(\alpha \to \neg \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x \neg \beta$	(例10)
(6)	$\neg \forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \to \exists x \neg \beta$	(Tr)
(7)	$\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg(\alpha \to \exists x \neg \beta)$	(定理2)
(8)	$\neg(\alpha \to \exists x \neg \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg \exists x \neg \beta$	(命题内定理)
(9)	$\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg \exists x \neg \beta$	(Tr)
(10)	$\forall x(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \forall x \beta$	(替换定理)

范式

定义10　$\mathfrak{L}$的一个公式α如要具有如下形状:

$$Q_1 v_1 Q_2 v_2 \cdots Q_n v_n\ \beta$$

其中:

Q_i为量词$\forall$或$\exists$ $(1 \le i \le n)$;

v_i为个体变元符号$(1 \le i \le n)$;

n为自然数(n可以$= 0$);

β中没有量词出现.

则称α为$\mathfrak{L}$的一个前束范式.

范式(存在)定理

定理4 对$\mathfrak{L}$任一个公式α，存在$\mathfrak{L}$的一个前束范式α'，使$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

也称此α'为α的一个前束范式.

下面先用例子来说明前束范式的求法.

例8

求下列各公式的前束范式.

1. $\neg(\forall x_2 \exists x_1 F_1^2(x_1,\ x_2))$

2. $\forall x_1 F^1(x_1) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

4. $(\forall x_1 F_1^2(x_1,\ x_2) \rightarrow \neg \exists x_2 F_2^1(x_2)) \rightarrow$
   $\forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1,\ x_2)$

5. $\forall x_1 F_1^2(x_1,\ x_2) \leftrightarrow \forall x_2 F_1^2(x_1,\ x_2)$

例8(1)的解

1. $\neg(\forall x_2 \exists x_1 F_1^2(x_1, x_2))$

解:

$$\neg(\forall x_2 \exists x_1 F_1^2(x_1, x_2))$$

$$\vdash\dashv \exists x_2(\neg \exists x_1 F_1^2(x_1, x_2))$$

$$\vdash\dashv \exists x_2 \forall x_1(\neg F_1^2(x_1, x_2))$$

例8(2)的解

2. $\forall x_1 F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$\forall x_1 F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\dashv \forall x_2 \big(\forall x_1 F^1(x_1) \to F^1(x_2)\big)$

$\vdash\dashv \forall x_2 \exists x_1 \big(F^1(x_1) \to F^1(x_2)\big)$

例8(2)的解

2. $\forall x_1 F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$\forall x_1 F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\dashv \forall x_2(\forall x_1 F^1(x_1) \to F^1(x_2))$

$\vdash\dashv \forall x_2 \exists x_1 (F^1(x_1) \to F^1(x_2))$

另解:

$\forall x_1 F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\dashv \exists x_1 (F^1(x_1) \to \forall x_2 F^1(x_2))$

$\vdash\dashv \exists x_1 \forall x_2 (F^1(x_1) \to F^1(x_2))$

注: 范式不一定唯一

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_2 \big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_2)\big)$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_2 \exists x_1 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_2)\big)$$

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_2 \big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow F^1(x_2)\big) \qquad \times$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_2 \exists x_1 \big(F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow F^1(x_2)\big)$$

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$$\forall x_1 F_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$$
$$\vdash\dashv \forall x_2 \big(\forall x_1 F_1^2(x_1,x_2) \to F^1(x_2)\big) \quad \times$$
$$\vdash\dashv \forall x_2 \exists x_1 \big(F_1^2(x_1,x_2) \to F^1(x_2)\big)$$

解:

$$\forall x_1 F_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$$
$$\vdash\dashv \forall x_1 F_1^2(x_1,x_3) \to \forall x_2 F^1(x_2)$$
$$\vdash\dashv \forall x_2 \big(\forall x_1 F_1^2(x_1,x_3) \to F^1(x_2)\big)$$
$$\vdash\dashv \forall x_2 \exists x_1 \big(F_1^2(x_1,x_3) \to F^1(x_2)\big)$$

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\!\dashv \forall x_2 (\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow F^1(x_2))$

$\vdash\!\dashv \forall x_2 \exists x_1 (F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow F^1(x_2))$

解:

$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\!\dashv \forall x_1 F_1^2(x_1, x_3) \rightarrow \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\!\dashv \forall x_2 (\forall x_1 F_1^2(x_1, x_3) \rightarrow F^1(x_2))$

$\vdash\!\dashv \forall x_2 \exists x_1 (F_1^2(x_1, x_3) \rightarrow F^1(x_2))$

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$$
$$\vdash\dashv \forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 F^1(x_3)$$
$$\vdash\dashv \forall x_3 \big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_3)\big)$$
$$\vdash\dashv \forall x_3 \exists x_1 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_3)\big)$$

例8(3)的解

3. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

解:

$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\dashv \forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 F^1(x_3)$

$\vdash\dashv \forall x_3 (\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_3))$

$\vdash\dashv \forall x_3 \exists x_1 (F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_3))$

另解:

$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2)$

$\vdash\dashv \exists x_1 (F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F^1(x_2))$

$\vdash\dashv \exists x_1 (F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 F^1(x_3))$

$\vdash\dashv \exists x_1 \forall x_3 (F_1^2(x_1, x_2) \to F^1(x_3))$

例8(4)的解

4. $\big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \neg \exists x_2 F_2^1(x_2)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$

解:

$$\big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \neg \exists x_2 F_2^1(x_2)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 \neg F_2^1(x_2)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \exists x_1 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 \neg F_2^1(x_2)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \exists x_1 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 \neg F_2^1(x_3)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \exists x_1 \forall x_3 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to \neg F_2^1(x_3)\big) \to \forall x_1 \forall x_2 F_3^2(x_1, x_2)$$

$$\vdash\!\dashv \exists x_1 \forall x_3 \big(F_1^2(x_1, x_2) \to \neg F_2^1(x_3)\big) \to \forall x_4 \forall x_5 F_3^2(x_4, x_5)$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_1 \exists x_3 \Big(\big(F_1^2(x_1, x_2) \to \neg F_2^1(x_3)\big) \to \forall x_4 \forall x_5 F_3^2(x_4, x_5)\Big)$$

$$\vdash\!\dashv \forall x_1 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \Big(\big(F_1^2(x_1, x_2) \to \neg F_2^1(x_3)\big) \to F_3^2(x_4, x_5)\Big)$$

例8(5)的解

5. $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \forall x_2 F_1^2(x_1, x_2)$

解：$\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \forall x_2 F_1^2(x_1, x_2)$

$$
\begin{aligned}
&\vdash\dashv \big(\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F_1^2(x_1, x_2)\big) \land \\
&\quad\ \big(\forall x_2 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_1 F_1^2(x_1, x_2)\big) \\
&\vdash\dashv \big(\forall x_3 F_1^2(x_3, x_2) \to \forall x_4 F_1^2(x_1, x_4)\big) \land \\
&\quad\ \big(\forall x_5 F_1^2(x_1, x_5) \to \forall x_6 F_1^2(x_6, x_2)\big) \\
&\vdash\dashv \exists x_3 \big(F_1^2(x_3, x_2) \to \forall x_4 F_1^2(x_1, x_4)\big) \land \\
&\quad\ \exists x_5 \big(F_1^2(x_1, x_5) \to \forall x_6 F_1^2(x_6, x_2)\big) \\
&\vdash\dashv \exists x_3 \forall x_4 \big(F_1^2(x_3, x_2) \to F_1^2(x_1, x_4)\big) \land \\
&\quad\ \exists x_5 \forall x_6 \big(F_1^2(x_1, x_5) \to F_1^2(x_6, x_2)\big) \\
&\vdash\dashv \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5 \forall x_6 \big(\big(F_1^2(x_3, x_2) \to F_1^2(x_1, x_4)\big) \land \\
&\quad\ \big(F_1^2(x_1, x_5) \to F_1^2(x_6, x_2)\big)\big)
\end{aligned}
$$

范式定理的证明

对$\mathfrak{L}$任一个公式α，存在$\mathfrak{L}$的前束范式α'，使$\alpha \vdash\dashv \alpha'$.

证：对α中所含的联结词与量词的个数d归纳证明.

(1) 当$d = 0$时，α为原子公式，从而α中没有量词，取$\alpha' = \alpha$，则$\alpha \vdash\dashv \alpha'$

(2) 设当$d \leq n$时命题成立，考察$d = n + 1$时情形. α为下列几种情形之一:

$\neg \alpha_1$， $\alpha_1 \vee \alpha_2$， $\alpha_1 \wedge \alpha_2$， $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$， $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$， $\exists x \alpha_1$， $\forall x \alpha_1$.

范式定理的证明(续1)

由归纳假设知：存在$\mathfrak{L}$的前束范式α_1', α_2',使得
$\alpha_1 \vdash\dashv \alpha_1'$， $\alpha_2 \vdash\dashv \alpha_2'$.

设α_1', α_2'分别为:

$$Q_1 v_1 Q_2 v_2 \cdots Q_m v_m \alpha_1''$$

$$Q_{m+1} v_{m+1} Q_{m+2} v_{m+2} \cdots Q_{m+n} v_{m+n} \alpha_2''$$

其中:

Q_i为$\forall$或$\exists$, v_i为个体变元符号$(1 \leq i \leq m+n)$.

α_1''与α_2''中没有量词出现.

范式定理的证明(续2)

(2.1) 当α为$\neg\alpha_1$时, $\alpha \vdash\dashv \neg Q_1 v_1 Q_2 v_2 \cdots Q_m v_m \alpha_1''$.

从而 $\alpha \vdash\dashv Q_1^* v_1 Q_2^* v_2 \cdots Q_m^* v_m \neg\alpha_1''$.

其中:

$$Q_i^* = \begin{cases} \forall & \text{若}Q_i\text{为}\exists \\ \exists & \text{若}Q_i\text{为}\forall \end{cases}$$

则$Q_1^* v_1 Q_2^* v_2 \cdots Q_m^* v_m \neg\alpha_1''$ 即为所求.

范式定理的证明(续3)

(2.2) 当α为$\alpha_1 \vee \alpha_2$时.

$$
\begin{aligned}
\alpha \vdash\!\dashv & (Q_1 v_1 \cdots Q_m v_m \alpha_1'') \vee \\
& (Q_{m+1} v_{m+1} \cdots Q_{m+n} v_{m+n} \alpha_2'') \\
\vdash\!\dashv & \big(Q_1 v_1' \cdots Q_m v_m' \alpha_1''(v_m/v_m') \cdots (v_1/v_1')\big) \vee \\
& \big(Q_{m+1} v_{m+1}' \cdots Q_{m+n} v_{m+n}' \\
& \ \alpha_2''(v_{m+n}/v_{m+n}') \cdots (v_{m+1}/v_{m+1}')\big)
\end{aligned}
$$

其中:

$v_1', v_2', \cdots, v_{m+n}'$为$\mathfrak{L}$中互不相同的个体变元符号,
且不在α_1'及α_2'中出现.

范式定理的证明(续4)

从而由例12知:

$$\alpha \vdash\dashv Q_1 v_1' \cdots Q_m v_m' \\ Q_{m+1} v_{m+1}' \cdots Q_{m+n} v_{m+n}' \\ \Big((\alpha_1''(v_m/v_m') \cdots (v_1/v_1')) \vee \\ (\alpha_2''(v_{m+n}/v_{m+n}') \cdots (v_{m+1}/v_{m+1}'))\Big)$$

此即为所求的前束范式.

范式定理的证明(续4)

(2.3) 当α为$\alpha_1 \wedge \alpha_2$时，仿(2.2)可证.

(2.4) 当α为$\alpha_1 \to \alpha_2$时，利用例6与例10 仿上可证.

(2.5) 当α为$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$时，

$$\alpha \vdash\dashv (\alpha_1 \to \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \to \alpha_1).$$

由(2.3)及(2.4)知存在前束范式β使：$\alpha \vdash\dashv \beta$.

(2.6) 当α为$\forall x \alpha_1$或$\exists x \alpha_1$时，由引理1之(6,7)易证.

归纳证完，命题成立.

谓词公式按前束范式的分类

定义11　设n是一个非0的自然数.

(1) 若前束范式α的量词以全称量词开始，并且全称量词组与存在量词组有 $n-1$次交替，则称α为一个Π_n型前束范式，简称为Π_n型公式.

(2) 若前束范式α的量词以存在量词开始，并且全称量词组与存在量词组有 $n-1$次交替，则称α为一个Σ_n型前束范式，简称为Σ_n型公式.

例如: $\forall x_1 \forall x_2 (F^1(x_1) \rightarrow F^1(x_2))$为 Π_1型公式.

$\exists x_3 \exists x_1 \forall x_1 \forall x_2 (F^1(x_1) \rightarrow F^1(x_2))$为 Σ_2型公式.

$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$的内定理

定义12　设α为$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$的一个公式，

若$\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$，则称$\alpha$为$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$的一个内定理，记为$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$.

易证：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$

当且仅当$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$

当且仅当$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \alpha$

作业

p.560(p.185)

17. (1), (2), (3)
18. (1), (3)
19. (2),(3)

谢　谢

一阶谓词演算的形式系统 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$

- $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 是一个较 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 简洁的谓词演算形式系统。
- $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 是在 $\mathbf{P}$ 的基础上建立的.

$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的各组成部分如下：

$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的形式语言

$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 也是相对于某个任意确定的非逻辑符号 $\mathcal{L}$ 集合它而言的.

一、符号库：

1. 非逻辑符号：

   $\mathcal{L}$ 中符号.

2. 逻辑符号：

   (2.1) 个体变元符号： $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots$.

   (2.2) 量词符号： $\forall$.

   (2.3) 联结词符号： $\neg,\ \rightarrow$.

   (2.4) 辅助符号：) , , , (.

二、 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式 (与 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的公式类似.)

1. $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的项归纳定义如下：

   (1.1) 个体变元与个体常元为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的项 .

   (1.2) 若 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m$ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的项， f^m 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个 m 元函数变元符号，则 $f^m(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m)$ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的项.

2. $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式归纳定义如下：

(2.1) 若 t_1，t_2，$\cdots$，t_n 为 $\mathcal{L}$ 的项， F^n 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个 n 元谓词变元符号，则 $F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式. 原子公式

(2.2) 若 α_1，α_2 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式，则 $(\neg\,\alpha_1)$，$(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式.

(2.3) 若 α 为 $\mathcal{L}$ 的公式， x 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的个体变元符号，则 $(\forall x)\alpha$ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公式.

注： $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的形式语言是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的形式语言的一个子语言，因而它们使用如下相同概念和约定：

- 自由与约束;
- 括号省略规则;
- $\mathbf{P}$ 中公式在 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中的代入实例
- 简写公式：

$(\alpha \vee \beta)$ 为 $((\neg\,\alpha) \rightarrow \beta)$ 的简写;

$(\alpha \wedge \beta)$ 为 $(\neg\,(\alpha \rightarrow (\neg\,\beta)))$ 的简写;

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 为 $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ 的简写;

$(\exists x)\alpha$ 为 $(\neg\,((\forall x)(\neg\,\alpha)))$ 的简写.

$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的形式推理规则

1. 公理：

(K1) $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

(K2) $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$

(K3) $(\neg\,\alpha\rightarrow\neg\,\beta)\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

(K4) $\forall x\alpha\rightarrow\alpha(x/t)$, 若 t 对 x 在 α 中自由.

(K5) $\alpha\rightarrow\forall x\alpha$, 若 x 不在 α 中自由出现.

(K6) $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\forall x\alpha\rightarrow\forall x\beta)$

(K7) 若 α 是 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理，则 $(\forall x)\alpha$ 也为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理.

其中： α, β, γ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式， x 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的个体变元符号， t 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的项.

2. 规则：

分离规则 (M)： 由 α 及 $\alpha\rightarrow\beta$ 可得到 β.

证明序列

定义 3.13 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 公式的一个有限序列 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 称为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中的一个证明序列（证明），如果每个 α_i $(1\leq i\leq n)$ 都满足下列条件之一：

(1) α_i 是 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理；或

(2) α_i 是由某两个 α_j, α_k $(1\leq j,\ k<i)$ 应用 (M) 得到的.

此时，称 α_n 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个内定理，记为 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}}\alpha_n$, 或简写为 $\vdash\alpha_n$.

代如实例

定理 3.5 设 α 为 $\mathbf{P}$ 的一个内定理， α' 是 α 在 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中的一个代入实例，则 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha'$

定理 3.6 (1) 若 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$, 且 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则： $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$.

(2) 若 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \beta)$, 且 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\beta \to \gamma)$, 则 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \gamma)$.

此命题中的 (1) 仍记为 (M), (2) 仍记为 (Tr).

例 3.14

若项 t 对个体变元符号 x 在 α 中自由，则： $\vdash \alpha(x/t) \to \exists x\alpha$.

证：

因为 $(\neg\,\alpha)(x/t) = \neg\,(\alpha(x/t))$, 从而

$$\vdash \forall x(\neg\,\alpha) \to (\neg\,\alpha)(x/t) \qquad (K4)$$

$$\vdash \forall x(\neg\,\alpha) \to \neg\,(\alpha(x/t))$$

$$\vdash (\forall x(\neg\,\alpha) \to \neg\,(\alpha(x/t))) \to (\alpha(x/t) \to \neg\,\forall x(\neg\,\alpha))$$

(命题内定理)

$$\vdash \alpha(x/t) \to \neg\,\forall x(\neg\,\alpha) \qquad (M)$$

即： $\vdash \alpha(x/t) \to \exists x\alpha$

定理 3.7

若 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha$, 则 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha$.

证：因 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha$, 故存在 $\mathbf{K}_\mathcal{L}$ 中公式序列：

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ (=\alpha)$$

为 α 的一个证明.

下对 $i\ (1 \le i \le n)$ 归纳证明： $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_i$ $\qquad (*)$

(1) 当 $i = 1$ 时， α_1 为一个公理，从而 $\forall x\alpha_1$ 也为一个公理，故 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_1$.

(2) 设 $i < k$ 时， $(*)$ 成立，下证 $i = k$ 时 $(*)$ 也成立.

(2.1) 若 α_k 仍为公理，仿 (1) 可证.

(2.2) 若 α_k 是由 $\alpha_l,\ \alpha_j\ \ (1 \le l,\ j < k)$ 用 (M) 得到的，不妨设 $\alpha_j = \alpha_l \to \alpha_k$. 则：

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_l$, (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_j$ 。 (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k)$. (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x\alpha_l \to \forall x\alpha_k)$ (公理 K5).

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_l \to \forall x\alpha_k$, (定理 3.6)

$\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_k$. (定理 3.6)

归纳证毕， $(*)$ 成立，从而 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha_n$, 即 $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x\alpha$.

例 3.15(1)

若 x 不在 α 中自由出现，则：

$$\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$$

证：

因 $\vdash_P (p \to (q \to r)) \to ((s \to q) \to (p \to (s \to r)))$.

以 $\forall x(\alpha \to \beta)$, $\forall x\alpha$, $\forall x\beta$, α 分别替换其中的 p, q, r, s 得：

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)) \\ \to ((\alpha \to \forall x\alpha) \to (\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta))).$$

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$, (K5)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \forall x\alpha) \to (\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta))$.

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \forall x\alpha$. x 不在 α 中自由出现，(K5)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$.

$\boxed{\textbf{例 3.15(2)}}$

若 x 不在 α 中自由出现，则：

$$\vdash (\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$$

证：

因 $\vdash_P (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$,

分别以 $\forall x\beta$, β, α 代换其中的 p, q, r 得：

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\forall x\beta \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$.

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\beta \rightarrow \beta$,

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} A \rightarrow B$. A 记 $\alpha \rightarrow \forall x\beta$, B 记 $\alpha \rightarrow \beta$

x 不在 A 中自由出现

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(A \rightarrow B)$. (定理 3.7)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$. (1)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} A \rightarrow \forall xB$,

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$.

例 3.16

若 $\vdash \alpha \to \beta$, 则：

1. $\vdash \forall x\alpha \to \forall x\beta$ 。
2. $\vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$.

证：

1. (1) $\vdash \alpha \to \beta$ (题设)

   (2) $\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ (定理 3.7)

   (3) $\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$ $(K6)$

   (4) $\vdash \forall x\alpha \to \forall x\beta$ (M)

2. (1) $\vdash \alpha \to \beta$

   (2) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (命题内定理)

   (3) $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (M)

   (4) $\vdash \forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha$ (1)

   (5) $\vdash (\forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha) \to (\neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta)$

   (6) $\vdash \neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta$ (M)

   即： $\vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$

有前提的推演

定义

定义 3.14 设 Γ 是 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公式集 (不一定有限). $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中公式的一个有限序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中由前提 Γ 推出 α_n 的一个证明 , 如果每个 α_i $(1 \le i \le n)$ 满足下列条件之一:

(i) $\alpha_i \in \Gamma$.

(ii) α_i 是一个公理.

(iii) α_i 是由 α_j, α_k $(1 \le j, k \le i)$ 用 (M) 得到.

此时, 也称在 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中由前提 Γ 可推出 α_n , 记为 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_n$ 或 $\Gamma \vdash \alpha_n$.

性质

性质 (1) $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$ 的充要条件是: 对 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的任一个公式集 $\Gamma, \Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

性质 (2) 设 Σ, α 分别是 $\mathbf{P}$ 中公式集与公式, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 的公式中出现的命题变元符号都在 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 之中, 将 Σ 与 α 中的 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 分别替换为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中公式 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 得到 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式集 Σ' 与 α'. 若 $\Sigma \vdash_P \alpha$, 则 $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha'$.

性质 (3) 若 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$, 则 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$.

性质 (4) 若 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta \to \gamma$, 则 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \gamma$.

性质 (5) 若 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 而 x 是一个不在 Σ 的任何公式中自由出现的一个个体变元符号, 则 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha$.

性质 (5) 的证明

证：

因 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则存在 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中公式序列：

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ (=\alpha)$$

为在前题 Σ 下推出 α 的一个证明.

下对 $i\ (1 \le i \le n)$ 归纳证明： $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_i$ $\quad (*)$

(1) 当 $i = 1$ 时， α_1 为一个公理或 $\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若 α_1 为一个公理，则 $\forall x \alpha_1$ 也为一个公理，故 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_1$, 从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_1$.

(1.2) 若 $\alpha_1 \in \Sigma$, 则 x 不在 α_1 中自由出现，由 (K5) 知： $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1 \to \forall x \alpha_1$, 从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1 \to \forall x \alpha_1$. 又 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1$, 故：$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_1$.

(2) 设 $i < k$ 时， $(*)$ 成立，下证 $i = k$ 时 $(*)$ 也成立.

(2.1) 若 α_k 仍为公理或 $\alpha_k \in \Sigma$, 仿 (1) 可证.

(2.2) 若 α_k 是由 $\alpha_l,\ \alpha_j\ \ (1 \le l,\ j < k)$ 用 (M) 得到的，不妨设 $\alpha_j = \alpha_l \to \alpha_k$. 由归纳假设得： $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_l$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_j$, 即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k)$. 又由于 $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k)$ (公理 K5). 故： $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k)$ 由性质 (2) 知： $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_k$.

归纳证毕， $(*)$ 成立，从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_n$, 即： $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha$.

注：上面的证明只是对定理 3.7 的证明作了不大的修改.

$\boxed{\textbf{例 3.17}}$

若 x 不在 β 中自由出现，则：

$$\{\forall x(\alpha \to \beta),\ \neg\beta\} \vdash \forall x \neg\alpha$$

证：

$$\begin{array}{ll}
\forall x(\alpha \to \beta) & (\text{前提}) \\
\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta) & (K4) \\
\alpha \to \beta & (M) \\
(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) & (\text{命题重言式}) \\
\neg\beta \to \neg\alpha & (M) \\
\neg\beta & (\text{前提}) \\
\neg\alpha & (M) \\
\forall x \neg\alpha & (\text{性质 } (4))
\end{array}$$

$\boxed{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\ \textbf{的演绎定理}}$

定理 3.8 $\Sigma,\ \alpha \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$ 当且仅当 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$.

证明与 **P** 中演绎定理的证明非常类似，只要将“ **P** 的公式”改为“ $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公式”即可.

例 3.15 的重新证明

证明： $\{\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha\} \vdash \beta$

证：

$\alpha \to \forall x\beta$ (前提)

α (前提)

$\forall x\beta$ (M)

$\forall x\beta \to \beta$ $(K4)$

β (M)

由演绎定理得： $\{\alpha \to \forall x\beta\} \vdash \alpha \to \beta$.

由性质 (4) 得： $\{\alpha \to \forall x\beta) \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ (注意： x 不在 $\alpha \to \forall x\beta$ 中自由出现)

再由演绎定理得： $\vdash (\alpha \to \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \to \beta)$.

例 3.19

若 x 不在 β 中自由出现，证明： $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \beta)$

证：

由例 3.17 得： $\{\forall x(\alpha \to \beta),\ \neg\beta\} \vdash \forall x \neg\alpha$.

从而： $\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \neg\beta \to \forall x \neg\alpha$.

而： $\vdash (\neg\beta \to \forall x \neg\alpha) \to (\neg\forall x \neg\alpha \to \beta)$

故： $\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash (\neg\beta \to \forall x \neg\alpha) \to (\neg\forall x \neg\alpha \to \beta)$

由性质 (1) 知： $\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \neg\forall x \neg\alpha \to \beta$.

即： $\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \exists x\alpha \to \beta$.

故： $\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \beta)$

$\boxed{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}\text{ 与 }\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\text{ 的等价性}}$

引理 3.2

若 γ 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理，则对 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的任一有限公式集 Σ，$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \gamma$.

证：

对 γ 的构造复杂性归纳证明.

(1) 若 γ 为 (K1)—(K6) 中的某一条时.

(1.1) 若 γ 为 (K1)—(K3) 中某条时，由定理 3.1 可证；

(1.2) 当 γ 为 (K4) 时. 由 $(\forall -)$ 知： $\forall x\alpha \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha(x/t)$ (其中：t 对 x 在 α 中自由), 由 $(\rightarrow +)$ 知： $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$. 由于 Σ 是有限集，故可有限次使用 $(+)$ 得： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$.

(1.3) 当 γ 为 (K5) 时，由 $(\forall +)$ 知： $\alpha \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha$ (其中： x 不在 α 中自由出现), 从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha \rightarrow \forall x\alpha$.

(1.4) 当 γ 为 (K6) 时，由例 3.6 可证： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$.

(2) 若 γ 为 $\forall x\gamma'$ 时，其中 γ' 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理，由归纳假设得： $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \gamma'$, 从而由 $(\forall +)$ 知： $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\gamma'$, 故： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\gamma'$.

$\boxed{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\text{''} \subseteq \text{''}\mathbf{N}_{\mathcal{L}}}$

设 Σ, α 分别为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的有限公式集与公式，若 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

证：

由于 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 在 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中存在由 Σ 推出 α 的证明序列：

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ (= \alpha)$$

下证：对任意 $i\ (1 \le i \le n)$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$ $\qquad (*)$

对 i 进行归纳证明.

(1) 当 $i = 1$ 时， α_1 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公理或 $\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若 α_1 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公理，由引理 3.2 知： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_1$.

(1.2) 若 $\alpha_1 \in \Sigma$, 由 $(+)$ 知： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_1$.

(2) 设 $(*)$ 对满足 $i < k$ 的所有自然数 i 成立 $(k > 1)$, 往证 $i = k$ 时 $(*)$ 也成立.

(2.1) 若 $\alpha_k \in \Sigma$ 或 α_k 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的公理，仿 (1) 可证.

(2.2) 若 α_k 是由 α_j, α_l $(1 \le j, l < k)$ 用 (M) 得到, 不妨设 α_j 为 $\alpha_l \to \alpha_k$, 由归纳假设得：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_j$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_l$, 即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_l \to \alpha_k$. 由 $(\to -)$ 知： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

归纳证完， $(*)$ 成立. 从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_n$, 即： $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

$\boxed{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\text{"} \supseteq \text{"}\mathbf{N}_{\mathcal{L}}}$

设 Σ, α 分别 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的有限公式集与公式，若 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

证：

由于 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 在 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中存在证明序列：

$$\Sigma_1 \vdash \alpha_1,\ \Sigma_2 \vdash \alpha_2,\ \cdots,\ \Sigma_n \vdash \alpha_n$$

使得： $\Sigma_n = \Sigma,\ \alpha_n = \alpha$.

下证：对任意 i $(1 \leq i \leq n)$, $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$ $\quad (**)$

对 i 进行归纳证明.

(1) 当 $i = 1$ 时， $\Sigma_1 \vdash \alpha_1$ 只能由 $(\in)$ 得到，从而 $\alpha_1 \in \Sigma_1$, 故 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1$.

(2) 假设 $(**)$ 对满足 $i < k$ 的所有 i 成立，考察 $(**)$ 当 $i = k$ 时情形.

(2.1) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是用 $(\in)$ 、 $(\neg -)$ 、 $(\vee -)$ 、 $\vee +)$ 、 $(\wedge -)$ 、 $(\wedge +)$ 、 $(\rightarrow -)$ 、 $(\rightarrow +)$ 、 $(\leftrightarrow -)$ 或 $(\leftrightarrow +)$ 得到的，仿上章定理 2.15 可证.

(2.2) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是对某个 $\Sigma_i \vdash \alpha_i$ $(1 \leq i < k)$ 用 $(+)$ 得到的，即： $\Sigma_k = \Sigma_i \cup \{\gamma\},\ \alpha_k = \alpha_i$. 由归纳假设得： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$, 从而 $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$, 即 $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

(2.3) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是对 $\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用 $(\forall -)$ 得到的，即： $\Sigma_k = \Sigma_i$, $\alpha_i = \forall x \beta$, $\alpha_k = \beta(x/t)$, 其中： t 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的项， t 对 x 在 β 中自由. 由归纳假设知： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$, 即： $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \beta$. 由公理 (K4) 知： $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \beta \rightarrow \beta(x/t)$, 故 $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \beta \rightarrow \beta(x/t)$, 从而 $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta(x/t)$, 即： $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

(2.4) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是对 $\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用 $(\forall+)$ 得到的，即： $\Sigma_k = \Sigma_i$, $\alpha_k = \forall x \alpha_i$, 其中：个体变元符号 x 不在 Σ_i 的任何公式中自由出现. 由归纳假设得： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_i$. 由上节性质 (4) 知： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x \alpha_i$, 即： $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_k$.

(2.5) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是对 $\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用 $(\neg -)$ 得到的，即： $\Sigma_i = \Gamma \cup \{\gamma\}$, $\Sigma_k = \Gamma \cup \{\exists x \gamma\}$, $\alpha_k = \alpha_i$, 其中： Γ 是 $\mathbf{N}_\mathcal{L}$ 的一个有限公式集， x 不在 $\Gamma \cup \{\alpha_i\}$ 的任一个公式中自由出现. 由归纳假设知： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_i$, 即： $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_i$. 由演泽定理知： $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \gamma \to \alpha_i$. 由于 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，故 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \gamma \to \alpha_i$. 因 x 不在 α_i 中自由出现，由上节例 3.19 知： $\vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x(\gamma \to \alpha_i) \to (\exists x \gamma \to \alpha_i)$, 故 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \forall x(\gamma \to \alpha_i) \to (\exists x \gamma \to \alpha_i)$, 从而 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \exists x \gamma \to \alpha_i$. 再由演泽定理知： $\Gamma \cup \{\exists x \gamma\} \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_i$, 即： $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_k$.

(2.6) 若 $\Sigma_k \vdash \alpha_k$ 是对 $\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用 $(\exists+)$ 得到的，即： $\Sigma_k = \Sigma_i$, $\alpha_i = \beta(x/t)$, $\alpha_k = \exists x \beta$, 其中： $\mathbf{N}_\mathcal{L}$ 的个体变元符号 x 不在 β 中自由. 由归纳假设知： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \beta(x/t)$. 由上节例 3.14 知： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \beta(x/t) \to \exists x \beta$, 从而 $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \exists x \beta$, 即 $\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha_k$.

归纳证完， $(**)$ 成立.

$\mathbf{K}_\mathcal{L}$ 与 $\mathbf{N}_\mathcal{L}$ 的等价性

对 $\mathbf{N}_\mathcal{L}$ $(\mathbf{K}_\mathcal{L})$ 中的有限公式集 Σ 与公式 α,

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_\mathcal{L}} \alpha \text{ 当且仅当 } \Sigma \vdash_{\mathbf{N}_\mathcal{L}} \alpha \ .$$

解释和赋值

解释是对每个符号说明其含义．赋值是指出每个公式的真假值.

将非逻辑符号集 $\mathfrak{L}$ 记为 $\mathfrak{L} = \{F_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J} \cup \{c_k\}_{k\in K}$.

解释的定义

定义 3.15 对非逻辑符号集 $\mathcal{L}$, $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的解释 $\mathcal{I}$ 是如下的四元序列：

$$\langle D_{\mathcal{I}},\ \{\overline{F_i}\}_{i\in I},\ \{\overline{f_j}\}_{j\in J},\ \{\overline{c_k}\}_{k\in K}\rangle$$

- $D_{\mathcal{I}}$ 是一个非空集合，称为 $\mathcal{I}$ 的论域 或个体域 , 简记为 D .
- 对 $\mathcal{L}$ 的每个谓词变元符号 F_i, 设其为 n 元的 $(i \in I)$, $\overline{F_i}$ 是 D 上的一个 n 元关系，即 $\overline{F_i} \subseteq D^n$, 称 $\overline{F_i}$ 为 F_i 在 $\mathcal{I}$ 中的解释;
- 对 $\mathcal{L}$ 的每个函数变元符号 f_j, 设其为 m 元的 $(j \in J)$, $\overline{f_j}$ 是 D 上的一个 m 元函数，即 $\overline{f_j}:\ D^m \to D$ 是一个映射，称 $\overline{f_j}$ 为 f_j 在 $\mathcal{I}$ 中的解释;
- 对 $\mathcal{L}$ 的每个个体常元符号 C_k $(k \in K)$, $\overline{c_k}$ 是 D 中一个元素，即 $\overline{c_k} \in D$, 称 $\overline{c_k}$ 为 c_k 在 $\mathcal{I}$ 中的解释.

指派的定义

定义 3.16 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个解释， D 为 $\mathcal{I}$ 的论域， $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 $\mathcal{I}$ 中的一个指派是指如下的函数 $\sigma : \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\} \to D$. 此时， $\sigma(x_i) \in D$ 称为 x_i 在指派 σ 下的值 $(i \in \mathbf{N})$

定义 3.18

设 σ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在解释 $\mathcal{I}$ 中的一个指派， x_i 是一个个体变元符号， $a \in D$, $\sigma(x_i/a)$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 $\mathcal{I}$ 中的如下指派：

$$\sigma(x_i/a)(x_j) = \begin{cases} a & j = i \\ \sigma(x_j) & j \neq i \end{cases}$$

即： $\sigma(x_i/a)$ 是将 σ 中对 x_i 指派的值改为 a, 其余 x_j $(j \neq i,\ j \in N)$ 的值保持不变． $\sigma(x_i/a)$ 又称为 σ 的一个 x_i– 指派.

$\boxed{\textbf{例 3.20}}$

设 $\mathcal{L}=\{F^2,\ f_1^1,\ f_2^2, f_3^2,\ c\}$, 对此 $\mathcal{L}$ 可以有如下两个解释：

(1) $I_1=\langle \mathbf{N},\ \{\overline{F^2}\},\ \{\overline{f_1^1},\ \overline{f_2^2},\ \overline{f_3^2}\},\ \{\overline{c}\}\rangle$, 其中：

$\mathbf{N}$ 为自然数集;

$\overline{F^2}$ 为 $\mathbf{N}$ 上的相等关系，即：

$$\overline{F^2}=\{<n,n>\ \mid n\in\mathbf{N}\}$$

$\overline{f_1^1}$ 为 $\mathbf{N}$ 上的后继函数，即：

$$\overline{f_1^1}:\ \mathbf{N}\to\mathbf{N},\quad \overline{f_1^1}(n)=n+1\ \ (\text{任 } n\in\mathbf{N})$$

$\overline{f_2^2}$ 为 $\mathbf{N}$ 上的加法函数，即：

$$\overline{f_2^2}:\ \mathbf{N}^2\to\mathbf{N},\quad \overline{f_2^2}(<m,n>)=m+n\ \ (\text{任 } m,\ n\in\mathbf{N})$$

$\overline{f_3^2}$ 为 $\mathbf{N}$ 上的乘法函数，即：

$$\overline{f_3^2}:\ \mathbf{N}^2\to\mathbf{N},\quad \overline{f_3^2}(<m,n>)=m\cdot n\ \ (\text{任 } m,\ n\in\mathbf{N})$$

$\overline{c}$ 为 $\mathbf{N}$ 中的元素 0.

(2) $I_2=\langle \mathbf{Q},\ \{\overline{F^2}\},\ \{\overline{f_1^1},\ \overline{f_2^2},\ \overline{f_3^2}\},\ \{\overline{c}\}\rangle$, 其中：

$\mathbf{Q}$ 为有理数集;

$\overline{F^2}$ 为 $\mathbf{Q}$ 上的相等关系;

$\overline{f_1^1}$ 为 Q 上的加 1 运算，即：

$$\overline{f_1^1}:\ \mathbf{Q}\to\mathbf{Q},\quad \overline{f_1^1}(a)=a+1\ \ (\text{任 } a\in\mathbf{Q})$$

$\overline{f_2^2}$ 与 $\overline{f_3^2}$ 分别为 $\mathbf{Q}$ 上的加法与乘法函数.

$\overline{c}$ 仍为 $\mathbf{Q}$ 中的元素 0.

注: 同一个一阶语言 $\mathcal{L}$ 可以有多个不同的解释.

项的值

设 σ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的一个指派，如下归纳定义 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的项 t 在 I 中 σ 下的值 t_I^σ (简记为 t^σ):

(1) 当 t 为个体变元符号 x_i $(i \in N)$ 时， $(x_i)_I^\sigma = \sigma(x_i)$.

(2) 为 t 为个体常元符号 c_k 时， $(c_k)_I^\sigma = \overline{c_k}$.

(3) 当 t 为 $f^m(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m)$ 时， $t_I^\sigma = \overline{f^m}(t_1^\sigma,\ t_2^\sigma,\ \cdots,\ t_m^\sigma)$.

例

在例 3.20 中， σ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I_1 中的如下指派：

$$\sigma(x_i) = i \ \ (\text{任 } i \in N)$$

则：
$$
\begin{aligned}
& x_i^\sigma = \sigma(x_i) = i(i \in N) \\
& c^\sigma = \overline{c} = 0 \\
& (f_1^1(x_1))^\sigma = \overline{f_1^1}(x_1^\sigma) = \overline{f_1^1}(1) = 1 + 1 = 2 \in N \\
& (f_2^2(x_1,\ x_2))^\sigma = \overline{f_2^2}(x_1^\sigma,\ x_1^\sigma) = x_1^\sigma + x_2^\sigma = 1 + 2 = 3 \\
& (f_3^2(x_1,\ x_2))^\sigma = \overline{f_2^3}(x_1^\sigma,\ x_1^\sigma) = x_1^\sigma \cdot x_2^\sigma = 3 \\
& (f_1^1(f_2^2(x_1,\ x_4)))^\sigma = \overline{f_1^1}((f_2^2(x_1,\ x_4))^\sigma) = \overline{f_1^1}(\overline{f_2^2}(x_1^\sigma,\ x_4^\sigma)) \\
& \qquad = (x_1^\sigma + x_4^\sigma) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6
\end{aligned}
$$

对任任意项 t 及指派 σ， $t^\sigma \in D$.

定义 3.19 设 σ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在解释 I 中的一个指派，如下归纳定义 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的 “公式 α 在 I 中被 σ 满足”：

- 当 α 是原子公式 $F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 时，α 在 $\mathcal{I}$ 中被 σ 满足当且仅当 $\overline{F^n}(t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma)$ 成立，即当且仅当 $< t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma > \in \overline{F^n}$.
- 当 α 为 $(\neg \beta)$ 时，α 在 $\mathcal{I}$ 中被 σ 满足当且仅当 β 在 $\mathcal{I}$ 中不被 σ 满足.
- 当 α 为 $(\alpha_1 \to \alpha_2)$ 时，α 在 $\mathcal{I}$ 中被 σ 满足当且仅当 α_1 在 $\mathcal{I}$ 中不被 σ 满足或者 α_2 在 $\mathcal{I}$ 中被 σ 满足.
- $\cdots$
- 当 α 为 $(\forall x_i)\beta$ 时，α 在 $\mathcal{I}$ 中被 σ 满足当且仅当对每个 $a \in D_{\mathcal{I}}$, β 在 $\mathcal{I}$ 中都能被 $\sigma(x_i/a)$ 满足.

记 α 在 I 中被 σ 满足 为 $I \models_{\sigma} \alpha$, 否则记为 $I \not\models_{\sigma} \alpha$. 从而

(1) $I \models_{\sigma} F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 当且仅当 $< t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma > \in \overline{F^n}$;

(2) $I \models_{\sigma} \neg \beta$ 当且仅当 $I \not\models_{\sigma} \beta$;

(3) $I \models_{\sigma} \alpha_1 \to \alpha_2$ 当且仅当：若 $I \models_{\sigma} \alpha_1$, 则 $I \models_{\sigma} \alpha_2$;

(4) $I \models_{\sigma} (\forall x_i)\beta$ 当且仅当：对任意 $a \in D$, $I \models_{\sigma(x_i/a)} \beta$.

(5) $I \models_{\sigma} \alpha \vee \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \alpha$ 或 $I \models_{\sigma} \beta$;

(6) $I \models_{\sigma} \alpha \wedge \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \alpha$ 而且 $I \models_{\sigma} \beta$;

(7) $I \models_{\sigma} \alpha \leftrightarrow \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \alpha$ 的充要条件为 $I \models_{\sigma} \beta$;

(8) $I \models_{\sigma} (\exists x_i)\beta$ 当且仅当：存在 $a \in D$, 使得 $I \models_{\sigma(x_i/a)} \beta$

例 3.21

设 $\mathcal{L}=\{F^2\}$.

$I=<\mathbf{N},\{R\},\emptyset,\emptyset>$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个解释，其中 $R=\{<a,a>|a\in\mathbf{N}\}$.

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 为 D 中元素的序列，满足： $a_0=a_1=a_2\neq a_3$.

σ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的如下指派： $\sigma(x_i)=a_i$ （任 $i\in N$).

当 α 为 $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中下列公式时， $I\models_{\sigma}\alpha$ 成立与否？

(1) $F^2(x_1,\ x_2)$;　　(2) $F^2(x_2,\ x_3)$;

(3) $F^2(x_1,\ x_2)\rightarrow F^2(x_2,\ x_3)$;

(4) $\forall x_1F^2(x_1,\ x_2)$;　　(5) $\forall x_1\exists x_2F(x_1,\ x_2)$.

解：

(1) $I\models_{\sigma}F^2(x_1,\ x_2)$ 当且仅当 $<x_1^{\sigma},\ x_2^{\sigma}>\in\overline{F^2}$ 当且仅当 $<a_1,\ a_2>\in R$.

由于 $a_1=a_2$, 故 $<a_1,\ a_2>\in R$, 从而 $I\models_{\sigma}F^2(x_1,\ x_2)$.

(2) $I\models_{\sigma}F^2(x_2,\ x_3)$ 当且仅当 $<x_2^{\sigma},\ x_3^{\sigma}>\in\overline{F^2}$, 当且仅当 $<a_2,\ a_3>\in R$.

由于 $a_2\neq a_3$, 故 $<a_2,\ a_3>\notin R$, 从而 $I\not\models_{\sigma}F^2(x_2,\ x_3)$.

(3) $I\models_{\sigma}F^2(x_1,\ x_2)\rightarrow F^2(x_2,\ x_3)$ 当且仅当 $I\not\models_{\sigma}F^2(x_1,\ x_2)$ 或 $I\models_{\sigma}F^2(x_2,\ x_3)$.

但由 (1)(2) 知： $I\not\models_{\sigma}F^2(x_1,\ x_2)\rightarrow F^2(x_2,\ x_3)$.

(4) $I\models_{\sigma}\forall x_1F^2(x_1,\ x_2)$

当且仅当：任意 $a\in D$, $I\models_{\sigma(x_1/a)}F^2(x_1,\ x_2)$.

当且仅当：任意 $a\in D$, $<x_1^{\sigma(x_1/a)},\ x_2^{\sigma(x_1/a)}>\in\overline{F^2}$.

当且仅当：任意 $a\in D$, $<a,\ a_2>\in R$.

但 $a_3\in D$, $<a_3,\ a_2>\notin R$. 从而 $I\not\models_{\sigma}\forall x_1F^2(x_1,\ x_2)$.

(5) $I \models_{\sigma} \forall x_1 \exists x_2 F^2(x_1,\ x_2)$

当且仅当：任意 $a \in D,\ I \models_{\sigma(x_1/a)} \exists x_2 F^2(x_1,\ x_2)$.

当且仅当：任意 $a \in D$, 存在 $b \in D$, 使得：

$$I \models_{\sigma(x_1/a)(x_2/b)} F^2(x_1,\ x_2).$$

当且仅当：任意 $a \in D$, 存在 $b \in D$, 使得： $< a,\ b > \in R$.

最后一个条件是成立的，因为只要取 $b = a$ 即可.

故 $I \models_{\sigma} \forall x_1 \exists x_2 F^2(x_1,\ x_2)$.

例 3.22

$\mathcal{L}$ 与 I_1 如例 3.20, σ 为 $\mathcal{L}$ 在 I_1 中的任一个指派．问 σ 在 I_1 中是否满足下面的公式 β:

$$\forall x_1 \forall x_2 ((\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2) \wedge \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)) \rightarrow F^2(x_1,\ x_2))$$

答: $I_1 \models_{\sigma} \beta$

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1 \in N$,

$$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)} \forall x_2 ((\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2) \wedge \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)) \rightarrow F^2(x_1,\ x_2)).$$

$\Leftrightarrow$ 对任意的 $m_1 \in N,\ m_2 \in N$,

$$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)} (\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2) \wedge \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)) \rightarrow F^2(x_1,\ x_2).$$

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in N$,

若 $I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)} \exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2) \wedge \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)$,

则 $I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in N$,

若 $I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} \exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2)$,

且 $I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)$,

则 $I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in N$,

若存在 $m_3 \in N$ 使得

$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)(x_3/m_3)}} F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2)$,

且存在 $m_4 \in N$ 使得

$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)(x_4/m_4)}} F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)$,

则 $I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in N$,

若存在 $m_3 \in N$ 使得 $m_1 \cdot m_3 = m_2$,

且存在 $m_4 \in N$ 使得 $m_2 \cdot m_4 = m_1$,

则 $m_1 = m_2$.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in N$, 若 $m_1|m_2$, 且 $m_2|m_1$, 则 $m_1 = m_2$.

从而 $I_1 \models_{\overline{\sigma}} \beta$.

类似地, 对 $\mathcal{L}$ 在 I_2 中的任一个指派 σ,

$I_2 \models_{\overline{\sigma}} \beta \Leftrightarrow$ 对任意 $m_1,\ m_2 \in Q$,

若存在 $m_3 \in Q$ 使得 $m_1 \cdot m_3 = m_2$,

且存在 $m_4 \in Q$ 使得 $m_2 \cdot m_4 = m_1$,

则 $m_1 = m_2$.

从而 $I_2 \not\models_{\overline{\sigma}} \beta$

定理 3.13

设 σ_1，σ_2 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在其某个解释 I 中的两个指派， $t(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的一个项，其中： $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的个体变元符号，$t(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$ 中出现的个体变元符号都在 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 中，若对任意 i： $1 \leq i \leq n$，$\sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i)$, 则 $t^{\sigma_1} = t^{\sigma_2}$.

证：对 t 的复杂性归纳证明，即对 t 中所含的函数变元符号的个数 d 进行归纳证明.

(1) 当 $d = 0$ 时， t 为个体变元符号或个体常元符号.

(1.1) 若 t 为个体变元符号，则 t 必为 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 中的某一个，不妨设 $t = v_i$ (某 i： $1 \leq i \leq n$), 则：

$$t^{\sigma_1} = v_i^{\sigma_1} = \sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i) = v_i^{\sigma_2} = t^{\sigma_2}$$

(1.2) 若 t 为个体变元符号 c 时，则： $t^{\sigma_1} = c^{\sigma_1} = \overline{c} = c^{\sigma_2} = t^{\sigma_2}$.

(2) 假设 $d < l$ 时命题成立，考察 $d = l$ 时情形 $(l > 0)$.

设 t 中含有 l 个函数变元符号， $t = f^m(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m)$, 其中： f^m 是 $\mathcal{L}$ 中的一个 m 元函数变元符号， $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的项，由归纳假设得： $t_1^{\sigma_1} = t_1^{\sigma_2}$， $t_2^{\sigma_1} = t_2^{\sigma_2}$， $\cdots$， $t_m^{\sigma_1} = t_m^{\sigma_2}$, 从而 $t^{\sigma_1} = \overline{f^m}(t_1^{\sigma_1},\ t_2^{\sigma_1},\ \cdots,\ t_m^{\sigma_1}) = \overline{f^m}(t_1^{\sigma_2},\ t_2^{\sigma_2},\ \cdots,\ t_m^{\sigma_2}) = t^{\sigma_2}$.

归纳证完，命题成立.

定理 3.13 说明：项 $t(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$ 在指派 σ 下的值 t^{σ} 只与 σ 对 t 中出现的个体变元符号 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 指派的值有关，与 σ 对其它个体变元符号指派的值无关.

$\boxed{\textbf{定理 3.14}}$

设 σ_1, σ_2 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在其某个解释 I 中的两个指派, $\alpha(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的一个公式, 其中: $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的个体变元符号, $\alpha(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$ 的自由变元符号都在 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ 中, 若对任意 i: $1 \le i \le n$, $\sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i)$, 则 $I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha$

证: 对公式 α 中所含的联结词与量词的个数 d 进行归纳证明.

(1) 当 $d = 0$ 时, α 为原子公式, 设 α 为 $F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$, 其中: F^n 为 $\mathcal{L}$ 的一个 n 元谓词变元符号, $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的项. 由于 α 中没有量词, 则在 t_i 中出现的每个个体变元符号都是 α 的自由变元 $(1 \le i \le n)$, 从而在 t_i 中出现的每个个体变元符号在 σ_1 与 σ_2 下的指派的值相等, 由定理 3.13 知: 对任意 i: $1 \le i \le n$, $t_i^{\sigma_1} = t_i^{\sigma_2}$. 从而 $I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_1} F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$,

当且仅当 $< t_1^{\sigma_1},\ t_2^{\sigma_1},\ \cdots,\ t_n^{\sigma_1} > \in \overline{F^n}$,

当且仅当 $< t_1^{\sigma_2},\ t_2^{\sigma_2},\ \cdots,\ t_n^{\sigma_2} > \in \overline{F^n}$,

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$,

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha$.

(2) 假设命题对所有满足 $d < l$ 的 d 成立, 考察 $d = l$ 时情形 $(l \ge 1)$.

(2.1) 当 α 为 $(\neg \beta)$ 时, 由归纳假设知: $I \models_{\sigma_1} \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \beta$. 从而 $I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_1} \neg \beta$ 当且仅当 $I \not\models_{\sigma_1} \beta$

当且仅当 $I \not\models_{\sigma_2} \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \neg \beta$

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha$.

(2.2) 当 α 为 $(\alpha_1 \to \alpha_2)$ 时，由归纳假设知：

$I \models_{\sigma_1} \alpha_1$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha_1$，$I \models_{\sigma_1} \alpha_2$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha_2$.

从而 $I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_1} \alpha_1 \to \alpha_2$

当且仅当 $I \not\models_{\sigma_1} \alpha_1$ 或 $I \models_{\sigma_1} \alpha_2$

当且仅当 $I \not\models_{\sigma_2} \alpha_1$ 或 $I \models_{\sigma_2} \alpha_2$

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha_1 \to \alpha_2$

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha$.

(2.3) 当 α 为 $(\forall v_0)\beta$ 时，其中 v_0 为 $\mathcal{L}$ 的一个个体变元符号．由于 α 的自由变元符号都在 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 中，故 β 的自由变元符号都在 v_0，v_1，v_2，$\cdots$，v_n 中.

注意到：$\sigma_1(v_0/a)(v_i) = \sigma_2(v_0/a)(v_i)$ (对任意的 i：$0 \leq i \leq n$).

由归纳假设得：$I \models_{\sigma_1(v_0/a)} \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_2(v_0/a)} \beta$,

从而 $I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma_1} \forall v_0\beta$.

当且仅当：对任意 $a \in D$，$I \models_{\sigma_1(v_0/a)} \beta$.

当且仅当：对任意 $a \in D$，$I \models_{\sigma_2(v_0/a)} \beta$.

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \forall v_0\beta$.

当且仅当 $I \models_{\sigma_2} \alpha$.

归纳证完，命题成立.

定理 3.14 是说：对公式 $\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 来说，“$I \models_{\sigma} \alpha$”成立与否只与 σ 对 α 的自由变元 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 指派的值有关，与 σ 对其它个体变元符号指派的值无关,

$\boxed{\text{替换定理}}$

$\boxed{\text{引理}}$

设 s, x_i 和 t 分别是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的项、个体变元符号和项. s' 是将 s 中所有 x_i 换为 t 所得的项. σ 为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在其某个解释 I 中的一个指派, $\sigma' = \sigma(x_i/t^\sigma)$. 则 $s^{\sigma'} = (s')^\sigma$.

$$
\begin{array}{llccccccl}
s^{\sigma'}: & & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow & & \\
s: & (& \cdots & x_i & \cdots & \cdots & x_i & \cdots &) \\
s': & (& \cdots & t & \cdots & \cdots & t & \cdots &) \\
 & & & \uparrow & & & \uparrow & & \\
(s')^\sigma: & & \cdots & t^\sigma & \cdots & \cdots & t^\sigma & \cdots &
\end{array}
$$

证：对 s 的复杂性归纳证明： $s^{\sigma'} = (s')^\sigma$ $\quad (*)$

(1) 当 s 为个体变元符号时.

(1.1) 若 s 为 x_i, 则 s' 为 t, 从而 $s^{\sigma'} = \sigma'(x_i) = t^\sigma = (s')^\sigma$.

(1.2) 若 s 为个体变元符号 x_j $(j \neq i)$, 则 s' 也为 x_j, 从而 $s^{\sigma'} = \sigma'(x_j) = \sigma(x_j) = (s')^\sigma$.

(1.3) 若 s 为个体变常元符号 c, 则 s' 也为 c, 从而 $s^{\sigma'} = \overline{c} = (s')^\sigma$.

(2) 若 s 是形如 $f^m(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_m)$ 的项，其中： f^m 是 $\mathcal{L}$ 的一个 m 元函数变元符号， s_1，s_2，$\cdots$，s_m 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中项．以 s'_j 记：将 s_j 中所有 x_i 换为 t 得到的项 (任 j : $1 \leq j \leq m$). 则： $s' = f^m(s'_1,\ s'_2,\ \cdots,\ s'_m)$. 由归纳假设知： $s_j^{\sigma'} = (s'_j)^\sigma$ $(1 \leq j \leq m)$, 则： $s^{\sigma'} = \overline{f^m}(s_1^{\sigma'},\ s_2^{\sigma'},\ \cdots,\ s_m^{\sigma'}) = \overline{f^m}((s'_1)^\sigma,\ (s'_2)^\sigma,\ \cdots,\ (s'_m)^\sigma) = (s')^\sigma$.

归纳证毕， $(*)$ 成立.

$\boxed{\textbf{定理 3.15}}$

设 α, x_i 和 t 分别是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的公式、个体变元符号和项， t 对 x_i 在 α 中自由． σ 为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在其某个解释 I 中的一个指派，$\sigma' = \sigma(x_i/t^\sigma)$, $\alpha' = \alpha(x_i/t)$. 则 $I \models_{\sigma} \alpha'$ 当且仅当 $I \models_{\sigma'} \alpha$.

$$
\begin{array}{rccccccc}
I \models_{\sigma'} \alpha : & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & (\text{无关}) & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle(\text{自由})} & & \downarrow{\scriptstyle(\text{约束})} & & \downarrow{\scriptstyle(\text{自由})} & \\
\alpha : & (\cdots & x_i & \cdots & x_i & \cdots & x_i & \cdots) \\
\alpha' : & (\cdots & t & \cdots & x_i & \cdots & t & \cdots) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
I \models_{\sigma} \alpha' : & \cdots & t^\sigma & \cdots & (\text{无关}) & \cdots & t^\sigma & \cdots
\end{array}
$$

证：下对 α 归纳证明：对 $\mathcal{L}$ 在 I 中的任意指派 σ,

$$I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t) \text{ 当且仅当 } I \models_{\sigma'} \alpha. \tag{**}$$

(1) 当 α 是原子公式 $F^n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 时， 以 s'_j 记将 s_j 中所有 x_i 换为 t 得到的项 (任 $j : 1 \leq j \leq n$). 则 $\alpha(x_i/t) = F^n(s'_1, s'_2, \cdots, s'_n)$. 由 $(*)$ 知 $s_j^{\sigma'} = (s'_j)^\sigma$ (任 $j : 1 \leq j \leq n$). 从而 $I \models_{\sigma'} \alpha \Leftrightarrow <s_1^{\sigma'}, s_2^{\sigma'}, \cdots, s_n^{\sigma'}> \in \overline{F^n} \Leftrightarrow <(s'_1)^\sigma, (s'_2)^\sigma, \cdots, (s'_n)^\sigma> \in \overline{F^n} \Leftrightarrow I \models_{\sigma} F^n(s'_1, s'_2, \cdots, s'_n) \Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t)$.

(2) 当 α 为 $(\neg\beta)$ 时， $\alpha(x_i/t)$ 为 $(\neg\beta)(x_i/t)$, 即为 $\neg(\beta(x_i/t))$. 由归纳假设知 $I \models_{\sigma'} \beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \beta(x_i/t)$. 从而 $I \not\models_{\sigma'} \beta$ 当且仅当 $I \not\models_{\sigma} \beta(x_i/t)$, 即 $I \models_{\sigma'} \neg\beta$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \neg\beta(x_i/t)$, 故 $I \models_{\sigma'} \alpha$ 当且仅当 $I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t)$.

(3) 当 α 为 $\alpha_1 \to \alpha_2$ 时， $\alpha(x_i/t)$ 为 $\alpha_1(x_i/t) \to \alpha_2(x_i/t)$. 对 α_1 和 α_2 使用归纳假设易证 $(**)$ 成立.

(4) 当 α 为 $(\forall x_j)\beta$ 时.

(4.1) 若 $i=j$, 则：α 中所有 x_i 都是约束出现, 从而 $\alpha(x_i/t)=\alpha$. 由于 σ 与 σ' 对不是 x_i 的个体变元符号指派的值相同，由定理 3.14 知 $I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t) \Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha \Leftrightarrow I \models_{\sigma'} \alpha$

(4.2) 若 $i\neq j$, 则： $\alpha(x_i/t)$ 为 $(\forall x_j)\beta(x_i/t)$. 由于 t 对 x_i 在 α 中自由，故 x_i 不在 α 中自由出现或者 x_j 不在 t 中出现.

(4.2.1) 若 x_i 不在 α 中自由出现，仿 (4.1) 可证 $(**)$ 成立.

(4.2.2) 若 x_j 不在 t 中出现，由定理 3.13 得：对任意 $a\in D$, $t^{\sigma(x_j/a)}=t^{\sigma}$. 从而

$I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t)$

当且仅当 $I \models_{\sigma} (\forall x_j)\beta(x_i/t)$,

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma(x_j/a)} \beta(x_i/t)$.

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma''} \beta(x_i/t)$, $\qquad \sigma''=\sigma(x_j/a)$

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma''(x_i/t^{\sigma''})} \beta$, $\qquad$ (归纳假设)

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma''(x_i/t^{\sigma})} \beta$,

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma(x_j/a)(x_i/t^{\sigma})} \beta$.

当且仅当：对任意 $a\in D$, $I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})(x_j/a)} \beta$,
$(\sigma(x_j/a)(x_i/t^{\sigma})=\sigma(x_i/t^{\sigma})(x_j/a))$

当且仅当 $I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})} (\forall x_j)\beta$,

当且仅当 $I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})} \alpha$.

归纳证完，$(**)$ 成立. 证毕.

$\boxed{\textbf{真与假}}$

定义 3.20 设 α 为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的一个公式， I 为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的一个解释，

- 若对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的每个指派 σ 都有 $I \models_{\sigma} \alpha$, 则称 α 在 I 中真，记为 $I \models \alpha$.
- 若对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的每个指派 σ 都有 $I \not\models_{\sigma} \alpha$, 则称 α 在 I 中假.

以 $I \not\models \alpha$ 表示 α 在 I 中不真. 注意 $I \not\models \alpha$ 与 α 在 I 中假的区别.

注：$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中可能存在公式 α, α 在 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的某个解释中既不真也不假.

$\boxed{\textbf{定理 3.16}}$

设 α, β 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的公式， I 是 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的解释，则

(1) α 在 I 中真 (假)$\Leftrightarrow \neg\alpha$ 在 I 中假 (真) $\Leftrightarrow \neg\neg\alpha$ 在 I 中真 (假).

(2) $\alpha\rightarrow\beta$ 在 I 中假 $\Leftrightarrow$ α 在 I 中真且 β 在 I 中假.

问：“ $\alpha\rightarrow\beta$ 在 I 中真 $\Leftrightarrow$ α 在 I 中假或 β 在 I 中真” 成立与否？

$\boxed{\textbf{定理 3.17}}$

若 $I \models \alpha$, 且 $I \models \alpha\rightarrow\beta$, 则 $I \models \beta$.

$\boxed{\textbf{定理 3.18}}$

$I \models \alpha$ 当且仅当 $I \models (\forall x_i)\alpha$.

证：($\Rightarrow$) 设 $I \models \alpha$. 要证 $I \models (\forall x_i)\alpha$, 只要证：对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的任一个指派 σ, 任意 $a \in D$, $I \models_{\overline{\sigma(x_i/a)}} \alpha$. 注意 $I \models \alpha$ 即可.

($\Leftarrow$) 设 $I \models \forall x_i\alpha$, 下证 $I \models \alpha$. 对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的任一个指派 σ, 因 $I \models_{\sigma} (\forall x_i)\alpha$, 故对任意 $a \in D$, $I \models_{\overline{\sigma(x_i/a)}} \alpha$. 特别地，取 $a_0 = \sigma(x_i) \in D$, 则 $I \models_{\overline{\sigma(x_i/a_0)}} \alpha$. 而 $\sigma(x_i/a_0) = \sigma$, 故 $I \models_{\sigma} \alpha$.

$\boxed{\textbf{定义 3.21}}$

设 α 为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的一个公式.

(1) 称 α 是永真式，若 α 在 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的任一个解释中都为真，记为 $\models \alpha$;

(2) 称 α 为矛盾式或永假式，若 α 在 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的任一解释中都为假.

易证：

(1) $\models \alpha$ 当且仅当：对任一解释 I 及任一指派 σ，$I \models_{\sigma} \alpha$.

(2) α 是永假式当且仅当：对任一解释 I 中及任一指派 σ，$I \not\models_{\sigma} \alpha$.

$\boxed{\textbf{定理 3.20}}$

对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的任意公式 α，β.

(1) α 永真 (假) $\Longleftrightarrow \neg\alpha$ 永假 (真);

(2) $\alpha \to \beta$ 永假 $\Longleftrightarrow \alpha$ 永真且 β 永假;

(3) 若 $\models \alpha$ 且 $\models \alpha \to \beta$, 则 $\models \beta$;

(4) $\models \alpha \Longleftrightarrow \models (\forall x_i)\alpha$

$\boxed{\textbf{定义 3.9}}$

设 α 为 $\mathbf{N}$ 中公式, 将在 α 中出现的所有命题变元符号 p_0，p_1，$\cdots$，p_n 同时分别换为 $\mathcal{L}$ 的公式 α_0，α_1，α_2，$\cdots$，α_n, 得到的 $\mathcal{L}$ 中公式 β 称为 α 在 $\mathcal{L}$ 中的一个代入实例.

$\boxed{\textbf{定理 3.21}}$

若 α' 是 $\mathbf{P}$ 中的一个重言式，则 α' 在 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的任一个代入实例 α 是永真式.

证：设 α' 中出现的命题变元符号都在 p_0，p_1，p_2，$\cdots$，p_k 中，α 是将 α' 中所有 p_i 都替换为 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中公式 α_i 得到的公式 $(0 \le i \le k)$. 要证 α 是永真式，只要证：对 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 的任一个解释 I 及 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 在 I 中的任一个指派 σ, $I \models_{\sigma} \alpha$, 为此构造 $\mathbf{P}$ 的一个指派 v 如下：

$$v:\ \{p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_n,\cdots\} \longrightarrow \{0,\ 1\}$$

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{若 } 0 \le i \le k \text{ 且 } I \models_{\sigma} \alpha_i \\ 0 & \text{若 } 0 \le i \le k \text{ 且 } I \not\models_{\sigma} \alpha_i \\ 0 & i > k \end{cases}$$

以下对 α' 的复杂性归纳证明： $I \models_{\sigma} \alpha$ 当且仅当 $v(\alpha') = 1$ $\qquad (*)$

(1) 当 α' 为命题变元符号 p_i (某 $i:\ 0 \le i \le k$) 时，则 α 为 α_i, 从而 $v(\alpha') = 1 \Longleftrightarrow v(p_i) = 1 \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha_i \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha$.

(2) 当 α' 是 $\neg\beta'$ 时，设 β 为将 β' 中 p_0，p_1，p_2，$\cdots$，p_k 分别替换为 α_0，α_1，α_2，$\cdots$，α_k 得到的 $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ 中的公式，则 α 为 $\neg\beta$. 由归纳假设知： $I \models_{\sigma} \beta$ 当且仅当 $v(\beta') = 1$. 从而 $I \models_{\sigma} \alpha \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \neg\beta \Longleftrightarrow I \not\models_{\sigma} \beta \Longleftrightarrow v(\beta') = 0 \Longleftrightarrow v(\neg\beta') = 1 \Longleftrightarrow v(\alpha') = 1$.

(3) 当 α' 为 $\alpha'_1 \to \alpha'_2$ 时，仿 (2) 可证.

归纳证完，$(*)$ 成立.

从而，由于 α' 为 $\mathbf{P}$ 的重言式，故 $v(\alpha') = 1$, 所以， $I \models_{\sigma} \alpha$.